بنام خدا

جزوه هندسه ۲

(یازدهم ریاضی)

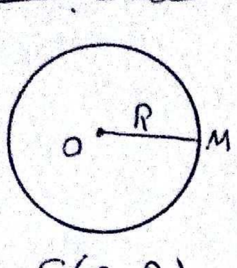
تهیه و تنظیم از :
امیر حسین مطلّبی دبیر ریاضی دبیرستان نمونه دولتی استاد شهریار ناحیه ۳ تبریز

*** هزینه استفاده از این جزوه صلواتی بر محمّد و آل محمّد است ***

التماس دعا

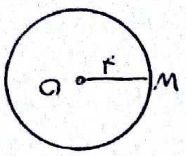
دایره:

دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آنها از یک نقطه ثابت به‌نام مرکز برابر مقدار ثابتی باشد که این مقدار ثابت را شعاع دایره می‌نامیم. دایره به مرکز O و شعاع R را با علامت $C(O,R)$ نشان می‌دهیم.



$C(O,R)$

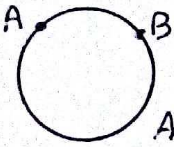
مثال) نقطه ثابت O در صفحه داده شده است. اگر نقاط متحرکی مثل M در صفحه طوری قرار گیرند که همواره فاصله‌شان تا O برابر ۴ باشد محیط منحنی را که این نقاط طی می‌کنند بیابید.



حل: مکان دایره‌ای به مرکز O و شعاع $OM=R=4$ است.

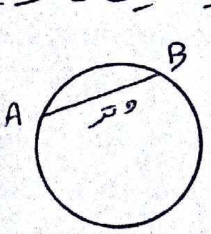
محیط دایره $= 2\pi R = 2\pi(4) = 8\pi$

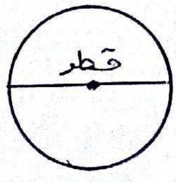
کمان: منحنی از محیط دایره که بین دو نقطه متمایز قرار داشته باشد کمان دایره نامیده می‌شود.



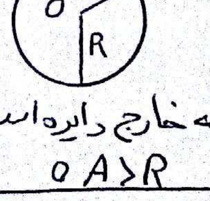
کمان $AB = \widehat{AB}$

وتر: پاره خطی که دو سر کمان را بهم وصل می‌کند وتر نامیده می‌شود. وتری که از مرکز دایره می‌گذرد قطر دایره نامیده می‌شود. بزرگترین وتر دایره قطر دایره نامیده می‌شود.



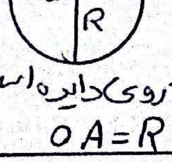


اوضاع نسبی نقطه و دایره:



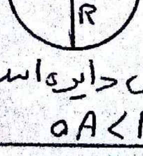
نقطه خارج دایره است

$OA>R$



نقطه روی دایره است

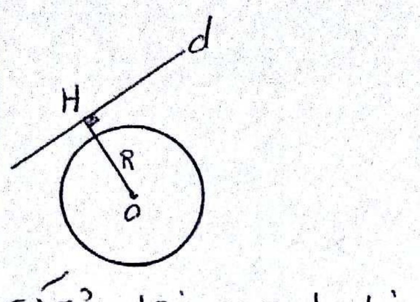
$OA=R$



نقطه داخل دایره است

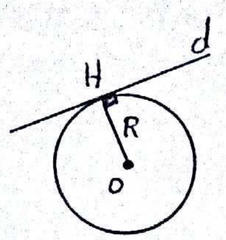
$OA<R$

اوضاع نسبی خط و دایره:



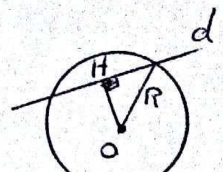
خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند

$OH > R$



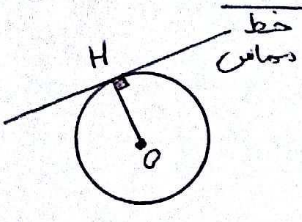
خط و دایره در یک نقطه مشترک اند

$OH = R$



خط و دایره در دو نقطه مشترک اند

$OH < R$

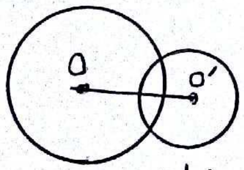


مماس بر دایره:

اگر نقطه‌ای مانند H روی دایره باشد خطی را که از نقطه H می‌گذرد و بر شعاعی از دایره که از H عبور می‌کند، عمود باشد مماس بر دایره در نقطه H می‌گوئیم. شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

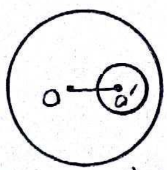
وضعیت دو دایره نسبت بهم:

خط المرکزین $= d = OO' =$ فاصله مراکز دو دایره



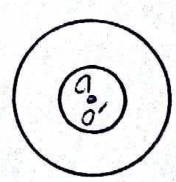
متقاطع

$r - r' < d < r + r'$



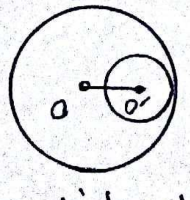
متداخل

$d < r - r'$



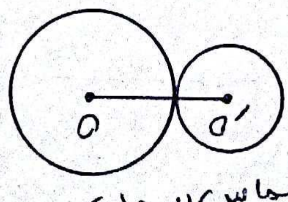
هم مرکز

$d = 0$



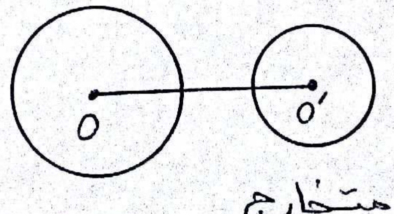
مماس داخل

$d = r - r'$



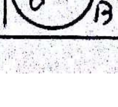
مماس بیرون

$d = r + r'$



متخارج

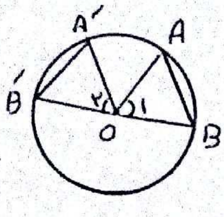
$d > r + r'$



$\hat{AOB} = \widehat{AB}$

زاویه مرکزی: زاویه‌ای که راس آن مرکز دایره و دو ضلع آن شعاع دایره باشد.

قضیه: ثابت کنید در یک دایره کمانهای نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و برعکس.



فرض	$AB = A'B'$
حکم	$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$

اثبات: دو مثلث $O\hat{A}B$ و $O\hat{A'}B'$ را تشکیل می‌دهیم:

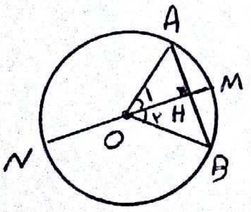
$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \quad \text{فرض مسئله} \\ OA = OA' = R \\ OB = OB' = R \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\hat{A}B \cong O\hat{A'}B' \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{A'B'}$$

عکس قضیه:

فرض	$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$
حکم	$AB = A'B'$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{AB} = \widehat{A'B'} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OA' = R \\ OB = OB' = R \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} O\hat{A}B \cong O\hat{A'}B' \Rightarrow AB = A'B'$$

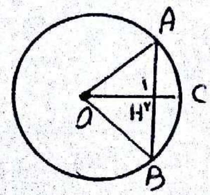
قضیه: ثابت کنید در هر دایره قطر عمود بر وتر، وتر و کمان نظیر آن‌را نصف می‌کند.



فرض	$MN \perp AB$
حکم	$\widehat{AM} = \widehat{MB}$ و $AH = BH$

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = R \\ OH = OH \quad \text{مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ضلع}]{\text{وتر و یک}} O\hat{A}H \cong O\hat{B}H \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{MB} \\ AH = BH \end{array}\right.$$

قضیه: ثابت کنید در هر دایره خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از دایره وصل می‌کند بر آن وتر عمود است.



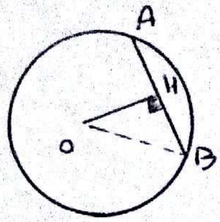
فرض	$AH = BH$
حکم	$OC \perp AB$

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = R \\ OH = OH \quad \text{مشترک} \\ AH = BH \quad \text{فرض} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\hat{A}H \cong O\hat{B}H \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ \end{array}\right. \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow OC \perp AB$$

قضیه: ثابت کنید فاصله وتر به طول L، در دایره‌ای به شعاع R تا مرکز دایره برابر است با:

$$OH=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}$$



اثبات: $AB=L$ و $OH \perp AB$

$$OB^2=OH^2+BH^2 \Rightarrow R^2=OH^2+\left(\tfrac{1}{2}L\right)^2 \Rightarrow R^2=OH^2+\tfrac{1}{4}L^2$$

$$\Rightarrow OH^2=R^2-\tfrac{1}{4}L^2 \Rightarrow OH^2=\frac{4R^2-L^2}{4} \Rightarrow OH=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}$$

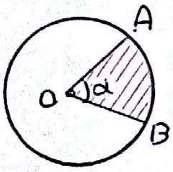
تست: فاصله مرکز دایره $C(O,5)$ از وتری به طول ۸ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{2}$

حل: گزینه ب

$R=5$
$L=8$

$$OH=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4(5)^2-8^2}=\frac{1}{2}\sqrt{100-64}=\frac{1}{2}\sqrt{36}=\frac{6}{2}=3$$



قطاع دایره:
ناحیه‌ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است، یک قطاع دایره می‌نامند

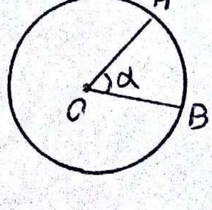
قضیه: اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O,R)$ برحسب درجه مساوی α باشد نشان دهید طول کمان AB برابر است با:

$$L=\frac{\pi R}{180}\alpha$$

و مساحت قطاع برابر است با:

$$S=\frac{\pi R^2\alpha}{360}$$

(α برحسب درجه)



اثبات: در دایره $C(O,R)$، α زاویه مرکزی روبرو به کمان $AB=L$ است. داریم:

$$\frac{\alpha}{360}=\frac{L}{2\pi R} \Rightarrow L=\frac{\alpha\cdot 2\pi R}{360} \Rightarrow L=\frac{\pi R}{360}\alpha$$

$$\frac{\alpha}{360}=\frac{S_{\text{قطاع}}}{\pi R^2} \Rightarrow S_{\text{قطاع}}=\frac{\pi R^2\alpha}{360}$$

مثال ۱: طول کمان روبه رو به زاویه 30° در دایره ای به شعاع $30\ cm$ را برحسب متر بیابید.

$R = 30 \div 100 = \frac{3}{10}\ m$

$$l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} = \frac{\pi \times \frac{3}{10} \times 30^\circ}{180^\circ} = \frac{3\pi}{60} \Rightarrow l = \frac{\pi}{20} m$$

مثال ۲: اگر طول کمان روبرو به زاویه 240° در دایره $C(O,R)$ برابر 4π باشد محیط و مساحت دایره را بیابید.

