بنام خدا

جزوه ریاضیات گسسته

(دوازدهم ریاضی)

تهیه و تنظیم از :
امیر حسین مطلّبی دبیر ریاضی دبیرستان نمونه دولتی استاد شهریار ناحیه ۳ تبریز

❋ هزینه استفاده از این جزوه صلواتی بر محمّد و آل محمّد است ❋

التماس دعا

فصل ۱ : آشنایی با نظریه اعداد

درس ۱ : استدلال ریاضی

اثبات مستقیم : اثبات هایی که در آنها بطور مستقیم از فرض شروع کنیم و به حکم برسیم اثبات های مستقیم نامیده می شوند. مثالهای زیر نمونه هایی از اثبات های مستقیم هستند. (تذکر مهم)

عدد زوج طبیعی $= 2k \quad (k \in \mathbb{N})$

نمایش اعداد زوج صحیح $= 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$

عدد فرد طبیعی $= 2k-1 \quad (k \in \mathbb{N})$

نمایش اعداد فرد صحیح $= 2k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})$

---

۱) ثابت کنید اگر ۳ واحد به سه برابر عددی فرد اضافه کنیم حاصل مضرب ۶ می باشد.

عدد فرد $= x = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$3x+3 = 3(2k+1)+3 = 6k+3+3 = 6k+6 = 6(k+1) = 6k' = \text{مضرب } 6 \quad (k' \in \mathbb{Z})$$

---

۲) ثابت کنید مربع هر عدد صحیح فرد بصورت $(8q+1)$ است.

عدد فرد $= x = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = \underbrace{4k(k+1)}_{2q}+1 = 4(2q)+1 = 8q+1$$

ضرب دو عدد متوالی $k(k+1)$ عددی زوج مانند $2q$ است.

---

۳) ثابت کنید حاصلضرب دو عدد فرد همواره عددی فرد است.

$x = 2k+1$

$y = 2k'+1$

$(k, k' \in \mathbb{Z})$

$$x \cdot y = (2k+1)(2k'+1) = 4kk'+2k+2k'+1 = 2(\underbrace{2kk'+k+k'}_{k''})+1 = 2k''+1 = \text{عددی فرد}$$

---

۴) ثابت کنید مجموع دو عدد فرد همواره زوج است.

$x = 2k+1$

$y = 2k'+1$

$(k, k' \in \mathbb{Z})$

$$x+y = 2k+1+2k'+1 = 2k+2k'+2 = 2(\underbrace{k+k'+1}_{k''}) = 2k'' = \text{زوج}$$

۵) ثابت کنید مکعب هر عدد فرد منهای یک، عددی زوج است.

$x = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$ = عدد فرد مورد نظر

$x^3 - 1 = (2k+1)^3 - 1 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + \cancel{1} - \cancel{1} = 2(\underbrace{4k^3 + 6k^2 + 3k}_{k'}) = 2k'$ = زوج

۶) ثابت کنید حاصلضرب سه عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۲۴ است.

$x = 2k$

$y = 2k + 2$

$z = 2k + 4$

$(k \in \mathbb{Z})$

$x \cdot y \cdot z = 2k(2k+2)(2k+4) = 2k \times 2(k+1) \times 2(k+2)$

$= 8\underbrace{k(k+1)(k+2)}_{3q} = 8(3q) = 24q$

ضرب سه عدد متوالی $k(k+1)(k+2)$ مضرب ۳ است.

۷) ثابت کنید اگر k حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $4k+1$ مربع کامل است (هماهنگ دیماه ۹۷)

$k = n(n+1) = n^2 + n \quad (n \in \mathbb{N})$

$4k + 1 = 4(n^2 + n) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 =$ مربع کامل

(هماهنگ شهریور ۹۸)

درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید (۰/۵ نمره)

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است ✓

ب) برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است ✗ $(n = 4)$

مثال نقض:

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه گیری کلی غلط است مثال نقض می گویند.

تمرین: عبارتهای زیر را در نظر بگیرید. دلیل درستی یا نادرستی هر کدام را بنویسید و برای احکام نادرست یک مثال نقض بیاورید.

الف) اگر x گنگ و y گنگ باشد آنگاه xy گنگ است.

$x = \sqrt{2}$

$y = \sqrt{8}$

نادرست زیرا: $xy = \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

ب) برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 > 0$

نادرست زیرا: $x = 0 \Rightarrow x^2 = 0$

ج) اعداد اول همگی فرد هستند

نادرست زیرا ۲ اول است و فرد نیست

د) اگر $x > 1$ آنگاه داریم: $4 - x^2 < 3$

درست زیرا: $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow -x^2 < -1 \Rightarrow 4 - x^2 < -1 + 4 \Rightarrow 4 - x^2 < 3$

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها (روش اشباع):

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم این نوع اثبات را اثبات به روش اشباع می گویند

مثال ۱: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است

حل: دو حالت را در نظر می گیریم:

الف) n زوج است. $n = 2k \quad (k \in N)$

$n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2k' + 1 =$ فرد

ب) n فرد است. $n = 2k - 1 \quad (k \in N)$

$n^2 - 5n + 7 = (2k-1)^2 - 5(2k-1) + 7 = 4k^2 - 14k + 13 = 2(2k^2 - 7k + 6) + 1$

$= 2k' + 1 =$ فرد

مثال ۲: ثابت کنید حاصلضرب ۳ عدد طبیعی متوالی همواره بر ۳ بخشپذیر است.

حل: سه عدد طبیعی متوالی را می توانیم بصورت n و $n+1$ و $n+2$ نشان دهیم باید ثابت کنیم: $n(n+1)(n+2) = 3q$

اگر n را بر ۳ تقسیم کنیم با قیمانده‌ای برابر ۰ یا ۱ یا ۲ خواهیم داشت پس ۳ حالت داریم:

الف) $n=3k \Rightarrow n(n+1)(n+2)=3\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}_{q}=3q=$ مضرب ۳

ب) $n=3k+1 \Rightarrow n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+1+1)(3k+1+2)=(3k+1)(3k+2)(3k+3)$

$=(3k+1)(3k+2)3(k+1)=3\underbrace{(3k+1)(3k+2)(k+1)}_{q}=3q=$ مضرب ۳

ج) $n=3k+2 \Rightarrow n(n+1)(n+2)=(3k+2)(3k+2+1)(3k+2+2)$

$=(3k+2)(3k+3)(3k+4)=(3k+2)(3)(k+1)(3k+4)=3\underbrace{(3k+2)(k+1)(3k+4)}_{q}$

$=3q=$ مضرب ۳

اثبات غیرمستقیم (برهان خُلف):

گاهی برای اثبات یک گزاره، فرض می کنیم حکم نادرست است و به یک نتیجه غیرممکن یا یک نتیجه متضاد با فرض می رسیم پس فرض نادرست بودن حکم باطل بوده و درستی حکم ثابت می شود این نوع اثبات را اثبات به روش برهان خلف یا غیرمستقیم می گوییم.

مثال ۱: با استدلال برهان خلف ثابت کنید برای هر عدد صحیح n، اگر n^2 زوج باشد n نیز زوج است.

اثبات: فرض کنیم n زوج نباشد (فرض خُلف) پس فرد است در اینصورت

$n=2k+1$

$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1=$ فرد

و این تناقض است زیرا طبق فرض n^2 زوج است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مثال ۲: با استدلال برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات: فرض کنیم $\sqrt{2}$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس گویا است و بصورت کسر ساده نشدنی مانند $\frac{p}{q}$ است (p و q نسبت بهم اولند)

$\sqrt{2}=\frac{p}{q} \Rightarrow 2=\frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2=2q^2 \Rightarrow$ زوج $p^2 \Rightarrow$ زوج $p \Rightarrow p=2k \Rightarrow p^2=4k^2 \Rightarrow$

$2q^2=4k^2 \Rightarrow q^2=2k^2 \Rightarrow$ زوج $q^2 \Rightarrow$ زوج است $q \Rightarrow$ p و q هردو زوج $\Rightarrow$ $\frac{p}{q}$ کسر ساده شدنی است و این خلاف فرض است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است

مثال ۳ : ثابت کنید $2+\sqrt{3}$ عددی گنگ است. (با استدلال برهان خلف)

اثبات : فرض کنیم $2+\sqrt{3}$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس برابر کسر ساده نشدنی مانند $\frac{p}{q}$ است.

$$2+\sqrt{3}=\frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{3}=\underbrace{\frac{p}{q}}_{\text{گویا}}-\underbrace{2}_{\text{گویا}} \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{m}{n} \quad (\text{m و n نسبت به هم اول})$$

$$\Rightarrow 3=\frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2=3n^2 \Rightarrow m^2 \text{ مضرب } 3 \Rightarrow m \text{ مضرب } 3 \Rightarrow m=3k$$

$$\Rightarrow m^2=9k^2 \Rightarrow 3n^2=9k^2 \Rightarrow n^2=3k^2 \Rightarrow n \text{ مضرب } 3 \Rightarrow$$

m و n هردو مضرب ۳ هستند و $\frac{m}{n}$ کسر ساده شدنی است و این خلاف فرض است پس حکم درست و فرض خلف باطل است.

(خرداد ۸۸)

مثال ۴ : با استدلال برهان خلف ثابت کنید اگر $\sqrt{3}$ عددی گنگ باشد $\sqrt{\sqrt{3}+2}$ نیز عددی گنگ است (۱ نمره)

اثبات : فرض کنیم $\sqrt{\sqrt{3}+2}$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس گویا است

$$\sqrt{\sqrt{3}+2}=\frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{3}+2=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{3}}_{\text{گنگ}}=\underbrace{\frac{a^2}{b^2}-2}_{\text{گویا}} \Rightarrow \text{گویا} = \text{گنگ}$$

و این تناقض است پس حکم اولیه درست است.

(خرداد ۸۹)

مثال ۵ : b عددی گویا و $\sqrt{5}$ عددی گنگ است. با استدلال برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{5}-b$ هم عددی گنگ می باشد.

اثبات : فرض کنیم $\sqrt{5}-b$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس گویا است.

$$\sqrt{5}-b=\frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{5}=\frac{p}{q}+b \Rightarrow \text{گویا} = \text{گنگ}$$

و این تناقض است پس حکم اولیه درست است.

(هماهنگ دی ماه ۹۷)

اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد ثابت کنید $\alpha+2\beta$ گنگ است (۱/۲۵ نمره)

اثبات : فرض کنیم $\alpha+2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است از طرفی طبق فرض $\alpha+\beta$ نیز گویا است می دانیم تفاضل دو عدد گویا ، عددی گویا است در نتیجه:

$(\alpha+2\beta)-(\alpha+\beta)=\beta\in\mathbb{Q}$ تناقض است زیرا طبق فرض مسئله β گنگ است $\Rightarrow$ فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

اثبات بازگشتی (گزاره های هم ارز):

گاهی برای اثبات بعضی قضیه ها از حکم استفاده می کنیم و به یک نتیجه منطقی درست می رسیم و برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت پذیر هستند این نوع اثبات را اثبات بازگشتی می گوییم

مثال ۱: اگر $a>0$ ثابت کنید: $a+\frac{1}{a}\geq 2$ (هماهنگ دیماه ۹۸)

$$a+\frac{1}{a}\geq 2 \Leftrightarrow a(a+\frac{1}{a})\geq 2a \Leftrightarrow a^2+1\geq 2a \Leftrightarrow a^2-2a+1\geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0$$

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۲: اگر $a<0$ ثابت کنید: $a+\frac{1}{a}<2$

$$a+\frac{1}{a}<2 \xLeftrightarrow{a<0} a(a+\frac{1}{a})>2a \Leftrightarrow a^2+1>2a \Leftrightarrow a^2-2a+1>0 \Leftrightarrow (a-1)^2>0$$

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۳: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید: $a^2+b^2\geq -4(a+b+2)$

$$a^2+b^2\geq -4(a+b+2) \Leftrightarrow a^2+b^2+4(a+b+2)\geq 0 \Leftrightarrow (a^2+4a+4)+(b^2+4b+4)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+2)^2+(b+2)^2\geq 0$$ همواره درست است

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است

(هماهنگ خرداد ۹۸)

مثال ۴: ثابت کنید به ازای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b:

(میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست) $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$$

همواره درست است

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۵: (هماهنگ دیماه ۹۷): به روش بازگشتی ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

$$x^2+y^2+1 \geq xy+x+y \quad \text{(۱ نمره)}$$

$$x^2+y^2+1 \geq xy+x+y \xLeftrightarrow{\times 2} 2x^2+2y^2+2 \geq 2xy+2x+2y \Longleftrightarrow$$

$$(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(x^2-2xy+y^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2 \geq 0$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ ، $(y-1)^2 \geq 0$ و $(x-y)^2 \geq 0$ همواره درست است

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۶ (هماهنگ شهریور ۹۸): برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ثابت کنید:

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz \quad \text{(۱٫۵ نمره)}$$

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz \xLeftrightarrow{\times 2} 2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2yz+2xz$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)+(y^2+z^2-2yz)+(x^2+z^2-2xz) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2 \geq 0$$

نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است

مثال ۷: برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b نشان دهید:

$$a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$$

$$a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2 \Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2) \geq ab(a+b) \xLeftrightarrow{\div(a+b)}$$

$$a^2-ab+b^2 \geq ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \quad \text{همیشه درست}$$

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۸: برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}} \geq \frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \Leftrightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq 4(\sqrt{ab})$$

$$\Leftrightarrow a+b+2\sqrt{ab} \geq 4\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \quad \text{همیشه درست}$$

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۹ : برای هر سه عدد حقیقی a و b و c ثابت کنید :

$$a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$$

$$a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+3 \geq 2a+2b+2c \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2+c^2+1+1+1-2a-2b-2c \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \geq 0$$ همیشه درست

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است

مثال ۱۰ : برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید : $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geq 4$

$$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geq 4 \Leftrightarrow (a+b)(\frac{a+b}{ab}) \geq 4 \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$ همیشه درست

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

تمرین : با مثال نقض نشان دهید :

الف) مجموع دو عدد گنگ همواره گنگ نیست.

$a = 2+\sqrt{3}$

$b = 2-\sqrt{3}$

$$a+b = 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3} = 4$$

ب) تفاضل دو عدد گنگ همواره گنگ نیست

$a = 5+\sqrt{2}$

$b = 3+\sqrt{2}$

$$a-b = 5+\sqrt{2}-3-\sqrt{2} = 2$$

ج) حاصلضرب دو عدد گنگ همواره گنگ نیست

$a = \sqrt{2}$

$b = \sqrt{8}$

$$a.b = \sqrt{2}\times\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

د) حاصل تقسیم دو عدد گنگ همواره گنگ نیست

$a = \sqrt{27}$

$b = \sqrt{3}$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

★ تمرینات مهم فصل ۱ درس ۱ با پاسخ ★

① هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

$x=2k+1$ $\quad k,k' \in \mathbb{Z}$

$y=2k'+1$

$$\Rightarrow x+y=2k+1+2k'+1=2k+2k'+2=2(\underbrace{k+k'+1}_{k''})=2k'' \quad k''\in\mathbb{Z}$$

زوج است

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y: $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

نادرست

$x=1$

$y=1$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+y}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1}+\sqrt{1}=2\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x+y}\neq\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

ج) حاصلضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخشپذیر است.

چون در سه عدد متوالی حتماً یک عدد زوج داریم پس حاصلضربشان بر ۲ بخشپذیر است و چون از سه عدد متوالی حتماً یکی مضرب ۳ می باشد پس حاصلضربشان بر ۳ بخشپذیر است عددی که بر ۲ و ۳ بخشپذیر باشد بر ۶ بخشپذیر است

د) مجموع هر دو عدد گویا عددی گویا است.

$x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{c}{d}$ $\quad a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $b\neq 0$, $d\neq 0$ $\quad x+y=\frac{ad+bc}{bd}$

چون $ad+bc\in\mathbb{Z}$ و $bd\in\mathbb{Z}$ و $bd\neq 0$ پس $x+y$ هم عدد گویا است.

---

② اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد ثابت کنید a^2+b^2 زوج است.

اثبات: چون ab عددی فرد است پس a و b هر دو عدد فرد هستند

$a=2k+1$

$b=2k'+1$

$$\Rightarrow a^2+b^2=(2k+1)^2+(2k'+1)^2=4k^2+4k'^2+4k+4k'+2=2(\underbrace{2k^2+2k'^2+2k+2k'+1}_{k''})=2k''$$

عددی زوج است

---

③ درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید:

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

اثبات: فرض کنیم $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس $\frac{1}{x}$ عدد گویا است می دانیم وارون هر عدد گویای مخالف صفر، عددی گویا است پس $\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$ هم عددی گویا است یعنی x گویا است و این خلاف فرض است.

ب) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی تابع g در $x=a$ ناپیوسته باشد ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

اثبات: فرض کنیم تابع $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته نباشد پس پیوسته است
می دانیم تفاضل دو تابع پیوسته در $x=a$، تابعی پیوسته است (حسابان ۱)
پس تابع $f+g-f$ هم در $x=a$ پیوسته است یعنی تابع g در $x=a$ پیوسته است و این خلاف فرض است.

---

۴) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم ارزند؟

n زوج باشد $\Rightarrow n=2k \Rightarrow n^2=4k^2=2(2k^2)=2k' \Rightarrow$ n^2 زوج است

حال اگر n^2 زوج باشد ثابت می کنیم n هم زوج است:
فرض کنیم n زوج نباشد (فرض خلف) پس n فرد است

$n=2k+1 \Rightarrow n^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1 \Rightarrow$ n^2 فرد

و این خلاف فرض است پس n هم زوج است پس: n^2 زوج $\Longleftrightarrow$ n زوج

---

۵) به روش بازگشتی ثابت کنید: (x و y دو عدد حقیقی مخالف صفر) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy}\geq 2 \Leftrightarrow x^2+y^2\geq 2xy \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$$

---

۶) عدد حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که: $x^3<x^2$

$x=\frac{1}{2} \Rightarrow x^3=\frac{1}{8}$ و $x^2=\frac{1}{4}$ $\quad x^3<x^2$

---

۷) اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ گنگ هستند

می دانیم: $\alpha-\beta=2\alpha-(\alpha+\beta)$

α گنگ پس 2α گنگ است می دانیم تفاضل عدد گنگ 2α و گویای $\alpha+\beta$ عددی گنگ است پس $\alpha-\beta$ گنگ است.
می دانیم $\alpha+2\beta=\alpha+\beta+\beta$ چون β گنگ و $\alpha+\beta$ گویاست پس جمع آنها گنگ است یعنی $\alpha+2\beta$ گنگ است.

---

۸) الف) ثابت کنید مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

$x=2k+1 \Rightarrow x^2=4k^2+4k+1=2(\underbrace{2k^2+2k}_{q})+1=2q+1$ فرد

$x=2k+1 \Rightarrow x^3=8k^3+12k^2+6k+1=2(\underbrace{4k^3+6k^2+3k}_{q})+1=2q+1$ فرد

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است $\bar{x}=\frac{n-2+n-1+n+n+1+n+2}{5}=n$

ج) اگر $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ثابت کنید $a=b=0$

$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{ab} \Rightarrow (a+b)^2=ab \Rightarrow a^2+b^2+ab=0 \Rightarrow 2a^2+2b^2+2ab=0 \Rightarrow (a+b)^2+a^2+b^2=0 \Rightarrow a=b=0$

درس ۲ : بخشپذیری در اعداد صحیح :

عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b\neq 0$ بخشپذیر می گویند هرگاه عدد صحیح q پیدا شود بطوریکه $a=bq$ و آنرا بصورت $b|a$ می نویسند و می خوانند : b عاد می کند a را یا b می شمارد a را یا b شمارنده (مقسوم علیه) a است یا a بر b بخشپذیر است.

مثال)

$-5|35 \Leftrightarrow 35=-5\times 7$ $\qquad$ $7|21 \Leftrightarrow 21=7\times 3$

$4|-12 \Leftrightarrow -12=4\times(-3)$ $\qquad$ $3|0 \Leftrightarrow 0=3\times 0$

$3^4|3^9 \Leftrightarrow 3^9=3^4\times 3^5$ $\qquad$ $a|a \Leftrightarrow a=a\times 1$

مثال) جاهای خالی را پر کنید :

$24=2\times 13 \Rightarrow 2|(24)$ و $(13)|24$ $\qquad$ $a|1 \Rightarrow a=(1)$ یا $a=(-1)$

تذکر مهم ۱ : در سراسر فصل ۱ منظور از عدد ، عدد صحیح است.

تذکر مهم ۲ : اگر عدد a بر عدد b بخشپذیر نباشد یا عدد b عدد a را عاد نکند می نویسیم : $b\nmid a$

ویژگی های رابطه عاد کردن :

ویژگی ۱ : اگر عدد a عدد b را بشمارد آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می شمارد یعنی :

$$a|b \Leftrightarrow a|mb$$

اثبات : $a|b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{\times m} mb=maq \Rightarrow mb=a(mq) \Rightarrow a|mb$

مثال) $4|12 \Rightarrow 4|12\times 2$ و $4|12\times(-3)$ و $4|12\times 5$ و ...

نتیجه : اگر عدد a عدد b را بشمارد آنگاه b^2 و در حالت کلی b^n را می شمارد $(n\in\mathbb{N})$ یعنی :

$$a|b \Rightarrow a|b^2 \ , \ a|b^n \quad (n\in\mathbb{N})$$

اثبات :

$$a|b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{\times b} b^2=baq \Rightarrow b^2=a(bq) \Rightarrow a|b^2$$

$$a|b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{\times b^{n-1}} b^n=b^{n-1}aq \Rightarrow b^n=a(b^{n-1}q) \Rightarrow a|b^n$$

مثال ۱: اگر $a|bc$ آیا می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟

جواب خیر زیرا:

$$۳|۶\times۹ \Rightarrow ۳|۶ \quad , \quad ۳|۹$$

$$۳|۶\times۵ \Rightarrow ۳|۶ \quad , \quad ۳\nmid۵$$

$$۶|۳\times۴ \Rightarrow ۶\nmid۳ \quad , \quad ۶\nmid۴$$

مثال ۲: نشان دهید: $a|b \Leftrightarrow ka|kb$ $(k\in\mathbb{Z})$

$$a|b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{\times k} kb=kaq \Rightarrow ka|kb$$

$$ka|kb \Rightarrow kb=kaq \xrightarrow{\div k} b=aq \Rightarrow a|b$$

مثال ۳: عدد صحیح n را طوری تعیین کنید که $۳n+۷$ بر $۲n-۱$ بخشپذیر باشد:

حل: طبق ویژگی ۱ داریم:

$$\begin{cases} ۲n-۱|۳n+۷ \Rightarrow ۲n-۱|۲(۳n+۷) \Rightarrow ۲n-۱|۶n+۱۴ & ① \\ ۲n-۱|۲n-۱ \Rightarrow ۲n-۱|۳(۲n-۱) \Rightarrow ۲n-۱|۶n-۳ & ② \end{cases}$$

$$①-② \Rightarrow ۲n-۱|۶n+۱۴-(۶n-۳) \Rightarrow ۲n-۱|۱۷ \Rightarrow \begin{cases} ۲n-۱=۱ \Rightarrow \boxed{n=۱} \\ ۲n-۱=-۱ \Rightarrow \boxed{n=۰} \\ ۲n-۱=۱۷ \Rightarrow \boxed{n=۹} \\ ۲n-۱=-۱۷ \Rightarrow \boxed{n=-۸} \end{cases}$$

ویژگی ۲: اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b عدد c را بشمارد آنگاه عدد a عدد c را می‌شمارد: $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$ (خاصیت تعدی)

اثبات:
$$\begin{cases} a|b \Rightarrow b=aq_۱ \\ b|c \Rightarrow c=bq_۲ \end{cases} \Rightarrow c=(aq_۱)q_۲ \Rightarrow c=a(q_۱q_۲) \Rightarrow a|c$$

مثال) با استفاده از خاصیت تعدی در عادکردن نشان دهید: $a|b \Rightarrow a|b^n$

$$\left.\begin{array}{l} a|b \text{ فرض} \\ b|b^n \text{ می‌دانیم} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} a|b^n$$

ویژگی ۳: هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را می‌شمارد:

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b\pm c$$

اثبات: $a|b \Rightarrow b=aq_1$ ، $a|c \Rightarrow c=aq_2$

$$\left.\begin{matrix} a|b \Rightarrow b=aq_1 \\ a|c \Rightarrow c=aq_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b\pm c = a\underbrace{(q_1\pm q_2)}_{q} \Rightarrow a|b\pm c$$

مثال ۱: اگر $a|b+c$ آیا می‌توان همواره نتیجه گرفت که: $a|c$ یا $a|b$

خیر - مثال نقض

$$2|12 \Rightarrow 2|7+5 \Rightarrow 2\nmid 7 \text{ یا } 2\nmid 5$$

(هماهنگ خرداد ۹۹)

مثال ۲: اگر عدد طبیعی a دو عدد $(9k+7)$ و $(7k+6)$ را عاد کند ثابت کنید: $a=1$ یا $a=5$ (۱ نمره)

$$a|9k+7 \Rightarrow a|7(9k+7) \Rightarrow a|63k+49 \quad ①$$

$$a|7k+6 \Rightarrow a|9(7k+6) \Rightarrow a|63k+54 \quad ②$$

$$① \text{ و } ② \Rightarrow a|(63k+54)-(63k+49) \Rightarrow a|5 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \in \mathbb{N} \\ \text{یا} \\ a=5 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(هماهنگ - دی ماه ۹۷): اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است (۱ نمره)

$$a|9k+4 \Rightarrow a|5(9k+4) \Rightarrow a|45k+20 \quad ①$$

$$a|5k+3 \Rightarrow a|9(5k+3) \Rightarrow a|45k+27 \quad ②$$

$$① \text{ و } ② \Rightarrow a|(45k+27)-(45k+20) \Rightarrow a|7 \xrightarrow[a \text{ اول}]{a>1} \boxed{a=7}$$

(هماهنگ - دی ماه ۹۸): اگر عدد طبیعی $a>1$ در دو شرط $a|4k+9$ و $a|6k+14$ صدق کند مقدار a را بیابید. (۱ نمره)

$$a|4k+9 \Rightarrow a|6(4k+9) \Rightarrow a|24k+54 \quad ①$$

$$a|6k+14 \Rightarrow a|4(6k+14) \Rightarrow a|24k+56 \quad ②$$

$$① \text{ و } ② \Rightarrow a|(24k+56)-(24k+54) \Rightarrow a|2 \xrightarrow[a>1]{a\in\mathbb{N}} \boxed{a=2}$$

ویژگی ۴: اگر $a|b$ و $b\neq 0$ در اینصورت: $|a|\leqslant|b|$

اثبات:

$$a|b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{b\neq 0} q\neq 0 \xrightarrow{q\in \mathbb{Z}} |q|\geqslant 1$$

طرفین نامساوی اخیر را در $|a|$ ضرب می کنیم:

$$1\leqslant |q| \Rightarrow |a|\times 1\leqslant |a|\cdot|q| \Rightarrow |a|\leqslant |aq| \xrightarrow{b=aq} |a|\leqslant|b|$$

مثال) ثابت کنید اگر $a|b$ ، $b|a$ آنگاه $a=\pm b$

$$\left.\begin{array}{l} a|b \xrightarrow{\text{ویژگی ۴}} |a|\leqslant|b| \\ b|a \xrightarrow{\text{ویژگی ۴}} |b|\leqslant|a| \end{array}\right\} \Rightarrow |a|=|b| \Rightarrow a=\pm b$$

خواص بخشپذیری (عاد کردن) بطور کلی:

۱) $a|b \Rightarrow -a|b \ , \ a|-b \ , \ -a|-b$

۲) $a|b \Rightarrow a|kb \ , \ ka|kb \quad (k\in \mathbb{Z})$

۳) $a|b \Rightarrow a|b^n \ (n\in \mathbb{N})$ و $a^n|b^n \ (n\in \mathbb{N})$

۴) $a|b \Rightarrow |a|\leqslant|b| \quad (b\neq 0)$

۵) $a|b \Rightarrow a|mb \quad (m\in \mathbb{Z})$

۶) $a|b \ , \ b|a \Rightarrow a=\pm b$

۷) $a|b \ , \ a|c \Rightarrow a|b\pm c$ و $a|mb\pm nc \quad (m,n\in \mathbb{Z})$

۸) $a|b \ , \ b|c \Rightarrow a|c$ (خاصیت تعدّی)

۹) $a|b \ , \ c|d \Rightarrow ac|bd$

۱۰) $a|p \ , \ a\in \mathbb{N} , \ p\in$ اعداد اول $\Rightarrow a=1$ یا $a=p$

۱۱) $\forall k\leqslant n \Rightarrow k|n!$ مثال) $4|10!$ ، $7|10!$ ، $13|15!$

مثال) ثابت کنید اگر $a|b$ آنگاه $a|bc$ $(a,b,c\in \mathbb{Z})$

اثبات:

$$a|b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{\times c} bc=a(cq) \Rightarrow bc=aq' \Rightarrow a|bc$$

مثال ۲): اگر $3a+4b \mid 5a-9b$ ثابت کنید: $3a+4b \mid a-30b$

$$3a+4b \mid 5a-9b \xrightarrow{\times 2} 3a+4b \mid 2(5a-9b) \Rightarrow 3a+4b \mid 10a-18b \quad (1)$$

$$3a+4b \mid 3a+4b \xrightarrow{\times 3} 3a+4b \mid 3(3a+4b) \Rightarrow 3a+4b \mid 9a+12b \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow 3a+4b \mid (10a-18b)-(9a+12b) \Rightarrow 3a+4b \mid a-30b$$

مثال ۳): به ازای چند عدد صحیح n، رابطه $n+1 \mid n^3+3n^2-7$ برقرار است؟

$$n+1 \mid n^3+3n^2-7 \quad (1)$$

$$n+1 \mid n+1 \xrightarrow{\times n^2} n+1 \mid n^2(n+1) \Rightarrow n+1 \mid n^3+n^2 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow n+1 \mid (n^3+3n^2-7)-(n^3+n^2) \Rightarrow n+1 \mid 2n^2-7 \quad (3)$$

$$n+1 \mid n+1 \xrightarrow{\times 2n} n+1 \mid 2n(n+1) \Rightarrow n+1 \mid 2n^2+2n \quad (4)$$

$$(3),(4) \Rightarrow n+1 \mid (2n^2-7)-(2n^2+2n) \Rightarrow n+1 \mid -7-2n \quad (5)$$

$$n+1 \mid n+1 \xrightarrow{\times 2} n+1 \mid 2(n+1) \Rightarrow n+1 \mid 2n+2 \quad (6)$$

$$(5),(6) \Rightarrow n+1 \mid (-7-2n)+(2n+2) \Rightarrow n+1 \mid -5 \Rightarrow \begin{cases} n+1=1 \Rightarrow \boxed{n=0} \\ n+1=-1 \Rightarrow \boxed{n=-2} \\ n+1=5 \Rightarrow \boxed{n=4} \\ n+1=-5 \Rightarrow \boxed{n=-6} \end{cases}$$