$\alpha = 240^\circ$

$l = 4\pi$

$$l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} \Rightarrow 4\pi = \frac{\pi R \times 240^\circ}{180^\circ} \Rightarrow 4R = 12 \Rightarrow R = 3$$

$$\text{محیط} = P = 2\pi R = 2\pi \times 3 = 6\pi$$

$$\text{مساحت} = S = \pi R^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi$$

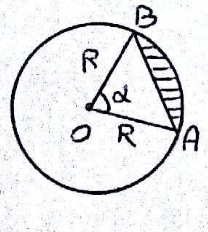
مثال ۳: قطاعی با زاویه 60° در دایره $C(O,R)$ در نظر می گیریم. اگر مساحت این قطاع $\frac{50\pi}{3}$ باشد شعاع دایره را بیابید.

$S = \frac{50\pi}{3}$

$\alpha = 60^\circ$

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow \frac{50\pi}{3} = \frac{\pi R^2 \times 60^\circ}{360^\circ} \Rightarrow R^2 = 100 \Rightarrow R = 10$$

مثال ۴: مطابق شکل در دایره $C(O,R)$ دو شعاع با زاویه بین α برحسب درجه نسبت به هم رسم شده اند. قسمت رنگی را که محدود به وتر AB و دایره است، قطعه ای از دایره می نامیم. مساحت این قطعه را برحسب α و R بیابید.



$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع } OAB} - S_{\overset{\triangle}{OAB}}$$

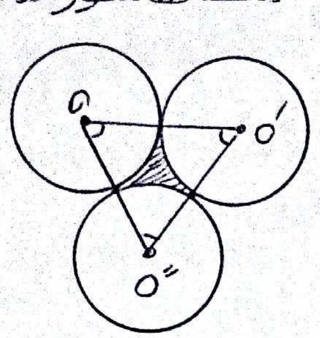
$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{1}{2}(OA \times OB \times \sin\alpha)$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha \Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{1}{4} R^2 \left(\frac{\pi\alpha}{180^\circ} - \sin\alpha\right)$$

اگر زاویه مرکزی قطاع برحسب رادیان باشد مساحت قطعه از فرمول زیر بدست می آید:

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin\alpha) \quad (\alpha \text{ برحسب رادیان})$$

مثال ۵: شعاع هر سه دایره برابر R است. مساحت قسمت هاشورخورده را حساب کنید:

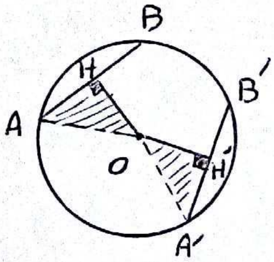


$$OO' = OO'' = O'O'' = 2R$$

$$\overset{\triangle}{OO'O''}\ \text{متساوی الاضلاع} \Rightarrow S_{\triangle OO'O''} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2R)^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$$

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\triangle OO'O''} - \underbrace{S_{\text{۳ قطاع}}}_{\text{نصف دایره}} = R^2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi R^2 = R^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

قضیه: ثابت کنید اگر در دایره دو وتر مساوی باشند آنگاه فاصله آنها تا مرکز دایره مساوی است و بر عکس.



فرض	$AB = A'B'$
حکم	$OH = OH'$

اثبات: O را به A و A' وصل می کنیم، می دانیم قطر یا شعاع عمود بر وتر، وتر را نصف می کند:

$$AB = A'B' \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{A'B'}{2} \Rightarrow AH = A'H'$$

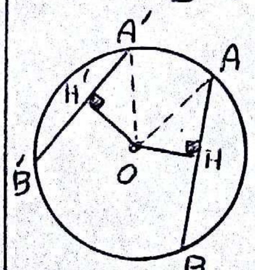
$$\left.\begin{array}{l} OA = OA' = R \ \text{وتر} \\ AH = A'H' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ضلع}]{\text{وتر و یک}} \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{OA'H'} \Rightarrow OH = OH'$$

عکس قضیه:

فرض	$OH = OH'$
حکم	$AB = A'B'$

$$\left.\begin{array}{l} OA = OA' = R \\ OH = OH' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ضلع}]{\text{وتر و یک}} \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{OA'H'} \Rightarrow AH = A'H' \Rightarrow 2AH = 2A'H' \Rightarrow AB = A'B'$$

قضیه: در دایره از دو وتر نابرابر آنکه بزرگتر است به مرکز دایره نزدیکتر است و بر عکس:



فرض	$AB > A'B'$
حکم	$OH < OH'$

اثبات: می دانیم شعاع عمود بر وتر، وتر را نصف می کند.

$$AH = \frac{AB}{2} \quad \text{و} \quad A'H' = \frac{A'B'}{2} \ , \quad AB > A'B' \Rightarrow AH > A'H'$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{OAH}: OA^2 = OH^2 + AH^2 \\ \overset{\triangle}{OA'H'}: OA'^2 = OH'^2 + A'H'^2 \end{array}\right\} \xrightarrow{OA=OA'=R} OH^2 + AH^2 = OH'^2 + A'H'^2 \Rightarrow AH^2 - A'H'^2 = OH'^2 - OH^2$$

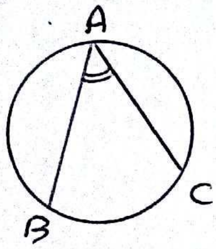
$$\xrightarrow{AH>A'H'} OH'^2 - OH^2 > 0 \Rightarrow OH'^2 > OH^2 \overset{\text{جذر}}{\Rightarrow} OH' > OH$$

عکس قضیه:

فرض	$OH < OH'$
حکم	$AB > A'B'$

$$\left.\begin{array}{l} OH' > OH \Rightarrow OH'^2 > OH^2 \Rightarrow OH'^2 - OH^2 > 0 \\ \text{از طرفی} \quad AH^2 - A'H'^2 = OH'^2 - OH^2 \end{array}\right\} \Rightarrow AH^2 - A'H'^2 > 0 \Rightarrow AH^2 > A'H'^2 \Rightarrow AH > A'H'$$

$$\Rightarrow 2AH > 2A'H' \Rightarrow AB > A'B'$$



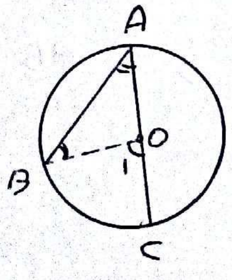
زاویه محاطی : زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و اضلاعش دو وتر از دایره باشند زاویه محاطی نامیده می‌شود.

قضیه: ثابت کنید اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف کمان روبروست.

فرض	$\hat{A}$ محاطی
حکم	$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

سه حالت درنظر می‌گیریم:

حالت اول: یک ضلع زاویه، قطر دایره باشد.

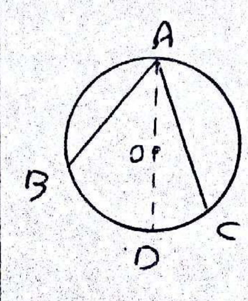


$$OA = OB = R \Rightarrow \text{متساوی الساقین } \overset{\triangle}{OAB} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$$

$$\text{خارجی } \hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{B} \xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}} \hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{A} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\hat{O}_1}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

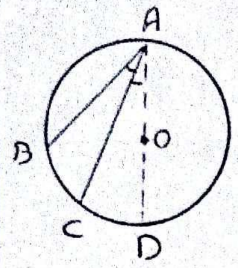
حالت دوم: دو ضلع زاویه در دو طرف مرکز دایره باشند.



قطر AD را رسم می‌کنیم طبق حالت اول داریم:

$$\left.\begin{array}{l} B\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} \\ D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{A}D + D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} \Rightarrow B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

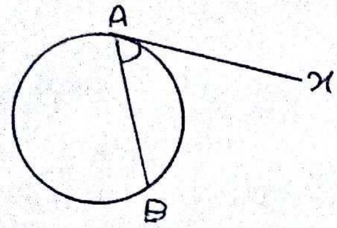
$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$



حالت سوم: دو ضلع در یک طرف مرکز باشند.

قطر AD را رسم می‌کنیم طبق حالت الف داریم:

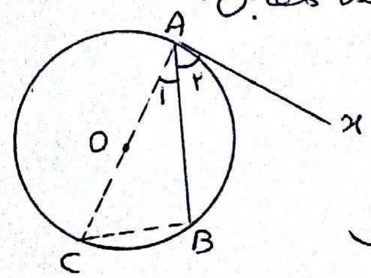
$$\hat{BAC}=\hat{BAD}-\hat{CAD}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{2}-\frac{\overset{\frown}{CD}}{2}\Rightarrow \hat{BAC}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}\Rightarrow \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$



زاویه ظلّی:

زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و یک ضلع آن وتری از دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره باشد زاویه ظلّی نامیده می‌شود.

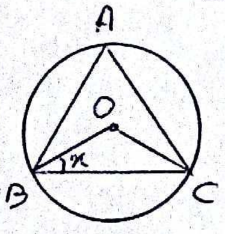
قضیه: اندازه هر زاویه ظلّی برابر است با نصف کمان مقابل:



فرض	$\hat{A}_2$ ظلّی
حکم	$\hat{A}_2=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

اثبات: قطر AC را رسم می‌کنیم $\hat{B}$ محاطی و روبروی قطر AC است پس: $\hat{B}=90^\circ$ از طرفی می‌دانیم شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است پس: $\hat{A}_1+\hat{A}_2=90^\circ$

$$\hat{B}=90^\circ\Rightarrow \left.\begin{matrix}\hat{A}_1+\hat{C}=90^\circ\\ \hat{A}_1+\hat{A}_2=90^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow \hat{A}_1+\hat{A}_2=\hat{A}_1+\hat{C}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\hat{A}_2=\hat{C}\\ \text{محاطی}\ \hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \hat{A}_2=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$



تمرین: ثابت کنید در شکل مقابل: $\hat{x}=90^\circ-\hat{A}$

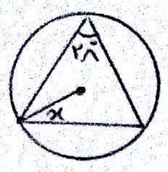
$$\left.\begin{matrix}\hat{O}=\overset{\frown}{BC}\\ \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \hat{A}=\frac{\hat{O}}{2}\Rightarrow \hat{O}=2\hat{A}$$

$$\overset{\triangle}{OBC}:\ OB=OC\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=\hat{x}$$

$$\overset{\triangle}{OBC}:\ \hat{B}+\hat{C}+\hat{O}=180^\circ\Rightarrow \hat{x}+\hat{x}+2\hat{A}=180^\circ\Rightarrow 2\hat{x}+2\hat{A}=180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\hat{x}=180^\circ-2\hat{A}\Rightarrow \hat{x}=\frac{180^\circ-2\hat{A}}{2}\Rightarrow \hat{x}=90^\circ-\hat{A}$$

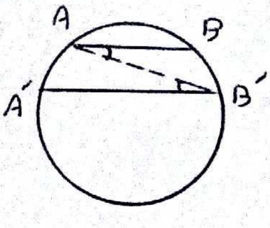
تست: مقدار $\hat{x}$ کدام است؟



۱) 56° ب) 28° ج) 62° د) 42°

$$\hat{x} = 90^\circ - \hat{A} = 90^\circ - 28^\circ = 42^\circ$$

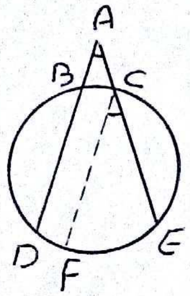
قضیه: ثابت کنید در دایره، کمانهای محصور بین دو وتر موازی، با هم برابرند و بر عکس.



فرض	$AB \parallel A'B'$
حکم	$\overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{BB'}$

اثبات: A را به B' وصل می‌کنیم:

$(AB \parallel A'B'$ و AB' مورب$) \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B'} \Leftrightarrow \dfrac{\overset{\frown}{BB'}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AA'}}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BB'} = \overset{\frown}{AA'}$



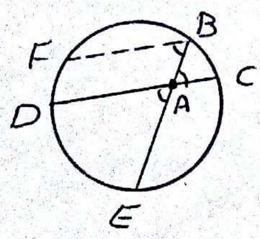
قضیه: ثابت کنید: $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC}}{2}$

اثبات: از نقطه C، خط CF را موازی BD رسم می‌کنیم:

$$BD \parallel CF \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DF}$$

$AD \parallel CF$ و AE مورب $\Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EF}$

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EF} \Rightarrow \hat{A} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{DF}) \xRightarrow{\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DF}} \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC}}{2}$$



قضیه: ثابت کنید: $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{BC}}{2}$

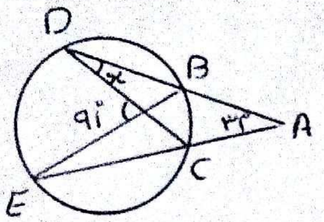
اثبات: از نقطه B، BF را موازی CD رسم می‌کنیم.

$$CD \parallel BF \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{FD}$$

$BF \parallel CD$, BE مورب $\Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EF}$

$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FD} + \overset{\frown}{ED}) \xRightarrow{\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{FD}} \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE}}{2}$$

تمرین: در شکل مقابل اندازه $\hat{x}$ را بیابید.



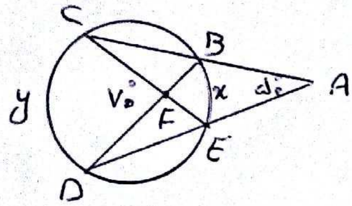
$$۳۱° = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{۲} \Rightarrow \widehat{DE} - \widehat{BC} = ۶۲$$

$$۹۱° = \frac{\widehat{DE} + \widehat{BC}}{۲} \Rightarrow \widehat{DE} + \widehat{BC} = ۱۸۲$$

$$۲\widehat{DE} = ۱۴۴° \Rightarrow \widehat{DE} = ۱۲۲°$$

$$۳۱° = \frac{۱۲۲° - \widehat{BC}}{۲} \Rightarrow ۶۲° = ۱۲۲° - \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{BC} = ۶۰° \Rightarrow \hat{x} = \frac{۶۰}{۲} \Rightarrow \hat{x} = ۳۰°$$

تمرین: در شکل مقابل مقادیر x و y را بیابید.

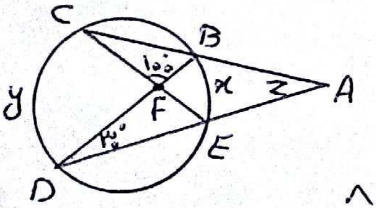


$$۷۰° = \frac{x+y}{۲} \Rightarrow x+y = ۱۴۰°$$

$$۵۰° = \frac{y-x}{۲} \Rightarrow y-x = ۱۰۰$$

$$\begin{cases} y+x = ۱۴۰ \\ y-x = ۱۰۰ \end{cases} + \Rightarrow ۲y = ۲۴۰° \Rightarrow y = ۱۲۰° \text{ و } x = ۲۰°$$

تمرین: در شکل روبرو مطلوبست تعیین x و y و z



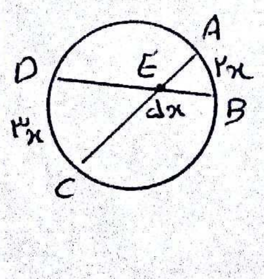
محاطی $\hat{D} = \frac{\widehat{BE}}{۲} \Rightarrow ۳۰° = \frac{x}{۲} \Rightarrow x = ۶۰°$

$$C\hat{F}D = ۱۸۰ - ۱۰۰° = ۸۰$$

$$۸۰° = \frac{y+x}{۲} \Rightarrow ۱۶۰° = y + ۶۰° \Rightarrow y = ۱۰۰°$$

$$z = \frac{y-x}{۲} \Rightarrow z = \frac{۱۰۰ - ۶۰}{۲} \Rightarrow z = ۲۰°$$

تمرین: در شکل روبرو مقدار x را بیابید.



$$D\hat{E}C = ۱۸۰° - ۵x$$

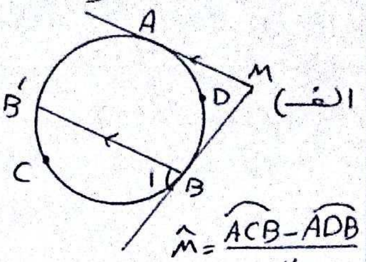
$$۱۸۰° - ۵x = \frac{۲x + ۳x}{۲} \Rightarrow ۳۶۰° - ۱۰x = ۵x \Rightarrow ۳۶۰° = ۱۵x$$

$$\Rightarrow x = \frac{۳۶۰}{۱۵} \Rightarrow x = ۲۴°$$

«حل تمرینات ص ۱۴ کتاب»

۱) در شکل‌های زیر ثابت کنید: (راهنمایی: از نقطه B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید)

الف)



$\hat{M}=\frac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{۲}$

از B خطی به موازات AM رسم می‌کنیم

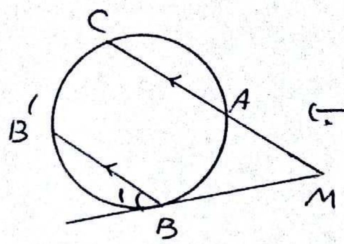
$(BB' \parallel AM,\ AB$ مورب$) \Rightarrow \hat{M}=\hat{B}_1$

ظلی $\hat{B}_1=\frac{\widehat{BB'}}{۲}$

$\Rightarrow \hat{M}=\frac{\widehat{BB'}}{۲}=\frac{\widehat{ACB}-\widehat{AB'}}{۲}$

$\xrightarrow{\widehat{AB'}=\widehat{ADB}} \hat{M}=\frac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{۲}$

ب)



$M=\frac{\widehat{BC}-\widehat{AB}}{۲}$

از B خطی به موازات MC رسم می‌کنیم:

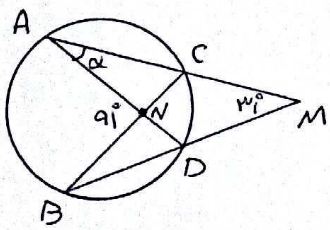
$(BB' \parallel AM,\ MB$ مورب$) \Rightarrow \hat{M}=\hat{B}_1$

ظلی $\hat{B}_1=\frac{\widehat{BB'}}{۲}$

$\Rightarrow \hat{M}=\frac{\widehat{BB'}}{۲}$

$\Rightarrow \hat{M}=\frac{\widehat{BC}-\widehat{B'C}}{۲} \xrightarrow{\widehat{B'C}=\widehat{AB}} M=\frac{\widehat{BC}-\widehat{AB}}{۲}$

۲) در شکل مقابل اندازه زاویه α را بدست آورید.



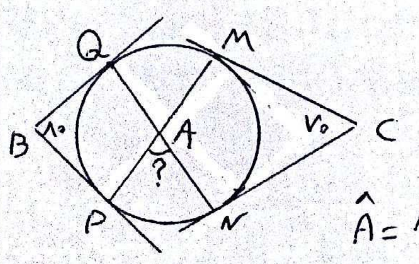
$\hat{M}=\frac{\widehat{AB}-\widehat{CD}}{۲} \Rightarrow ۳۱°=\frac{\widehat{AB}-\widehat{CD}}{۲} \Rightarrow \widehat{AB}-\widehat{CD}=۶۲°$

$\hat{N}=\frac{\widehat{AB}+\widehat{CD}}{۲} \Rightarrow ۹۱°=\frac{\widehat{AB}+\widehat{CD}}{۲} \Rightarrow \widehat{AB}+\widehat{CD}=۱۸۲°$

$\begin{cases} \widehat{AB}-\cancel{\widehat{CD}}=۶۲° \\ \widehat{AB}+\cancel{\widehat{CD}}=۱۸۲° \end{cases} +$

$۲\widehat{AB}=۲۴۴° \Rightarrow \boxed{\widehat{AB}=۱۲۲°} \Rightarrow \boxed{\widehat{CD}=۶۰} \Rightarrow \underset{\text{محاطی}}{\alpha}=\frac{۶۰°}{۲}=۳۰°$

۳) در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویه $\hat{A}$ چند درجه است؟

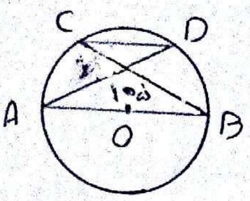


$۷۰°=\frac{(۳۶۰°-\widehat{MN})-\widehat{MN}}{۲} \Rightarrow ۱۴۰°=۳۶۰°-۲\widehat{MN} \Rightarrow \widehat{MN}=۱۱۰°$

$۸۰°=\frac{(۳۶۰°-\widehat{PQ})-\widehat{PQ}}{۲} \Rightarrow ۱۶۰°=۳۶۰°-۲\widehat{PQ} \Rightarrow \widehat{PQ}=۱۰۰°$

$\hat{A}=\frac{\widehat{MQ}+\widehat{PN}}{۲}=\frac{۳۶۰°-(\widehat{MN}+\widehat{PQ})}{۲}=\frac{۳۶۰°-(۱۱۰°+۱۰۰°)}{۲}=\frac{۱۵۰°}{۲}=۷۵$

۴) در دایره رسم شده شکل مقابل $CD \parallel AB$ اندازه کمان CD را بدست آورید.



$$CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \quad ①$$

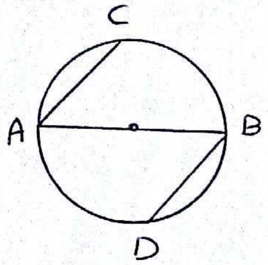
$$۷۵^\circ = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{۲} \Rightarrow ۱۵۰^\circ = \widehat{AC} + \widehat{BD} \quad ②$$

$$①,② \Rightarrow ۱۵۰^\circ = ۲\widehat{AC} \Rightarrow \widehat{AC} = ۷۵^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = ۷۵^\circ$$

$$\widehat{CD} = ۱۸۰^\circ - (\widehat{AC} + \widehat{BD}) = ۱۸۰^\circ - (۷۵^\circ + ۷۵^\circ) = ۳۰^\circ$$