چند نکته مهم ریاضی:

نکته ۱: $a-1 \mid a^n-1 \; (n\in N)$

علت (حساب) $\rightarrow (a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+1)=a^n-1$

مثال) $8=9-1 \mid 9^n-1 \; (n\in N)$ $\quad$ $4=5-1 \mid 5^n-1 \; (n\in N)$

نکته ۲: $a-b \mid a^n-b^n \; (n\in N)$

علت $\rightarrow (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})=a^n-b^n$

مثال) $4=7-3 \mid 7^n-3^n$ $\quad$ $7=12-5 \mid 12^n-5^n$

نکته ۳: اگر n و k دو عدد طبیعی و $\frac{n}{k}\in N$ آنگاه: $a^k-b^k \mid a^n-b^n$

مثال) $a^4-b^4 \mid a^{12}-b^{12} \; (\frac{12}{4}\in N)$ $\quad$ (محال) $a^3-b^3 \nmid a^8-b^8 \; (\frac{8}{3}\notin N)$

مثال) همه عددهای دو رقمی را پیدا کنید که: $31 \mid 2^n - 1$

حل: می دانیم: $31 = 2^5 - 1$ پس:

$31 \mid 2^n-1 \Rightarrow 2^5-1 \mid 2^n-1 \Rightarrow \frac{n}{5} \in N \Rightarrow$ n باید مضرب ۵ باشد $\Rightarrow n \in \{10, 15, 20, \dots, 95\}$

نکته ۴: اگر P اول باشد و $a \mid p$ آنگاه: $a = \pm 1$ یا $a = \pm P$

قضیه تقسیم:

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد با تقسیم a بر b، اعداد صحیح و منحصر بفردی مانند q و r وجود دارند بطوریکه:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline - & q \\ r & \end{array} \qquad \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \le r < b \end{cases}$$

a را مقسوم، b را مقسوم علیه، q را خارج قسمت و r را باقیمانده می گویند. باقیمانده هیچگاه منفی نبوده و از مقسوم علیه کوچکتر است

نکته ریاضی: خارج قسمت تقسیم a بر b برابر است با: $q = [\frac{a}{b}]$ جزء صحیح

مثال ۱: خارج قسمت و باقیمانده تقسیم (۴۸-) را بر ۵ بدست آورید.

$$q = \left[\frac{-48}{5}\right] = [-9.6] = -10 \xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{طبق رابطه}} -48 = 5(-10) + 2 \Rightarrow \boxed{r = 2}$$

مثال ۲: باقیمانده تقسیم a بر ۱۵ برابر ۱ است. باقیمانده تقسیم $2a-6$ را بر ۱۵ بدست آورید.

$$a = 15q + 1 \xrightarrow{\times 2} 2a = 15(2q) + 2 \Rightarrow 2a = 15q' + 2 \xrightarrow{-6} 2a - 6 = 15q' + 2 - 6$$

$$\Rightarrow 2a - 6 = 15q' - 4 \xrightarrow[\text{منفی باشد}]{\text{باقیمانده نباید}} 2a - 6 = 15q' - 15 + 11 \Rightarrow 2a - 6 = 15(q' - 1) + 11$$

$$\Rightarrow 2a - 6 = 15q'' + 11 \Rightarrow \boxed{r = 11}$$

مثال ۳: باقیمانده تقسیم اعداد m و n بر ۲۶ به ترتیب ۷ و ۲ است باقیمانده تقسیم $2m+5n$ را بر ۲۶ و ۱۳ پیدا کنید.

$$\left.\begin{array}{l} m=26q+7 \\ n=26q'+2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2m+5n=2(26q+7)+5(26q'+2)=26\underbrace{(2q+5q')}_{q''}+24$$

$$\Rightarrow 2m+5n=26q''+24 \Rightarrow \boxed{r=24}$$

باقیمانده تقسیم بر ۲۶

می‌دانیم باقیمانده باید از مقسوم علیه کوچکتر باشد پس:

$$2m+5n=26q''+24=13(2q'')+13+11=13\underbrace{(2q''+1)}_{K}+11=13K+11$$

$$\Rightarrow \boxed{r=11}$$

باقیمانده تقسیم بر ۱۳

مثال ۴: باقیمانده تقسیم عدد a بر ۷ و ۶ به ترتیب برابر ۴ و ۳ است. باقیمانده تقسیم a بر ۴۲ را بدست آورید.

$$\begin{cases} a=7q+4 \xrightarrow{\times 6} 6a=42q+24 \quad (1) \\ a=6q'+3 \xrightarrow{\times 7} 7a=42q'+21 \quad (2) \end{cases} \qquad (2)-(1) \Rightarrow a=42\underbrace{(q'-q)}_{q''}-3$$

$$\Rightarrow a=42q''-3 \Rightarrow a=42q''-42+39 \Rightarrow a=42\underbrace{(q''-1)}_{K}+39$$

$$\Rightarrow a=42K+39 \Rightarrow \boxed{r=39}$$

مثال ۵: در تقسیم عدد طبیعی a بر عدد ۱۷۷، باقیمانده تقسیم سه برابر مربع خارج قسمت است. بزرگترین مقدار a را بدست آورید.

$$\left.\begin{array}{l} a=177q+r \\ r=3q^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0\leq r<177 \Rightarrow 0\leq 3q^2<177 \Rightarrow 0\leq q^2<59$$

در رابطه فوق بیشترین مقدار q برابر ۷ است.

$$q=7 \Rightarrow a=177(7)+3(7)^2=1386$$ (بیشترین مقدار a)

مثال ۶: در یک تقسیم ۲۵ واحد به مقسوم اضافه کرده‌ایم. از باقیمانده به اندازه $\frac{2}{7}$ مقسوم علیه کم و یک واحد به خارج قسمت اضافه می‌شود مقسوم علیه را حساب کنید.

$$a+25=b(q+1)+r-\frac{2}{7}b \xrightarrow{a=bq+r} bq+r+25=bq+b+r-\frac{2}{7}b$$

$$\Rightarrow 25=\frac{5}{7}b \Rightarrow \boxed{b=35}$$

مثال ۷ : (هماهنگ دیماه ۹۷) :

اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+2$ در اینصورت باقیمانده تقسیم عدد (a^2+b^2+3) را بر ۸ بیابید. (۱٫۲۵ نمره)

حل : a عددی فرد است بنابراین $a+2$ عددی فرد است و $b|a+2$ بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود می دانیم مربع هر عدد فرد مضربی از ۸ به علاوه یک است پس :

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ فرد} \Rightarrow a^2 = 8m+1 \\ b \text{ فرد} \Rightarrow b^2 = 8n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2+b^2+3 = (8m+1)+(8n+1)+3 = 8(m+n)+5$$

$$\Rightarrow \boxed{r=5}$$

مثال ۸ : (هماهنگ شهریور ۹۸) :

اگر باقیمانده تقسیم a بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد باقیمانده تقسیم عدد a را بر ۳۰ بیابید (۱٫۵ نمره)

$$a = 6q+3 \xrightarrow{\times 5} 5a = 30q+15 \quad (1)$$
$$a = 5q'+2 \xrightarrow{\times 6} 6a = 30q'+12 \quad (2) \qquad (2)-(1) \Rightarrow a = 30(q'-q)-3$$

باقیمانده نباید منفی باشد

$$\Rightarrow a = 30q''-30+27 \Rightarrow a = 30(\underbrace{q''-1}_{k})+27 = 30k+27 \Rightarrow \boxed{r=27}$$

مثال ۹ : (هماهنگ خرداد ۹۸) :

اگر باقیمانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در اینصورت باقیمانده تقسیم عدد $(5n-3m)$ بر ۱۳ را بدست آورید. (۱٫۵ نمره)

$$\left.\begin{array}{l} m = 13q+2 \xrightarrow{\times 3} 3m = 13(3q)+6 \\ n = 13q'+9 \xrightarrow{\times 5} 5n = 13(5q')+45 \end{array}\right\} \Rightarrow 5n-3m = 13(\underbrace{5q'-3q}_{q''})+39$$

$$\Rightarrow 5n-3m = 13q''+39 = 13(\underbrace{q''+3}_{k})+0 = 13k+0 \Rightarrow \boxed{r=0}$$

مثال ۱۰ : (هماهنگ خرداد ۹۹) :

اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد در اینصورت باقیمانده تقسیم عدد $2a+3$ بر ۸ را بدست آورید (۱٫۲۵ نمره)

$$a = 4q+3 \Rightarrow 2a+3 = 2(4q+3)+3 = 8q+9 = 8q+8+1 = 8(\underbrace{q+1}_{q'})+1 = 8q'+1$$

$$\Rightarrow \boxed{r=1}$$

افراز اعداد صحیح :

عدد صحیح n را درنظر می‌گیریم به عنوان مثال اگر آن را بر ۴ تقسیم کنیم باقیمانده صفر یا ۱ یا ۲ یا ۳ می‌شود پس هر عدد صحیح را می‌توان به یکی از صورتهای $4k$ یا $4k+1$ یا $4k+2$ یا $4k+3$ نوشت به عبارت دیگر اعداد صحیح به ۴ زیر مجموعه افراز می‌شود اگر بر ۵ تقسیم می‌کردیم به ۵ زیر مجموعه بصورتهای $5k$ یا $5k+1$ یا $5k+2$ یا $5k+3$ یا $5k+4$ افراز می‌شد اینکه از کدام افراز استفاده کنیم بستگی به صورت مسئله دارد.

مثال ۱ : ثابت کنید ضرب دو عدد صحیح متوالی همواره زوج است یعنی :

$$2 \mid n(n+1)$$

حل : دو حالت برای n درنظر می‌گیریم :

n زوج $\Rightarrow n = 2k \Rightarrow n(n+1) = \underbrace{2k(2k+1)}_{q} = 2q =$ زوج $\Rightarrow 2 \mid n(n+1)$

n فرد $\Rightarrow n = 2k+1 \Rightarrow n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{q} = 2q =$ زوج $\Rightarrow 2 \mid n(n+1)$

مثال ۲ : اولاً : نشان دهید هر عدد فرد بصورت $4k+1$ یا $4k+3$ است
ثانیاً : ثابت کنید مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ دارای باقیمانده ۱ است

حل اولاً : می‌دانیم هر عدد صحیح به یکی از صورتهای $4k$ و $4k+1$ و $4k+2$ و $4k+3$ است. $4k$ و $4k+2$ زوج هستند پس هر عدد فرد به یکی از صورتهای $4k+1$ یا $4k+3$ می‌شود.

حل ثانیاً : نشان می‌دهیم مربع هر عدد فرد بصورت $8q+1$ است.

$n = 4k+1 \Rightarrow n^2 = (4k+1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8\underbrace{(2k^2+k)}_{q} + 1 = 8q+1$

$n = 4k+3 \Rightarrow n^2 = (4k+3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8\underbrace{(2k^2+3k+1)}_{q} + 1 = 8q+1$

مثال ۳ : فرض کنید $p > 3$ عددی اول باشد نشان دهید p به یکی از دو صورت $6k+1$ یا $6k+5$ ممکن است باشد.

حل : طبق افراز اعداد صحیح ، هر عدد صحیح به یکی از صورتهای $6k$ یا $6k+1$ یا $6k+2$ یا $6k+3$ یا $6k+4$ یا $6k+5$ است . $6k$ و $6k+2$ و $6k+4$ زوج هستند

پس نمی‌توانند اول باشند ، $4K+3$ هم مضرب ۳ است پس اول نیست
پس P به یکی از صورتهای $4K+1$ یا $4K+5$ است

بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب م م) :
عدد طبیعی d را ب م م دو عدد a ، b (که هردو باهم صفر نیستند) می‌گوئیم و می‌نویسیم $(a,b)=d$ هرگاه :

۱) d مقسوم علیه دو عدد باشد یعنی $d|a$ و $d|b$

۲) d از هر مقسوم علیه مشترک دلخواهی چون m بزرگتر باشد (m کوچکتر یا مساوی d باشد) یعنی: $\forall m>0 \,,\, m|a \,,\, m|b \Rightarrow m\leqslant d$

مثال) ب م م ۱۲ و ۱۸ برابر ۶ می باشد زیرا:

مجموعه مقسوم علیهای مثبت ۱۲ $= \{1,2,3,4,6,12\}$

مجموعه مقسوم علیهای مثبت ۱۸ $= \{1,2,3,6,9,18\}$

مجموعه مقسوم علیهای مثبت ۱۲ و ۱۸ $= \{1,2,3,6\}$

ب م م ۱۲ و ۱۸ $= (12,18) = 6$

مثالهای دیگر :

$(6,2)=2$ ، $(14,35)=7$ ، $(15,25)=5$

تذکر مهم :
دو عدد را نسبت به هم اول (متباین) می‌گویند هرگاه ب م م آنها برابر ۱ باشد

$(20,21)=1$ ، $(7,5)=1$ ، $(12,19)=1$ ، $(10,3)=1$

ویژگی های ب م م :

۱) علامت در ب م م بی تاثیر است یعنی: $(a,b)=(-a,-b)=(-a,b)=(a,-b)$

(مثال) $(3,6)=(-3,-6)=(-3,6)=(3,-6)=3$

۲) اگر $a|b$ آنگاه: $(a,b)=|a|$

اثبات : باید نشان دهیم $|a|$ دو شرط ب م م را دارد.
شرط اول قبول است $|a|\,|\,a$ ، $\left.\begin{matrix}|a|\,|\,a\\ a|b\end{matrix}\right\} \Rightarrow |a|\,|\,b$

شرط دوم را بررسی می کنیم :

اگر $m>0$ و $m|a$ و $m|b$ آنگاه: $\left.\begin{array}{l} m|a \Rightarrow |m|\leq|a| \\ (m>0)\Rightarrow m=|m| \end{array}\right\} \Rightarrow m\leq|a|$

پس شرط دوم هم برقرار است

نتیجه: $(a,a^2)=(a,a^3)=\dots=|a|$ یا $(2a,4a)=|2a|$

---

۳) اگر P عددی اول باشد و $a\in\mathbb{Z}$ و $P\nmid a$ آنگاه: $(P,a)=1$

اثبات:

فرض کنیم: $(P,a)=d \Rightarrow \begin{cases} d|P \xrightarrow{\text{اول } P} d=1 \text{ یا } d=P \\ d|a \end{cases}$

اگر $d=P \xrightarrow{d|a} P|a$ (تناقض است زیرا طبق فرض $P\nmid a$)

پس $d=1$ یا $(P,a)=1$ قابل قبول است.

---

۴) اگر دو عدد عامل مشترکی داشته باشند در ب م م می توانیم با فاکتورگیری آن عامل مشترک را بیرون بیاوریم یعنی: $(ka,kb)=|k|(a,b)$

مثال) مطلوبست محاسبه:

الف) $(75,35)=(5\times15,5\times7)=5(15,7)=5\times1=5$

ب) $(220,80)=(20\times11,20\times4)=20(11,4)=20\times1=20$

مثال: اگر a و b نسبت بهم اول باشند ثابت کنید $7a+5b$ و $3a+2b$ هم نسبت بهم اولند.

اثبات: کافی است ثابت کنیم: $(7a+5b,3a+2b)=1$

فرض کنیم: $(7a+5b,3a+2b)=d \Rightarrow \begin{cases} d|7a+5b \\ d|3a+2b \end{cases}$

$\begin{cases} d|7a+5b \xrightarrow{\times3} d|21a+15b \\ d|3a+2b \xrightarrow{\times7} d|21a+14b \end{cases} \xrightarrow{-} d|(21a+15b)-(21a+14b) \Rightarrow d|b$

$\begin{cases} d|7a+5b \xrightarrow{\times2} d|14a+10b \\ d|3a+2b \xrightarrow{\times5} d|15a+10b \end{cases} \xrightarrow{-} d|(14a+10b)-(15a+10b) \Rightarrow d|-a \Rightarrow d|a$

$d|a$ ، $d|b$ و $(a,b)=1$ پس: $d=1$

مثال ۲: اگر a عددی فرد باشد ثابت کنید $(2a, a+2)=1$

حل: فرض کنیم $(2a, a+2)=d$ ثابت می‌کنیم: $d=1$

$$(2a,a+2)=d \Rightarrow \begin{cases} d|2a \\ d|a+2 \xRightarrow{\times 2} d|2a+4 \end{cases} \Rightarrow d|(2a+4)-2a \Rightarrow d|4 \Rightarrow d=1,2,4$$

چون a فرد است پس $a+2$ هم فرد است پس d زوج نیست یعنی فقط $d=1$ می‌تواند باشد.

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد (ک م م):

دو عدد ناصفر a و b را درنظر بگیرید. عدد طبیعی c را ک م م دو عدد a و b می‌گوییم و می‌نویسیم $[a,b]=c$ هرگاه:

۱) عدد c مضرب هردو عدد a و b باشد یعنی: $a|c$, $b|c$

۲) c از هر مضرب مشترک دلخواهی مانند m کوچکتر باشد (m بزرگتر یا مساوی c باشد) به عبارت دیگر:

$\forall m>0\ ,\ a|m\ ,\ b|m \Rightarrow c\leqslant m$

مثال) ک م م دو عدد ۳ و ۴ برابر ۱۲ است زیرا:

مجموعه مضربهای مثبت ۳ $=\{3,6,9,12,15,18,21,24,\dots\}$

مجموعه مضربهای مثبت ۴ $=\{4,8,12,16,20,24,\dots\}$

مجموعه مضربهای مشترک مثبت ۳ و ۴ $=\{12,24,\dots\}$

ک م م ۳ و ۴ $=[3,4]=12$

مثالهای دیگر: $[1,4]=4$, $[3,6]=6$, $[7,5]=35$

ویژگی های ک م م:

۱) علامت در ک م م بی تاثیر است یعنی: $[a,b]=[-a,-b]=[-a,b]=[a,-b]$

۲) اگر $a|b$ آنگاه $[a,b]=|b|$

اثبات:

شرط اول را بررسی می‌کنیم:

$\left.\begin{matrix} a|b \\ b||b| \end{matrix}\right\} \Rightarrow a||b| \Rightarrow$ $|b|$ مضرب مشترک a و b است.

واضح است $b||b|$

شرط دوم را بررسی می کنیم:

فرض کنیم $m>0$ و $a|m$ و $b|m$ داریم:

$b|m \Rightarrow |b| \leq |m| \xRightarrow{m>0} |b| \leq m \Rightarrow$ $|b|$ ک‌م‌م a و b می باشد

۳) اگر دو عدد نسبت بهم اول باشند (یعنی ب‌م‌م دو عدد برابر ۱ باشد) در اینصورت ک‌م‌م آن دو عدد برابر حاصلضرب آنها است یعنی:

$(a, b) = 1 \Rightarrow [a, b] = |ab|$

مثال) $[3, 5] = 15$ $\quad [4, 7] = 28$ $\quad [4, 11] = 44$

۴) از ویژگی ۲ می توان نتیجه گرفت: $[a, a^n] = |a^n|$ ، $[a, a^2] = a^2$

$[2a, 4a] = |4a|$

۵) $[ka, kb] = |k|[a, b]$ یعنی از عامل مشترک می توانیم فاکتور بگیریم

مثال) $[15, 12] = [3\times5, 3\times4] = 3[5, 4] = 3\times20 = 60$

مثال) $[60, 144] = [12\times5, 12\times12] = 12[5, 12] = 12\times60 = 720$

۶) $(a,b)|a \Rightarrow [a, (a,b)] = |a|$ و $(a,b)|[a,b] \Rightarrow [[a,b], (a,b)] = [a,b]$

تذکر مهم: رابطه بین ک‌م‌م و ب‌م‌م:

$$[a, b] = \frac{|a\times b|}{(a, b)}$$

$$[a,b] = (a,b) \Rightarrow |a| = |b|$$

مثال) اگر $(a,b) = |a|$ باشد $[3a, 3b]$ را بدست آورید.

روش I:

$$[3a, 3b] = \frac{|3a\times3b|}{(3a, 3b)} = \frac{9|a||b|}{3(a, b)} = \frac{3|a||b|}{|a|} = 3|b|$$

روش II: چون $(a,b) = |a|$ پس a مقسوم علیه b است یعنی $a|b$ پس $[a,b] = |b|$ درنتیجه:

$[3a, 3b] = 3[a, b] = 3|b|$

(مطالب خارج از کتاب درسی) :

۱) $[a,b](a,b)=|ab|$ یا $[a,b]=\frac{|ab|}{(a,b)}$

۲) اگر $(a,b)=d$ آنگاه $(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$ درنتیجه : $[a,b]=c$

$\frac{a}{d}=a' \Rightarrow a=a'd$ $\qquad ab=[a,b](a,b)=cd$

$\frac{b}{d}=b' \Rightarrow b=b'd$ $\qquad \Rightarrow a'db'd=cd \Rightarrow \boxed{a'b'd=c}$

مثال ۱ : اگر مجموع دو عدد ۱۰۲ و کوچکترین مضرب مشترک آنها ۴۳۲ باشد بزرگترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد را بیابید.

$(a,b)=d \quad , \quad a=a'd \quad , \quad b=b'd \quad , \quad (a',b')=1$

$$\begin{cases} a+b=۱۰۲ \Rightarrow a'd+b'd=۱۰۲ \Rightarrow (a'+b')d=۱۰۲ & ① \\ c=۴۳۲ \Rightarrow a'b'd=۴۳۲ & ② \end{cases}$$

$$\frac{①}{②} \Rightarrow \frac{(a'+b')\cancel{d}}{a'b'\cancel{d}}=\frac{۱۰۲}{۴۳۲}=\frac{۱۷}{۷۲} \Rightarrow \begin{cases} a'+b'=۱۷ \\ a'b'=۷۲ \\ (a',b')=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'=۹ \\ b'=۸ \end{cases}$$

$$(a'+b')d=۱۰۲ \Rightarrow (۹+۸)d=۱۰۲ \Rightarrow d=\frac{۱۰۲}{۱۷}=۶$$

مثال ۲ : از تساوی‌های $a-b=۳۶$ و $[a,b]=۱۲۰$ مقادیر a و b را بیابید.

$$\begin{cases} a-b=۳۶ \\ [a,b]=۱۲۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'd-b'd=۳۶ \\ a'b'd=۱۲۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a'-b')d=۳۶ & ① \\ a'b'd=۱۲۰ & ② \end{cases}$$

$$\frac{①}{②} \Rightarrow \frac{(a'-b')\cancel{d}}{a'b'\cancel{d}}=\frac{۳۶}{۱۲۰}=\frac{۳}{۱۰} \Rightarrow \begin{cases} a'-b'=۳ \\ a'b'=۱۰ \\ (a',b')=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'=۵ \\ b'=۲ \end{cases}$$

$$a'b'd=۱۲۰ \Rightarrow ۵\times۲\times d=۱۲۰ \Rightarrow d=۱۲ \Rightarrow \begin{cases} a=a'd=۵\times۱۲ \Rightarrow \boxed{a=۶۰} \\ b=b'd=۲\times۱۲ \Rightarrow \boxed{b=۲۴} \end{cases}$$

★ تمرینات مهم فصل ۱ درس ۲ با پاسخ ★

۱) فرض می‌کنیم $ab=cd$ (a و b و c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در اینصورت پنج رابطه عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

$$ab=cd \xRightarrow{d=q} c\mid ab \qquad ab=cd \xRightarrow{c=q} d\mid ab \qquad cd=ab \xRightarrow{b=q} a\mid cd$$

$$cd=ab \xRightarrow{a=q} b\mid cd \qquad ab=cd \xRightarrow{q=1} cd\mid ab$$

---

۲) ثابت کنید اگر $a\mid b$ آنگاه $a\mid -b$ و $-a\mid b$ و $-a\mid -b$

$$a\mid b \Rightarrow b=aq \Rightarrow \begin{cases} -b=a(-q) \Rightarrow a\mid -b \\ b=-a(-q) \Rightarrow -a\mid b \\ -b=-aq \Rightarrow -a\mid -b \end{cases}$$

---

۳) اگر $a>1$ و $a\mid 9k+4$ و $a\mid 5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است.

$$\left.\begin{array}{l} a\mid 9k+4 \xRightarrow{\times 5} a\mid 45k+20 \\ a\mid 5k+3 \xRightarrow{\times 9} a\mid 45k+27 \end{array}\right\} \Rightarrow a\mid (45k+27)-(45k+20) \Rightarrow a\mid 7$$

$\Rightarrow a=1$ یا $7 \xrightarrow{a>1} \boxed{a=7}$ اول است

---

۴) اگر $a\neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(7m+6)$ و $(6m+5)$ بر a بخشپذیر باشند ثابت کنید: $a=\pm 1$

$$\left.\begin{array}{l} a\mid 7m+6 \xRightarrow{\times 6} a\mid 42m+36 \\ a\mid 6m+5 \xRightarrow{\times 7} a\mid 42m+35 \end{array}\right\} \Rightarrow a\mid (42m+36)-(42m+35) \Rightarrow a\mid 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a=\pm 1}$$

---

۵) اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد بطوریکه $5\mid 4k+1$ ثابت کنید: $25\mid 16k^2+28k+6$

$$\left.\begin{array}{l} 5\mid 4k+1 \Rightarrow 5^2\mid (4k+1)^2 \Rightarrow 25\mid 16k^2+8k+1 \\ 5\mid 4k+1 \xRightarrow{\times 5} 5\times 5\mid 5(4k+1) \Rightarrow 25\mid 20k+5 \end{array}\right\} \Rightarrow 25\mid (16k^2+8k+1)+(20k+5)$$

$$\Rightarrow 25\mid 16k^2+28k+6$$

---

۶) آیا از اینکه $a\mid b$ و $c\mid d$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c\mid b+d$ ؟

جواب: خیر با مثال نقض

$$\begin{array}{l} 2\mid 4 \\ 5\mid 20 \end{array} \Rightarrow 2+5 \nmid 4+20$$

۷) ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت بهم اول اند.
ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول اند.
(راهنمایی: فرض کنید $(m, m+۱) = d$ و ثابت کنید $d|۱$ و نتیجه بگیرید $d=۱$)

الف)
$$(m, m+۱) = d \Rightarrow \begin{cases} d|m \\ d|m+۱ \end{cases} \Rightarrow d|(m+۱)-m \Rightarrow d|۱ \xRightarrow{d>۰} d=۱$$

ب) فرض کنیم m و n دو عدد فرد متوالی باشند پس داریم:

$$m = ۲k+۱ \quad , \quad n = ۲k+۳ \quad , \quad (۲k+۱, ۲k+۳) = d$$

$$\begin{matrix} d|۲k+۳ \\ d|۲k+۱ \end{matrix} \Rightarrow d|(۲k+۳)-(۲k+۱) \Rightarrow d|۲ \xRightarrow{d>۰} d=۱ \text{ یا } ۲$$

اگر $d=۲$ باشد $۲|۲k+۱$ نادرست است زیرا $(۲k+۱)$ فرد است پس: $d=۱$

۸) اگر $p \neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید: $(p, q) = ۱$

فرض کنیم: $(p, q) = d$
$$\Rightarrow \begin{cases} d|p \Rightarrow d=۱ \text{ یا } p \\ d|q \Rightarrow d=۱ \text{ یا } q \end{cases}$$

اگر $d=p$ باشد در اینصورت $p|q$ که این یک تناقض است (q اول است) و
اگر $d=q$ باشد در اینصورت $q|p$ که این یک تناقض است (p اول است) پس

$$d=۱ \Rightarrow (p, q) = ۱$$

۹) اگر $m, n \in N$ و $a, b \in Z$ ثابت کنید: $m \leq n$ و $a|b \Rightarrow a^m | b^n$

$$\left.\begin{matrix} m \leq n \Rightarrow a^m | a^n \\ a|b \Rightarrow a^n | b^n \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{تعدی}} a^m | b^n$$

۱۰) اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیمانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

$$\left.\begin{matrix} a = ۷q + ۵ \xRightarrow{\times ۸} ۸a = ۵۶q + ۴۰ \\ a = ۸q' + ۷ \xRightarrow{\times ۷} ۷a = ۵۶q' + ۴۹ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۸a - ۷a = ۵۶(\underbrace{q - q'}_{q''}) - ۹$$

$$\Rightarrow a = ۵۶q'' - ۹ = ۵۶q'' - ۵۶ + ۴۷ \Rightarrow a = ۵۶(q''-۱) + ۴۷ \Rightarrow \boxed{r = ۴۷}$$

۱۱) اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید: $3|n^3-n$

(راهنمایی: برای n سه حالت $n=3k$ ، $n=3k+1$ و ... در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $3|n^3-n$).