---

۵) در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند. ثابت کنید: $AC = BD$

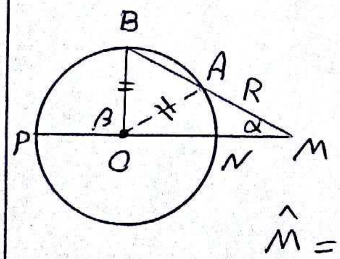


$$AC \parallel BD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow ۱۸۰^\circ - \widehat{BD} = ۱۸۰^\circ - \widehat{AC}$$

$$\Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC}$$

---

۶) دایره $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$ نشان دهید: $\beta = ۳\alpha$



$$OA = MA = R \Rightarrow \overset{\triangle}{OAM} \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{M} = \alpha$$

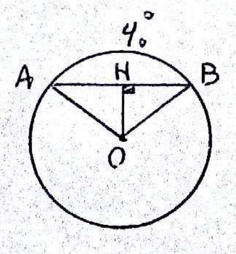
$$\text{مرکزی } \widehat{AOM} = \widehat{AN} = \alpha$$

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{BP} - \widehat{AN}}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{BP} - \alpha}{۲} \Rightarrow ۳\alpha = \widehat{BP}$$

$$\text{از طرفی } \widehat{BP} = \beta \quad \Rightarrow \beta = ۳\alpha$$

---

۷) در دایره $C(O,R)$، $\widehat{AB} = ۶۰^\circ$ و $AB = ۱۰$، فاصله O از وتر AB را بدست آورید

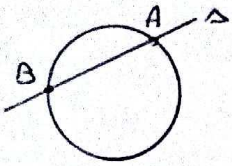


$$\left.\begin{array}{l} \text{مرکزی } \widehat{AOB} = ۶۰^\circ \\ OA = OB = R \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{OAB} \text{ متساوی الاضلاع} \Rightarrow OB = ۱۰,\ \widehat{B} = ۶۰^\circ$$

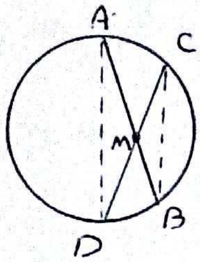
$$\overset{\triangle}{OBH}: \sin\widehat{B} = \frac{OH}{OB} \Rightarrow \sin ۶۰^\circ = \frac{OH}{۱۰} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۱۰ \Rightarrow OH = ۵\sqrt{۳}$$

روابط طولی در دایره:

قاطع بر دایره: خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع کند قاطع بر دایره یا به طور خلاصه قاطع نامیده می شود.



قضیه: هرگاه خطهای شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M درون دایره، یکدیگر را قطع کنند آنگاه:



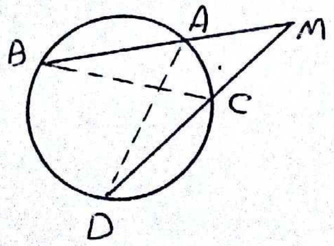
$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

اثبات: C را به B وصل می کنیم داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2} \\ \hat{B} = \hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{زز}]{\text{حالت}} \overset{\triangle}{ADM} \sim \overset{\triangle}{MCB} \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} = \frac{AD}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

قضیه: هرگاه خطهای شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M بیرون دایره، یکدیگر را قطع کنند، آنگاه:

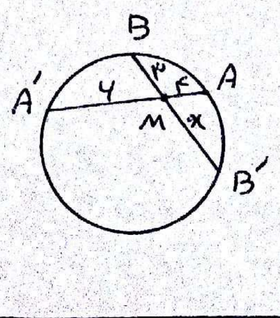


$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{زز}]{\text{حالت}} \overset{\triangle}{MBC} \sim \overset{\triangle}{MAD} \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{MC}{MA} = \frac{MB}{MD}$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

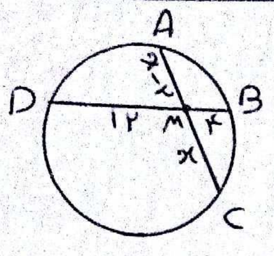
تمرین: در شکل مقابل طول وتر BB' را بیابید.



$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB' \Rightarrow ۴ \times ۶ = ۳ \times x \Rightarrow x = ۸$$

$$BB' = ۳ + x = ۳ + ۸ = ۱۱$$

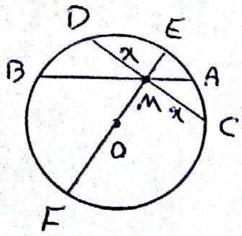
تمرین: در شکل روبرو مقدار x را بیابید.



$$MA.MC = MB.MD \Rightarrow x(x-2) = 4 \times 12 \Rightarrow x^2 - 2x = 48$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 & \text{ق ق} \\ x = -6 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

تمرین: نقطه M روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره (C) چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M را بیابید.



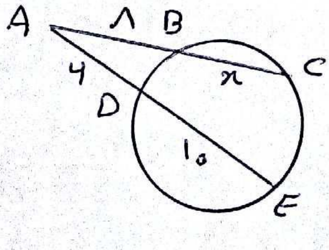
حل: مطابق شکل ابتدا وتر AB را در دایره C رسم می‌کنیم برای رسم کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M ابتدا M را به O مرکز دایره وصل کرده از دو طرف امتداد دهیم تا قطر EF رسم شود سپس از M بر EF عمود می‌کنیم تا وتر DC رسم شود می‌دانیم قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند پس: $DM = DC = x$

$AB = 9 \Rightarrow MA = 3$ و $MB = 6$ (نسبت ۱ به ۲)

$$MD.MC = MA.MB \Rightarrow x.x = 3 \times 6 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \sqrt{18} \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$

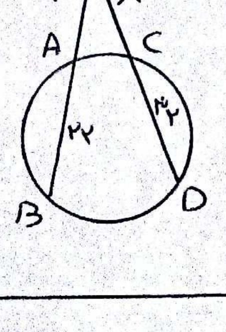
$$DC = 2x = 6\sqrt{2}$$

تمرین: در شکل‌های زیر مقادیر x را تعیین کنید:



$$AB.AC = AD.AE \Rightarrow 8(8+x) = 6(6+10)$$

$$\Rightarrow 64 + 8x = 96 \Rightarrow 8x = 32 \Rightarrow x = 4$$



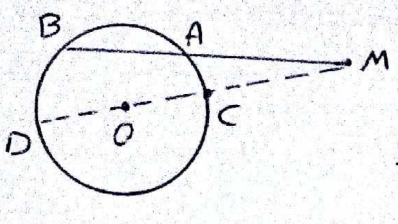
$$MA.MB = MC.MD$$

$$10(10+22) = x(x+32) \Rightarrow 320 = x^2 + 32x$$

$$\Rightarrow x^2 + 32x - 320 = 0 \Rightarrow (x+40)(x-8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -40 & \text{غ ق ق} \\ x = 8 & \text{ق ق} \end{cases}$$

تمرین: مطابق شکل $AB=3$ و $MA=5$ است. اگر محیط دایره برابر 8π باشد فاصله M از مرکز دایره را بیابید.



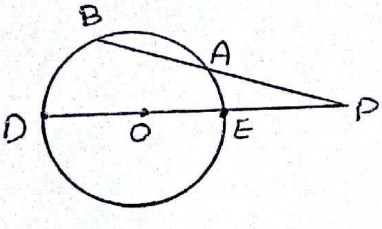
حل: M را به نقطه O مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم:

$$\text{محیط} = 2\pi R = 8\pi \Rightarrow R=4$$

$$MA\cdot MB = MC\cdot MD \Rightarrow MA\cdot MB = (MO-\overset{R}{OC})(MO+\overset{R}{OD})$$

$$\Rightarrow MA\cdot MB = MO^2-R^2 \Rightarrow 5(5+3)=MO^2-4^2 \Rightarrow MO^2=56 \Rightarrow MO=\sqrt{56}$$

تمرین: نقطه P خارج دایره $C(O,R)$ است. اگر فاصله این نقطه تا مرکز دایره برابر d باشد، ثابت کنید حاصلضرب طول قطعات هر قاطعی که از P بر دایره رسم می‌شود مقدار ثابت d^2-R^2 است که این مقدار ثابت را قوت نقطه P نسبت به دایره (C) می‌گوئیم.



فرض	$PO=d$
حکم	$PA\cdot PB = d^2-R^2$

حل: نقطه P را به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم:

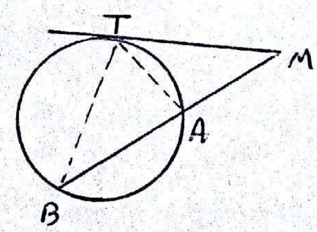
$$PA\cdot PB = PE\cdot PD \Rightarrow PA\cdot PB = (\underbrace{PO}_{d}-\underbrace{OE}_{R})(PO+\underbrace{OD}_{R}) \Rightarrow PA\times PB = d^2-R^2$$

قضیه: اگر از یک نقطه خارج دایره، یک مماس و یک قاطع نسبت به آن دایره رسم کنیم، مربع طول مماس برابر است با حاصلضرب دو قطعه قاطع.

فرض	MT مماس و MAB قاطع
حکم	$MT^2=MA\cdot MB$

اثبات:

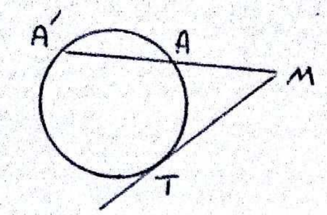
T را به A و B وصل می‌کنیم داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{MTA}=\dfrac{\overset{\frown}{AT}}{2} \\ \hat{MBT}=\dfrac{\overset{\frown}{AT}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{MTA}=\hat{MBT}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{MTA}=\hat{MBT} \\ \hat{M}=\hat{M} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{MTB} \sim \overset{\triangle}{MTA} \Rightarrow \frac{MA}{MT}=\frac{AT}{BT}=\frac{MT}{MB}$$

$$\Rightarrow \boxed{MT^2=MA\cdot MB}$$



تمرین: در شکل روبرو از نقطه M بر دایره مماس و قاطعی رسم شده است:

الف) اگر $MA=4$ و $AA'=5$ باشد طول MT را بیابید.

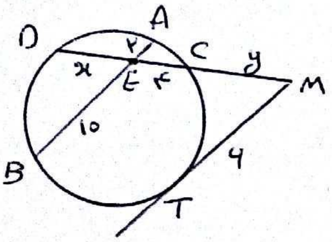
ب) اگر $MA'=18$ و $MT=12$ باشد طول وتر AA' را پیدا کنید.