حل: طبق افراز اعداد صحیح، هر عدد صحیح به یکی از صورتهای $3k$ و $3k+1$ و $3k+2$ است.

$$n=3k \Rightarrow n^3-n=(3k)^3-3k=27k^3-3k=3(\underbrace{9k^3-k}_{q})=3q \Rightarrow 3|n^3-n$$

$$n=3k+1 \Rightarrow n^3-n=(3k+1)^3-(3k+1)=27k^3+27k^2+9k+1-3k-1=3(\underbrace{9k^3+9k^2+2k}_{q})$$
$$=3q \Rightarrow 3|n^3-n$$

$$n=3k+2 \Rightarrow n^3-n=(3k+2)^3-(3k+2)=27k^3+54k^2+36k+8-3k-2$$
$$=3(\underbrace{9k^3+17k^2+11k+2}_{q})=3q \Rightarrow 3|n^3-n$$

چون هر عدد صحیح n در تقسیم بر ۳ به یکی از صورتهای $3k$ و $3k+1$ و $3k+2$ می باشد پس همواره $3|n^3-n$

---

۱۲) اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند ثابت کنید باقیمانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

حل: فرض کنیم $n|a$ ، $n|b$ و $a=bq+r$ در نتیجه: $a-bq=r$

$$\begin{cases} n|a \\ n|b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n|a \\ n|bq \end{cases} \Rightarrow n|a-bq \Rightarrow n|r$$

---

۱۳) اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

حل: فرض کنیم $a\in\mathbb{Z}$ باشد:

$a=3k \Rightarrow$ a بر ۳ بخش‌پذیر است

$a=3k+1 \Rightarrow a+2=3k+1+2=3k+3=3(k+1) \Rightarrow$ $a+2$ مضرب ۳ است

$a=3k+2 \Rightarrow a+4=3k+2+4=3k+6=3(k+2) \Rightarrow$ $a+4$ مضرب ۳ است

---

۱۴) ثابت کنید تفاضل مکعب های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

حل: فرض کنیم $n\in\mathbb{Z}$ باشد:

$$n^3-(n-1)^3=n^3-(n^3-3n^2+3n+1)=3n^2-3n+1=3\underbrace{(n)(n-1)}_{2q}+1=3(2q)+1$$

$$=2(\underbrace{3q}_{k})+1=2k+1=$$ فرد

تذکر:

n و $n-1$ دو عدد متوالی هستند و حاصلضرب دو عدد متوالی زوج است $n(n-1)=2q$

۱۵) ثابت کنید حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $3!$ بخشپذیر است

حل: می دانیم $6=3!$ و حاصلضرب ۳ عدد متوالی بصورت $A=(n-1)n(n+1)$ می باشد

طبق افراز اعداد صحیح داریم:

$n=6k \Rightarrow A=(6k-1)(6k)(6k+1)\Rightarrow 6|A$

$n=6k+1 \Rightarrow A=(6k)(6k+1)(6k+2)\Rightarrow 6|A$

$n=6k+2 \Rightarrow A=(6k+1)(6k+2)(6k+3)=6(6k+1)(3k+1)(2k+1)\Rightarrow 6|A$

$n=6k+3 \Rightarrow A=(6k+2)(6k+3)(6k+4)=6(3k+1)(2k+1)(6k+4)\Rightarrow 6|A$

$n=6k+4 \Rightarrow A=(6k+3)(6k+4)(6k+5)=6(2k+1)(3k+2)(6k+5)\Rightarrow 6|A$

$n=6k+5 \Rightarrow A=(6k+4)(6k+5)(6k+6)=6(6k+4)(6k+5)(k+1)\Rightarrow 6|A$

پس همواره $3!=6|A$

۱۶) حاصل هر یک را بدست آورید. ($m\in\mathbb{Z}$)

الف) $([m^2,m],m^5)=(m^2,m^5)=m^2$ ($m|m^2$ و $m^2|m^5$)

ب) $(2m,6m^2)=(2m\times 1 , 2m\times 3m)=2m(1,3m)=2m\times 1=2m$

پ) $(3m+1,3m+2)=?$

$$(3m+1,3m+2)=d\Rightarrow\begin{cases}d\,|\,3m+1\\ d\,|\,3m+2\end{cases}\Rightarrow d\,|\,(3m+2)-(3m+1)\Rightarrow d\,|\,1\xRightarrow{d>0}d=1$$

ت) $[m^7,(m^2,m^3)]=[m^7,m^2]=m^7$ ($m^2|m^3$ و $n^2|m^7$)

ث) $[(72,48),120]=[(24\times3,24\times2),120]=[24\underbrace{(3,2)}_{=1},120]=[24,120]$

$=[24\times1,24\times5]=24[1,5]=24\times5=120$

نکته ریاضی: حاصلضرب عاملهای مشترک و غیر مشترک با بیشترین توان = ک م م ، حاصلضرب عاملهای مشترک با کمترین توان = ب م م

$24=2^3\times3^1$

$30=2^1\times3^1\times5^1$

$(24,30)=2^1\times3^1=6$ ، $[24,30]=2^3\times3^1\times5^1=120$

درس ۳ : هم نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها:

تعریف هم نهشتی:

دو عدد صحیح a، b را به سنج (پیمانه) طبیعی m همنهشت می‌گویند هرگاه $a-b$ بر m بخش‌پذیر باشد و می‌نویسند: $a \overset{m}{\equiv} b$
و می‌خوانیم a به سنج (پیمانه) m با b هم نهشت است به عبارت دیگر:

$$\forall a,b\in \mathbb{Z},\ m\in \mathbb{N},\quad a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m|a-b \Leftrightarrow a-b=mq$$

مثال)

$7 \overset{12}{\equiv} -5 \Leftrightarrow 12|7-(-5)$ و $-6 \overset{4}{\equiv} 2 \Leftrightarrow 4|-6-2$

$25 \overset{12}{\equiv} 1 \Leftrightarrow 12|25-1$ و $10 \overset{4}{\equiv} 2 \Leftrightarrow 4|10-2$ و $13 \overset{9}{\equiv} -14 \Leftrightarrow 9|13-(-14)$

ویژگی‌های هم نهشتی:

۱) $a \overset{m}{\equiv} a$ مثال) $3 \overset{8}{\equiv} 3 \Leftrightarrow 8|3-3$

۲) $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow b \overset{m}{\equiv} a$ مثال) $9 \overset{5}{\equiv} 4 \Leftrightarrow 5|9-4$ ، $4 \overset{5}{\equiv} 9 \Leftrightarrow 5|4-9$

۳) $\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ b \overset{m}{\equiv} c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$ (رابطه تعدی) $\left.\begin{matrix} 7 \overset{2}{\equiv} 5 \\ 5 \overset{2}{\equiv} 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7 \overset{2}{\equiv} 3$

---

۴) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+c \overset{m}{\equiv} b+c \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-c \end{cases}$ (به دو طرف یک رابطه هم نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد)

اثبات:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|a+c-b-c \Rightarrow m|(a+c)-(b+c) \Rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+c$$

---

۵) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$ (دو طرف یک رابطه هم نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد)

اثبات:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|c(a-b) \Rightarrow m|ac-bc \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

عکس این ویژگی برقرار نیست یعنی اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \overset{m}{\equiv} b$
(قانون حذف در همنهشتی در حالت کلی برقرار نیست)

$15 \overset{3}{\equiv} 12 \xRightarrow{\div 3} 5 \not\overset{3}{\equiv} 4$

۶) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n \ (n\in \mathbb{N})$ (دو طرف یک رابطه هم نهشتی را می توان به توان n رساند)

اثبات: از اتحاد $(a^n-b^n)=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$ استفاده می کنیم

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m\mid a-b \Rightarrow m\mid (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}) \Rightarrow m\mid a^n-b^n \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

عکس این ویژگی درست نیست: $\quad ۵^۲ \overset{۴}{\equiv} ۳^۲ \Rightarrow ۵ \overset{۴}{\not\equiv} ۳$

مثال) $۷ \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۷^۲ \overset{۴}{\equiv} ۳^۲$ مثال) $۳ \overset{۴}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۳^{۱۰۰} \overset{۴}{\equiv} (-۱)^{۱۰۰} \Rightarrow ۳^{۱۰۰} \overset{۴}{\equiv} ۱$

---

۷) $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \\ a+c \overset{m}{\equiv} b+d \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-d \end{cases}$ (دو طرف دو رابطه هم نهشتی را که پیمانه های یکسان داشته باشند می توان باهم جمع یا از هم منها و یا درهم ضرب کرد)

اثبات اولی:

$$\left.\begin{aligned} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m\mid a-b \xRightarrow{\times c} m\mid ac-bc \\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow m\mid c-d \xRightarrow{\times b} m\mid bc-bd \end{aligned}\right\} \xRightarrow{+} m\mid (ac-bc)+(bc-bd) \Longrightarrow$$

$$m\mid ac-bd \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd$$

اثبات دومی:

$$\left.\begin{aligned} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m\mid a-b \\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow m\mid c-d \end{aligned}\right\} \xRightarrow{+} m\mid a-b+c-d \Rightarrow m\mid (a+c)-(b+d)$$

$$\Rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+d$$

---

۸) $a=mq+r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$ (اگر باقیمانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد در اینصورت: $a \overset{m}{\equiv} r$)

اثبات:

$$a=mq+r \Rightarrow a-r=mq \Rightarrow m\mid a-r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

نتیجه ۱: هرگاه بخواهیم کوچکترین عدد نامنفی و هم نهشت با عدد a به پیمانه m را مشخص کنیم کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقیمانده را بدست آوریم

مثال) $۲۹۴ \overset{۱۱}{\equiv} ?$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} ۲۹۴ & ۱۱ \\ \underline{۲۸۶} & ۲۶ \\ ۱۰ & \end{array}$ $\quad$ پس: $۲۹۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰$

نتیجه ۲: اگر دو عدد a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m، هم باقیمانده باشند در اینصورت $a \overset{m}{\equiv} b$

مثال) $\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ -10 & 2 \\ \hline (3) & \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ -5 & 1 \\ \hline (3) & \end{array}$ $\quad$ $13 \overset{5}{\equiv} 8$

مثال ۱: باقیمانده تقسیم عدد $A=(27)^7+19$ را بر 13 بیابید.

$$27 = 13\times 2+1 \Rightarrow 27 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (27)^7 \overset{13}{\equiv} 1^7 \Rightarrow (27)^7 \overset{13}{\equiv} 1 \quad (1)$$

$$19 = 13\times 1+6 \Rightarrow 19 \overset{13}{\equiv} 6 \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow (27)^7+19 \overset{13}{\equiv} 1+6 \Rightarrow A \overset{13}{\equiv} 7 \xRightarrow{\text{نتیجه ۱}} \boxed{r=7}$$

مثال ۲: باقیمانده تقسیم عدد $A=(1000)^{13}\times 12+10$ را بر $\underline{7}$ بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} 1000 = 7\times 142 + 6 \Rightarrow 1000 \overset{7}{\equiv} 6 \\ 6 \overset{7}{\equiv} -1 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{تعدی}} 1000 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow (1000)^{13} \overset{7}{\equiv} (-1)^{13}$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow (1000)^{13}\times 12 \overset{7}{\equiv} (-1)\times 12 = -12 \Rightarrow (1000)^{13}\times 12+10 \overset{7}{\equiv} -12+10$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (1000)^{13}\times 12+10 \overset{7}{\equiv} -2 \\ \text{از طرفی} \quad -2 \overset{7}{\equiv} 5 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{تعدی}} (1000)^{13}\times 12+10 \overset{7}{\equiv} 5 \Rightarrow \boxed{r=5}$$

مثال ۳: باقیمانده تقسیم عدد $3\times(27)^{100}+15$ را بر 13 بدست آورید.

$$27 = 13\times 2+1 \Rightarrow 27 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (27)^{100} \overset{13}{\equiv} 1^{100} \Rightarrow (27)^{100} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow$$

$$3\times(27)^{100} \overset{13}{\equiv} 1\times 3 \Rightarrow 3\times(27)^{100} \overset{13}{\equiv} 3 \Rightarrow 3\times(27)^{100}+15 \overset{13}{\equiv} 3+15 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 3\times(27)^{100}+15 \overset{13}{\equiv} 18 \\ \text{از طرفی} \quad 18 \overset{13}{\equiv} 5 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{تعدی}} 3\times(27)^{100}+15 \overset{13}{\equiv} 5 \Rightarrow \boxed{r=5}$$

مثال ۴: باقیمانده تقسیم 2^{30} بر 17 را بدست آورید.

$$\left.\begin{array}{l} 16 \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow 2^4 \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow (2^4)^7 \overset{17}{\equiv} (-1)^7 \Rightarrow 2^{28} \overset{17}{\equiv} -1 \\ \text{از طرفی} \quad 2^2 \overset{17}{\equiv} 4 \end{array}\right\} \xRightarrow{\times} 2^{30} \overset{17}{\equiv} -4 \overset{17}{\equiv} 13 \Rightarrow \boxed{r=13}$$

مثال ۵: (هماهنگ دی ماه ۹۸) باقیمانده تقسیم 13^{22} را بر ۱۷ بدست آورید (۱ نمره)

$$13 \overset{17}{\equiv} -4 \Rightarrow 13^2 \overset{17}{\equiv} (-4)^2 \Rightarrow 13^2 \overset{17}{\equiv} 16 \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow (13^2)^{11} \overset{17}{\equiv} (-1)^{11} \Rightarrow 13^{22} \overset{17}{\equiv} -1$$

$$\xrightarrow{-1 \overset{17}{\equiv} 16} 13^{22} \overset{17}{\equiv} 16 \Rightarrow \boxed{r=16}$$

(هماهنگ خرداد ۹۹)

مثال ۶: باقیمانده تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را بدست آورید. (۱/۵ نمره)

$$49 \overset{15}{\equiv} 4 \Rightarrow 7^2 \overset{15}{\equiv} 4 \Rightarrow (7^2)^2 \overset{15}{\equiv} 4^2 \Rightarrow 7^4 \overset{15}{\equiv} 16 \overset{15}{\equiv} 1 \Rightarrow (7^4)^7 \overset{15}{\equiv} 1^7$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 7^{28} \overset{15}{\equiv} 1 \\ \text{از طرفی}\ \ 7^2 \overset{15}{\equiv} 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 7^{28} \times 7^2 \overset{15}{\equiv} 1 \times 4 \Rightarrow 7^{30} \overset{15}{\equiv} 4 \Rightarrow \boxed{r=4}$$

مثال ۷: اگر دو عدد $5a-7$ و $4a+2$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $7a+4$ را بدست آورید.

حل: دو عدد رقم یکان برابر دارند یعنی باقیمانده تقسیم هردو عدد بر ۱۰، یکسان است. درنتیجه هردو عدد به پیمانه ۱۰ هم نهشت هستند

$$5a-7 \overset{10}{\equiv} 4a+2 \Rightarrow 5a-4a \overset{10}{\equiv} 2+7 \Rightarrow a \overset{10}{\equiv} 9 \Rightarrow 7a \overset{10}{\equiv} 63$$

$\Rightarrow 7a+4 \overset{10}{\equiv} 63+4 \Rightarrow 7a+4 \overset{10}{\equiv} 67 \overset{10}{\equiv} 7 \Rightarrow$ رقم یکان عدد $7a+4$ برابر ۷ است.

مثال ۸: باقیمانده تقسیم a بر ۷ برابر ۳ است. باقیمانده تقسیم عدد a^2+2a-1 را بر ۷ پیدا کنید

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow a^2 \overset{7}{\equiv} 9 \\ a \overset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow 2a \overset{7}{\equiv} 6 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2+2a \overset{7}{\equiv} 9+6 \Rightarrow a^2+2a-1 \overset{7}{\equiv} 15-1$$

$$\Rightarrow a^2+2a-1 \overset{7}{\equiv} 14 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow \boxed{r=0}$$

9) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$

می‌توان به یک طرف یا دو طرف یک رابطه هم نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.

برقرار است ✓ $7 \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow 7 + 3 \times 5 \overset{5}{\equiv} 2 + 5 \times 5 \Rightarrow 22 \overset{5}{\equiv} 27$ (مثال

مثال) باقیمانده تقسیم عدد $1! + 2! + 3! + \cdots + 100!$ را بر ۲۴ بدست آورید.

حل: می دانیم $4! = 24$ پس از $4!$ به بعد همه فاکتوریل ها مضرب ۲۴ هستند پس هم نهشت صفر می شوند.

$1! \overset{24}{\equiv} 1$

$2! \overset{24}{\equiv} 2$

$3! \overset{24}{\equiv} 6$

$4! \overset{24}{\equiv} 0$

$5! \overset{24}{\equiv} 0$

$\vdots$

$100! \overset{24}{\equiv} 0$

$$1! + 2! + 3! + \cdots + 100! \overset{24}{\equiv} 1 + 2 + 6 + 0 + 0 + \cdots$$

$$\Rightarrow 1! + 2! + 3! + \cdots + 100! \overset{24}{\equiv} 9 \Rightarrow \boxed{r = 9}$$

10) $ac \overset{m}{\equiv} bc \ , \ (c, m) = d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم باید پیمانه آن هم نهشتی را بر ب م م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم

$24 \overset{3}{\equiv} 12 \Rightarrow 4 \times 6 \overset{3}{\equiv} 4 \times 3 \xrightarrow[\div 4]{(4,3)=1} 6 \overset{\frac{3}{1}}{\equiv} 3 \Rightarrow 6 \overset{3}{\equiv} 3$ (مثال

کلاس (دسته های) هم نهشتی:

مجموعه همه اعداد صحیح که در تقسیم بر m باقیمانده ای برابر r دارند را کلاس یا دستهٔ هم نهشتی r به پیمانه m می گوئیم و آنرا با $[r]_m$ نمایش می دهیم به عبارت دیگر:

$$[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$$

در تقسیم اعداد صحیح بر m دقیقاً m باقیمانده به وجود می آید پس مجموعه اعداد صحیح دقیقاً به m کلاس یا دسته هم نهشتی افراز می شود

به عنوان مثال می دانیم هر عدد صحیح به یکی از صورتهای $4k$ و $4k+1$ و $4k+2$ و $4k+3$ است (افراز اعداد صحیح) می دانیم با قیمانده تقسیم هر

عدد صحیح بر ۴ برابر ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ است اگر مجموعه اعدادی که در تقسیم بر ۴ با باقیمانده‌ای برابر صفر دارند را با $[0]_4$ و مجموعه اعدادی که در تقسیم بر ۴ با باقیمانده‌ای برابر یک دارند را با $[1]_4$ و ... نشان دهیم خواهیم داشت:

$$[0]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \overset{4}{\equiv} 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k ,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$[1]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \overset{4}{\equiv} 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k+1 ,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$[2]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \overset{4}{\equiv} 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k+2 ,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

$$[3]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \overset{4}{\equiv} 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k+3 ,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11\}$$

مثال) عدد ۳۸۲۱ به کدام کلاس هم‌نهشتی به پیمانه ۷ تعلق دارد؟

$$\begin{array}{r|l} 3821 & 7 \\ \hline - & 545 \\ 6 & \end{array}$$

حل: باقیمانده تقسیم ۳۸۲۱ بر ۷ برابر ۶ است پس عدد ۳۸۲۱ به کلاس $[6]_7$ تعلق دارد. یعنی در مجموعه اعداد صحیحی قرار دارد که باقیمانده تقسیم همه آن عددها بر ۷ برابر ۶ است.

به دست آوردن باقیمانده تقسیم بر اعداد خاص:

نکته ۱: باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۳ برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ یعنی:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0} \overset{3}{\equiv} a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

مثال) باقیمانده تقسیم عدد $A = 598348$ را بر ۳ بدون انجام عمل تقسیم بیابید.

$$598348 \overset{3}{\equiv} 5+9+8+3+4+8 = 37 \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow \boxed{r=1}$$

نکته ۲: باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹ یعنی:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0} \overset{9}{\equiv} a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

مثال) باقیمانده تقسیم عدد ۲۷۱۳۹۱ را بر عدد ۹ بدون انجام عمل تقسیم بیابید.

$$271391 \overset{9}{\equiv} 2+7+1+3+9+1 = 23 \overset{9}{\equiv} 5 \Rightarrow \boxed{r=5}$$

نکته۳: برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۱، بین ارقام را از سمت راست یک درمیان + و − قرار می‌دهیم.

مثال) باقیمانده تقسیم عدد ۵۷۳۴۱۶ را بر ۱۱ بدون انجام عمل تقسیم بیابید

$$573416 \overset{11}{\equiv} +6-1+4-3+7-5 = 8 \Rightarrow \boxed{r=8}$$

$$7391 \overset{11}{\equiv} +1-6+3-7 = -9 \overset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow \boxed{r=2}$$

نکته۴: برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۴ و ۲۵ و ۵۰ و ۱۰۰ کافی است دو رقم سمت راست آن عدد را در نظر بگیریم

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \overset{4}{\equiv} \overline{a_1 a_0} \qquad \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \overset{25}{\equiv} \overline{a_1 a_0}$$

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \overset{50}{\equiv} \overline{a_1 a_0} \qquad \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \overset{100}{\equiv} \overline{a_1 a_0}$$

مثال) باقیمانده تقسیم عدد ۳۸۵۲۲۷ را بر ۴ بدون انجام عمل تقسیم بیابید.

$$385227 \overset{4}{\equiv} 27 \overset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow \boxed{r=3}$$

نکته۵: برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۸ کافی است سه رقم سمت راست آن عدد را در نظر بگیریم.

مثال) باقیمانده تقسیم عدد ۷۹۶۸۵۳۴ را بر ۸ بدون انجام عمل تقسیم بیابید

$$7968534 \overset{8}{\equiv} 534 \overset{8}{\equiv} 6 \Rightarrow \boxed{r=6}$$

تمرین: باقیمانده تقسیم عدد چهار رقمی $\overline{3a26}$ بر ۹ برابر ۳ است. رقم a را بدست آورید.

رقم است $a \Rightarrow a \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$$\overline{3a26} \overset{9}{\equiv} 3+a+2+6 \overset{9}{\equiv} 3 \Rightarrow 11+a \overset{9}{\equiv} 3 \Rightarrow 8+a \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

نکته ۶: برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۲ و ۵ و ۱۰ کافی است رقم یکان آن عدد را در نظر بگیریم.

$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_0} \overset{2}{\equiv} a_0$ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_0} \overset{5}{\equiv} a_0$ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_0} \overset{10}{\equiv} a_0$

مثال) باقیمانده تقسیم عدد ۸۵۳۹۴۷ را بر ۲ و ۵ و ۱۰ بدون انجام عمل تقسیم بیابید.

$853947 \overset{2}{\equiv} 7 \overset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow \boxed{r=1}$

$853947 \overset{5}{\equiv} 7 \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow \boxed{r=2}$ $853947 \overset{10}{\equiv} 7 \Rightarrow \boxed{r=7}$

تذکر مهم:

$10^n \overset{11}{\equiv} 1$ (n زوج باشد)

$10^n \overset{11}{\equiv} -1$ (n فرد باشد)

محاسبه روز هفته بر حسب تاریخ:

یکی از کاربردهای هم نهشتی این است که پیدا کنیم فلان تاریخ، چند شنبه است. می دانیم هر روز از روزهای هفته مثلاً شنبه، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می شود. به عنوان مثال اگر ۱۲ فروردین در یک سال یکشنبه باشد در این صورت ۱۹=۷+۱۲ فروردین و ۲۶=۷+۱۹ فروردین نیز یکشنبه می باشد همچنین می دانیم شش ماه اول سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دوم سال غیر از اسفند (که به جز سال کبیسه، ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می باشند.

مثال ۱: اگر ۱۴ اردیبهشت ۲شنبه باشد، ۱۷ آذر چند شنبه است؟

حل: ۱۴ اردیبهشت را متناظر صفر می گیریم و بقیه را طبق جدول زیر جلو می رویم (همنهشتی به پیمانه ۷)

یکشنبه	شنبه	جمعه	پنج شنبه	چهارشنبه	سه شنبه	دوشنبه
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

روزهای باقیمانده اردیبهشت = ۱۷=۱۴−۳۱

روزهای خرداد، تیر، مرداد و شهریور = ۳۱×۴

روزهای مهر و آبان = ۳۰×۲

۱۷ روز در آذر

$$17+(4\times 31)+(2\times 30)+17 \overset{7}{\equiv} 218 \overset{7}{\equiv} 1$$

در جدول سه شنبه متناظر با عدد ۱ است پس ۱۷ آذر سه شنبه است.

مثال ۲: اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد در اینصورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است.

شنبه	یک شنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنج شنبه	جمعه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

روزهای باقیمانده در مهرماه $= 30-1=29$

روزهای آبان و آذر و دی $= 3\times 30$

۱۲ روز در بهمن

$$29+(3\times 30)+12 \overset{7}{\equiv} 131 \overset{7}{\equiv} 5$$

در جدول ۵ شنبه متناظر با عدد ۵ است پس ۱۲ بهمن پنجشنبه است

مثال ۳: اگر ۲۲ بهمن در یک سال پنجشنبه باشد ۳ خرداد همان سال چه روزی از هفته است؟

پنج شنبه	جمعه	شنبه	یک شنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

روزهای باقیمانده خرداد $= 31-3=28$

سه ماه تابستان $= 3\times 31 = 93$

روزهای مهر، آبان، آذر و دی $= 4\times 30 = 120$

۲۲ روز در بهمن ماه

کل روزها $= 28+93+120+22=263$

چون باید از ۲۲ بهمن تا ۳ خرداد عقب برویم آن را منفی می‌گیریم

$$-263 \overset{7}{\equiv} -4 \overset{7}{\equiv} 3$$ سوم خرداد یک شنبه است $(-263=7\times(-37)-4)$

معادله هم نهشتی:

یک رابطه هم نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax\overset{m}{\equiv}b$ را یک معادله هم نهشتی می‌نامیم و منظور از حل معادله هم نهشتی پیدا کردن همه جوابهایی چون $x_0\in Z$ است که در این معادله صدق کنند یعنی: $ax_0\overset{m}{\equiv}b$ $(a,b\in Z)$

قضیه: معادله هم نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)\mid b$

مثال ۱: جوابهای عمومی معادله $4x \overset{5}{\equiv} 17$ را بدست آورید.

حل: $(4,5)=1$ و $1|17$ پس معادله دارای جواب است.

$$\left.\begin{array}{l}4x\overset{5}{\equiv}17\\ 17\overset{5}{\equiv}2\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} 4x\overset{5}{\equiv}2 \xrightarrow{\text{ویژگی ۹}} 4x\overset{5}{\equiv}2+(2\times 5) \Rightarrow 4x\overset{5}{\equiv}12$$

$$\xrightarrow[\div 4 \text{ (ویژگی ۱۰)}]{(4,5)=1} x\overset{\frac{5}{1}}{\equiv}3 \Rightarrow x\overset{5}{\equiv}3 \Rightarrow 5|x-3 \Rightarrow x-3=5k \Rightarrow \boxed{x=5k+3}\quad (k\in Z)$$

یعنی ۵ برابر اعداد صحیح به اضافه ۳ جوابهای معادله بالا هستند

مثال ۲: جوابهای عمومی معادله $4x\overset{6}{\equiv}18$ را بدست آورید.

حل: چون $(4,6)=2$ و $2|18$ پس معادله دارای جواب است.

$$4x\overset{6}{\equiv}18 \xrightarrow[\div 2]{(4,6)=2} 2x\overset{\frac{6}{2}}{\equiv}9 \Rightarrow 2x\overset{3}{\equiv}9 \Rightarrow 2x\overset{3}{\equiv}9+(1\times 3)$$

$$\Rightarrow 2x\overset{3}{\equiv}12 \xrightarrow[\div 2]{(2,3)=1} x\overset{\frac{3}{1}}{\equiv}6 \Rightarrow x\overset{3}{\equiv}6 \Rightarrow 3|x-6 \Rightarrow x-6=3k \Rightarrow \boxed{x=3k+6}\quad (k\in Z)$$

یعنی سه برابر اعداد صحیح به اضافه ۶ جوابهای معادله بالا هستند

مثال ۳: معادله همنهشتی $434x\overset{11}{\equiv}68$ را حل کنید.

حل: ابتدا ضرایب را کوچک می‌کنیم

$$434\overset{11}{\equiv}+4-3+4 \Rightarrow 434\overset{11}{\equiv}5$$

$$68\overset{11}{\equiv}+8-6 \Rightarrow 68\overset{11}{\equiv}2$$

$$434x\overset{11}{\equiv}68 \Rightarrow 5x\overset{11}{\equiv}2 \Rightarrow 5x\overset{11}{\equiv}2+(3\times 11) \Rightarrow 5x\overset{11}{\equiv}35 \xrightarrow[\div 5]{(5,11)=1} x\overset{11}{\equiv}7$$

$$\Rightarrow 11|x-7 \Rightarrow x-7=11k \Rightarrow \boxed{x=11k+7}\quad k\in Z$$

مثال ۴: معادله همنهشتی $173x\overset{9}{\equiv}231$ را حل کنید.

حل: ابتدا ضرایب را کوچک می‌کنیم

$$173\overset{9}{\equiv}1+7+3=11\overset{9}{\equiv}2 \Rightarrow 173\overset{9}{\equiv}2$$

$$231\overset{9}{\equiv}2+3+1 \Rightarrow 231\overset{9}{\equiv}6$$

$$173x\overset{9}{\equiv}231 \Rightarrow 2x\overset{9}{\equiv}6 \xrightarrow[\div 2]{(2,9)=1} x\overset{9}{\equiv}3 \Rightarrow 9|x-3 \Rightarrow x-3=9k \Rightarrow$$

$$\boxed{x=9k+3}\quad k\in Z$$

مثال ۵: همه اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخشپذیر باشند.

$x=$ عدد مورد نظر $\Rightarrow 7|3x-13 \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 13 \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 13-(1\times 7)$

$\Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow[\div 3]{(3,7)=1} x \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow 7|x-2 \Rightarrow x-2=7k \Rightarrow \boxed{x=7k+2}$ $k\in Z$

حل معادله سیاله:

هر معادله بصورت $ax+by=c$ را که در آن همه ضرایب و مجهولات عدد صحیح هستند ($a,b,c,x,y\in \mathbb{Z}$)، معادله سیاله خطی درجه اول می گوییم.

تذکر مهم: شرط لازم و کافی برای آنکه معادله سیاله $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که: $(a,b)|c$

برای حل معادله سیاله، می توان آنرا بصورت زیر به معادله هم نهشتی تبدیل و حل کرد:

$$ax+by=c \Rightarrow ax-c=(-b)y \Rightarrow -b|ax-c \Rightarrow b|ax-c \Rightarrow \boxed{ax \overset{b}{\equiv} c}$$

$$ax+by=c \Rightarrow by-c=(-a)x \Rightarrow -a|by-c \Rightarrow a|by-c \Rightarrow \boxed{by \overset{a}{\equiv} c}$$

بعد از اینکه یکی از معادلات هم نهشتی را حل و متغیر را پیدا کردیم باید آنرا در معادله سیاله قرار دهیم تا مجهول دیگر بدست آید.