الف) $MT^2 = MA\cdot MA' \Rightarrow MT^2 = MA\cdot(MA+AA') \Rightarrow MT^2 = 4(4+5)$

$\Rightarrow MT^2 = 36 \Rightarrow MT = 6$

ب) $MT^2 = MA\cdot MA' \Rightarrow 12^2 = MA\times 18 \Rightarrow MA = 8$

$$AA' = MA' - MA = 18 - 8 = 10$$

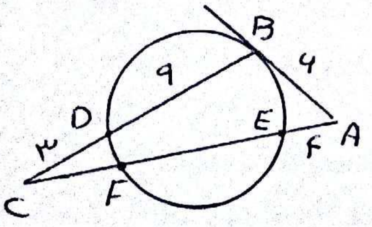


تمرین: با توجه به شکل مطلوبست محاسبه مقادیر x و y:

$EA\cdot EB = ED\cdot EC \Rightarrow 2\times 10 = x\times 4 \Rightarrow \boxed{x=5}$

$MT^2 = MC\cdot MD \Rightarrow 6^2 = y(y+9) \Rightarrow y^2+9y-36=0$

$\Rightarrow (y+12)(y-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=-12 & \text{غ ق ق} \\ y=3 & \text{ق ق} \end{cases}$



تمرین: در شکل روبرو AB بر دایره مماس است. محیط مثلث $\hat{ABC}$ را بیابید.

$AB^2 = AE\cdot AF \Rightarrow 6^2 = 4\times AF \Rightarrow AF = 9$

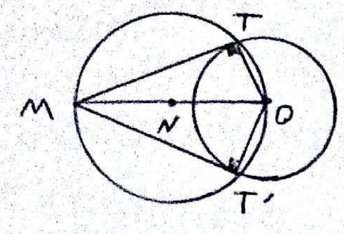
$\Rightarrow EF = AF - AE = 9 - 4 = 5$

$CD\cdot CB = CF\cdot CE \Rightarrow 3(3+9) = CF(CF+FE) \Rightarrow 36 = CF(CF+5)$

$\Rightarrow CF^2 + 5CF - 36 = 0 \Rightarrow (CF+9)(CF-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} CF=-9 & \text{غ ق ق} \\ CF=4 & \text{ق ق} \end{cases}$

محیط $\hat{ABC} = AB+AC+BC = AB+(AE+EF+FC)+(CD+DB) = 6+(4+5+4)+(3+9) = 31$

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره:



برای رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره مانند M، بصورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) نقطه M را به مرکز دایره وصل می‌کنیم.

۲) وسط MO را نقطه N می‌نامیم.

۳) از نقطه N دایره‌ای به شعاع MN رسم می‌کنیم محل تلاقی را T و T' می‌نامیم MT و MT' دو مماس هستند و $MT = MT'$ زیرا:

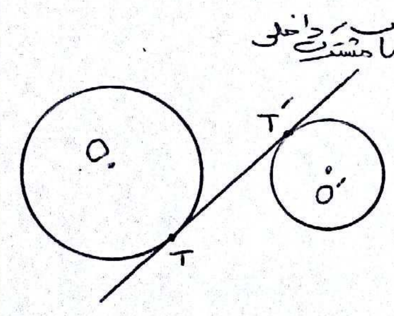
$$\left.\begin{array}{l} OT = OT' \ \text{شعاع} \\ MO = MO \ \text{مشترک} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{ضلع}]{\text{وتر و یک}} \hat{MOT} \cong \hat{MOT'} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} MT = MT' \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \Rightarrow MO \ \text{نیمساز} \ T\hat{M}T' \end{array}\right.$$

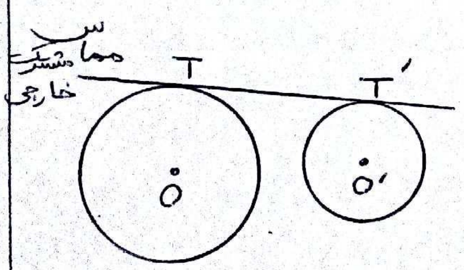
مماس مشترک دو دایره:

مماس مشترک دو دایره، خطی است که بر هر دو دایره مماس باشد، مماس مشترک دو دایره، بر دو نوع است:

۱) مماس مشترک داخلی:

اگر دو دایره در طرفین خط مماس باشند، خط مماس را مماس مشترک داخلی می‌گوئیم.



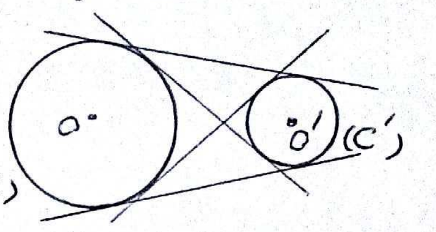


۲) اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، خط مماس را مماس مشترک خارجی می‌گوئیم.

تمرین: دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با طول خط المرکزین d مفروض اند با در نظر گرفتن اوضاع نسبی این دو دایره، در هر حالت مماس های مشترک داخلی و خارجی این دو دایره را رسم کنید.

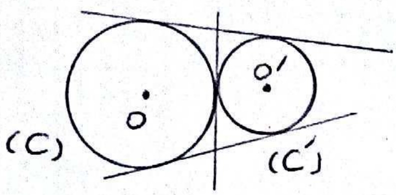
۱) دو دایره متخارج هستند

دو مماس مشترک داخلی و دو مماس مشترک خارجی دارند



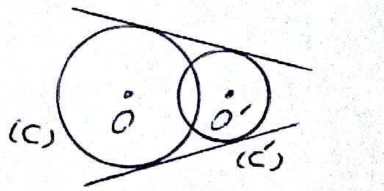
۲) دو دایره مماس بیرونی اند.

دو مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی دارند.



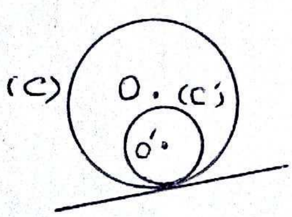
۳) دو دایره متقاطع اند.

فقط دو مماس مشترک خارجی دارند



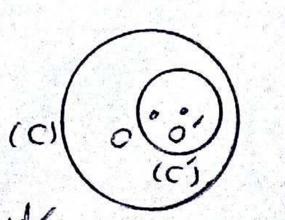
۴) دو دایره مماس درونی اند.

فقط یک مماس مشترک خارجی دارند.



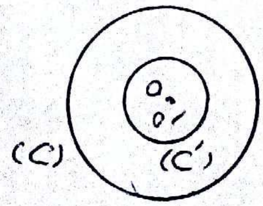
۵) دو دایره متداخل اند

هیچ مماس مشترکی ندارند



۶) دو دایره هم مرکزند

هیچ مماس مشترکی ندارند

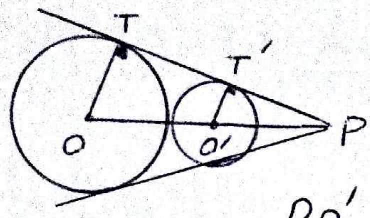


مثال) دو دایره $C(O,3)$ و $C'(O',2)$ مفروض اند. مرکز این دو دایره نقاط $O(m-1,2)$ و $O'(3,-2)$ هستند اگر این دو دایره در کل سه مماس مشترک داشته باشند مقدار m را بیابید.

$$OO' = R+R' \Rightarrow \sqrt{(m-1-3)^2+(2-(-2))^2} = 3+2 \Rightarrow \sqrt{(m-4)^2+16} = 5$$

$$\Rightarrow (m-4)^2+16 = 25 \Rightarrow (m-4)^2 = 9 \Rightarrow m-4 = \pm 3 \Rightarrow m = 1 \text{ یا } 7$$

مثال) دو دایره به شعاع های ۲ و ۳ مماس خارج اند. مماس مشترک خارجی آنها یکدیگر را در نقطه P قطع کرده اند. فاصله P را تا مرکز دایره بزرگتر بیابید.



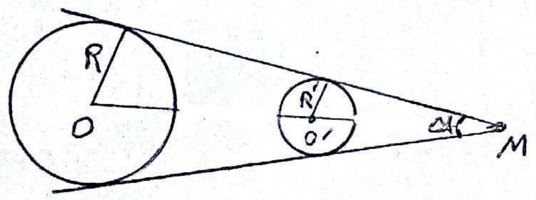
حل: مطابق شکل، شعاع بر خط مماس عموداست

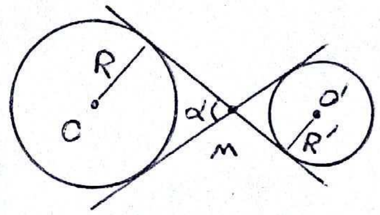
پس: $OT \parallel O'T'$ طبق قضیه تالس:

$$\frac{PO'}{PO} = \frac{O'T'}{OT} \Rightarrow \frac{PO'}{PO'+OO'} = \frac{R'}{R} \Rightarrow \frac{PO'}{PO'+(۲+۳)} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳PO' = ۲PO' + ۱۰ \Rightarrow PO' = ۱۰ \Rightarrow PO = PO' + OO' = ۱۰ + (۲+۳) = ۱۵$$

فرمول محاسبه زاویه بین مماس های مشترک خارجی و داخلی:





α = زاویه بین مماسهای مشترک خارجی

$$\sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{|R-R'|}{d}$$

α = زاویه بین مماسهای مشترک داخلی

$$\sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{R+R'}{d}$$

مثال: شعاع دو دایره متخارج ۲۵ و ۷٫۵ است. اگر طول خط المرکزین این دو دایره برابر ۶۵ باشد زاویه بین دو مماس مشترک داخلی دو دایره را بیابید.

$$\sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{R+R'}{d} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{۲۵+۷٫۵}{۶۵} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{۳۲٫۵}{۶۵} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{۲} = ۳۰^\circ \Rightarrow \boxed{\alpha = ۶۰^\circ}$$

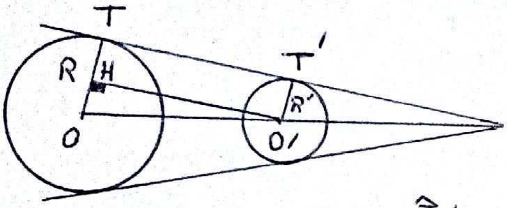
مثال) زاویه بین مماس های مشترک خارجی دو دایره متخارج ۹۰° است. اگر طول خط المرکزین این دو دایره $۱۰\sqrt{۲}$ بوده و شعاع یکی از دایره ها سه برابر شعاع دایره دیگر باشد، مساحت دایره بزرگتر را بیابید.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{|R-R'|}{d} \Rightarrow \sin\frac{90^\circ}{2} = \frac{|R-3R|}{10\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{2R}{10\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2R}{10\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow \boxed{R=5} \Rightarrow \text{شعاع دایره بزرگ} = 3R = 3\times 5 = 15$$

$$S_{\text{بزرگ}} = \pi(15)^2 = 225\pi$$

قضیه: در دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ اگر TT' طول مماس خارج باشد و $d = OO'$ ثابت کنید: $TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2-(R-R')^2}$



اثبات: از O' عمود $O'H$ را بر OT رسم می‌کنیم چهارضلعی $TT'O'H$ مستطیل است

طبق رابطه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه $O\hat{O'}H$ داریم:

$$(OO')^2 = O'H^2 + OH^2 \Rightarrow d^2 = TT'^2 + (R-R')^2 \Rightarrow TT'^2 = d^2 - (R-R')^2$$

$$\Rightarrow \boxed{TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2-(R-R')^2}}$$

مثال ۱: دو دایره $C(O,7)$ و $C'(O',1)$ مفروضند. اگر طول خط المرکزین این دو دایره ۱۰ باشد طول مماس مشترک خارجی این دو دایره را بیابید.

$$TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2-(R-R')^2} = \sqrt{10^2-(7-1)^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$$

مثال ۲: طول مماس مشترک خارجی دو دایره متقاطع به شعاع های ۱۲ و ۶ برابر ۸ است. طول خط المرکزین این دو دایره را بیابید.