مثال) معادلات سیاله زیر را حل کنید: الف) $4x+5y=9$

$4x \overset{5}{\equiv} 9 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 9-(1\times 5) \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 4 \xrightarrow[\div 4]{(4,5)=1} x \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow 5|x-1 \Rightarrow x-1=5k$

$\Rightarrow \boxed{x=5k+1}$

$4x+5y=9 \Rightarrow 4(5k+1)+5y=9$

$\Rightarrow 20k+4+5y=9 \Rightarrow 20k+5y=5 \Rightarrow 4k+y=1 \Rightarrow \boxed{y=-4k+1}$

ب) $3x+2y=5$

$3x \overset{2}{\equiv} 5 \Rightarrow 3x \overset{2}{\equiv} 5-(1\times 2) \Rightarrow 3x \overset{2}{\equiv} 3 \xrightarrow[\div 3]{(3,2)=1} x \overset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow 2|x-1 \Rightarrow x-1=2k \Rightarrow \boxed{x=2k+1}$

$3x+2y=5 \Rightarrow 3(2k+1)+2y=5 \Rightarrow 6k+3+2y=5 \Rightarrow 2y=-6k+2 \Rightarrow \boxed{y=-3k+1}$

(هماهنگ خرداد ۹۸):

با تبدیل معادله سیاله خطی $5x+2y=18$ به معادله هم‌نهشتی و حل آن، جوابهای عمومی این معادله را بیابید (۰/۵ نمره)

$$5x+2y=18 \Rightarrow 2y \overset{5}{\equiv} 18 \xrightarrow[\div 2]{(2,5)=1} y \overset{5}{\equiv} 9 \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow 5 \mid y-4$$

$$\Rightarrow y-4=5k \Rightarrow \boxed{y=5k+4}$$

$$5x+2(5k+4)=18 \Rightarrow 5x+10k-10=0 \Rightarrow 5x=-10k+10 \xrightarrow{\div 5} \boxed{x=-2k+2}$$

(هماهنگ شهریور ۹۸):

با تبدیل معادله سیاله $2000x+5000y=29000$ به معادله هم‌نهشتی و حل آن، جوابهای عمومی این معادله را بیابید (۰/۵ نمره)

$$2000x+5000y=29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x+5y=29 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 29 \Rightarrow$$

$$2x \overset{5}{\equiv} 29-(5\times 5) \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 4 \xrightarrow[\div 2]{(2,5)=1} x \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow 5 \mid x-2 \Rightarrow \boxed{x=5k+2}$$

$$2x+5y=29 \Rightarrow 2(5k+2)+5y=29 \Rightarrow \boxed{y=-2k+5}$$

مثال) به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

x = تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی

y = تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی

$$2000x+5000y=18000 \xrightarrow{\div 1000} 2x+5y=18 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 18 \overset{5}{\equiv} 8$$

$$\xrightarrow[\div 2]{(2,5)=1} x \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow 5 \mid x-4 \Rightarrow x-4=5k \Rightarrow \boxed{x=5k+4}$$

$$2x+5y=18 \Rightarrow 2(5k+4)+5y=18 \Rightarrow 10k+5y=10 \Rightarrow \boxed{y=-2k+2}$$

فقط به ازای $k=0$ و $k=1$ برای x و y جوابها نامنفی هستند.

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \quad \text{و} \quad k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=0 \end{cases}$$

پس به دو طریق می‌توان تبدیل کرد.

مثال) در یک رستوران سوپ و سالاد به عنوان پیش غذا ارائه می‌شود اگر ۹ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش پیش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس پیش غذا میل می‌کند)

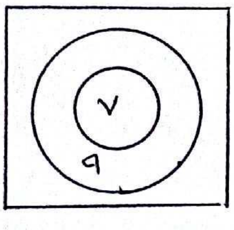
$y=$ تعداد سالادها ، $x=$ تعداد سوپ ها

$$x+y=9 \Rightarrow x \overset{1}{\equiv} 9 \overset{1}{\equiv} 0 \Rightarrow \boxed{x=K} \Rightarrow \boxed{y=9-K}$$

فقط به ازای $K=0,1,2,\dots,9$ ، x و y هر دو بزرگتر یا مساوی صفر در می‌آیند یعنی معادله ۱۰ جواب دارد

$$K=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=9 \end{cases} \quad \text{یا} \quad K=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \dots \quad \text{یا} \quad K=9 \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=0 \end{cases}$$

مثال) تیراندازی به سمت هدفی که ناحیه‌هایی با امتیازهای ۷ و ۹ دارد، تیرهایی پرتاب می‌کند. او به چند صورت ممکن است ۷۳ امتیاز کسب کرده باشد، به شرط آن که بدانیم همه تیرها به یکی از ناحیه‌ها برخورد کرده است؟



$y=$ تعداد تیرهای ۹ امتیازی ، $x=$ تعداد تیرهای ۷ امتیازی

$$7x+9y=73 \Longrightarrow 9y \overset{7}{\equiv} 73 \xrightarrow[73\overset{7}{\equiv}3]{9\overset{7}{\equiv}2} 2y \overset{7}{\equiv} 3$$

$$\Rightarrow 2y \overset{7}{\equiv} 3+(1\times 7) \Rightarrow 2y \overset{7}{\equiv} 10 \xrightarrow[\div 2]{(2,7)=1} y \overset{7}{\equiv} 5$$

$$\Rightarrow \boxed{y=7K+5} \Rightarrow 7x+9(7K+5)=73 \Rightarrow \boxed{x=-9K+4}$$

x و y هر دو تعداد هستند پس هیچکدام منفی نیستند و فقط به ازای $K=0$ هیچکدام منفی نمی‌شوند پس معادله فقط یک جواب دارد $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$

(هماهنگ دیماه ۹۷)

معادله هم‌نهشتی $3x \overset{7}{\equiv} 13$ را حل و جواب عمومی آنرا بدست آورید (۱ نمره)

$$3x \overset{7}{\equiv} 13 \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 13-(1\times 7) \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow[\div 3]{(3,7)=1} x \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow \boxed{x=7K+2} \quad K\in Z$$

(هماهنگ دیماه ۹۸):

جوابهای عمومی معادله سیاله خطی $9x+13y=7$ را بدست آورید (۱ نمره)

$$9x+13y=7 \Rightarrow 13y \overset{9}{\equiv} 7 \xrightarrow[7 \overset{9}{\equiv} 16]{13 \overset{9}{\equiv} 4} 4y \overset{9}{\equiv} 16 \xrightarrow[\div 4]{(4,9)=1} y \overset{9}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow \boxed{y=9k+4} \Rightarrow \boxed{x=-13k-5}$$

(هماهنگ خرداد ۹۹):

معادله هم نهشتی $5x \overset{11}{\equiv} 2$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید

(۱/۲۵ نمره)

$$5x \overset{11}{\equiv} 2 \overset{11}{\equiv} 35 \Rightarrow 5x \overset{11}{\equiv} 35 \xrightarrow[\div 5]{(5,11)=1} x \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow \boxed{x=11k+7}$$

(هماهنگ شهریور ۹۹):

معادله سیاله $2x+5y=19$ را حل کنید. (۱ نمره)

$$2x+5y=19 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 19 \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 4 \xrightarrow[\div 2]{(2,5)=1} x \overset{5}{\equiv} 2$$

$$\Rightarrow \boxed{x=5k+2} \Rightarrow \boxed{y=-2k+3}$$

★ تمرینات مهم فصل ۱ درس ۳ با پاسخ ★

۱) عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته همنهشتی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟

$$۱۳۹۸ \overset{۹}{\equiv} ۱+۳+۹+۸ \overset{۹}{\equiv} ۲۱ \overset{۹}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۱۳۹۸ \in [۳]_۹$$

۲) اگر $K \in \mathbb{Z}$ ، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان پذیر است

$K \overset{۳}{\equiv} ۲$ یا $K \overset{۳}{\equiv} ۱$ یا $K \overset{۳}{\equiv} ۰$ (به عبارت دیگر $K \in [۰]_۳$ یا $K \in [۱]_۳$ یا $K \in [۲]_۳$)

حل: اگر K را به عدد سه تقسیم کنیم داریم: $۰ \leq r < ۳$ ، $K = ۳q + r$

پس $r = ۰$ یا $r = ۱$ یا $r = ۲$ می باشد پس:

اگر $r = ۲ \Rightarrow K \overset{۳}{\equiv} ۲$ اگر $r = ۱ \Rightarrow K \overset{۳}{\equiv} ۱$ اگر $r = ۰ \Rightarrow K \overset{۳}{\equiv} ۰$

۳) اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ ، $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$

$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b$

فرض $\left.\begin{matrix} n|m \\ m|a-b \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} n|a-m \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$

۴) فرض کنیم $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m,n) = d$ در اینصورت ثابت کنید: $a \overset{d}{\equiv} c$

$$(m,n) = d \Rightarrow d|m \ , \ d|n$$

$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ d|m \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طبق تمرین ۳}} a \overset{d}{\equiv} b$ $\left.\begin{matrix} b \overset{n}{\equiv} c \\ d|n \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طبق تمرین ۳}} b \overset{d}{\equiv} c$

$$\left.\begin{matrix} a \overset{d}{\equiv} b \\ b \overset{d}{\equiv} c \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} a \overset{d}{\equiv} c$$

۵) ثابت کنید: اگر باقیمانده های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آنگاه: $a \overset{m}{\equiv} b$

$$\left.\begin{matrix} a = mq + r \\ b = mq' + r \end{matrix}\right\} \Rightarrow a-b = mq + r - mq' - r \Rightarrow a-b = m(q-q') \Rightarrow a-b = mq''$$

$$\Rightarrow m|a-b \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

۶) عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ باشد آنگاه a و b در تقسیم بر m هم باقیمانده هستند

اثبات: فرض کنیم باقیمانده a بر m عدد r باشد ثابت می‌کنیم باقیمانده تقسیم b بر m نیز برابر r است.

$$a=mq+r \ , \ 0\leq r<m \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow a-b=mk$$
$$\Rightarrow a=b+mk$$

$$a=mq+r \Rightarrow b+mk=mq+r \Rightarrow b=mq-mk+r \Rightarrow b=m(q-k)+r$$

$\Rightarrow b=mq'+r \ , \ 0\leq r<m \Rightarrow$ r باقیمانده تقسیم b بر m $\Rightarrow$ a و b در تقسیم بر m هم باقیمانده اند

---

۷) با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیّام یعنی:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}\times a^n+\binom{n}{1}\times a^{n-1}b+\binom{n}{2}\times a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}\times a^{n-3}b^3+\cdots+\binom{n}{n}\times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n\in N$ ، $a,b\in Z$ همواره: $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n$

اثبات:
$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{n}b^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+b^n$$

$$\Rightarrow (a+b)^n=a^n+b^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}$$

$$\Rightarrow (a+b)^n=a^n+b^n+ab\Big(\underbrace{\binom{n}{1}a^{n-2}+\binom{n}{2}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{n-1}b^{n-2}}_{q}\Big)$$

$$\Rightarrow (a+b)^n=a^n+b^n+abq \Rightarrow (a+b)^n-(a^n+b^n)=abq \Rightarrow (a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n$$

---

۸) با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید $23^{11}-11^{11}-12^{11}$ بر عدد ۱۳۲ بخشپذیر است

می‌دانیم: $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n$

$$a=12 \quad b=11 \quad n=11 \Rightarrow (12+11)^{11} \overset{12\times 11}{\equiv} 12^{11}+11^{11} \Rightarrow 23^{11}\overset{132}{\equiv}12^{11}+11^{11} \Rightarrow 23^{11}-12^{11}-11^{11}\overset{132}{\equiv}0$$

$\Rightarrow \boxed{r=0} \Rightarrow$ بخشپذیر است.

۹) باقیمانده تقسیم عدد $A=(2^{11}+7)\times 9$ را بر ۲۳ بیابید.

$32 \overset{23}{\equiv} 9 \Rightarrow 2^5 \overset{23}{\equiv} 9 \Rightarrow (2^5)^2 \overset{23}{\equiv} 9^2 \Rightarrow 2^{10} \overset{23}{\equiv} 81 \overset{23}{\equiv} 81-(3\times 23) \overset{23}{\equiv} 12$

$\Rightarrow 2^{10} \overset{23}{\equiv} 12 \xrightarrow{\times 2} 2^{11} \overset{23}{\equiv} 24 \overset{23}{\equiv} 24-(1\times 23) \Rightarrow 2^{11} \overset{23}{\equiv} 1 \xrightarrow{+7} 2^{11}+7 \overset{23}{\equiv} 8$

$\xrightarrow{\times 9} (2^{11}+7)\times 9 \overset{23}{\equiv} 72 \overset{23}{\equiv} 72-(3\times 23) \overset{23}{\equiv} 3 \Rightarrow \boxed{r=3}$

۱۰) اگر دو عدد $(3a-5)$ و $(4a-7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(9a+6)$ را بدست آورید.

حل: می دانیم اگر رقم یکان دو عدد برابر باشند آن دو عدد به پیمانه ۱۰ باهم هم نهشت هستند پس:

$4a-7 \overset{10}{\equiv} 3a-5 \Rightarrow 4a-7-3a+5 \overset{10}{\equiv} 0 \Rightarrow a-2 \overset{10}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{10}{\equiv} 2$

$\xrightarrow{\times 9} 9a \overset{10}{\equiv} 18 \overset{10}{\equiv} 8 \xrightarrow{+6} 9a+6 \overset{10}{\equiv} 8+6 \Rightarrow 9a+6 \overset{10}{\equiv} 14 \overset{10}{\equiv} 4 \Rightarrow$ رقم یکان $=4$

۱۱) باقیمانده تقسیم عدد $A=1!+2!+3!+\cdots+500!$ را بر ۱۰ بدست آورید. (رقم یکان A را بیابید)

حل: می دانیم $5!=120$ پس $5! \overset{10}{\equiv} 0$

درنتیجه از $5!$ به بعد، همه فاکتوریل ها مضرب ۱۰ هستند پس هم نهشت صفرند

$1! \overset{10}{\equiv} 1$

$2! \overset{10}{\equiv} 2$

$3! \overset{10}{\equiv} 6$

$4! \overset{10}{\equiv} 24 \overset{10}{\equiv} 4$

$5! \overset{10}{\equiv} 0$

$\vdots$

$500! \overset{10}{\equiv} 0$

$A \overset{10}{\equiv} 1+2+6+4+0+0+\cdots \overset{10}{\equiv} 13 \overset{10}{\equiv} 3$

رقم یکان A برابر ۳ می باشد.

۱۲) جواب عمومی معادله سیاله خطی $7x+5y=11$ را بدست آورید.

$7x+5y=11 \Rightarrow 7x \overset{5}{\equiv} 11 \Rightarrow 7x \overset{5}{\equiv} 11-(5\times 5) \Rightarrow 7x \overset{5}{\equiv} -14 \Rightarrow x \overset{5}{\equiv} -2 \Rightarrow \boxed{x=5k-2}$

$7(5k-2)+5y=11 \Rightarrow 5y=-35k+25 \Rightarrow \boxed{y=-7k+5}$

۱۳) به چند طریق می توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

$y=$ تعداد اسکناس های ۵۰۰۰ تومانی $x=$ تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ تومانی

$2000x + 5000y = 29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x + 5y = 29 \Rightarrow 5y \overset{2}{\equiv} 29 \Rightarrow 5y \overset{2}{\equiv} 29-(2\times 2)$

$\Rightarrow 5y \overset{2}{\equiv} 25 \xrightarrow{\div 5} y \overset{2}{\equiv} 5 \overset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow \boxed{y = 2k+1}$ $\quad x \geq 0$

$2x + 5(2k+1) = 29 \Rightarrow 2x = -10k + 24 \Rightarrow \boxed{x = -5k + 12}$ $\quad y \geq 0$

$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=1 \end{cases} \quad k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \quad k=2 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ به سه روش

۱۴) معادله های هم نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جوابهای عمومی آنها را بدست آورید:

الف) $423x \overset{11}{\equiv} 79 \quad 423 \overset{11}{\equiv} 3-2+4 \overset{11}{\equiv} 5 \quad 79 \overset{11}{\equiv} 9-7 \overset{11}{\equiv} 2$

$5x \overset{11}{\equiv} 2 \xrightarrow[\text{معادله جواب دارد}]{(5,11)=1 \text{ و } 1|2} 5x \overset{11}{\equiv} 2 + (3\times 11) \Rightarrow 5x \overset{11}{\equiv} 35 \Rightarrow x \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow \boxed{x = 7k+11}$

ب) $8x \overset{12}{\equiv} 20 \xrightarrow[\text{معادله جواب دارد}]{(8,12)=4 \text{ و } 4|20} 8x \overset{12}{\equiv} 20-(1\times 12) \Rightarrow 8x \overset{12}{\equiv} 8 \xrightarrow{(8,12)=4} x \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow \boxed{x = 3k+1}$

ج) $51x \overset{6}{\equiv} 11 \quad (51,6)=3 \text{ و } 3 \nmid 11 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

۱۵) اگر اول مهرماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۱۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنج شنبه	جمعه	شنبه
0	1	2	3	4	5	6

مهر، آبان، آذر، دی، بهمن، اسفند

$29 + 30 + 30 + 30 + 30 + 17 = 156$

$156 \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow$ سه شنبه

۱۶) اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مردادماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

جمعه	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنج شنبه
0	1	2	3	4	5	6

شهریور، مهر، آبان، آذر، دی، بهمن

$31 + 30 + 30 + 30 + 30 + 12 = 163$

باید به عقب برگردیم: $-163 \overset{7}{\equiv} -2 \overset{7}{\equiv} 5 \Rightarrow$ چهارشنبه

۱۷) همه اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به علاوه ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

$5a + 9 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} -9 \overset{11}{\equiv} -20 \Rightarrow a \overset{11}{\equiv} -4 \Rightarrow \boxed{a = 11k-4} \quad k \in \mathbb{Z}$

۱۸) به چند طریق می‌توان یک کیسه‌ی ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

$x =$ تعداد وزنه های ۳ کیلویی $\quad y =$ تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی

$3x + 5y = 23 \Rightarrow 5y \overset{3}{\equiv} 23 \Rightarrow 5y \overset{3}{\equiv} 23-(1\times 3) \Rightarrow 5y \overset{3}{\equiv} 20 \Rightarrow y \overset{3}{\equiv} 4 \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow \boxed{y = 3k+1}$

$3x + 5(3k+1) = 23 \Rightarrow \boxed{x = 5k+6} \quad k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases} \quad k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ به دو روش

تمرین ۱۹ و تمرین ۲۰ در صفحه ۴۱ جزوه مطرح و حل شده است.

فصل ۲: گراف و مدل سازی

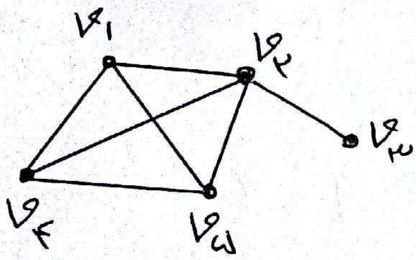
تعریف گراف:

گراف از تعدادی نقطه که به آنها رأس و تعدادی خط یا منحنی که به آنها یال می گوئیم تشکیل شده است.

گراف ساده:

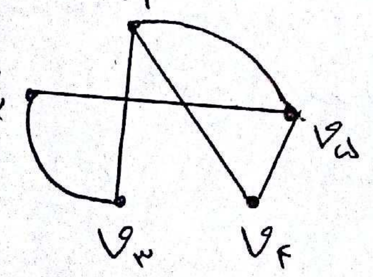
گراف ساده تشکیل شده از یک مجموعهٔ متناهی و غیرتهی از نقاط مانند V (مجموعه رئوس) و یک مجموعه متناهی از خط یا منحنی مانند E (مجموعه یالها) که مجموعه E زیر مجموعه ای از تمام زیرمجموعه های دوعضوی V است.

گراف G با مجموعهٔ رئوس و مجموعه یالهای رابصورت $G(V, E)$ نشان می دهند.



$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ (رأس ها)

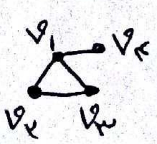
$E(G)=\{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_4v_5\}$ (یالها)



$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(G)=\{v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_5, v_4v_5\}$

تذکر مهم:



۱) در گراف ساده بین هردو رأس حداکثر یک یال وجود دارد.

۲) یال v_1v_2 با یال v_2v_1 فرقی ندارد و یکی هستند

۳) یال بین یک رأس و همان رأس را طوقه یا حلقه می نامند

گراف ساده طوقه ندارد.

۴) ممکن است بین دو راس چند تا یال باشد

v_1v_2 = یال چندگانه

که آنرا یال چندگانه می نامند.

گراف ساده یال چندگانه ندارد

ه) یالی که روی آن جهت باشد یال جهت دار نامیده می شود

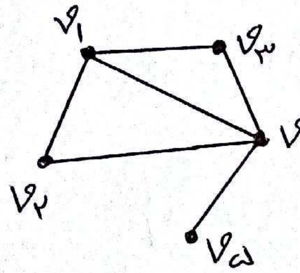
$v_1v_2 = (v_1, v_2)$

گراف ساده یال جهت دار ندارد.

نتیجه : گراف ساده، گرافی است که بین هر دو رأس آن حداکثر یک یال وجود داشته و یال طوقه، یال چندگانه و یال جهت دار ندارد.

تعریف مرتبه و اندازه گراف :

به تعداد راس های گراف G ، مرتبه گراف گفته می شود که آنرا با $P(G)$ یا ساده تر با P نشان می دهیم همچنین به تعداد یالهای گراف G ، اندازه گراف گفته می شود که آنرا با $q(G)$ یا ساده تر با q نشان می دهیم.



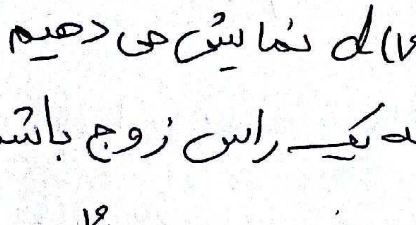
مرتبه = تعداد راس ها $= P(G) = P = 5$

اندازه = تعداد یالها $= q(G) = q = 6$

درجه یک رأس :

درجه رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال هایی از گراف G که به رأس v متصل اند و آنرا با $\deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می دهیم.

اگر درجه یک راس فرد باشد آن را رأس فرد و اگر درجه یک راس زوج باشد آنرا رأس زوج می نامند.

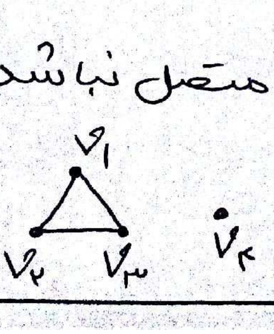


$d(v_1) = 2$ $d(v_2) = 2$

$d(v_3) = 4$ $d(v_4) = 1$ $d(v_5) = 1$

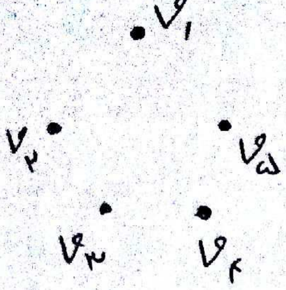
رأس تنها (ایزوله) :

به رأسی که درجه آن صفر باشد یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد رأس تنها (ایزوله) می گوییم.



$v_4 =$ رأس تنها (ایزوله)

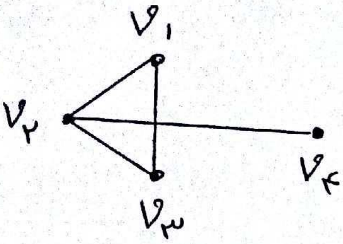
گراف تهی:



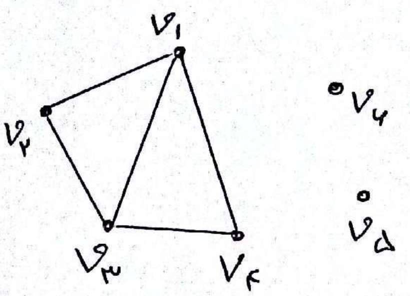
گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند یعنی هیچ یالی نداشته باشد، گراف تهی می نامیم.

بنابراین منظور از گراف تهی n رأسی، گرافی شامل n رأسِ تنها و بدون یال است.

مثال ۱: نمودار گراف $G(V,E)$ با $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و $E=\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4\}$ را رسم کنید.



مثال ۲: در گراف مقابل، مجموعه رأس‌ها، مجموعه یال‌ها، مرتبه، اندازه و درجه رأس‌ها را مشخص کنید.



$$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \Rightarrow P=6$$

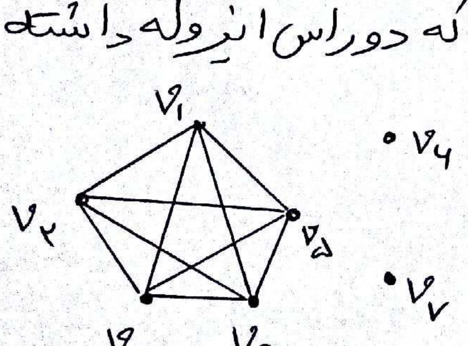
$$E(G)=\{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\} \Rightarrow q=5$$

$$\deg(v_1)=\underset{\text{فرد}}{3}, \quad \deg(v_2)=\underset{\text{زوج}}{2}, \quad \deg(v_3)=\underset{\text{فرد}}{3}$$

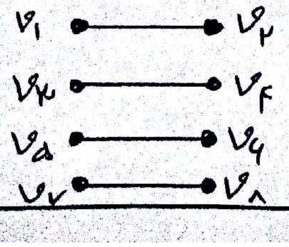
$$\deg(v_4)=\underset{\text{زوج}}{2}, \quad \deg(v_5)=\underset{\text{ایزوله}}{0}, \quad \deg(v_6)=\underset{\text{ایزوله}}{0}$$

مثال ۳: گرافی از مرتبه ۷ و اندازه ۱۰ رسم کنید که دو رأس ایزوله داشته باشد.

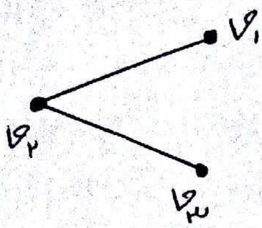
$$P=7, \quad q=10$$



مثال ۴: گرافی از مرتبه ۸ با حداقل یال چنان رسم کنید که رأس تنها نداشته باشد.

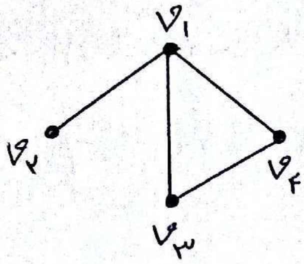


تعریف دو رأس مجاور (همسایه):



دو رأسی که توسط یال به هم وصل شده باشند را، دو رأس مجاور (همسایه) می‌گویند. در شکل مقابل رأس‌های v_1 و v_2 مجاورند یا v_2 و v_3 مجاورند ولی v_1 و v_3 مجاور (همسایه) نیستند.

مجموعه همسایه‌های یک رأس:

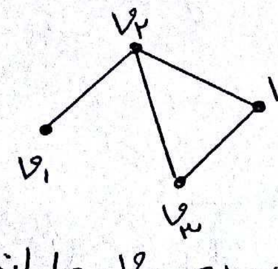


مجموعه همه رأس‌هایی در گراف G که با رأس v مجاورند را مجموعه همسایه‌های رأس v می‌نامند، اگر مجموعه همسایه‌ها شامل v باشد آنرا با علامت $N_G[v]$ و اگر شامل v نباشد را با علامت $N_G(v)$ نشان می‌دهند. در گراف فوق:

$N_G(v_1)=\{v_2, v_3, v_4\}$ $\quad$ $N_G[v_1]=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$N_G[v_4]=\{v_1, v_3, v_4\}$ و $N_G(v_3)=\{v_1, v_4\}$ و $N_G(v_2)=\{v_1\}$

دو یال مجاور:

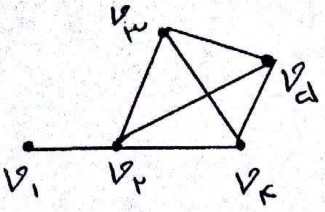


دو یال را مجاور می‌گوئیم، هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دو یال به آن وصل باشند در گراف مقابل یال‌های v_1v_2 و v_2v_3 مجاورند (هر دو به v_2 وصل‌اند) ولی یال‌های v_1v_2 و v_3v_4 مجاور نیستند.

بزرگترین و کوچکترین درجه گراف:

بزرگترین درجه در بین درجه رأس‌های یک گراف را ماکزیمم درجه گفته و آنرا با نماد $\Delta(G)$ یا ساده‌تر Δ (دلتای بزرگ) نمایش می‌دهیم و کوچکترین درجه در بین درجه رأس‌های یک گراف را

مینیمم درجه گفته و آن را با نماد $\delta(G)$ یا δ (دلتای کوچک) نمایش می دهیم.



$$deg(v_1)=1$$
$$deg(v_2)=4$$
$$deg(v_3)=deg(v_4)=deg(v_5)=3$$

پس: $\Delta=4$ و $\delta=1$

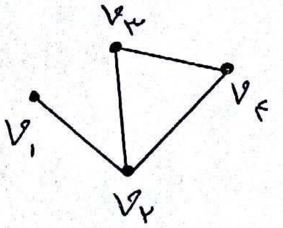
ممکن است یک گراف چند راس از درجه ماکزیمم یا مینیمم داشته باشد

تذکر مهم:

۱) در هر گراف، رأسی که به همه رأس های دیگر وصل باشد را، رأس فول می گوئیم پس:

$$\boxed{deg(\text{رأس فول})=P-1}$$

(P = مرتبه گراف = تعداد راس ها)



$P=4$

رأس فول $= v_2 \Rightarrow deg(v_2)=3=4-1=P-1$

۲) چون بیشترین درجه رأس در یک گراف P رأسی وقتی بدست می آید که آن راس به همه $(P-1)$ رأس دیگر وصل شود پس:

$$\boxed{\Delta \leq P-1}$$

مثلاً اگر گراف از مرتبه ۵ (۵ رأسی) باشد در اینصورت: $\Delta \leq 4$

۳) اگر در یک گراف از مرتبه P (P رأسی)، K رأس فول (از درجه $P-1$) داشته باشیم در اینصورت:

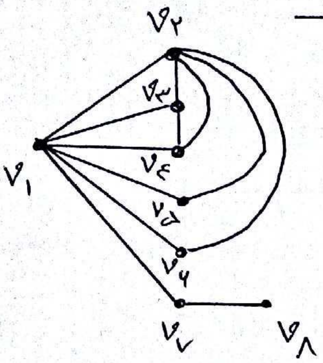
$$\boxed{\delta \geq K}$$

مثال ۱: نشان دهید گرافی وجود ندارد که درجه های آن ۲ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ باشد.

حل: $P=5$ پس باید $\Delta \leq 4$ درصورتی که ماکزیمم درجه ۵ است پس چنین گرافی وجود ندارد

مثال ۲: نشان دهید گرافی با درجه‌های ۲و۳و۴و۵و۶و۶و۶ وجود ندارد.

حل: $p=7$ است پس سه راس فول یعنی از درجه $p-1=6$ داریم در نتیجه $k=3$ است و باید $\delta \geq 3$ باشد در حالی که $\delta=2$ است پس چنین گرافی وجود ندارد.



مثال ۳: گرافی رسم کنید که درجه رأس‌ها بصورت ۱و۲و۲و۲و۳و۳و۵و۶ باشد.

$deg(v_1)=6 \qquad deg(v_2)=5$

$deg(v_3)=deg(v_4)=3$

$deg(v_5)=deg(v_6)=deg(v_7)=2 \qquad deg(v_8)=1$

ارتباط درجه‌ها با تعداد یالها در گراف:

قضیه: اگر G یک گراف با مرتبه p و اندازه q و $V=\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه رئوس آن باشد در اینصورت مجموعه درجات رئوس با دوبرابر تعداد یالها برابر است یعنی:

$$\sum_{i=1}^{p} deg\, v_i = deg\, v_1 + deg\, v_2 + \dots + deg\, v_p = 2q$$

p = تعداد راس‌ها

q = تعداد یالها

اثبات: گراف G با مجموعه رأس‌های $V=\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ را در نظر می‌گیریم. یکی یکی یالهای گراف را اضافه می‌کنیم. با اضافه کردن یال اول دو راس درجه یک بدست می‌آید (درجه بقیه فعلاً صفر است) پس مجموع درجه‌ها برابر ۲ است. یال دیگری اضافه می‌کنیم مجموع درجه‌ها برابر ۴ می‌شود با اضافه کردن هر یال، به مجموع درجه‌ها، دو واحد اضافه می‌شود پس مجموع درجه‌ها دو برابر تعداد یالها می‌شود.

(هماهنگ - دیماه ۹۷):

ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است (۱ نمره)

اثبات: فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف G و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد دراینصورت:

$$\sum_{v\in V(G)} deg(v) = \sum_{v\in A} deg(v) + \sum_{v\in B} deg(v)$$

از طرفی می دانیم که مجموع درجات رئوس گراف G عددی زوج است یعنی $\sum_{v\in V(G)} deg(v)$ نیز زوج است بنابراین $\sum_{v\in B} deg(v)$ زوج است از طرفی تفاضل آنها نیز زوج است بنابراین $\sum_{v\in A} deg(v)$ زوج است ونتیجه می شود که $n(A)$ عددی زوج است.

مثال ۱) در یک گراف از مرتبه ۱۰ و اندازه ۳۳، $\Delta = ۷$ و $\delta = ۶$ است تعداد راس های درجه ۶ و ۷ را بدست آورید.

$P = ۱۰$ ، $q = ۳۳$

$\left.\begin{matrix}\Delta = ۷ \\ \delta = ۶\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ گراف فقط راس هایی از درجه ۶ و ۷ دارد

تعداد راس ها از درجه ۶ $= x \Rightarrow$ جمع راس های درجه ۶ $= ۶x$

تعداد راس ها از درجه ۷ $= y \Rightarrow$ جمع راس های درجه ۷ $= ۷y$

$$\begin{cases} x + y = P = ۱۰ \\ ۶x + ۷y = ۲q = ۲(۳۳) = ۶۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = ۱۰ \\ ۶x + ۷y = ۶۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = ۴ \\ y = ۶ \end{matrix}$$

پس گراف ۴ رأس درجه ۶ و ۶ رأس از درجه ۷ دارد.

مثال ۲) گرافی از مرتبه ۸ و اندازه ۱۴، دو راس از درجه $\Delta = ۵$، یک راس از درجه ۲ و یک راس از درجه $\delta = ۱$ دارد این گراف چند راس درجه ۳ دارد؟

$P = ۸$ و $q = ۱۴$ درجه ها: ۱ و ۲ و $\underbrace{۳, \dots, ۳}_{y \text{ تا}}$ و $\underbrace{۴, \dots, ۴}_{x \text{ تا}}$ و ۵ و ۵

تعداد راس ها $= 2 + x + y + 1 + 1 = p = 8 \Rightarrow x + y = 4$

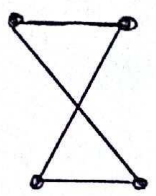
مجموع درجه ها $= 5 + 5 + 4x + 3y + 2 + 1 = 2q = 2(14) = 28$

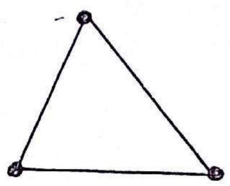
$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 4x + 3y = 15 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 3}\ \boxed{y = 1}$$

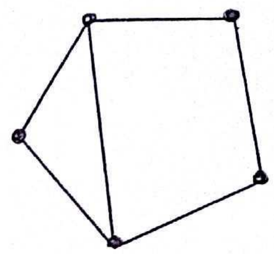
پس یک راس درجه 3 دارد.

گراف اویلری (لئونارد اویلر- ریاضیدان سوئیسی):

یک گراف ساده یا چندگانه را اویلری می گویند هرگاه بتوان از یک راس حرکت کرد و هر یال را یکبار پیمود و به راس اولیه بازگشت.

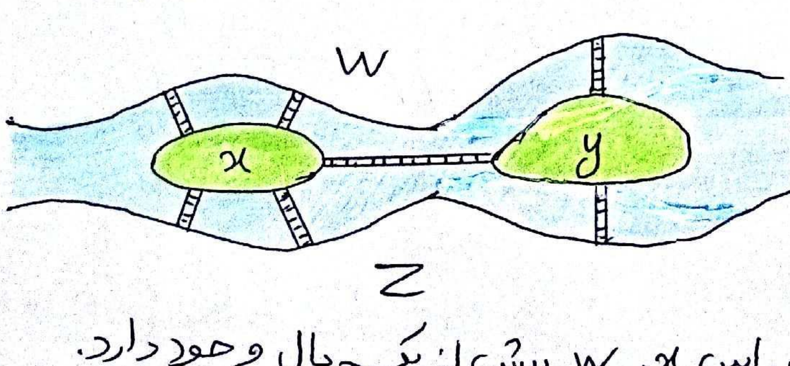

اویلری است

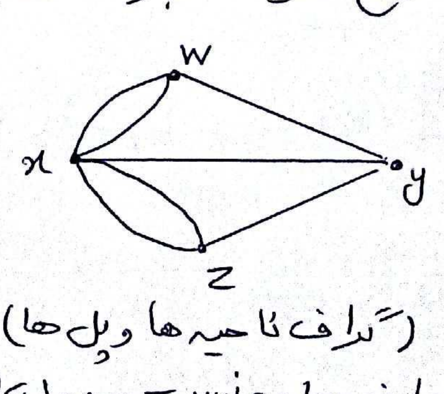

اویلری است


اویلری نیست

مسئله تاریخی:

شهر کونیگسبرگ (در روسیه) از چهار ناحیه x و y و z و w که توسط هفت پل روی رودخانه (در قرن ۱۸ میلادی) به یکدیگر متصل شده بودند، تشکیل شده است. مردم شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می توان با حرکت از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور از هرکدام از پل ها به نقطه شروع حرکت بازگشت یا نه؟ اویلر ثابت کرد این کار امکان پذیر نیست





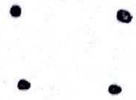
(گراف ناحیه ها و پل ها)

گراف ساده نیست چون بین دو راس x و w بیش از یک یال وجود دارد.
چون در هر راس باید از یک یال وارد و از یک یال دیگر خارج شویم اگر این کار امکان پذیر باشد باید درجه همه راس ها زوج باشد درجه x زوج نیست پس این کار امکان ندارد

گراف‌های منتظم:

گراف G از مرتبه p را r- منتظم می‌نامند هرگاه درجه‌ی هر راس گراف G برابر r باشد ($0 \leq r \leq p-1$)

گراف‌های ۰- منتظم ←



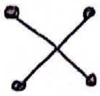
۰- منتظم مرتبه ۴

۰- منتظم مرتبه ۳

۰- منتظم مرتبه ۲

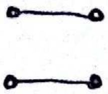
۰- منتظم مرتبه ۱

گراف‌های ۱- منتظم ←



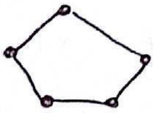
۱- منتظم مرتبه ۴

۱- منتظم مرتبه ۲

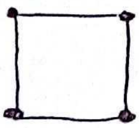


۱- منتظم مرتبه ۴

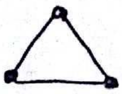
گراف‌های ۲- منتظم ←



۲- منتظم مرتبه ۵

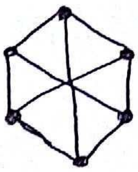


۲- منتظم مرتبه ۴

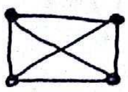


۲- منتظم مرتبه ۳

گراف‌های ۳- منتظم ←



۳- منتظم مرتبه ۶



۳- منتظم مرتبه ۴

قضیه درجه‌ها در گراف منتظم:

در هر گراف r- منتظم با p راس داریم: $\boxed{pr=2q}$

اثبات: می‌دانیم در هر گراف از مرتبه‌ی (تعداد راس) p و اندازه‌ی (تعداد یال‌ها) q مجموع درجه‌ها برابر 2q است.

مجموع درجه‌ها $=\underbrace{r+r+r+\cdots+r}_{p\ \text{تا}}=2q \Rightarrow pr=2q$

تذکر مهم: طبق قضیه بالا pr عددی زوج است پس p و r نمی‌توانند هردو فرد باشند

یعنی گراف فرد- منتظم مرتبه فرد نداریم

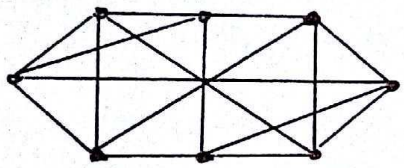
مثال) گراف ۳- منتظم مرتبه ۵ وجود ندارد.

مثال ۱) در یک گراف ۴- منتظم داریم: $q = 3p - 8$، مرتبه و اندازه گراف را بدست آورده و گراف را رسم کنید.

$r = 4$

$$pr = 2q \Rightarrow p \times 4 = 2q \Rightarrow 2p = q$$

$$q = 3p - 8 \Rightarrow 2p = 3p - 8 \Rightarrow \boxed{p = 8} \Rightarrow \boxed{q = 16}$$



پس گراف ۴- منتظم مرتبه ۸ می باشد.

مثال ۲) با حذف ۱۶ یال از یک گراف ۷- منتظم، گرافی ۳- منتظم به وجود آمده است. مرتبه گراف را بدست آورید.

گراف ۷- منتظم: $7p = 2q \Rightarrow q = \frac{7p}{2}$

گراف ۳ منتظم: $3p = 2q \Rightarrow q = \frac{3p}{2}$

$$\frac{7p}{2} - 16 = \frac{3p}{2} \xRightarrow{\times 2} 7p - 32 = 3p \Rightarrow 4p = 32 \Rightarrow \boxed{p = 8}$$

گراف های کامل:

گراف G از مرتبه n را گراف کامل می گویند هرگاه درجه هر رأس آن (n-1) باشد. به عبارت دیگر هر راس آن با تمام رئوس دیگر مجاور باشد.

گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می دهیم.

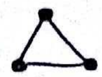
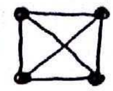
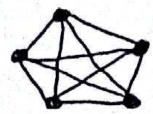
تذکر مهم:

۱) K_n یک گراف n راسی و n-1 - منتظم است.

۲) یک گراف کامل n راسی به تعداد $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \times (n-2)!}$ یال دارد.

۳) گراف کامل از مرتبه P را با K_P نیز نمایش می‌دهند $(K_n = K_P)$

ساختار گراف‌های کامل تا مرتبه ۵ :

مرتبه (راس‌ها) $= n = p$	۱	۲	۳	۴	۵
نمودار	K_1	 K_2	 K_3	 K_4	 K_5
اندازه (یالها) $= q$	۰	۱	۳	۶	۱۰

درجه‌ها و تعداد یالهای گراف کامل :

درجه هر راس در K_P برابر $P-1$ است ، چون هر راس به همه راس‌های دیگر وصل است پس گراف کامل $(P-1)$ - منتظم است .

به عنوان مثال K_5 همان گراف ۴ - منتظم است. و اما تعداد یالها :

$$\text{مجموع درجه‌ها} = 2q \Rightarrow \underbrace{(P-1)+(P-1)+\cdots+(P-1)}_{P \text{ تا}} = 2q \Rightarrow P(P-1) = 2q$$

$$\Rightarrow q = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow \boxed{q(K_P) = \frac{P(P-1)}{2}}$$

فرمول تعداد یالهای گراف کامل P راسی

(مثال)

K_5 تعداد یالهای گراف $= q(K_5) = \frac{5(5-1)}{2} = 10$ تا

K_7 تعداد یالهای گراف $= q(K_7) = \frac{7(7-1)}{2} = 21$ تا

مثال ۱) حاصلضرب مرتبه در اندازه یک گراف کامل برابر ۹۰ می‌باشد. این گراف چند منتظم است ؟

$P =$ مرتبه

$q =$ اندازه

$$P \cdot q = 90 \Rightarrow P \times \frac{P(P-1)}{2} = 90 \Rightarrow P \times P \times (P-1) = 180 = 6 \times 6 \times 5$$

$\Rightarrow \boxed{P = 6} \Rightarrow$ است K_6 گراف $\Leftarrow$ منتظم است ۵ - گراف

مثال ۲) با کم کردن ۳۳ یال از یک گراف کامل، گراف ۴- منتظم بدست می‌آید. مرتبه گراف کامل را بدست آورید.

گراف = ۴- منتظم p رأسی $\Rightarrow 4p = 2q \Rightarrow q = 2p$

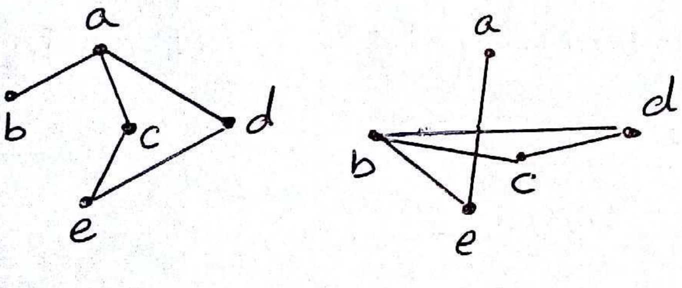
گراف = کامل p رأسی $\Rightarrow q = \frac{p(p-1)}{2}$

$$\frac{p(p-1)}{2} - 33 = 2p \xrightarrow{\times 2} p^2 - p - 66 = 4p \Rightarrow p^2 - 5p - 66 = 0$$

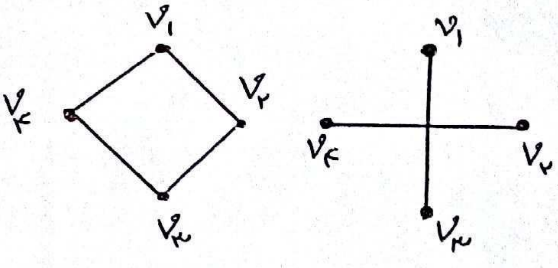
$\Rightarrow (p-11)(p+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 11 & \text{ق ق} \Rightarrow \text{گراف مورد نظر} = K_{11} \\ p = -6 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

مکمل گراف:

مکمل گرافی مانند G که آن را با $\overline{G}$ (یا G^c) نمایش می‌دهیم گرافی است که مجموعه رئوس آن همان مجموعه رئوس گراف G است و بین دو رأس از $\overline{G}$ یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو راس در G یالی وجود نداشته باشد.



G $\qquad$ $\overline{G}$



G $\qquad$ $\overline{G}$

تذکر مهم:

۱) اگر تعداد یالهای گرافهای G و $\overline{G}$ را باهم جمع کنیم، برابر تعداد یالهای گراف کامل K_p می‌شود یعنی:

$$q(G) + q(\overline{G}) = \frac{p(p-1)}{2}$$

۲) درجه یک رأس در گراف G را اگر با درجه همان رأس در $\overline{G}$ جمع کنیم درجه آن راس در گراف کامل می‌شود یعنی: $deg_G(v) + deg_{\overline{G}}(v) = p-1$

۳) مکمل گراف ۲- منتظم، گرافی ۳- منتظم است و $2+3=p-1$

۴) مکمل گراف کامل، گراف $\varnothing$ است چون در گراف کامل تماماً یالها رسم شده است.

مثال) تعداد یالهای گراف G با تعداد یالهای گراف $\bar{G}$ برابر است. مرتبه گراف در تقسیم بر ۴ چه باقیمانده‌ای دارد؟

$q(G)=q(\bar{G})$

$$q(G)+q(\bar{G})=\frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 2q(G)=\frac{P(P-1)}{2}$$

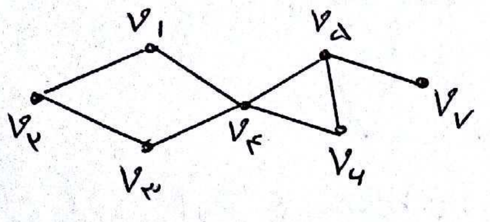
$$\Rightarrow q(G)=\frac{P(P-1)}{4}$$

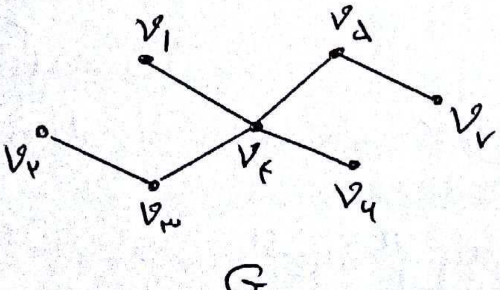
q باید عددی صحیح باشد یعنی $4|P(P-1)$ می‌دانیم هر عدد صحیح مانند P به یکی از صورتهای $4k$ و $4k+1$ یا $4k+2$ یا $4k+3$ است اگر $P=4k$ یا $P=4k+1$ باشد $P(P-1)$ مضرب ۴ می‌شود پس مرتبه یا بر ۴ بخشپذیر است یا اینکه باقیمانده‌ای برابر ۱ در تقسیم بر ۴ دارد.

زیرگراف:

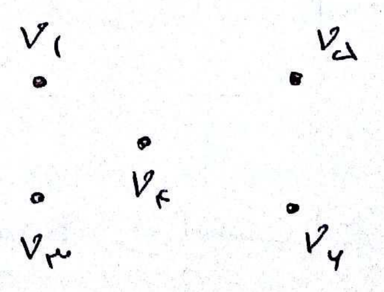
یک زیرگراف از گراف G، گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یالهای آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه یالهای G باشد.

مثال: ۴ زیرگراف از گراف مقابل را رسم کنید.

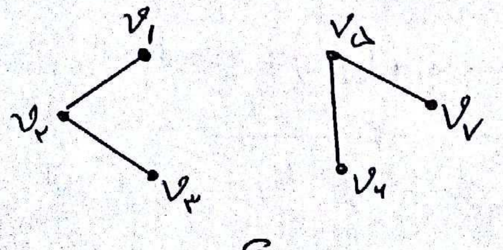




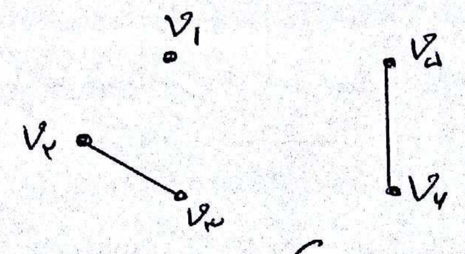
G_1



G_2



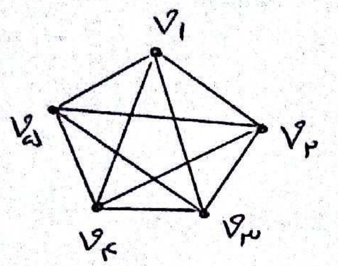
G_3



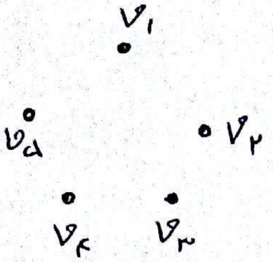
G_4

تذکر مهم: هر گراف، زیرگراف خودش است.

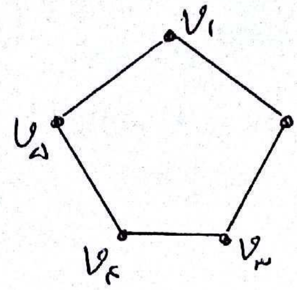
مثال ۲: پنج زیرگراف ۵ رأسی منتظم از گراف K_5 با رأس های $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ را رسم کنید.



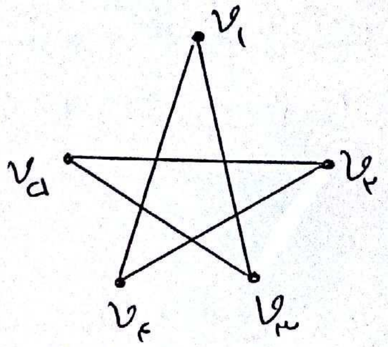
حل: گراف K_5 بصورت مقابل است اگر قرار باشد زیرگراف ۵ رأسی و r- منتظم باشد r نمی‌تواند فرد باشد (فرد منتظم مرتبه فرد نداریم) پس:



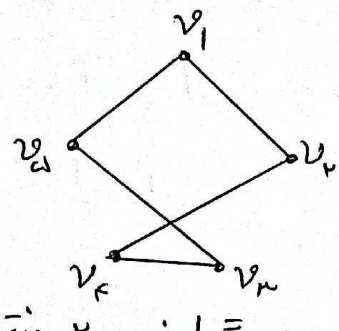
زیرگراف ۰- منتظم
(گراف تهی)



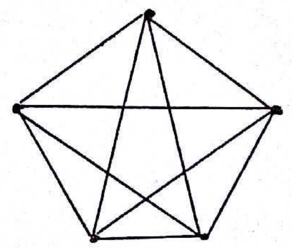
زیرگراف ۲- منتظم



زیرگراف ۲- منتظم



زیرگراف ۲- منتظم



زیرگراف ۴- منتظم که خود گراف است

نکته ریاضی:

تعداد زیرگراف های کامل در گراف کامل K_p برابر است با: 2^p-1

اثبات: می دانیم: تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی $=\underbrace{\binom{n}{0}}_{1}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$

تعداد زیرگراف های کامل در K_p $=\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\dots+\binom{p}{p}=2^p-1$

مثال) گراف K_6 چند زیرگراف کامل دارد؟

جواب $=2^6-1=64-1=63$ تا

تمرین ۱ : گراف G از مرتبه ۱۲ و اندازه ۱۰ است. اگر $deg_G(v)=3$ باشد $q(\bar{G})$ و $deg_{\bar{G}}(v)$ را بدست آورید.

$$q(G)+q(\bar{G})=\frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 10+q(\bar{G})=\frac{12\times 11}{2} \Rightarrow q(\bar{G})=56$$

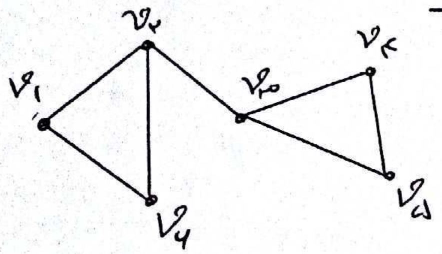
$$deg_G(v)+deg_{\bar{G}}(v)=P-1 \Rightarrow 3+deg_{\bar{G}}(v)=12-1 \Rightarrow deg_{\bar{G}}(v)=8$$

تمرین ۲ : مکمل گرافی از مرتبه P که $(2P-7)$-منتظم است، گرافی ۲-منتظم است. P را بدست آورید.

$r=2P-7$

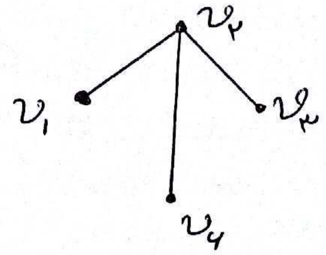
$r'=2$

$$r+r'=P-1 \Rightarrow 2P-7+2=P-1 \Rightarrow \boxed{P=4}$$

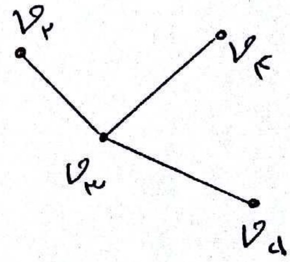


تمرین ۳ : گراف G بصورت مقابل است.

الف) زیرگرافی ۴ راسی از اندازه ۳ رسم کنید.



یا



ب) G چند زیرگراف دارد که دو راس از درجه ۳ داشته باشد.

حل : مطابق شکل بالا : v_2 و v_3 باید باشند. یال v_1v_4 می‌تواند باشد یا نباشد (۲ حالت) یال v_4v_5 هم می‌تواند باشد یا نباشد (۲ حالت) پس طبق اصل ضرب $2\times2=4$ زیرگراف با دو راس از درجه ۳ می‌توانیم داشته باشیم

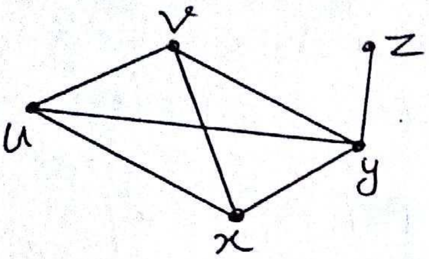
نکته ریاضی :

گراف G از مرتبه P و اندازه q است تعداد زیرگراف های هم مرتبه با G برابر است با : 2^q

مثال) گراف تمرین ۳ در بالا از اندازه $q=7$ است چند زیرگراف هم مرتبه با خودش دارد؟ $2^q=2^7=128$ تا = جواب

مسیر در گراف:

فرض کنید u و v دو رأس از گراف G باشند. یک مسیر از u به v (که به آن $u-v$ مسیر می‌گوییم) در G دنباله‌ای متشکل از رأس‌های دو به دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود بطوریکه هر دو راس متوالی در این مسیر، مجاور هستند. طول مسیر همان تعداد یالهای طی شده است که یکی کمتر از تعداد رأس‌ها است (مثال)



uv = یک $u-v$ مسیر به طول ۱

uxv = یک $u-v$ مسیر به طول ۲

$uxyv$ = یک $u-v$ مسیر به طول ۳

$uxvyz$ = یک $u-z$ مسیر به طول ۴

تذکر مهم:

۱) هر رأس به تنهایی، یک مسیر به طول صفر از خودش به خودش است

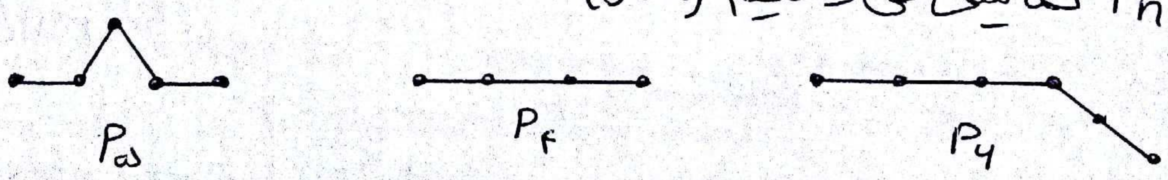
۲) تعداد مسیرهای به طول صفر، برابر تعداد راس‌ها (مرتبه گراف) است

۳) تعداد مسیرهای به طول ۱ همان تعداد یالهای گراف (اندازه گراف) است

۴) جهت حرکت در مسیر مهم نبوده و فقط یالهای طی شده مهم است در مثال بالا مسیر $uxyv$ با مسیر $vyxu$ فرقی ندارد و یک مسیر است.

تعریف مسیر n رأسی:

گرافی که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد را مسیر n رأسی گفته و با P_n نمایش می‌دهیم (مثال)

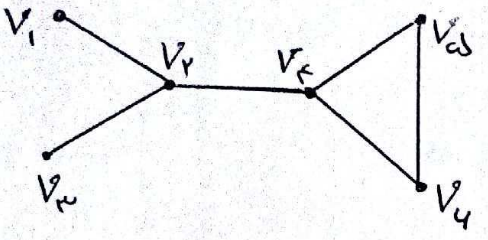


تذکر مهم:

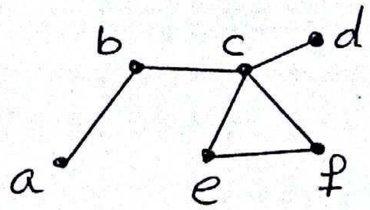
طول مسیر P_n برابر $n-1$ است (تعداد راس‌ها یک واحد بیشتر از طول مسیر است)

گراف های همبند :

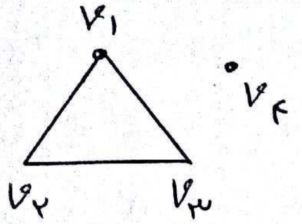
گراف G را همبند می گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر اینصورت آنرا ناهمبند می گویند



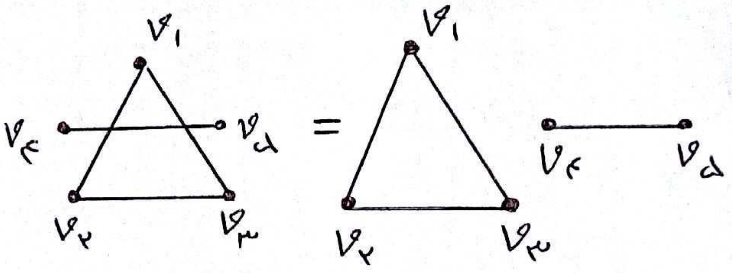
همبند



همبند



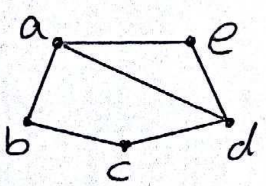
ناهمبند



ناهمبند

دور در گراف :

یک دور به طول m در گراف G دنباله ای از $m+1$ رأس که راس های متوالی مجاور بوده و m راس اول آن دو به دو متمایز بوده و رأس آخر همان راس اول باشد حداقل طول دور برابر ۳ می تواند باشد.

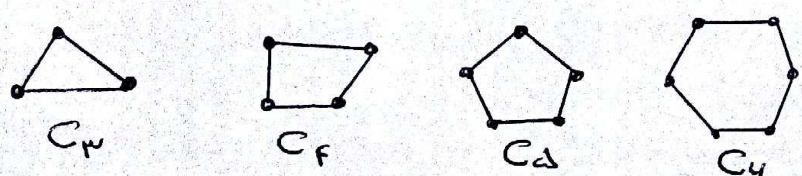


دوری به طول ۴ = abcda

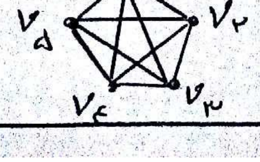
دوری به طول ۳ = aeda

تعریف دور n رأسی :

گرافی که تنها از یک دور n راسی تشکیل شده باشد را دور n راسی گفته و با نماد C_n نشان می دهند (مثال)



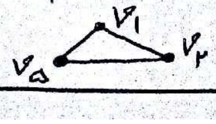
C_3 C_4 C_5 C_6

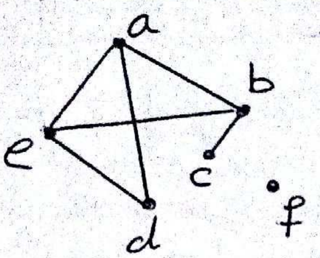


مثال) گراف K_5 چند زیرگراف بصورت C_3 دارد؟

جواب = $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$

مثلاً :





(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۹) (نمره ۱٫۲۵)

گراف G را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید

جواب: $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$

ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید جواب: a, b, e, d, a

پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.