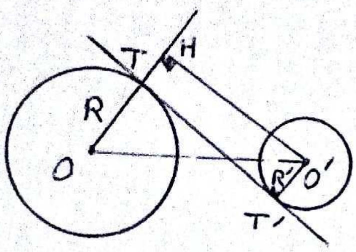
$$TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2-(R-R')^2} \Rightarrow 8 = \sqrt{d^2-(12-6)^2} \Rightarrow 8 = \sqrt{d^2-36} \Rightarrow 64 = d^2-36$$

$$\Rightarrow d^2 = 100 \Rightarrow \boxed{d=10}$$

مثال ۳: مقدار a را چنان تعیین کنید که طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های ۳ و ۸ و طول خط المرکزین ۱۳ برابر $(5a-3)$ باشد.

$$TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2-(R-R')^2} \Rightarrow 5a-3 = \sqrt{13^2-(3-8)^2} \Rightarrow 5a-3 = \sqrt{144} \Rightarrow 5a-3 = 12 \Rightarrow \boxed{a=3}$$

قضیه: در دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ ، TT' طول مماس داخل است. با فرض $d=OO'$ ثابت کنید: $TT'_{\text{داخلی}}=\sqrt{d^2-(R+R')^2}$



اثبات: از O' عمود $O'H$ را بر امتداد OT رسم می‌کنیم چهارضلعی $HO'T'T$ مستطیل است در مثلث قائم الزاویه $O\hat{O'}H$ طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$(OO')^2=OH^2+O'H^2 \Rightarrow d^2=(R+R')^2+TT'^2 \Rightarrow TT'^2=d^2-(R+R')^2$$

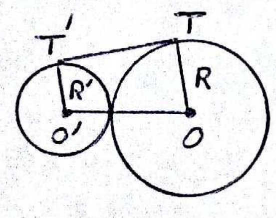
$$\Rightarrow \boxed{TT'_{\text{داخلی}}=\sqrt{d^2-(R+R')^2}}$$

تست: فاصله مراکز دو دایره برابر ۴۱ cm و شعاع دایره کوچک ۴ cm و شعاع دایره بزرگتر ۵ cm است. طول مماس مشترک داخلی دو دایره چند سانتیمتر است؟

۱) ۴۱ ۲) ۳۹ ۳) ۳۹٫۸ ۴) ۴۰

$$TT'_{\text{داخلی}}=\sqrt{d^2-(R+R')^2}=\sqrt{41^2-(5+4)^2}=\sqrt{1681-81}=\sqrt{1600}=40$$

قضیه: ثابت کنید طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس بیرونی برابر است با: $TT'=2\sqrt{RR'}$



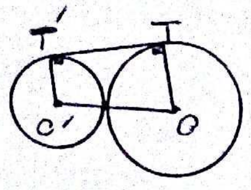
اثبات: چون دو دایره مماس بیرون هستند پس:

$$OO'=d=R+R'$$

$$TT'_{\text{خارجی}}=\sqrt{d^2-(R-R')^2}=\sqrt{(R+R')^2-(R-R')^2}=\sqrt{(R^2+R'^2+2RR')-(R^2+R'^2-2RR')}$$

$$=\sqrt{4RR'} \Rightarrow \boxed{TT'_{\text{خارجی}}=2\sqrt{RR'}}$$

مثال) مطابق شکل دایره‌ها به شعاع ۲ و ۸ بوده و مماس خارج اند. محیط و مساحت چهار ضلعی $T'TOO'$ را مشخص کنید. (TT' مماس مشترک خارجی دو دایره است)



$$TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{8\times 2} = 2\times 4 = 8$$

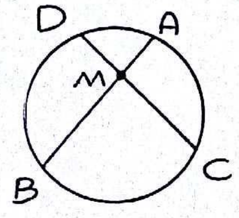
چهار ضلعی $T'TOO'$ ذوزنقه قائم الزاویه است.

$$\text{مساحت} = S = \frac{(8+2)\times 8}{2} = 40$$

$$\text{محیط} = P = 8+2+10+8 = 28$$

تمرین ص ۲۳

۱) در دایره $C(O,R)$، وتر AB وتر CD به طول ۹ سانتیمتر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11\,cm$ آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟



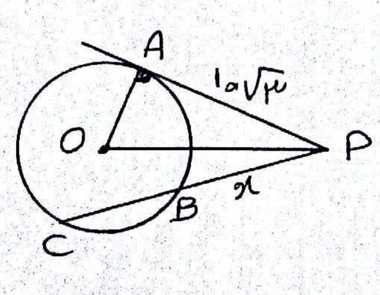
$$\frac{DM}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DM}{DM+MC} = \frac{1}{1+2} \Rightarrow \frac{DM}{CD} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{DM}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{DM = 3} \Rightarrow MC = 9-3 = 6$$

$AM = x \Rightarrow MB = 11 - x$ $\qquad AM \cdot MB = DM \cdot MC \Rightarrow x(11-x) = 3\times 6 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$$AM = 2 \ ,\ MB = 11-2 = 9$$

۲) از نقطه P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را برای آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است) همچنین خط راستی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC = 20$، طول‌های PB و PC را بدست آورید.

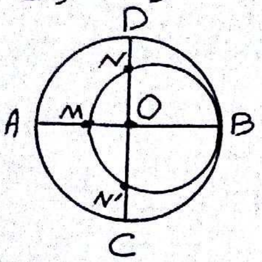


$$AP^2 = PB \cdot PC \Rightarrow (10\sqrt{3})^2 = x(20+x)$$

$$\Rightarrow 300 = 20x + x^2 \Rightarrow x^2 + 20x - 300 \Rightarrow (x-10)(x+30) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -30 & \text{غ ق ق} \\ x = 10 \Rightarrow BP = 10 \Rightarrow PC = 10+20 = 30 \end{cases}$$

۱۳) در شکل مقابل دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر، برهم عمودند اگر $AM=14$ و $ND=10$ شعاع های دو دایره را پیدا کنید.



حل: می دانیم قطر عمود بر وتر، وتر و کمان نظیرش را نصف می کند پس $ON=ON'$

$AM=14$ و $OM=x$ ، $ON=ON'=y$ ، $ND=10$

در دایره کوچکتر دو وتر در داخل دایره متقاطعند پس داریم:

$OM=OD$ (شعاع دایره بزرگ) $\Rightarrow 14+x=y+10 \Rightarrow y=4+x$

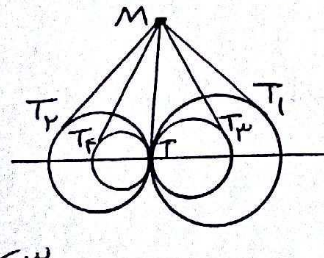
$ON\cdot ON' = OM\cdot OB \Rightarrow y\cdot y = x(14+x) \xrightarrow{y=4+x} (4+x)^2 = x(14+x)$

$\Rightarrow x^2+12x+36 = 14x+x^2 \Rightarrow 36=4x \Rightarrow \boxed{x=9}$

شعاع دایره بزرگ $=14+9=25$ ⇐ قطر دایره کوچک $=25+9=34$ ⇐ شعاع دایره کوچک $=\frac{34}{2}=17$

---

۱۴) مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T برهم مماس اند. از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره ها مماس رسم کرده ایم ثابت کنید:

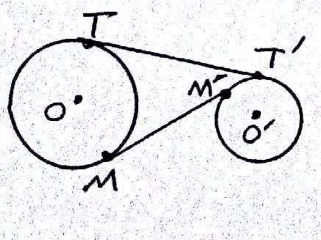


$MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$

حل: می دانیم دو مماسی که از نقطه‌ای خارج دایره بر آن رسم شود با هم برابرند از نقطه M دو مماس بر دایره رسم شده پس $MT=MT_1$ در دایره کوچکتر از نقطه M نیز دو مماس بر آن رسم شده پس $MT=MT_2$ به همین ترتیب: $MT=MT_1=MT_2=MT_3=MT_4=\dots$

---

۱۵) طول شعاع های دو دایره متخارج را بدست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.

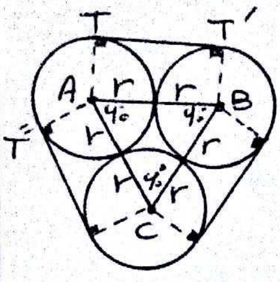


$OO'=8$ $\quad TT'=3\sqrt{7}=\sqrt{63}$ $\quad MM'=\sqrt{15}$

$TT'^2 = OO'^2-(R-R')^2 \Rightarrow 63 = 64-(R-R')^2 \Rightarrow R-R'=1$

$MM'^2 = OO'^2-(R+R')^2 \Rightarrow 15 = 64-(R+R')^2 \Rightarrow R+R'=7$

$$\begin{cases} R-R'=1 \\ R+R'=7 \end{cases} \Rightarrow 2R=8 \Rightarrow \boxed{R=4}\ ,\ \boxed{R'=3}$$



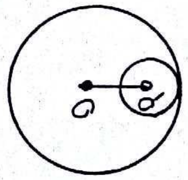
۶) سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو برهم مماس اند مطابق شکل مقابل، این سه دایره به وسیله نخی بسته شده اند، نشان دهید طول این نخ برابر $6r+2\pi r$ است همچنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$ است.

$TT'=2r \qquad T\hat{A}T''=360^\circ-(90^\circ+90^\circ+60^\circ)=120^\circ \qquad \widehat{TT''}=\frac{120}{360}(2\pi r)=\frac{2}{3}\pi r$

$$\text{طول نخ} = 3(2r)+3(\tfrac{2}{3}\pi r)=6r+2\pi r$$

$$S_{\text{محدود}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} - S_{\text{نیم دایره}} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2-\frac{1}{2}\pi r^2 = r^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$$

۷) طول خط المرکزین دو دایره متداخل مساوی ۲cm و مساحت ناحیه محدود بین آنها 16π سانتیمتر مربع است. طول شعاع های دو دایره را بدست آورید.