جواب: مسیر به طول ۳ $= a, e, b, c$ مسیر به طول ۴ $= a, d, e, b, c$

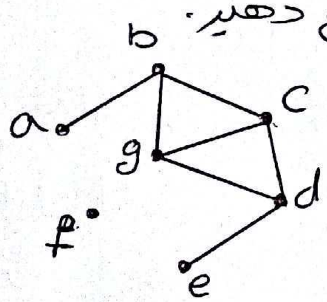
(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۹)

در گراف G، درجه رأس ۷ برابر با $\underline{9}$ است و درجه رأس ۷ در گراف $\bar{G}$ برابر با $\underline{12}$ است. مرتبهٔ گراف G را مشخص کنید (۰٫۷۵ نمره)

$$\deg_G(7) + \deg_{\bar{G}}(7) = P - 1 \Rightarrow 9 + 12 = P - 1 \Rightarrow P = 22$$

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۷) (۱٫۵ نمره)

با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) یک $a-c$ مسیر به طول ۳ بنویسید.

جواب: $abgc$

ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.

جواب: $bcdgb$

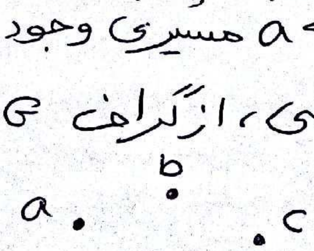
ج) درجه رأس a در گراف $\bar{G}$ را تعیین کنید.

جواب: $\deg_{\bar{G}}(a) = 5$

د) آیا گراف G همبند است؟ چرا؟

جواب: خیر، چون مثلاً از f به a مسیری وجود ندارد.

هـ) یک زیرگراف تهی ۵ رأسی، از گراف G رسم کنید.



(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۷) (۱نمره)

گراف G با مجموعه رأسهای $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ و مجموعهٔ یالهای $E(G)=\{ae,bc,bd,be,ec,ed\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمتهای (الف) تا (ج) پاسخ دهید:

الف) مجموعه همسایگی باز راس d را بنویسید: جواب: $N_G(d)=\{b,e\}$

ب) اندازه گراف را مشخص کنید: جواب: $q=6$

ج) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

۱۲ = مجموع درجات رئوس

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۷) (۱نمره)

گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف، مرتبهٔ گراف و $\Delta(G)$ را مشخص کنید (۱نمره)

$$q(K_p)=\frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow \frac{P(P-1)}{2}=36 \Rightarrow$$

$$P(P-1)=72=9\times 8 \Rightarrow \boxed{P=9} \qquad \Delta(G)=P-1=9-1=8$$

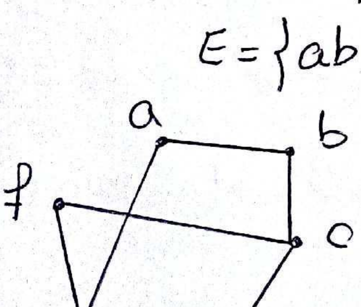
$$\delta(G)=8$$

(هماهنگ شهریور ۹۸) (۲ نمره)

گراف G با مجموعه راس‌های $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ و مجموعه یالهای زیر را در نظر بگیرید:

$E=\{ab,bc,cd,ed,ae,cf,ef\}$

الف) نمودار گراف را رسم کنید.



ب) $N_G[b]$ را مشخص کنید: $N_G[b]=\{a,b,c\}$

ج) یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.

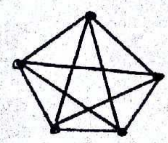
b,a,e,f,c,d

(هماهنگ کشوری - شهریور ۹۸) (۱نمره)

یک گراف ۵ راسی غیرتهی k- منتظم رسم کنید بطوریکه:

الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

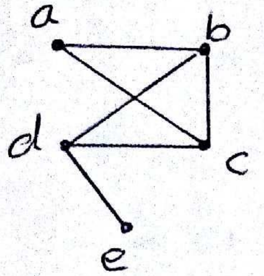


(الف)

(ب)

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۸) (۱/۲۵ نمره)

گراف G بصورت مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) $\delta(G)$ را مشخص کنید $\delta(G)=1$

ب) اندازه گراف را تعیین کنید: $q=6$

پ) مجموعه همسایگی بسته راس b را بنویسید.
$N_G[b]=\{b,a,c,d\}$

ت) اگر $N_G(d)=\{e,x,b\}$ باشد، x کدام راس است؟ $x=c$

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۸) (۱ نمره)

الف) گراف k- منتظم از مرتبه n را تعریف کنید $(0\leq k<n)$

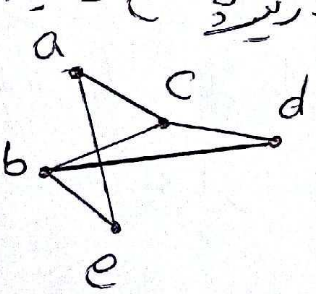
جواب: گرافی از مرتبه n که درجه تمام رئوس آن باهم مساوی و برابر k باشد

ب) آیا گراف ۳- منتظم از مرتبه ۵ وجود دارد؟ دلیل بیاورید.

جواب: وجود ندارد زیرا: $\sum_{i=1}^{5}\deg v_i=2q \Rightarrow 5\times 3=2q$ تناقض

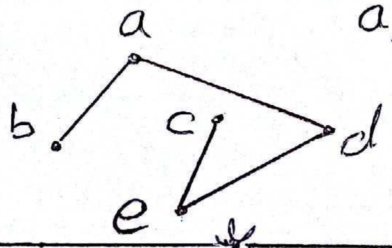
(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۸) (۱ نمره)

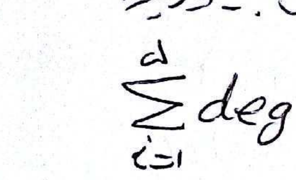
گراف G بصورت مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید:



الف) دوری به طول ۵ مشخص کنید.
جواب: a, c, d, b, e, a

ب) مکمل گراف G را رسم کنید:





(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸) (۱/۵ نمره)

الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.
$p=6\ ,\ q=7$

ب) مجموعه $N_G(b)$ را بنویسید.
$N_G(b)=\{a,d,c\}$

ج) مجموع درجه‌های راس‌های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید

$q(\bar{G})+q(G)=\frac{p(p-1)}{2}\Rightarrow q(\bar{G})+7=\frac{6(6-1)}{2}$

$\Rightarrow q(\bar{G})=8$

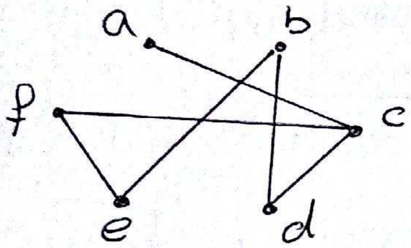
$\Rightarrow \sum \deg_{\bar{G}} v=2q=2\times 8=16$

تذکر مهم: $N_G(a)$ = مجموعه همسایگی باز رأس a ← شامل رأس a نیست

$N_G[a]$ = مجموعه همسایگی بسته رأس a ← شامل رأس a است

★ تمرینات مهم فصل ۲ درس ۱ با پاسخ ★

۱) گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$ و مجموعهٔ یالهای $E(G)=\{ab,ac,cd,ef,db,cf,be\}$ مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید:



الف) مرتبه و اندازهٔ گراف G را بنویسید:

$P=6 \qquad q=7$

ب) درجه رأس‌های G را مشخص نمایید.

$deg(a)=deg(d)=deg(e)=deg(f)=2 \qquad deg(b)=deg(c)=3$

پ) کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟ رأس‌های c و e

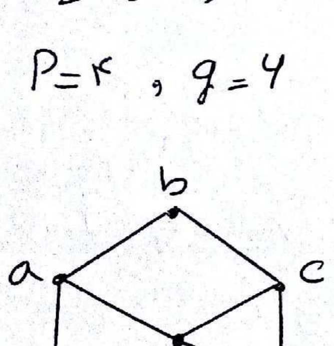
ت) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟ $2q=2\times 7=14$

ث) گراف H با مجموعه رأس‌های $V(H)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ و مجموعه یالهای $E(H)=\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_1\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمتهای (الف) تا (ت) در مورد گراف H پاسخ دهید.

$P=4 \ , \ q=6 \ , \ deg(v_1)=deg(v_2)=deg(v_3)=deg(v_4)=3 \ , \ 2q=12$

---

۲) گراف G را در نظر بگیرید.



الف) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

$V(G)=\{a,b,c,d,e,f\} \qquad E(G)=\{ab,bc,cd,ce,de,ea,af\}$

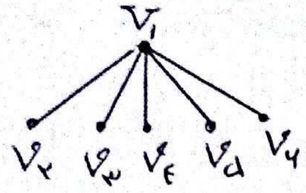
ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. $\Delta(G)=3 \ , \ \delta(G)=1$

پ) مجموعه همسایه‌های رأس‌های f و g و e را بنویسید.

$N_G(f)=\{a\} \qquad N_G(g)=\varnothing \qquad N_G(e)=\{a,c,d\}$

ت) اگر $N_G(x)=\{a,c\}$ آنگاه x کدام رأس است؟ x رأس b است.

۳) گراف G با مجموعه رأس های $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ مفروض است. اگر $N_G(v_1)$ دارای ۵ عضو باشد و مجموعه های $N_G(v_i)$ برای $2\leq i\leq 6$ تک عضوی باشند. گراف G را رسم کنید:

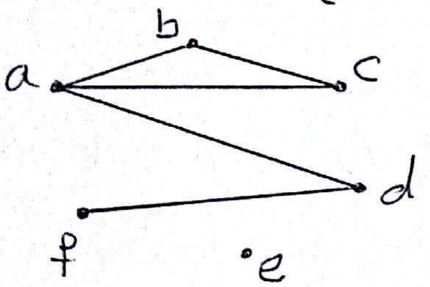


$$P=6 \Rightarrow N_G(v_1)=5$$

پس v_1 به تمام رئوس دیگر وصل است و چون $2\leq i\leq 6$ پس $N_G(v_i)$ تک عضوی است پس $v_2,\dots,v_6$ فقط به یک رأس وصل هستند که همان v_1 است

---

۴) در گراف G با مجموعه راس های $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$ داریم:



$N_G(a)=\{b,c,d\}$ $N_G(b)=\{a,c\}$

$N_G(c)=\{a,b\}$ $N_G(d)=\{a,f\}$

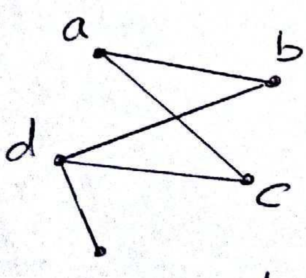
$N_G(e)=\{\ \}$ $N_G(f)=\{d\}$

گراف G را رسم و اندازه آن را مشخص کنید

$$P=6\ ,\quad q=5$$

---

۵) گراف G رسم شده است. مجموع درجه های رأس های گراف G را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس a و c در گراف $\bar{G}$ را تعیین نمایید.



$$P=5\ ,\quad q=6$$

$$q(G)+q(\bar{G})=\frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 6+q(\bar{G})=\frac{5\times 4}{2}$$

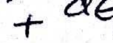
$\Rightarrow q(\bar{G})=4 \Rightarrow$ مجموع درجات رئوس $\bar{G}$ $=2q(\bar{G})=8$

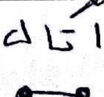
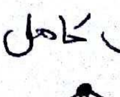
$$deg_G(a)+deg_{\bar{G}}(a)=P-1 \Rightarrow 2+deg_{\bar{G}}(a)=5-1 \Rightarrow deg_{\bar{G}}(a)=2$$

$$deg_G(c)+deg_{\bar{G}}(c)=P-1 \Rightarrow 3+deg_{\bar{G}}(c)=5-1 \Rightarrow deg_{\bar{G}}(c)=1$$

---

۶) گراف های کامل از مرتبه ۱ تا ۵ را رسم کنید

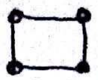
K_1: K_2: 

K_3:  K_4:  K_5: 

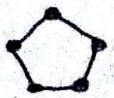
۷) در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r - منتظم از مرتبه n رسم کنید.

الف) $n=4$
$r=1$

ب) $n=4$
$r=2$

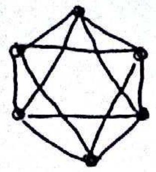


ت) $n=5$
$r=2$



پ) $n=5$
$r=3$
۵ راس درجه فرد نداریم

ث) $n=6$
$r=4$

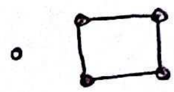


ج) $n=7$
$r=3$
۷ راس درجه فرد نداریم

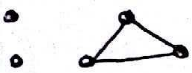
---

۸) برای هر یک از حالتهای زیر در صورت امکان یک گراف ۵ راسی رسم کنید بطوریکه:

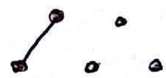
الف) یک راس تنها داشته باشد



ب) دو راس تنها داشته باشد

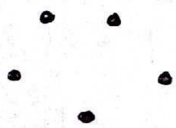


پ) سه راس تنها داشته باشد



ت) چهار راس تنها داشته باشد
امکان ندارد

ث) پنج راس تنها داشته باشد



---

۹) هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می‌دهند ۶ نفر از آنها هرکدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

حل: هفت نفر را رئوس گراف در نظر می‌گیریم و ۲ نفری را که باهم دست داده اند بهم وصل می‌کنیم، ۶ تا راس درجه ۲ خواهیم داشت اگر نفر هفتم با ۵ نفر دست داده باشد درجه آن ۵ است و فقط یک راس درجه فرد داریم که امکان پذیر نیست.

---

۱۰) علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد در یک شبکه اجتماعی عضو هستند و هرکدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هرکدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد:

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

e = مهرداد ، d = ناصر ، c = محمد ، b = سعید ، a = علی

y در فهرست دوستان x است = (x, y)

تمام حالتهای ممکن = {(a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (b,a), (b,c), (b,d), (b,e), (c,a), (c,b), (c,d), (c,e), (d,a), (d,b), (d,c), (d,e), (e,a), (e,b), (e,c), (e,d)} ⇐ جمعاً = ۲۰ حالت

ب) اگر بودن در فهرست دوستان، رابطه‌ای دوطرفه داشته باشد یعنی هر دو نفر یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

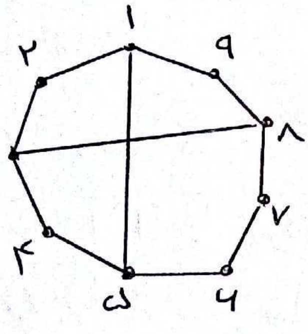
حل: فقط ۱۰ حالت کلی می‌تواند وجود داشته باشد.

{ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de}

---

۱۱) یک گراف ۹ راسی رسم کنید بطوریکه:

الف) دورهایی به طول ۵، ۶، ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.



دور به طول ۵ = ۱۲۳۴۵۱

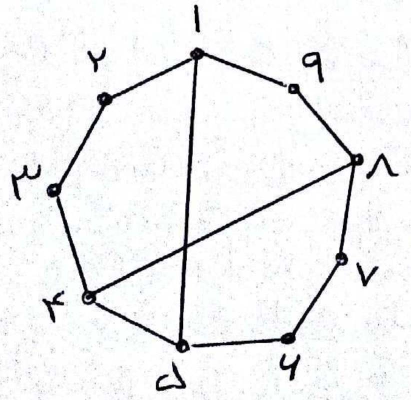
دور به طول ۶ = ۱۵۶۷۸۹۱

دور به طول ۷ = ۱۲۳۸۷۶۵۱

دور به طول ۹ = ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱

دور به طولهای دیگر وجود ندارد.

ب) دورهایی به طول ۵، ۶، ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.



دور به طول ۵ = ۱۲۳۴۵۱

دور به طول ۶ = ۱۵۶۷۸۹۱

دور به طول ۸ = ۱۲۳۴۸۷۶۵۱

دور به طول ۹ = ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱

دور به طولهای دیگر وجود ندارد.

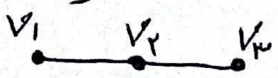
۱۲) فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G)\geq k$ ، درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید:

الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول k است

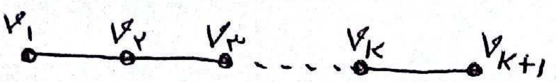
جواب: درست است

فرض کنید v_1 یک راس از گراف باشد چون $\delta(G)\geq k$ پس v_1 به حداقل یک راس دیگر مانند v_2 وصل است.

چون $deg(v_2)\geq k$ پس v_2 به حداقل یک راس دیگر وصل است.



و اگر همین طور ادامه دهیم نمودار زیر قابل رسم است که یک مسیر به طول k است.



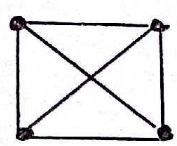
ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول k+1 است.

جواب: نادرست است

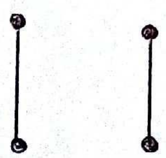
$\delta(G)\geq 2$ ولی مسیر به طول ۳ نداریم

۱۳) یک گراف ۴ راسی غیر تهی k- منتظم بکشید که:

الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد



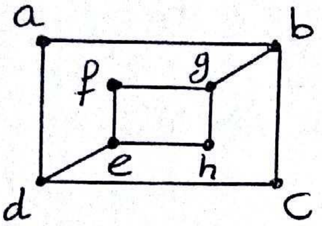
ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.



درس ۲ : مدل سازی با گراف

تعریف مجموعهٔ احاطه‌گر :

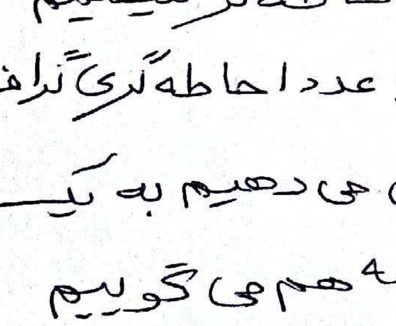
زیر مجموعه D از راس های گراف را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر راس از گراف که در D نباشد، حداقل به یکی از راس‌های D وصل باشد.



در گراف مقابل $D=\{a, f, h, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است چون راسهای دیگر گراف که در D نیستند (یعنی راسهای b و g و e و d) به یکی از راسهای D وصل هستند مجموعه $D=\{a, b, g, e, d\}$ هم می‌تواند یک مجموعه احاطه‌گر دیگر باشد چون راسهای دیگر گراف که در D نیستند به یکی از راسهای D وصل هستند. در گراف G هر راس خودش و همه راسهای دیگر گراف G را پوشش می‌دهد و احاطه می‌کند

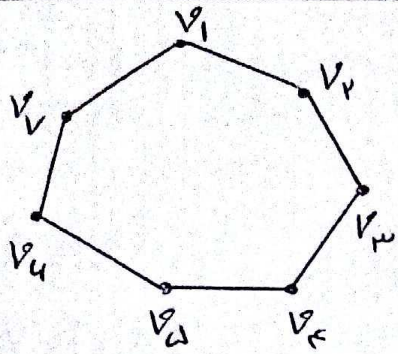
تعریف مجموعه احاطه‌گر مینیمم :

در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه (یا مجموعه‌ها) که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم نامیده و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ (گامای جی) نشان می‌دهیم به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم، یک γ- مجموعه هم می‌گوییم



مجموعه احاطه‌گر مینیمم $D=\{b, e\}$

$\gamma(G)=2$



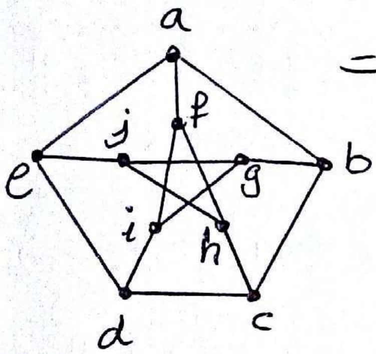
مثال) برای گراف مقابل که دور C_7 است مطلوبست محاسبه $\gamma(G)=?$ و یک مجموعه احاطه گر؟

$\{v_7 , v_5 , v_3 , v_1\}$ = یک مجموعه احاطه گر

$\{v_7 , v_4 , v_1\}$ = یک مجموعه احاطه گر مینیمم

$\{v_5 , v_2 , v_1\}$ = یک مجموعه احاطه گر مینیمم دیگر

$$\gamma(G)=3$$



مثال) در گراف مقابل که به گراف پترسن معروف است مطلوبست:

الف) دو مجموعه احاطه گر معرفی کنید.

$D=\{a, b, c, d, e\}$ یا $D=\{a, j, i, c\}$

ب) دو مجموعه احاطه گر مینیمم معرفی کنید.

$D=\{a, i, h\}$ یا $D=\{a, g, c\}$ $\gamma(G)=3$

معرفی یک نماد:

می دانیم اگر x یک عدد صحیح باشد جزء صحیح x را با علامت $[x]$ نشان داده و آنرا بصورت زیر تعریف می کنیم

$$[x]=n \Leftrightarrow n \leq x < n+1 \qquad n \in \mathbb{Z}$$

یا $[x]=\begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ $\qquad [3]=3 \qquad [4/7]=4$

جزء صحیح عدد x را کف عدد x نیز می گویند و آنرا با علامت $\lfloor x \rfloor$ نشان داده و به آن کف x می گویند.

اگر x عددی غیر صحیح باشد برای نمایش عدد صحیح بعد از x از علامت $\lceil x \rceil$ استفاده می کنیم و آنرا سقف x می خوانیم در حالت کلی:

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$[۳] = \lfloor ۳ \rfloor = ۳$

$\lceil ۳ \rceil = ۳$

$[۳/۷] = \lfloor ۳/۷ \rfloor = ۳$ $\qquad \lfloor ۵/۱ \rfloor = ۵$

$\lceil ۳/۷ \rceil = ۴$ $\qquad \lceil ۵/۱ \rceil = ۶$

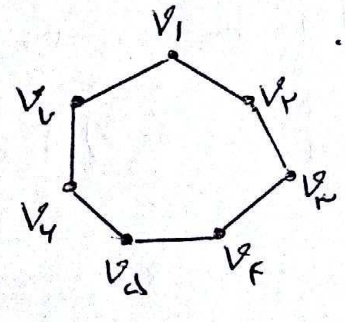
باتوجه به مثالهای بالا، اعداد کف و سقف در اعداد صحیح باهم برابرند

کران پایین $\gamma(G)$:

اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجه Δ باشد آنگاه: $\gamma(G) \geq \lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$

در گراف G عدد $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ را یک کران پایین $\gamma(G)$ می نامند یعنی $\gamma(G)$ نمی تواند از آن کمتر باشد

مثال ۱ : عدد احاطه گری گراف $C_۷$ را بدست آورید.



$\Delta = ۲$ و $n = ۷$

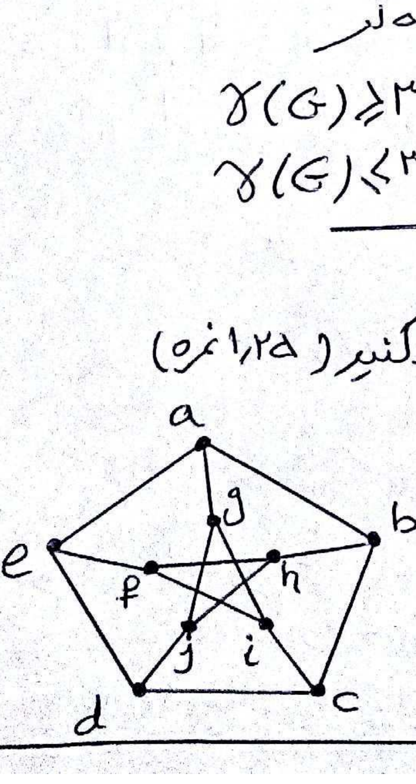
گراف ۲ـ منتظم است پس: $\gamma(G) \geq \lceil \frac{۷}{۲+۱} \rceil = ۳$

از طرفی $D = \{v_۱, v_۴, v_۶\}$ یک مجموعه احاطه گر است پس $\gamma(G) \leq ۳$

$$\left.\begin{matrix} \gamma(G) \geq ۳ \\ \gamma(G) \leq ۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \gamma(G) = ۳$$

مثال ۲ : (هماهنگ ـ خرداد ۹۹) :

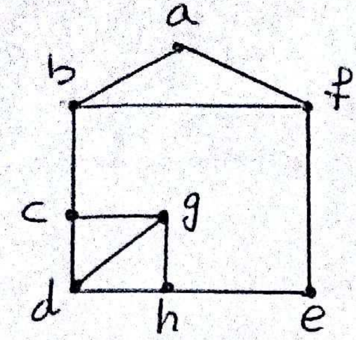
عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید (۱/۲۵ نمره)



حل: در گراف مقابل $n = ۱۰$ و $\Delta = ۳$ پس:

$$\gamma(G) \geq \lceil \frac{۱۰}{۳+۱} \rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq ۳$$

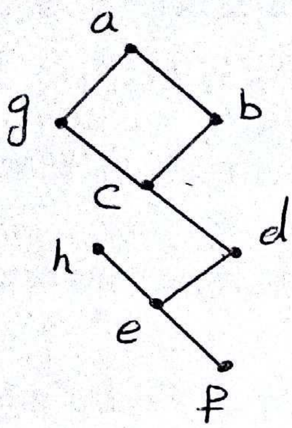
از طرفی $D = \{g, h, d\}$ یک مجموعه احاطه گری برای گراف است پس $\gamma(G) \leq ۳$ بنابراین: $\gamma(G) = ۳$



مثال ۳: عدد احاطه گری گراف مقابل را بدست آورید.

حل: گراف از مرتبه $n=8$ و $\Delta=3$ است

پس: $\gamma \geq \lceil \frac{8}{3+1} \rceil = 2$ از طرفی $\{f,g\}$ کل رأسها را احاطه می‌کنند پس $\gamma \leq 2$ درنتیجه: $\gamma = 2$



مثال ۴: عدد احاطه گری گراف مقابل را بدست آورید.

حل: گراف از مرتبه $n=8$ و $\Delta=3$ است

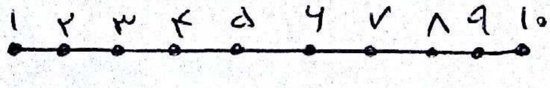
پس $\gamma \geq \lceil \frac{8}{3+1} \rceil = 2$ به نظر می‌رسد که با ۲ راس نمی‌توان کل راسها را احاطه کنیم زیرا برای احاطه کردن رئوس a ، b ، c ، d و g حداقل دو تا از آنها باید در مجموعه احاطه‌گر باشند (چون $\lceil \frac{5}{3+1} \rceil = 2$) و برای احاطه کردن رئوس e ، f و h حداقل یکی از آنها باید انتخاب شوند (چون $\lceil \frac{3}{3+1} \rceil = 1$) بنابراین حداقل ۳ راس باید در مجموعه احاطه‌گر باشد یعنی $\gamma(G) \geq 3$ از طرفی چون $\{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است پس $\gamma(G) \leq 3$ درنتیجه: $\gamma(G) = 3$

مثال ۵: گراف‌های P_{10} و P_9 و C_{10} و C_9 را رسم کنید و عدد احاطه‌گری هر یک را مشخص کنید

P_9:

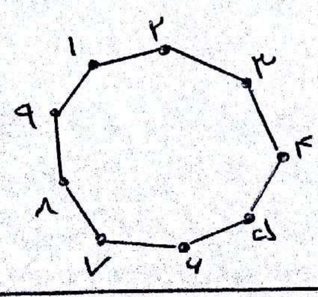
$\gamma(P_9) \geq \lceil \frac{9}{2+1} \rceil = 3$ از طرفی $\{۸, ۵, ۲\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است پس $\gamma(P_9) \leq 3$ درنتیجه: $\gamma(P_9) = 3$

P_{10}:

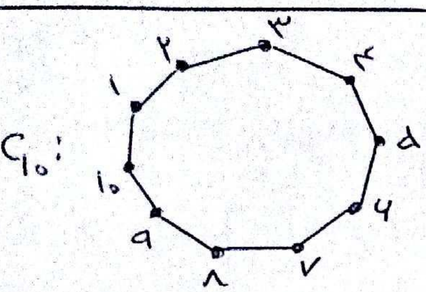


$\gamma(P_{10}) \geq \lceil \frac{10}{2+1} \rceil = 4$ از طرفی $\{۱۰, ۸, ۵, ۲\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است پس: $\gamma(P_{10}) \leq 4$ درنتیجه: $\gamma(P_{10}) = 4$

C_9:



$\gamma(C_9) \geq \lceil \frac{9}{2+1} \rceil = 3$ از طرفی $\{۱, ۴, ۷\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است پس: $\gamma(C_9) \leq 3$ درنتیجه: $\gamma(C_9) = 3$



$4 = \lceil \frac{10}{2+1} \rceil \le \gamma(C_{10})$ از طرفی $\{۱ , ۴ , ۷ , ۹\}$

یک مجموعه احاطه گر می باشد پس $\gamma(C_{10}) \le 4$

در نتیجه: $\gamma(C_{10}) = 4$

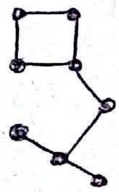
مثال ۷: (هماهنگ دیماه ۹۸) (نمره ۱٫۲۵)

اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیمم درجه گراف باشد:

الف) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه گر برابر $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ است.

جواب: اگر $n=10$ باشد C_{10} و P_{10} رسم شود چون $\gamma(G) = \lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = 4$

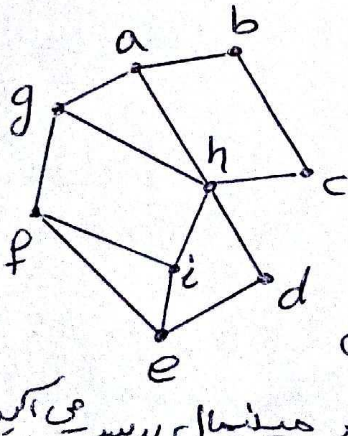
ب) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه گری بزرگتر از $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ باشد (یا برابر $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ نباشد)



$\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = 2$ ولی: $\gamma(G) = 3$

مجموعه احاطه گر مینیمال:

مجموعه احاطه گری که با حذف هر یک از رأس هایش، دیگر احاطه گر نباشد را احاطه گر مینیمال می گوییم.

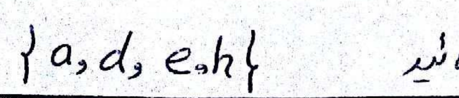


مثال ۱: (هماهنگ شهریور ۹۸):

در گراف مقابل یک مجموعه احاطه گر غیر مینیمال انتخاب کنید سپس با حذف برخی از راس ها آنرا به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کنید (۱ نمره)

$\{a, h, f, b\}$ = یک مجموعه احاطه گر غیر مینیمال

اکنون با حذف راس a از آن، یک مجموعه احاطه گر مینیمال بدست می آید.



مثال ۲: (هماهنگ شهریور ۹۸)

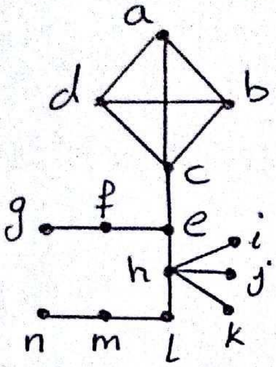
الف) گراف P_8 را رسم کنید. (۱٫۵ نمره)

ب) یک γ- مجموعه از آنرا مشخص کنید. $\{a, d, g\}$

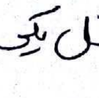
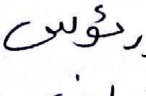
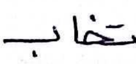
ج) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ عضوی از آن مشخص نمائید $\{a, d, e, h\}$

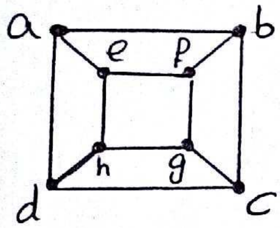
★ حل تمرینات مهم فصل ۲ درس ۲ با پاسخ ★

۱) عدد احاطه گری را برای هر یک از گراف های زیر مشخص نمایید.



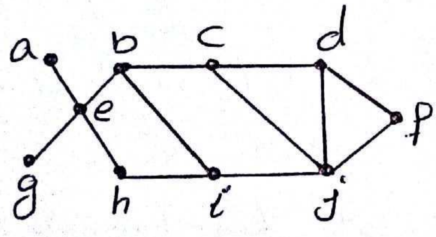
الف) $n=14$ و $\Delta=5$ پس: $\gamma(G)\geq\lceil\frac{14}{5+1}\rceil=3$

اما حداقل یکی از رئوس a، b، c و d باید انتخاب شود چون باید  احاطه شود حداقل یکی از رئوس e، f و g باید انتخاب شود تا گراف  احاطه شود حداقل یکی از رئوس h، i، j و k باید انتخاب شود تا گراف  باید احاطه شود حداقل یکی از رئوس l، m و n باید انتخاب شود تا گراف  احاطه شود بنابراین حداقل ۴ راس در هر مجموعه احاطه گر باید باشد لذا $\gamma(G)\geq 4$ از طرفی چون $\{c, f, h, m\}$ یک مجموعه احاطه گر است لذا $\gamma(G)\leq 4$ پس $\gamma(G)=4$

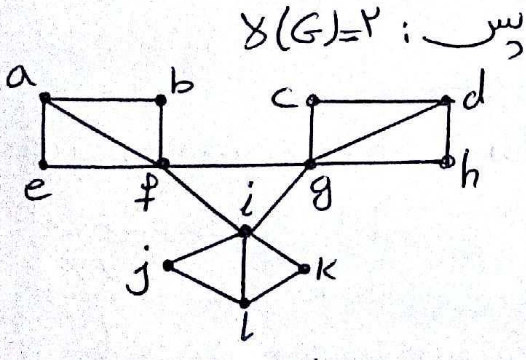


ب) $n=8$ و $\Delta=3$ پس $\gamma(G)\geq\lceil\frac{8}{4}\rceil=2$ از طرفی $\{h, b\}$ یک مجموعه احاطه گر است لذا $\gamma(G)\leq 2$

پس: $\gamma(G)=2$

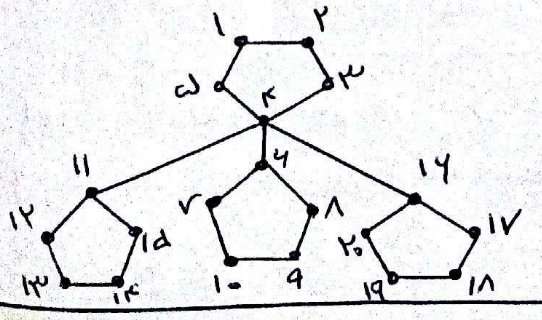


پ) $n=10$ و $\Delta=4$ پس $\gamma(G)\geq\lceil\frac{10}{5}\rceil=2$ از طرفی $\{e, j\}$ یک مجموعه احاطه گر است لذا $\gamma(G)\leq 2$ پس: $\gamma(G)=2$



ت) $n=12$ و $\Delta=5$ پس $\gamma(G)\geq\lceil\frac{12}{6}\rceil=2$

از طرفی $\{f, d, l\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمم است لذا $\gamma(G)\leq 3$ پس $\gamma(G)=3$



ث) $n=20$ و $\Delta=5$ پس $\gamma(G)\geq\lceil\frac{20}{6}\rceil=4$

از طرفی $\{2, 4, 8, 10, 12, 14, 17, 19\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمم است پس $\gamma(G)=8$

۲) اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G)=1$ در این صورت به چه ویژگی هایی از گراف G می توان پی برد؟

حل: چون $\gamma(G)=1$ پس یک راس وجود دارد که با همه رأسها مجاور است
در نتیجه: $\Delta(G)=p-1$ پس $q_{min}=p-1$ و گراف می تواند حداکثر یک گراف کامل باشد پس $q_{max}=\binom{p}{2}$

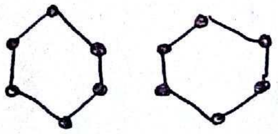
۳) $\gamma(P_n)$ و $\gamma(C_n)$ را به ازای هر $n\in N$ مشخص کنید.

پاسخ: $\gamma(C_n)=\lceil\frac{n}{3}\rceil$ و $\gamma(P_n)=\lceil\frac{n}{3}\rceil$

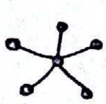
۴) اگر G یک گراف k- منتظم n راسی باشد نشان دهید $\gamma(G)\geq\lceil\frac{n}{k+1}\rceil$

حل: چون گراف k- منتظم است پس $\Delta=k$ و $\gamma(G)\geq\lceil\frac{n}{\Delta+1}\rceil=\lceil\frac{n}{k+1}\rceil$

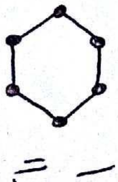
۵) یک گراف ۲- منتظم ۱۲ راسی بکشید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.



حل: می دانیم: $\gamma(G)\geq\lceil\frac{n}{k+1}\rceil$ پس $\gamma(G)\geq\lceil\frac{12}{3}\rceil$ پس $\gamma(G)\geq 4$
در شکل مقابل $\gamma(G)=4$

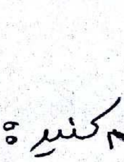


۶) یک گراف ۶ راسی که γ- مجموعه آن به اندازه یک باشد رسم کنید



۷) یک گراف ۶ راسی که γ- مجموعه آن به اندازه دو باشد رسم کنید

۸) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k\leq n$ روشی برای رسم یک گراف n راسی که عدد احاطه گری آن k باشد ارائه دهید

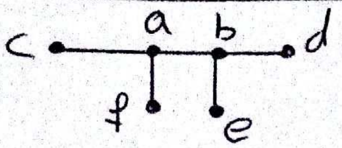


حل: کافیست k-1 راس ایزوله قرار دهیم و در بقیه رئوس یک راس را به تمام رئوس دیگر وصل کنیم مثلاً: $n=7$ و $k=3$ ، $\gamma(G)=3=k$

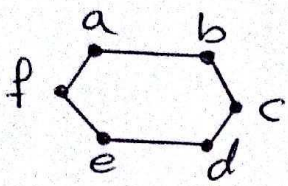
۹) (هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸) : گرافی ۶ راسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید:

الف) بطوریکه مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

ب) بطوریکه بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.



حل الف) گراف روبه‌رو از مرتبه ۶ و دارای تنها یک مجموعه احاطه‌گر یکتا $\{a,b\}$ است.



حل ب) گراف مقابل دارای سه مجموعه احاطه‌گری به اندازه ۲ است که عبارتند از: $\{e,b\}$ و $\{f,c\}$ و $\{a,d\}$

۱۰) برای هر $n\in \mathbb{N}$ $(n\geq 4)$ دلخواه توضیح دهید که:

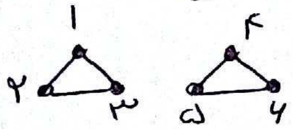
الف) چگونه می‌توانید یک گراف n راسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

حل: کافیست یک رأس ایزوله باشد و در بقیه رئوس یک راس را به همه رئوس دیگر وصل کرد.

ب) چگونه می‌توانید یک گراف n راسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد

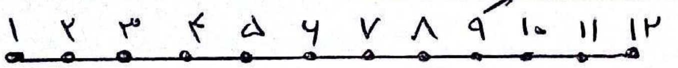
حل ب) کافیست دو گراف کامل مجزا بکشید مثلاً برای $n=10$ یک K_4 و یک K_6 بکشیم

در تمرین ۹ قسمت (ب) می‌توانستیم گراف را بصورت زیر هم رسم کنیم.



مجموعه‌های $\{1,4\}$ و $\{2,5\}$ مجموعه احاطه‌گرند

(هماهنگ - دیماه ۹۷)



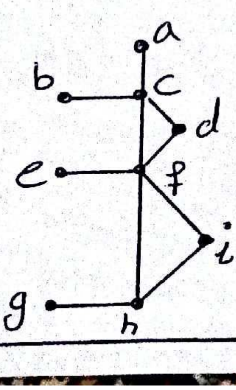
۱۱) گراف P_{12} را رسم کنید:

الف) یک γ- مجموعه از آن مشخص کنید

حل: مجموعه $\{2,5,8,11\}$ یک γ- مجموعه است.

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن مشخص کنید $\{1,3,5,7,9,11\}$

(هماهنگ - دیماه ۹۸)



برای گراف روبه‌رو:

الف) یک مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو مشخص کنید $\{c,f,h,g\}$

ب) مجموعه‌ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه‌گر مینیمال باشد $\{c,f,g\}$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸)

در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

الف) یک گراف کامل ۸ رأسی، ..... یال دارد. جواب: ۲۸

ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با ۳=Δ حداقل ..... راس برای احاطه همه رئوس لازم است.

جواب: ۳

ج) اگر در گراف G از مرتبه P داشته باشیم $\gamma(G)=1$ در اینصورت $\Delta(G)$ برابر ..... است.

جواب: $P-1$

(هماهنگ کشوری دیماه ۹۸)

درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید.

تعداد رأس‌های زوج هر گراف، عددی فرد است. جواب: نادرست

(هماهنگ - شهریور ۹۸)

جاهای خالی را پر کنید:

الف) گراف G را ..... می‌نامیم هرگاه بین هر دو راس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. جواب: همبند

ب) مقدار $\gamma(C_n)$ به ازای هر عدد طبیعی $n\geq 2$ برابر است با: ..... جواب: $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۷)

درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.

الف) گراف حاصل از مدل سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است

جواب: نادرست

ب) گراف ۳- منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست

جواب: درست

فصل ۳ : ترکیبیات (شمارش)

یادآوری مطالب سالهای قبل :

۱) اصل ضرب : اگر کاری در مرحله اول به m روش و در مرحله دوم به n روش و در مرحله سوم به P روش و ..... انجام شود کل کار به $m\times n\times P\times\dots$ روش انجام می شود

مثال) با حروف کلمه STOP چند کلمه چهار حرفی با تکرار حروف می توان نوشت در صورتیکه :

الف) با حرف T شروع شود $1\times ۴\times ۴\times ۴ = ۶۴$

ب) با حرف P شروع شود و به حرف O ختم شود $1\times ۴\times ۴\times 1 = 1۶$

۲) جایگشت : تعداد حالتهای کنار هم قرار گرفتن n شی متمایز را جایگشت آن n شی متمایز نامیده و برابر است با : $n!$

مثال) ۵ دانش آموز به چند طریق می توانند در یک صف بایستند ؟

$$۵! = ۵\times ۴\times ۳\times ۲\times 1 = 1۲۰$$

۳) n نفر به چند طریق می توانند در یک صف بایستند بطوریکه :

الف) k نفر مشخص همواره کنار هم باشند $(n-k+1)!\times k! =$ جواب

ب) k نفر مشخص همواره کنار هم نباشند $n!-(n-k+1)!\times k! =$ جواب

مثال) به چند طریق می توان ۷ دانش آموز را در یک صف قرارداد بطوریکه :

الف) دو نفر از آنها که برادرند کنار هم باشند.

$(۷-۲+1)!\times ۲! = ۶!\times ۲! = ۷۲۰\times ۲ = 1۴۴۰ =$ جواب

ب) دو نفر از آنها که برادرند کنار هم نباشند

$۷!-(۷-۲+1)!\times ۲! = ۷!-۶!\times ۲! = ۵۰۴۰-1۴۴۰ = ۳۶۰۰ =$ جواب

۴) تذکر مهم : $1! = 1$ و $0! = 1$

۵) جایگشت k شی از n شی متمایز:

تعداد حالتهای کنار هم قرار گرفتن k شی از n شی متمایز را با علامت $P(n,k)$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می کنیم:

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال) با حروف کلمه FAMILY و بدون تکرار حروف چند کلمه ۴ حرفی شامل حرف M می توان ساخت؟

حل: قرار دادن حرف M در یکی از چهار مکان به ۴ طریق ممکن است و پر کردن سه مکان باقیمانده توسط ۵ حرف باقیمانده به صورت زیر ممکن است:

$$P(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=۶۰ \text{ حالت}$$

$$\text{طبق اصل ضرب} = ۴\times ۶۰ = ۲۴۰ \text{ حالت}$$

---

۶) ترکیب k شی از n شی متمایز:

اگر از بین n شی متمایز بخواهیم k شی ($k \leqslant n$) را انتخاب کنیم و حالتهای کنار هم قرار گرفتن آنها اهمیتی نداشته باشد آنرا ترکیب k شی از n شی می گوئیم و با علامت $C(n,k)$ یا $\binom{n}{k}$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می کنیم:

$$C(n,k)=\frac{n!}{k!\times(n-k)!}$$

مثال) به چند طریق می توان از بین ۸ نفر یک تیم ۳ نفری انتخاب کرد؟

$$C(۸,۳)=\frac{۸!}{۳!\times ۵!}=۵۶$$

---

۷) جایگشتهای با تکرار:

اگر n شی متمایز داشته باشیم بطوریکه p تای آنها از نوع اول، q تای آنها از نوع دوم و r تای آنها از نوع سوم و ... باشد تعداد کل جایگشتهای اشیاء برابر است با:

$$\frac{n!}{p!\times q!\times r!\times\cdots}$$

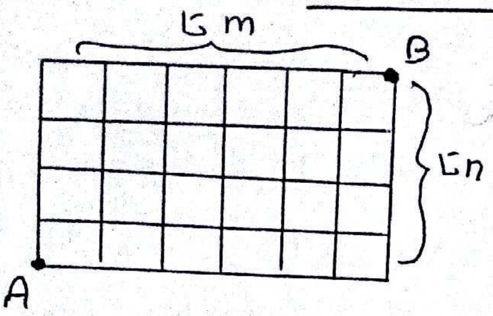
مثال) ۹ نفر به چند طریق می توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره در یک هتل اسکان یابند؟

$$\text{جواب}=\frac{۹!}{۲!\times ۳!\times ۴!}=\frac{۳۶۲۸۸۰}{۲۸۸}=۱۲۶۰$$

مثال) با حروف کلمه ساسانیان چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟

۲ تا = تعداد س　　۲ تا = تعداد ن
۳ تا = تعداد الف　　۱ تا = تعداد ی

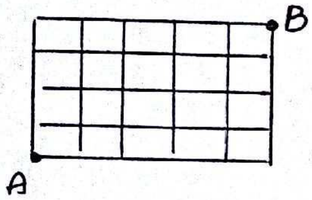
$$\frac{8!}{2!\times3!\times2!\times1!}=\frac{40320}{24}=1680$$



۸) اگر یک شبکه $n\times m$ مطابق شکل مقابل داشته باشیم و فقط به راست یا بالا حرکت کنیم تعداد مسیرها از A به B برابر است با:

$$\text{تعداد مسیرها}=\frac{(n+m)!}{n!\times m!}$$

مثال) چند مسیر از A به B وجود دارد بطوریکه فقط مجاز باشیم به راست یا بالا حرکت کنیم؟



$$\text{جواب}=\frac{(4+5)!}{4!\times5!}=\frac{362880}{2880}=126$$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۹)

با ارقام ۴ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟ (۰/۷۵ نمره)

۲ تا = تعداد ۱
۳ تا = تعداد ۲

$$\text{جواب}=\frac{7!}{2!\times3!}=420$$

(هماهنگ کشوری دیماه ۹۸)

با حروف کلمه «می سی سی پی» چند جایگشت ۸ حرفی با معنا یا بی معنا می‌توان نوشت؟ (۱ نمره)

۴ تا = تعداد (ی)
۲ تا = تعداد (س)

$$\text{جواب}=\frac{8!}{4!\times2!}=840$$

(هماهنگ کشوری دیماه ۹۸)

۶ کتاب ریاضی مختلف و ۵ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان کنار هم در یک ردیف قرار داد بطوریکه: (۱/۲۵ نمره)

الف) کتابها یکی در میان قرار گیرند. $\text{جواب}=6!\times5!$

ب) کتابهای ریاضی کنار هم و کتابهای فیزیک نیز کنار هم باشند. $\text{جواب}=6!\times5!\times2!$

(هماهنگ خرداد ۹۸)

با ارقام ۵ و ۴ و ۴ و ۲ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟ (۱ نمره)

تعداد ۱ = ۲ تا
تعداد ۲ = ۳ تا
تعداد ۴ = ۲ تا

$$\text{جواب} = \frac{۹!}{۲!\times ۳!\times ۲!} = ۳\times ۷!$$

(هماهنگ خرداد ۹۸)

۶ دانش آموز پایه دوازدهم و ۵ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند بطوریکه: (۱/۵ نمره)

الف) بصورت یک در میان قرار بگیرند $۵!\times ۶!$ = جواب

ب) همواره دانش آموزان یازدهم کنار هم باشند $۵!\times ۷!$ = جواب

ج) یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.
$۱۰!\times ۲!$ = جواب

(هماهنگ خرداد ۹۹)

۴ دانش آموز پایه دهم و ۳ دانش آموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند بطوریکه: (۱ نمره)

الف) هیچ دو دانش آموز دهم پایه کنار هم نباشند. $۴!\times ۳!$ = جواب

ب) همواره دانش آموزان پایه دهم کنار هم باشند. $۴!\times ۴!$ = جواب

(هماهنگ خرداد ۹۹)

به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم) (۱ نمره)

$$P(۸,۴) = \frac{۸!}{(۸-۴)!} = \frac{۸!}{۴!} = ۱۶۸۰$$

تعداد حالتهای ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های یک به یک از مجموعه ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی

حل معادلهٔ سیالهٔ خطی با ضرایب واحد:

قضیه: تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر است با:

$$\text{جواب}=\binom{n+k-1}{k-1}$$

که همان تعداد انتخابهای دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل است

مثال ۱: معادله $x_1+x_2+x_3=7$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

$n=7$
$k=3$

$$\text{جواب}=\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{7+3-1}{3-1}=\binom{9}{2}=\frac{9!}{2!\times 7!}=36$$

مثال ۲: به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل، دسته گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟

حل: تعداد گل‌های نوع اول را x_1 و نوع دوم را x_2 و نوع سوم را x_3 و نوع چهارم را x_4 درنظر می‌گیریم پس: $x_1+x_2+x_3+x_4=8$

$n=8$
$k=4$

$$\text{جواب}=\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{8+4-1}{4-1}=\binom{11}{3}=\frac{11!}{3!\times 8!}=165$$

مثال ۳: به چند طریق می‌توانیم ۸ توپ یکسان را در جعبه هایی با شماره های ۱و۲و۳ قرار دهیم؟

حل: تعداد توپهای جعبه اول را x_1 و جعبه دوم را x_2 و جعبه سوم را x_3 درنظر می‌گیریم پس: $x_1+x_2+x_3=8$

$n=8$
$k=3$

$$\text{جواب}=\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{8+3-1}{3-1}=\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!\times 8!}=45$$

مثال ۴: شش شکلات یکسان را به چند طریق می‌توان بین علی، رضا و محمد تقسیم کرد بطوریکه به محمد دقیقاً ۲ شکلات برسد؟

$x_1=$ تعداد شکلاتهای علی
$x_2=$ تعداد شکلاتهای رضا
$2=$ تعداد شکلاتهای محمد

$$x_1+x_2+2=6 \Rightarrow x_1+x_2=4$$

$n=4\ ,\ k=2$

$$\binom{4+2-1}{2-1}=\binom{5}{1}=5$$

نکته ریاضی:
تعداد جواب های طبیعی معادله $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر است با:

$$\text{جواب} = \binom{n-1}{k-1}$$

مثال ۱: معادله $x_1+x_2+x_3=5$ چند جواب صحیح و مثبت (طبیعی) دارد؟

$n=5$
$k=3$

$$\text{جواب} = \binom{n-1}{k-1} = \binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

مثال ۲: به چند طریق می توان دسته گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد به شرط آنکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟

حل: چون از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه باید انتخاب شود و جواب های معادله عدد طبیعی هستند

x_1 = تعداد گلهای نوع اول
x_2 = 〃 〃 〃 دوم
x_3 = 〃 〃 〃 سوم
x_4 = 〃 〃 〃 چهارم

$$x_1+x_2+x_3+x_4=9$$

$n=9$
$k=4$

$$\text{جواب} = \binom{n-1}{k-1} = \binom{8}{3} = 56$$

حل معادله $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ به روش تغییر متغیر:

اگر در معادله سیاله شرطهایی بصورت $x_1 \geq a$ و $x_2 \geq b$ و ... داشته باشیم در اینصورت متغیر را تغییر داده و معادله را طبق شرایط زیر حل می کنیم:

$$x_1 \geq a \Rightarrow x_1 - a \geq 0 \xrightarrow{\text{اگر } x_1-a=y_1} x_1 = y_1 + a \text{ و } y_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq b \Rightarrow x_2 - b \geq 0 \xrightarrow{\text{اگر } x_2-b=y_2} x_2 = y_2 + b \text{ و } y_2 \geq 0$$

مثال ۱: معادله $x_1+x_2+x_3=7$ چند جواب طبیعی دارد؟

$x_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 = y_1+1$
$x_2 \geq 1 \Rightarrow x_2 = y_2+1$
$x_3 \geq 1 \Rightarrow x_3 = y_3+1$

$$y_1+1+y_2+1+y_3+1=7 \Rightarrow y_1+y_2+y_3=4$$

$n=4$
$k=3$

$$\text{جواب} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

مثال ۲: معادله $x_1+x_2+\cdots+x_5=14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_1>1$ و $x_3>3$ باشد؟

$x_1>1 \Rightarrow x_1\geq 2 \Rightarrow x_1=y_1+2$

$x_3>3 \Rightarrow x_3\geq 4 \Rightarrow x_3=y_3+4$

$y_1+2+x_2+y_3+4+x_4+x_5=14$

$\Rightarrow y_1+x_2+y_3+x_4+x_5=8$

$n=8$, $k=5$: $\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{8+5-1}{5-1}=\binom{12}{4}=$

$=495$

مثال ۳: معادله $x_1+x_2+\cdots+x_6=12$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه $x_3=4$ و $x_5>2$ باشد؟

$x_5>2 \Rightarrow x_5\geq 3 \Rightarrow x_5=y_5+3$

$x_3=4$

$x_1+x_2+4+x_4+y_5+3+x_6=12$

$\Rightarrow x_1+x_2+x_4+y_5+x_6=5$

$n=5$, $k=5$: $\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{5+5-1}{5-1}=\binom{9}{4}=126$

مثال ۴: (هماهنگ کشوری - دیماه ۹۷):

به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟ (۱ نمره)

$x_1+x_2+x_3+x_4=8$ و $x_i\geq 1$ ، $i=1,2,3,4$

جوابهای طبیعی را خواسته است

$n=8$, $k=4$: $\Rightarrow \binom{n-1}{k-1}=\binom{8-1}{4-1}=\binom{7}{3}=35$

(هماهنگ کشوری - شهریور ۹۸):

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+\cdots+x_6=12$ باشرط $x_1>2$ و $x_5\geq 4$ را محاسبه کنید (۱ نمره)

$x_1>2 \Rightarrow x_1\geq 3 \Rightarrow x_1=y_1+3$

$x_5\geq 4 \Rightarrow x_5=y_5+4$

$y_1+3+x_2+x_3+x_4+y_5+4+x_6=12$

$\Rightarrow y_1+x_2+x_3+x_4+y_5+x_6=5$

$n=5$, $k=6$: $\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{5+6-1}{6-1}=\binom{10}{5}=252$

(هماهنگ دی ماه ۹۸):

معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_1>2$ و $x_3>3$ باشند (۱ نمره)

$x_1>2 \Rightarrow x_1\geq 3 \Rightarrow x_1=y_1+3$

$x_3>3 \Rightarrow x_3\geq 4 \Rightarrow x_3=y_3+4$

$y_1+3+x_2+y_3+4+x_4+x_5=14$

$\Rightarrow y_1+x_2+y_3+x_4+x_5=7$

$$\begin{matrix} n=7 \\ k=5 \end{matrix} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{11}{4}=330$$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸)

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+\dots+x_5=10$ با شرط $x_i>0$ و $i=2,3,4,5$ را محاسبه کنید (۱ نمره)

$x_2>0 \Rightarrow x_2\geq 1 \Rightarrow x_2=y_2+1$

$x_3>0 \Rightarrow x_3\geq 1 \Rightarrow x_3=y_3+1$

$x_4>0 \Rightarrow x_4\geq 1 \Rightarrow x_4=y_4+1$

$x_5>0 \Rightarrow x_5\geq 1 \Rightarrow x_5=y_5+1$

$x_1+y_2+1+y_3+1+y_4+1+y_5+1=10$

$\Rightarrow x_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6$

$$\begin{matrix} n=6 \\ k=5 \end{matrix} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{10}{4}=210$$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۹)

به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم (۱/۲۵ نمره)

$x_1+x_2+\dots+x_5=11$ و $x_2\geq 2$ و $x_5\geq 4$

$x_2\geq 2 \Rightarrow x_2=y_2+2$

$x_5\geq 4 \Rightarrow x_5=y_5+4$

$x_1+y_2+2+x_3+x_4+y_5+4=11$

$\Rightarrow x_1+y_2+x_3+x_4+y_5=5$

$$\begin{matrix} n=5 \\ k=5 \end{matrix} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{5+5-1}{5-1}=\binom{9}{4}=126$$

مثال) معادله $x_1+x_2+\dots+x_5=11$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ ($x_i\geq 1$ و $1\leq i\leq 5$)

$x_1\geq 1 \Rightarrow x_1=y_1+1$ $\quad x_2\geq 1 \Rightarrow x_2=y_2+1$ $\quad x_3\geq 1 \Rightarrow x_3=y_3+1$ $\quad x_4\geq 1 \Rightarrow x_4=y_4+1$

$x_5\geq 1 \Rightarrow x_5=y_5+1$ $\quad y_1+1+y_2+1+y_3+1+y_4+1+y_5+1=11 \Rightarrow y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6 \Rightarrow \binom{6+5-1}{5-1}=\binom{10}{4}$

مربع های لاتین:

یک جدول مربعی از اعداد ۱و۲و...و n به شکل یک مربع $n\times n$ را که سطرها و ستون های آن با اعداد ۱ و۲و...و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد مربع لاتین می نامیم به هر یک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می گوییم.

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

در حالت کلی شکل زیر یک مربع لاتین $n\times n$ است که به آن مربع لاتین چرخشی می گوییم

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{array}$$

تذکر مهم:
مربع لاتین از هر
مرتبه‌ای وجود دارد.
یک مربع لاتین 1×1 داریم ← $\boxed{1}$

ساختن مربع لاتین:

روش چرخشی: در سطر اول اعداد ۱و۲و۳و...و n را می گذاریم آخرین عدد سطر اول را که n است در ابتدای سطر دوم نوشته و بقیه عددها را در سطر دوم یکی یکی به راست می بریم و این کار را تکرار می کنیم.

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

تذکر مهم:
کل مربع های لاتین
مرتبه ۳ دو نوع هستند

a	b	c
c	a	b
b	c	a

روی قطر اعداد مساویند

a	c	b
c	b	a
b	a	c

روی قطر اعداد غیر تکراری اند

روش جابجایی سطر و ستون :
با تعویض جای هر دو سطر یا هر دو ستون یک مربع لاتین می‌توان مربع لاتین جدیدی ساخت.

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

$\xrightarrow{\text{تعویض ستون ۱ با ستون ۳}}$

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

$\xrightarrow{\text{تعویض سطر ۱ با سطر ۲}}$

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

روش جایگشت :
می‌توانیم بدون تغییر جای سطرها و ستونها، جای خود عددها را با هم عوض کنیم مثلاً به‌جای تمام ۳ها ۲ بنویسیم و برعکس یا همه ۱ها را به ۲ و همه ۲ها را به ۳ و همه ۳ها را به ۱ تبدیل کنیم و ... می‌گوئیم جایگشت روی اعداد اعمال کرده‌ایم با این روش مربع لاتین جدیدی ساخته می‌شود.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

$\xrightarrow{۲ \leftrightarrow ۳}$

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

۱ → ۳
۳ → ۲
۲ → ۱

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

دو مربع لاتین متعامد :
فرض کنیم A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند بطوریکه از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است اگر هیچ یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند می‌گوئیم دو مربع لاتین A و B متعامدند.