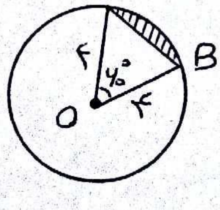
$$OO'=R-R'=2$$

$$S_{\text{محصور}} = S_{\text{دایره بزرگ}} - S_{\text{دایره کوچک}} \Rightarrow 16\pi=\pi R^2-\pi R'^2=\pi(R^2-R'^2)$$

$$\Rightarrow R^2-R'^2=16 \Rightarrow (R-R')(R+R')=16 \Rightarrow 2(R+R')=16 \Rightarrow R+R'=8$$

$$\begin{cases} R-R'=2 \\ R+R'=8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{R=5}\ \ \boxed{R'=3}$$

۸) مطابق شکل در دایره به شعاع ۴ مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه یک قطعه دایره نام دارد.



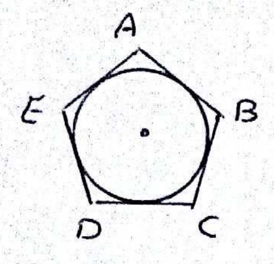
$$S_{\overset{\triangle}{OAB}}=\frac{1}{2}OA.OB.\sin\hat{O}=\frac{1}{2}(4)(4)\sin 60^\circ=4\sqrt{3}$$

$$S_{\text{قطاع } OAB}=\frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}=\frac{\pi(4)^2(60^\circ)}{360^\circ}=\frac{16\pi}{6}=\frac{8\pi}{3}$$

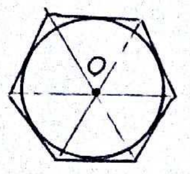
$$S_{\text{هاشور زده}}=S_{\text{قطاع}}-S_{\text{مثلث}}=\frac{8\pi}{3}-4\sqrt{3}$$

چند ضلعی های محیطی و محاطی :

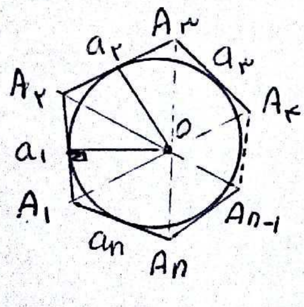
تعریف ۱ : یک چند ضلعی را محیطی می گوییم اگر و فقط اگر دایره ای در صفحه چند ضلعی وجود داشته باشد که بر تمام اضلاع آن مماس باشد. دایره گفته شده را دایره محاطی چند ضلعی می گوییم. در شکل روبرو $ABCDE$ یک پنج ضلعی محیطی است.



تعریف ۲ : یک چند ضلعی را محیطی می گوییم اگر و فقط اگر نیمساز داخلی تمام زاویه هایش در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.



مثال) اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط $2P$ شعاع دایره محاطی برابر r باشد ثابت کنید : $r=\frac{S}{P}$ یا $S=rP$



فرض	$A_1A_2\cdots A_n$ یک n ضلعی محیطی با محیط $2P$ و مساحت S است
حکم	$r=\frac{S}{P}$ (شعاع دایره محاطی)

اثبات : مطابق شکل مرکز دایره محاطی یعنی نقطه O را به رئوس n ضلعی محیطی $A_1A_2\cdots A_n$ وصل می کنیم. در اینصورت این n ضلعی به n مثلث تقسیم می شود که مساحت کل n ضلعی با جمع مساحت این n مثلث مساوی است.

$$S = S_{\triangle OA_1A_2} + S_{\triangle OA_2A_3} + \cdots + S_{\triangle OA_nA_1}$$

$$= \frac{a_1 r}{2} + \frac{a_2 r}{2} + \cdots + \frac{a_n r}{2} = \frac{r}{2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \frac{r}{2} \times 2P$$

$$\Rightarrow \boxed{S = rP} \quad \text{یا} \quad \boxed{r = \frac{S}{P}}$$

مثال) یک n ضلعی محیطی با مساحت ۲۰ و محیط ۱۰ مفروض است مساحت دایره محاطی این n ضلعی را بیابید.

$S=20$

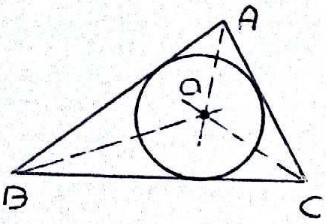
$2P=10 \Rightarrow P=5$

$$r=\frac{S}{P}=\frac{20}{5}\Rightarrow \boxed{r=4}$$

$$S_{\text{دایره محاطی}}=\pi r^2=\pi(4)^2=16\pi$$

دایره محاطی مثلث:

مرکز دایره محاطی هر مثلث، محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث است.



r = شعاع دایره محاطی

S = مساحت مثلث

$2P$ = محیط مثلث

$$r=\frac{S}{P}$$

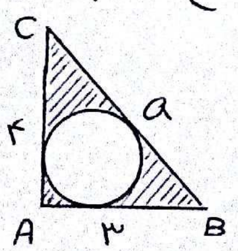
مثال) شعاع دایره محاطی مثلثی با اضلاعی به طول ۵ و ۱۲ و ۱۳ را بیابید.

$13^2=12^2+5^2 \Rightarrow$ رابطه فیثاغورس برقرار است $\Rightarrow$ مثلث قائم الزاویه

$S=\frac{5\times12}{2}=30$ $\quad 2P=5+12+13=30 \Rightarrow P=15$

$$r=\frac{S}{P}=\frac{30}{15}=2$$

مثال) مساحت محصور به مثلث قائم الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۳ و ۴ و دایره محاطی آن را بیابید.

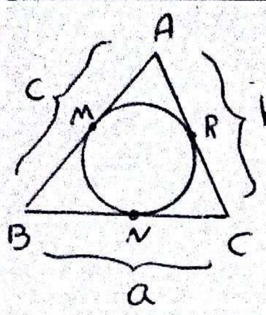


$a^2=3^2+4^2=9+16=25 \Rightarrow a=5$

$S=\frac{3\times4}{2}=6$ $\quad P=\frac{3+4+5}{2}=6$

$$r=\frac{S}{P}=\frac{6}{6}=1 \Rightarrow S_{\text{دایره محاطی}}=\pi r^2=\pi(1)^2=3.14$$

$$S_{\text{رنگی}}=6-3.14=2.86$$



مثال) مطابق شکل دایره محاطی مثلث ABC به محیط ۲P رسم شده و نقاط M و N و R محل تماس این دایره با اضلاع مثلث هستند ثابت کنید:

$$AM = AR = P - a \qquad BM = BN = P - b \qquad CR = CN = P - c$$

اثبات: می‌دانیم طول مماس‌های مرسوم از یک نقطه خارج دایره بر دایره باهم مساوی‌اند

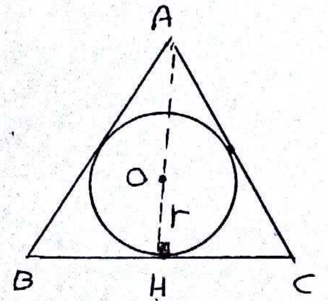
$$AM = AR \qquad BM = BN \qquad CN = CR$$

$$2P = AB + AC + BC = (AM + BM) + (AR + CR) + (BN + CN)$$

$$\Rightarrow 2P = 2AM + 2BN + 2CN \Rightarrow P = AM + \underbrace{BN + CN}_{a} \Rightarrow \boxed{AM = P - a}$$

دو حالت دیگر بهمین ترتیب ثابت می‌شود.

مثال) مثلث متساوی الاضلاع ABC بر دایره‌ای به شعاع r محیط است. محیط و مساحت این مثلث را برحسب r بیابید



حل: می‌دانیم مرکز دایره محاطی مثلث محل برخورد نیمسازهای داخلی آن است از طرفی در مثلث متساوی الاضلاع میانه‌ها و نیمسازها برهم منطبق هستند درنتیجه مرکز دایره محاطی مثلث همان محل برخورد میانه‌های این مثلث است و می‌دانیم محل برخورد میانه‌ها، هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند:

$$OA = 2OH \Rightarrow OA = 2r \Rightarrow AH = OA + OH = 2r + r = 3r$$

$$\left.\begin{array}{l} AH = 3r \\ AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3r \Rightarrow a = \frac{6r}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = 2r\sqrt{3}$$

$$\text{محیط} = 2P = 3a = 3(2r\sqrt{3}) = 6r\sqrt{3}$$

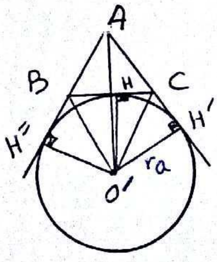
$$\text{مساحت} = S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2r\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}\,r^2$$

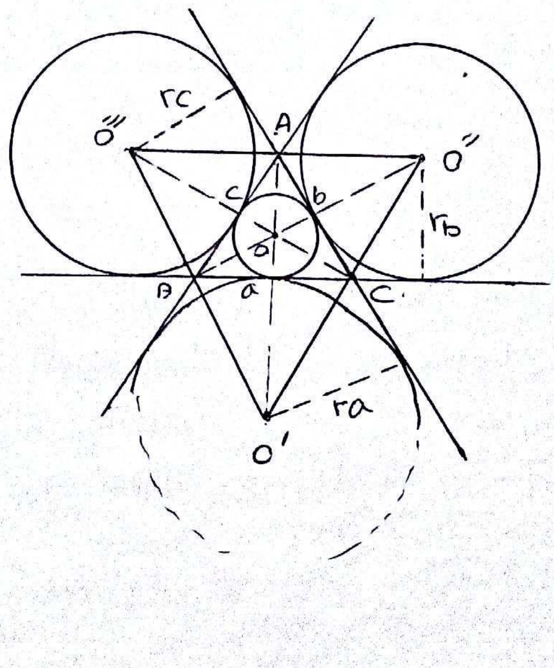
دایره محاطی خارجی مثلث:

با توجه به این که نیمساز داخلی یکی از زاویه‌های داخلی هر مثلث با دو نیمساز خارجی زاویه‌های دیگر، در یک نقطه همرس اند، پس این نقطه از یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث به یک فاصله است.

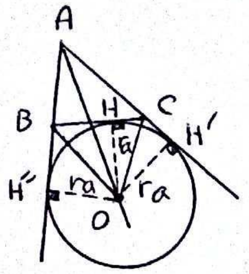
مطابق شکل (۱) نیمساز داخلی $\hat{A}$ با نیمسازهای خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در نقطه O' متقاطع است. فاصله نقطه O' از ضلع $BC=a$ و امتداد دو ضلع $AC=b$ و $AB=c$ یکسان است. بنابراین به مرکز O' و شعاعی معادل فاصله O' تا ضلع BC می‌توان دایره‌ای رسم کرد که بر ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC مماس باشد. به این دایره، دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می‌گوئیم. شعاع دایره محاطی خارجی نظیر راس A را با r_a نشان می‌دهیم.

مطابق شکل (۲) هر مثلث دارای سه دایره محاطی خارجی است. در مثلث ABC، شعاع سه دایره محاطی خارجی عبارتست از: r_a، r_b، r_c





قضیه: ثابت کنید در مثلث $\hat{ABC}$ با طول اضلاع a و b و c، شعاع دایره‌های محاطی خارجی برابر است با: $r_a = \frac{S}{P-a}$ و $r_b = \frac{S}{P-b}$ و $r_c = \frac{S}{P-C}$ که در این فرمول‌ها P نصف محیط مثلث است.