A =

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

B =

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

→

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

متعامدند
چون عدد تکراری ندارد

A =

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

B =

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

→

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

متعامد نیست
چون عدد تکراری دارد

تذکر مهم: دو مربع لاتین ۲×۲ متعامد وجود ندارد

(هماهنگ کشوری دیماه ۹۷):
دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید (۱/۵ نمره)
(مشابه خرداد ۹۹)

A =

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

B =

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

$\Longrightarrow$

۱۲	۳۱	۲۳
۳۳	۲۲	۱۱
۲۱	۱۳	۳۲

(هماهنگ کشوری شهریور ۹۸):
قرار است چهار مدرس T_4 و T_3 و T_2 و T_1 در چهار جلسه متوالی در چهار کلاس C_4 و C_3 و C_2 و C_1 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند برای این منظور برنامه ریزی کنید (۱ نمره)

	۱	۲	۳	۴
C_1	T_1	T_2	T_3	T_4
C_2	T_4	T_1	T_2	T_3
C_3	T_3	T_4	T_1	T_2
C_4	T_2	T_3	T_4	T_1

این جدول یکی از پاسخ‌های ممکن است

(روش چرخشی)

(هماهنگ دیماه ۹۸):
بررسی کنید آیا دو مربع لاتین ۳×۳ روبرو متعامدند؟ (۰/۷۵ نمره)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

$\Rightarrow$

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

متعامدند زیرا در جدول ترکیب شده از دو مربع لاتین، عدد تکراری نداریم

(هماهنگ خرداد ۹۸):
اگر سه دوست هم سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباسها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یکبار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟ (۱/۵ نمره)

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۱	۲	۳
B	۳	۱	۲
C	۲	۳	۱

مربع کت‌ها

و

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۲	۱	۳
B	۱	۳	۲
C	۳	۲	۱

مربع پیراهن‌ها

$\Longrightarrow$

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۱۲	۲۱	۳۳
B	۳۱	۱۳	۲۲
C	۲۳	۳۲	۱۱

(هماهنگ کشوری خرداد ۹۹):

قرار است سه کارگر W_1 و W_2 و W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخ ریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد برای این منظور برنامه ریزی کنید (۱ نمره)

حل: برای برنامه ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر می‌گیریم مربع A مربوط به ماشین‌ها و مربع B مشخص کننده الیاف است.

$A =$

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱	۳	۲
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۲	۱	۳

$B =$

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۲	۱	۳
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۱	۳	۲

$\Rightarrow$

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

عدد سمت چپ هر درایه نشان دهنده ماشین و عدد سمت راست نشان دهنده نوع الیاف است

(هماهنگ کشوری خرداد ۹۹):

مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۴ و ۳ و ۲ و ۱ یک مربع لاتین جدید بدست آورید. (۱ نمره)

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

۴→۱
۳→۴
۲→۳
۱→۲

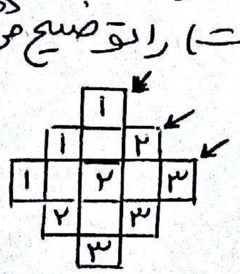
$\Rightarrow$

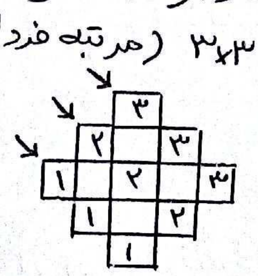
۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه یک عدد فرد:

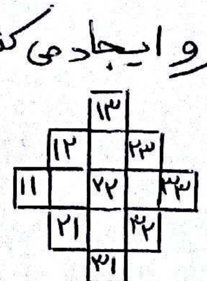
به عنوان مثال نحوه ایجاد دو مربع لاتین متعامد ۳×۳ (مرتبه فرد است) را توضیح می‌دهیم!

دو شکل مانند روبرو ایجاد می‌کنیم ⇐





حالا دو شکل را باهم ترکیب می‌کنیم ⇐



همان طور که می‌بینید همه عددها باهم متفاوتند اعداد خارج مربع را به روش زیر داخل مربع می‌آوریم:

۱) عدد بالایی را سه تا می‌آوریم پایین
۲) عدد چپی را سه تا می‌بریم راست
۳) عدد پایینی را سه تا می‌بریم بالا
۴) عدد راستی را سه تا می‌بریم چپ

۱۲	۳۱	۲۳
۳۳	۲۲	۱۱
۲۱	۱۳	۳۲

$\Rightarrow$

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

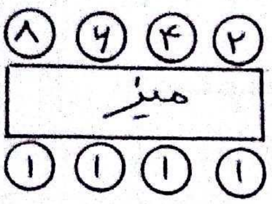
مربع لاتین متعامد اول

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

مربع لاتین متعامد دوم

تمرینات مهم فصل ۳ - درس ۱ با پاسخ تشریحی

۱) می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟



حل: ۸ صندلی داریم صندلی اول به ۸ روش پر می شود روبه روی او برادرش است که به یک روش پر می شود و بهمین ترتیب ... : $8\times6\times4\times2=384$

۲) (هماهنگ دی ماه ۹۷): اگر داشته باشیم $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{5,6,7,8,9\}$ درانیصورت چند کد پارمز ۵ رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم متمایز از A و سه رقم متمایز از B باشد؟ (۱ نمره)

$$\binom{4}{2}\times\binom{5}{3}\times5!=7200$$

۳) (هماهنگ شهریور ۹۸): ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه ای و در یک ردیف بچینیم این عمل به چند روش امکان پذیر است اگر:

الف) هیچ محدودیتی نباشد $8!$ = جواب

ب) همواره کتاب های فیزیک کنار هم باشند $6!\times4!$ = جواب

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند $5!\times4!$ = جواب

ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.
$7!\times3!$ = جواب

۴) برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن $7!\times4!$ باشد.

جواب: می خواهیم ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم را در یک خط مستقیم مرتب کنیم بطوریکه همه دانش آموزان پایه ریاضی کنار هم باشند

۵) با ارقام ۵و۶و۷و۵و۷و۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می توان ساخت؟ $\frac{6!}{3!\times2!}=60$

۶) می‌خواهیم روی تعدادی جعبهٔ حاوی اجناس تولیدشدهٔ خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد ۹ حرفی شامل a و a و a و b و c و c و d و d و d از بقیه مجزا کنیم حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

$$\frac{9!}{3!\times 2!\times 3!}=5040$$

۷) ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟

$$\frac{7!}{2!\times 2!\times 3!}=210$$

۸) به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:

الف) به دلخواه انتخاب کنیم

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$$

$$\text{جواب}=\binom{11+5-1}{5-1}=\binom{15}{4}$$

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم $\binom{11-1}{5-1}=\binom{10}{4}$ = جوابهای طبیعی

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؟

(جواب صفحه ۸۸ جزوه)

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم

$x_3=0$

$x_4\geq 5 \Rightarrow x_4=y_4+5$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$$

$$\Rightarrow x_1+x_2+0+y_4+5+x_5=11$$

$$\Rightarrow x_1+x_2+y_4+x_5=6 \Rightarrow \binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}$$

۹) مطلوبست تعداد جوابهای صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرطهای داده شده:

الف) $x_1+x_2+\cdots+x_5=10$ $\quad x_i>0$ و $2\leq i\leq 5$

$x_2>0 \Rightarrow x_2\geq 1 \Rightarrow x_2=y_2+1$

$x_3>0 \Rightarrow x_3\geq 1 \Rightarrow x_3=y_3+1$

$x_4>0 \Rightarrow x_4\geq 1 \Rightarrow x_4=y_4+1$

$x_5>0 \Rightarrow x_5\geq 1 \Rightarrow x_5=y_5+1$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$$

$$\Rightarrow x_1+y_2+1+y_3+1+y_4+1+y_5+1=10$$

$$\Rightarrow x_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6$$

$$\binom{6+5-1}{5-1}=\binom{10}{4}$$

ب) $x_1+x_2+\dots+x_6=12$ $x_1>2$ و $x_5\geq 4$

$x_1>2 \Rightarrow x_1\geq 3 \Rightarrow x_1=y_1+3$

$x_5\geq 4 \Rightarrow x_5=y_5+4$

$y_1+3+x_2+x_3+x_4+y_5+4+x_6=12$

$\Rightarrow y_1+x_2+x_3+x_4+y_5+x_6=5$

$n=5,\ k=6 \Rightarrow \binom{5+6-1}{6-1}=\binom{10}{5}$

ج) $x_1+x_2+\dots+x_5=11$ $x_i\geq 1$ و $1\leq i\leq 5$

(روش اول)

$x_1\geq 1 \Rightarrow x_1=y_1+1$

$x_2\geq 1 \Rightarrow x_2=y_2+1$

$\vdots$

$x_5\geq 1 \Rightarrow x_5=y_5+1$

$y_1+1+y_2+1+y_3+1+y_4+1+y_5+1=11$

$\Rightarrow y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6$

$n=6,\ k=5 \Rightarrow \binom{6+5-1}{5-1}=\binom{10}{4}$

(روش دوم) جوابهای طبیعی معادله مورد نظر است $\binom{11-1}{5-1}=\binom{10}{4}$

د) $x_1+3x_2+x_3+x_4=7$ $x_i\geq 0$ و $1\leq i\leq 4$

متغیر x_2 دارای ضریب است روی x_2 بحث می کنیم

$3x_2<7 \Rightarrow x_2=0$ یا $x_2=1$ یا $x_2=2$

$x_2=0 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=7 \xrightarrow{x_i\geq 0} \binom{7+3-1}{3-1}=\binom{9}{2}=45$

یا

$x_2=1 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=4 \xrightarrow{x_i\geq 0} \binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$

یا

$x_3=2 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=1 \xrightarrow{x_i\geq 0} \binom{1+3-1}{3-1}=\binom{3}{2}=3$

پس جوابها $45+15+3=63$ تا است

ه) $x_1+\sqrt{x_2}+x_3+x_4=3$ $x_i\geq 0$ و $1\leq i\leq 4$

متغیر x_2 دارای رادیکال است روی x_2 بحث می کنیم $x_2=0$ یا 1 یا 4

$x_2=0 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=3 \xrightarrow{x_i\geq 0} \binom{3+3-1}{3-1}=\binom{5}{2}=10$

یا

$x_2=1 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=2 \xrightarrow{x_i\geq 0} \binom{2+3-1}{3-1}=\binom{4}{2}=6$

یا

$x_2=4 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=1 \xrightarrow{x_i\geq 0} \binom{1+3-1}{3-1}=\binom{3}{2}=3$

$10+6+3=19$ تا جواب

۱۰) به چند طریق می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

$x_1 =$ تعداد توپهای نفر اول

$x_2 =$ تعداد توپهای نفر دوم

$x_3 =$ تعداد توپهای نفر سوم

$$\Rightarrow x_1+x_2+x_3=5 \Rightarrow \binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}=21$$

۱۱) به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

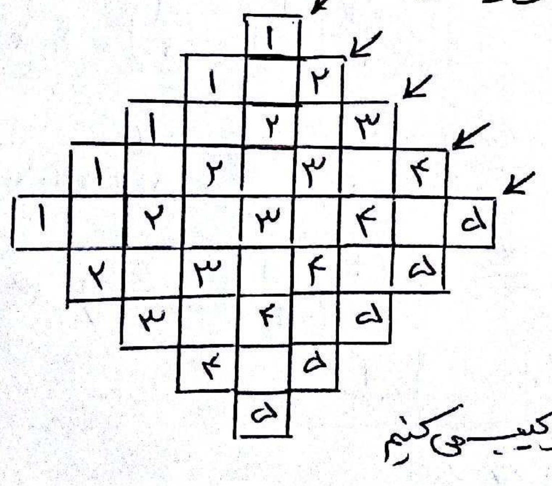
حل: تعداد جوابهای طبیعی مورد نظر است $\binom{8-1}{4-1}=\binom{7}{3}=35$

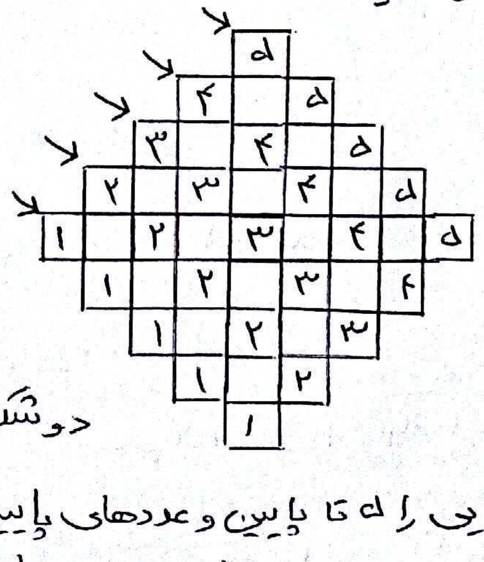
۱۲) به سوالات زیر جواب دهید:

الف) آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول بدست می‌آید؟ خیر

ب) آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیر متعامد با مربع لاتین اول بدست می‌آید؟ خیر

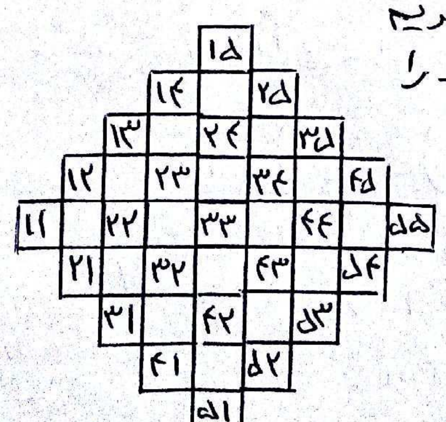
۱۳) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه 5×5 بنویسید:





دو شکل را باهم ترکیب می‌کنیم

عددهای بالایی را ۵ تا پایین و عددهای پایینی را ۵ تا بالا می‌بریم عددهای سمت چپ را ۵ تا به راست و عددهای سمت راست را ۵ تا به چپ می‌بریم:



$\Rightarrow$

۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

$\Longrightarrow$

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۳	۱	۴
۵	۳	۱	۴	۲
۳	۱	۴	۲	۵

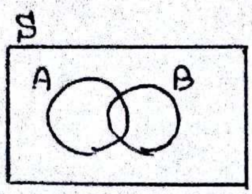
۳	۱	۴	۲	۵
۵	۳	۱	۴	۲
۲	۵	۳	۱	۴
۴	۲	۵	۳	۱
۱	۴	۲	۵	۳

دو تا مربع لاتین متعامد مرتبه ۵

اصل شمول (شامل بودن) و عدم شمول:

الف) برای دو مجموعه:

تعداد عضوهایی که به مجموعه A یا به مجموعه B تعلق دارند برابر است با:



$$|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$$

واضح است که تعداد عضوهایی که به هیچ یک از مجموعه‌های A و B تعلق ندارد برابر است با:

$$|\overline{A\cup B}| = |\bar{A}\cap \bar{B}| = |(A\cup B)'| = |S|-|A\cup B|$$

تذکر مهم:

تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی n که بر k بخشپذیرند برابر است با: $\left[\frac{n}{k}\right]$ = خارج قسمت تقسیم n بر k

مثال: چند عضو از مجموعه $S=\{n\in N \mid n\le 400\}$ نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش پذیرند؟

$$S=\{1,2,3,\dots,400\} \Rightarrow |S|=400$$

بر ۲ بخشپذیر = $A \Rightarrow |A|=\left[\frac{400}{2}\right]=200$

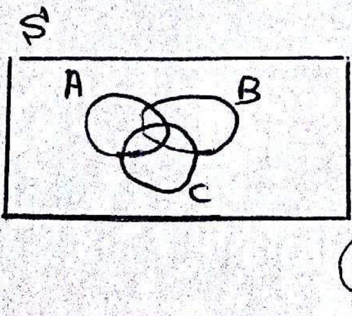
بر ۳ بخشپذیر = $B \Rightarrow |B|=\left[\frac{400}{3}\right]=133$

بر ۲ و ۳ بخشپذیر = $A\cap B \Rightarrow |A\cap B|=\left[\frac{400}{2\times 3}\right]=\left[\frac{400}{6}\right]=66$

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=200+133-66=267$$

$$|(A\cup B)'|=|S|-|A\cup B|=400-267=133$$

ب) برای سه مجموعه:



تعداد عضوهایی که حداقل به یکی از سه مجموعه A یا B یا C تعلق دارد برابر است با:

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

واضح است که: $|(A\cup B\cup C)'|=|A'\cap B'\cap C'|=|S|-|A\cup B\cup C|$

مثال ۱: چند عدد طبیعی مانند n، بطوریکه $1 \le n \le 400$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۴ و ۵ بخشپذیر نباشند؟

$$S=\{n\in \mathbb{N} \mid 1\le n\le 400\} \Rightarrow |S|=400$$

بر ۳ بخشپذیر $= A \Rightarrow |A| = \left[\frac{400}{3}\right] = 133$

بر ۴ بخشپذیر $= B \Rightarrow |B| = \left[\frac{400}{4}\right] = 100$

بر ۵ بخشپذیر $= C \Rightarrow |C| = \left[\frac{400}{5}\right] = 80$

بر ۳ و ۴ بخشپذیر $= A\cap B \Rightarrow |A\cap B| = \left[\frac{400}{[3,4]}\right] = \left[\frac{400}{12}\right] = 33$

بر ۳ و ۵ بخشپذیر $= A\cap C \Rightarrow |A\cap C| = \left[\frac{400}{[3,5]}\right] = \left[\frac{400}{15}\right] = 26$

بر ۴ و ۵ بخشپذیر $= B\cap C \Rightarrow |B\cap C| = \left[\frac{400}{[4,5]}\right] = \left[\frac{400}{20}\right] = 20$

بر ۳ و ۴ و ۵ بخشپذیر $= A\cap B\cap C \Rightarrow |A\cap B\cap C| = \left[\frac{400}{[3,4,5]}\right] = \left[\frac{400}{60}\right] = 6$

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$
$$= 133+100+80-33-26-20+6 = 240$$

$$|(A\cup B\cup C)'| = |\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = |\overline{A\cup B\cup C}| = |S|-|A\cup B\cup C| = 400-240 = 160$$

مثال ۲: چند عدد طبیعی مانند n بطوریکه $1\le n\le 350$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۵ و ۶ بخشپذیر نباشند؟

$|S|=350$ و $[4,5]=20$ ، $[4,6]=12$ ، $[5,6]=30$ و $[4,5,6]=60$

$|A| = \left[\frac{350}{4}\right] = 87$ $\quad [B] = \left[\frac{350}{5}\right] = 70$ $\quad C = \left[\frac{350}{6}\right] = 58$

$|A\cap B| = \left[\frac{350}{20}\right] = 17$ $\quad |A\cap C| = \left[\frac{350}{12}\right] = 29$ $\quad |B\cap C| = \left[\frac{350}{30}\right] = 11$

$|A\cap B\cap C| = \left[\frac{350}{60}\right] = 5$ $\quad |A\cup B\cup C| = 163$

$$|\overline{A\cup B\cup C}| = 350-163 = 187$$

مثال) اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟

$A=\{\overline{abcd} \mid a,b,c,d \neq ۷\} \Rightarrow |A| = ۹\times۹\times۹\times۹ = ۹^۴$

$B=\{\overline{abcd} \mid a,b,c,d \neq ۸\} \Rightarrow |B| = ۹\times۹\times۹\times۹ = ۹^۴$

$A\cap B=\{\overline{abcd} \mid a,b,c,d \neq ۷,۸\} \Rightarrow |A\cap B| = ۸\times۸\times۸\times۸ = ۸^۴$

$|S| = ۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰ = ۱۰^۴$ = تعداد کل ۴ رقمی ها

$\overline{A}\cap\overline{B}$ = مجموعه اعداد ۴ رقمی که در آنها هم رقم ۷ و هم رقم ۸ بکار رفته

$|\overline{A}\cap\overline{B}| = |\overline{A\cup B}| = |S| - |A\cup B| = ۱۰^۴ - (۹^۴ + ۹^۴ - ۸^۴) = ۹۷۴$

زمان لازم برحسب ثانیه $= ۹۷۴ \times ۵ = ۴۸۷۰$

تابع شماری:

نکته ۱: اگر A و B دو مجموعه باشند تعداد توابع از A به B برابر است با:

تعداد توابع از A به B $= |B|^{|A|}$

مثال) چند تابع از مجموعه $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ به مجموعه $B=\{b_1,b_2\}$ می توان نوشت؟

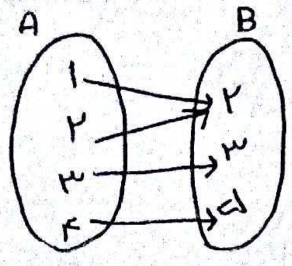
$|A|=۳$ و $|B|=۲$ جواب $= |B|^{|A|} = ۲^۳ = ۸$ تا

نکته ۲: اگر $|A|=m$ و $|B|=K$ با شرط $m \leqslant K$ تعداد توابع یک به یک از مجموعه A به مجموعه B برابر است با: $(K)_m = \dfrac{K!}{(K-m)!}$

مثال) به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار برسد)

تعداد حالتهای ممکن $(۸)_۴ = \dfrac{۸!}{۴!} = ۱۶۸۰$ که معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های یک به یک از مجموعه ای ۴ عضوی به مجموعه ای ۸ عضوی

نکته ۳: تابع f از مجموعه A به مجموعه B را پوشا می نامند هرگاه برد تابع f، شامل کل اعضای B باشد به عبارت دیگر به هر عضو B یک پیکان رسم شود و آنرا بصورت زیر نشان می دهند.



پوشا است

$$A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\} \qquad B=\{b_1,b_2,\dots,b_m\}$$

$$f: A\to B \qquad R_f=B$$

برای پیدا کردن تعداد تابع های پوشا از مجموعه n عضوی A به مجموعه m عضوی B از فرمولهای زیر استفاده می کنیم که همان اصل شمول و عدم شمول است:

$$A_j=\{f:A\to B \mid f(a_i)\neq b_j \text{ ، } 1\le i\le n ,\ 1\le j\le m\}$$

$$|S|=|B|^{|A|}=m^n \qquad |A_1|=|A_2|=\dots=|A_m|=2^m$$

$$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=\dots=|A_2\cap A_3|=\dots=1 \text{ و } |A_1\cap A_2\cap A_3\cap\dots\cap A_m|=0$$

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\dots\cap\overline{A_m}|=|\overline{A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_m}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_m|$$

مثال ۱: (هماهنگ کشوری - دیماه ۹۸):

با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی را بدست آورید (۱/۷۵ نمره)

$$A_j=\{f:A\to B \mid f(a_i)\neq b_j ,\ 1\le i\le 4,\ 1\le j\le 3\}$$

$$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\} \text{ و } B=\{b_1,b_2,b_3\} \Rightarrow |A|=4 ,\ |B|=3$$

$$|S|=3^4=81 \qquad |A_i|=2^4=16 \qquad |A_i\cap A_j|=1 ,\ |A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

$$|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|=81-(16+16+16-1-1-1+0)$$

$$=81-(3\times16-3\times1+0)=36$$ تا

(هماهنگ کشوری - دی ماه ۹۷)

به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده شود؟ (۲ نمره)

حل: جواب همان تعداد تابع های پوشا از مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی است که در ص ۱۰۰ مثال ۱ حل شد.

نکته کنکوری:

تعداد تابع های پوشا از مجموعه m عضوی A به مجموعه ۳ عضوی B از فرمول زیر بدست می آید:

$|A| = m$ $\quad R_f = B$

$|B| = 3$ $\quad f: A \to B$

$$\boxed{\text{جواب} = 3^m - (3 \times 2^m - 3)}$$

مثال) تعداد تابع های پوشا از مجموعه ۴ عضوی A به مجموعه ۳ عضوی B چندتا است؟

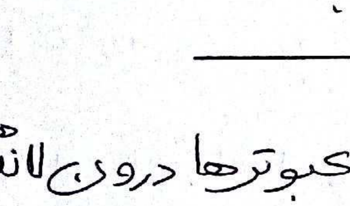
$m = 4$

$$\text{جواب} = 3^4 - (3 \times 2^4 - 3) = 36$$

اصل لانه کبوتری:

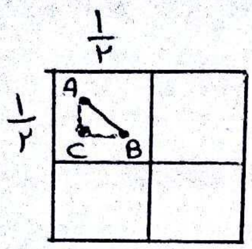
اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همه کبوترها درون لانه ها قرار بگیرند در اینصورت لانه ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال ۱: یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم بندی کرده ایم نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.



حل: اگر تعداد نقطه ها را کبوتر و تعداد مثلث های کوچک را لانه در نظر بگیریم $n = 9$ و $m = 10$ و $m > n$ و با توجه به اینکه طول ضلع هر مثلث کوچک ۱ واحد است طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نقطه داخل یک مثلث قرار می گیرد که فاصله آن دو نقطه کمتر از ۱ واحد است.

مثال ۲: ۵ نقطه درون مربعی به ضلع ۱ انتخاب شده است، ثابت کنید فاصله حداقل دو نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.



حل: ۵ نقطه را کبوتر و ۴ مربع کوچک را لانه درنظر می‌گیریم طبق اصل لانه کبوتری درون یکی از مربع‌های کوچک دو نقطه قرار می‌گیرد طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = AC^2 + BC^2 \\ AC<\frac{1}{2} \quad , \quad BC<\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow AB^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB<\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۳: در کلاس ۴۰ نفره، حداقل چند نفر ماه تولدشان یکسان است

حل: ۴۰ نفر را کبوتر و ۱۲ ماه سال را لانه درنظر می‌گیریم

$$\begin{array}{r|l} 40 & 12 \\ -36 & 3 \\ \hline 4 & \end{array}$$

باقیمانده صفر نشد پس حداقل ۳+۱ یعنی ۴ نفر می‌توان یافت (اگر باقیمانده صفر نشود یک واحد به خارج قسمت اضافه می‌کنیم)

تعمیم اصل لانه کبوتری:

هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در اینصورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال ۱: در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

$k+1=7 \Rightarrow k=6$

تعداد لانه‌ها = تعداد ماه‌ها = n

تعداد کبوترها = تعداد دانش‌آموزان = $kn+1 = 6\times12+1 = 73$

مثال ۲: در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشد تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟

هرسال = ۱۲ ماه
هرهفته = ۷ روز
$\Big\} \Rightarrow n=12\times7=84$ $\quad k+1=10 \Rightarrow k=9$ $\quad kn+1 = 9\times84+1 = 757$ نفر

تمرینات مهم فصل ۳ درس ۲ با پاسخ تشریحی

۱) ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار بدهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$k+1=5 \Rightarrow k=4$ $\qquad kn+1=54 \Rightarrow 4n+1=54 \Rightarrow n=\left[\frac{53}{4}\right]=13$

پس n باید حداکثر ۱۳ باشد

---

۲) (هماهنگ شهریور ۹۸):
چند عدد طبیعی مانند n بطوریکه $1\le n\le 350$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۶ بخشپذیر نباشد. (۱/۵ نمره)

$$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-(|A|+|B|-|A\cap B|)=350-\left(\left[\frac{350}{4}\right]+\left[\frac{350}{6}\right]-\left[\frac{350}{12}\right]\right)$$
$$=234$$

---

۳) (هماهنگ خرداد ۹۸):
در بین اعداد ۱ تا ۹۰ ($1\le n\le 90$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخشپذیر باشند (۱/۲۵ نمره)

$|A|=\left[\frac{90}{2}\right]=45$

$|B|=\left[\frac{90}{3}\right]=30$

$|A\cap B|=\left[\frac{90}{6}\right]=15$

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$=45+30-15=60$$

---

۴) در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1\le n\le 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخشپذیر باشند ولی بر ۷ بخشپذیر نباشند؟

$|A|=\left[\frac{200}{4}\right]=50$ $\qquad |A\cap B|=\left[\frac{200}{28}\right]=7$

$|B|=\left[\frac{200}{7}\right]=28$ $\qquad |A-B|=|A|-|A\cap B|=50-7=43$

---

۵) (هماهنگ - خرداد ۹۹):
در یک اردوی دانش آموزی حداقل چند دانش آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟ (۱ نمره)

$k+1=7 \Rightarrow k=6$

$kn+1=6\times 12+1=73$

$n=12$

۶) (هماهنگ ـ خرداد ۹۸): ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است (۱/۲۵ نمره)

۱۲ ماه = هر سال
۷ روز = هر هفته ⇐ تعداد لانه‌ها = $۷\times۱۲=۸۴$

$$\begin{array}{r|l} ۵۰۵ & ۸۴ \\ \underline{-۵۰۴} & ۶ \\ ۱ & \end{array} \qquad ۶+۱=۷$$

طبق اصل لانه کبوتری لااقل ۷ نفر آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است

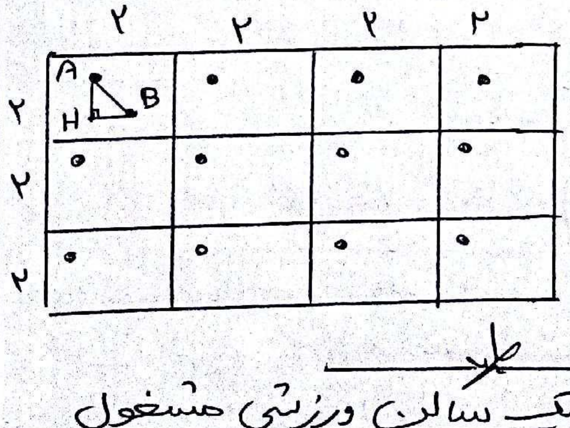
۷) (هماهنگ ـ دی‌ماه ۹۸): مجموعه اعداد $A=\{۱،۲،۳،...،۸۴\}$ را در نظر بگیرید، نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است (۱ نمره)

تعداد کبوترها = ۴۳
تعداد لانه‌ها = ۴۲

{۱،۸۴} ، {۲،۸۳} ، {۳،۸۲} ، ... ، {۴۲،۴۳}

چنانچه قرار باشد کبوترها لانه‌ها را اشغال کنند آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می‌گیرند و مجموعشان ۸۵ است.

۸) (هماهنگ ـ شهریور ۹۸): ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۶×۸ قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله آنها از هم، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد (۱/۵ نمره)



۱۲ مربع = تعداد لانه‌ها
۱۳ نقطه = تعداد کبوترها
طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می‌گیرند پس:

$$AH<2$$
$$BH<2 \Rightarrow AH^2+BH^2<8 \Rightarrow AB^2<8 \Rightarrow AB<\sqrt{8}$$

۹) (هماهنگ دی‌ماه ۹۷): حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (۱/۵ نمره)

$n=۳۶۵$

$k+1=۲۰ \Rightarrow k=۱۹ \qquad kn+1=۱۹\times۳۶۵+1=۶۹۳۶$