اثبات: مطابق شکل، دایره محاطی خارجی نظیر یک رأس مثلاً رأس A را رسم می‌کنیم و از مرکز این دایره بر ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC عمود می‌کنیم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{OAB}} + S_{\overset{\triangle}{OAC}} - S_{\overset{\triangle}{OBC}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{OH'' \times AB}{2} + \frac{OH' \times AC}{2} - \frac{OH \times BC}{2} = \frac{r_a . c}{2} + \frac{r_a . b}{2} - \frac{r_a . a}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{r_a}{2}(b+c-a)$$

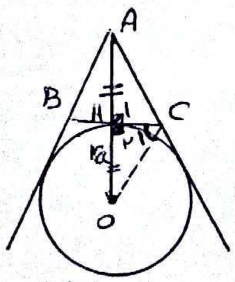
می‌دانیم: $\text{محیط} = 2P = a+b+c$

$$S = \frac{r_a}{2}(b+c+a-2a) \Rightarrow S = \frac{r_a}{2}(2P-2a) \Rightarrow S = \frac{r_a}{2} \times 2(P-a)$$

$$\Rightarrow S = r_a(P-a) \Rightarrow \boxed{r_a = \frac{S}{P-a}}$$

بهمین ترتیب ثابت می‌شود: $r_b = \frac{S}{P-b}$ و $r_c = \frac{S}{P-C}$

مثال) شعاع دایره محاطی خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a را بدست آورید.



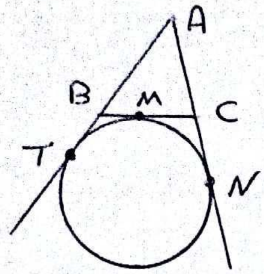
مطابق شکل نیمساز داخلی A (ارتفاع مثلث) و نیمساز خارجی $\hat{C}$ در نقطه O همدیگر را قطع کرده‌اند

$$\text{داخلی } \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow \text{خارجی } \hat{C} = 120 \Rightarrow \hat{C}_1 = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ \text{مشترک } CH = CH \\ \hat{C}_1 = \hat{C} = 60^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زضز}} \overset{\triangle}{ACH} \cong \overset{\triangle}{OCH} \Rightarrow OH = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

نتیجه: شعاع دایره‌های محاطی خارجی در مثلث متساوی‌الاضلاع باهم برابرند

مثال) مطابق شکل طول اضلاع مثلث ABC عبارتست از: $a=3$ و $b=5$ و $c=7$ اگر دایره محاطی خارجی این مثلث نظیر رأس A رسم شده باشد حاصل $\frac{BM}{MC}$ را بیابید.



$$AT=AN \Rightarrow AB+BT=AC+CN \Rightarrow c+BM=b+MC$$

$$\Rightarrow 7+BM=5+MC \Rightarrow \boxed{BM-MC=-2} \quad (1)$$

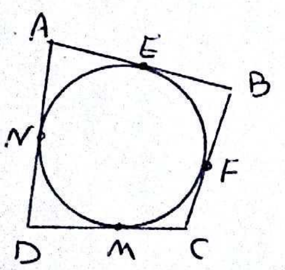
$$BM+MC=BC=a \Rightarrow \boxed{BM+MC=3} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} BM-MC=-2 \\ BM+MC=3 \end{cases} + \Rightarrow 2BM=1 \Rightarrow BM=0.5 \Rightarrow MC=2.5$$

$$\frac{BM}{MC}=\frac{0.5}{2.5}=\frac{1}{5}$$

چهار ضلعی محیطی:

قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع طول دو ضلع مقابلش برابر مجموع طول دو ضلع مقابل دیگر باشد.



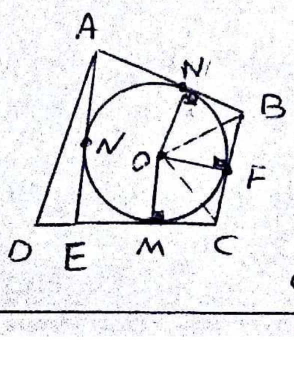
اثبات: فرض کنیم ABCD چهارضلعی محیطی باشد

ثابت می‌کنیم: $AB+DC=AD+BC$

$$\left.\begin{array}{l} AE=AN \\ BE=BF \quad + \\ CM=CF \quad + \\ DM=DN \end{array}\right\} \xrightarrow{+} (AE+BE)+(CM+DM)=(AN+DN)+(BF+CF)$$

$$\Rightarrow \boxed{AB+CD=AD+BC}$$

عکس قضیه: فرض کنیم $AB+DC=AD+BC$ ثابت می‌کنیم ABCD چهارضلعی محیطی است.



مطابق شکل نیمسازهای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در نقطه O همرس اند

$$\left.\begin{array}{l} O \text{ روی نیمساز } B \Rightarrow ON=OF \\ O \text{ روی نیمساز } C \Rightarrow OF=OM \end{array}\right\} \Rightarrow ON=OF=OM=R$$

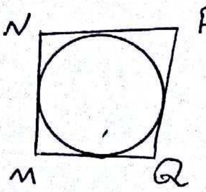
دایره‌ای به مرکز O و شعاع R رسم می‌کنیم دایره بر سه ضلع AB و BC و CD مماس است اگر بر AD هم مماس باشد حکم ثابت شده است:

فرض کنیم این دایره بر AD مماس نباشد (فرض خلف) از A بر آن مماسی رسم می‌کنیم تا خط CD را در نقطه‌ای مانند E قطع کند،

$$\left.\begin{array}{l} AE+BC=AB+EC \\ AD+BC=AB+DC \quad \text{(فرض)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

E همان D است ⇒ دایره بر AD نیز مماس است.

مثال: اگر $MN=x+4$ و $NP=4x+5$ و $PQ=3x+8$ و $QM=x+6$ اضلاع متوالی یک چهارضلعی محیطی باشند مقدار x را بیابید

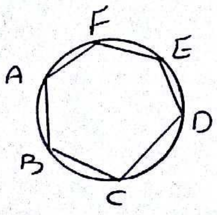


$$MN+PQ=NP+MQ$$

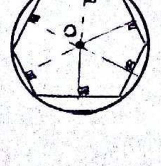
$$x+4+3x+8=4x+5+x+6 \Rightarrow x=1$$

چند ضلعی محاطی:

تعریف ۱:
یک چند ضلعی را محاطی می‌گوئیم اگر و فقط اگر دایره‌ای در صفحه آن چند ضلعی وجود داشته باشد که از تمام رئوس آن چند ضلعی بگذرد. دایره گفته شده را دایره محیطی چند ضلعی می‌گوئیم. در شکل روبرو ABCDEF یک شش ضلعی محاطی است.

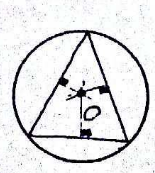


تعریف ۲:



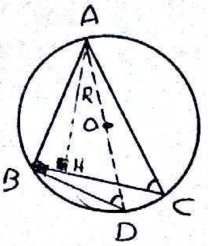
یک چند ضلعی محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف تمام اضلاعش، در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایره محیطی چند ضلعی است.

نکته ریاضی:



مرکز دایره محیطی مثلث، محل برخورد عمود منصف‌های آن است.

قضیه: ثابت کنید در مثلثی به اضلاع a، b و c و مساحت S، شعاع دایره محیطی از دستور $R=\frac{abc}{4S}$ بدست می‌آید.



فرض	شعاع دایره محیطی $R = \overset{\triangle}{ABC}$
حکم	$R=\frac{abc}{4S}$

اثبات: ارتفاع نظیر ضلع BC (یعنی AH) را رسم می‌کنیم و از نقطه A به مرکز دایره (نقطه O) وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند. B را به D وصل می‌کنیم زاویه B محاطی روبرو به قطر و در نتیجه قائمه است.

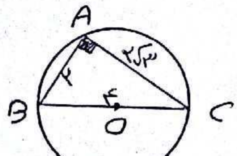
$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}=\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}\\ \hat{H}=\hat{B}=90\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز ز}} \overset{\triangle}{ABD}\sim\overset{\triangle}{AHC} \Rightarrow \frac{AB}{AH}=\frac{AD}{AC}=\frac{BD}{HC}$$

$$\Rightarrow AH\cdot AD = AB\cdot AC \Rightarrow AH\cdot 2R = c\cdot b$$

$$\Rightarrow AH=\frac{bc}{2R}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH \Rightarrow S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{bc}{2R} \Rightarrow S=\frac{abc}{4R} \Rightarrow \boxed{R=\frac{abc}{4S}}$$

مثال) در مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۲ و ۲√۳ شعاع دایره محیطی مثلث را بدست آورید.

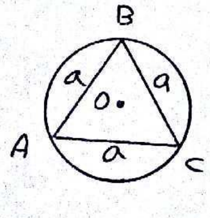


$2^2+(2\sqrt{3})^2=4^2 \Rightarrow$ مثلث قائم الزاویه

$$S=\frac{2\times 2\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3} \qquad \Rightarrow R=\frac{abc}{4S}=\frac{4\times2\times2\sqrt{3}}{4\times2\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{R=2}$$

نتیجه: شعاع دایره محیطی مثلث قائم الزاویه برابر نصف وتر است.

مثال) شعاع و مساحت دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a را بیابید.

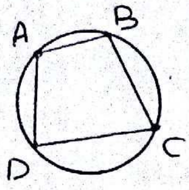


$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{a^3}{4\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{R=\frac{a\sqrt{3}}{3}}$$

$$S=\pi R^2=\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow \boxed{S=\frac{\pi a^2}{3}}$$

چهار ضلعی محاطی:

قضیه: یک چهار ضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه‌ی مقابلش مکمل یکدیگر باشند.



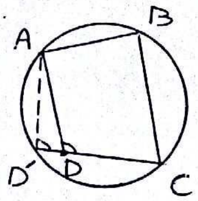
فرض	$ABCD$ یک چهار ضلعی محاطی
حکم	$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} \text{محاطی } \hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{BCD}}{2} \\ \text{محاطی } \hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{BAD}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{BCD}}{2}+\dfrac{\overset{\frown}{BAD}}{2}=\dfrac{\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD}}{2}=\dfrac{360^\circ}{2}=180^\circ$$

به همین ترتیب ثابت می شود: $\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$

عکس قضیه:



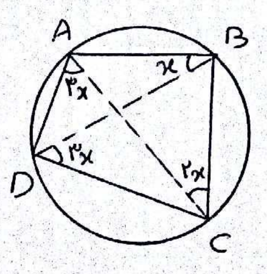
فرض	$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$
حکم	$ABCD$ یک چهار ضلعی محاطی

اثبات: می دانیم از سه نقطه غیر واقع بر راس یک دایره می گذرد دایره‌ای رسم می کنیم که از A و B و C بگذرد اگر دایره از D هم بگذرد حکم تمام است، فرض کنیم دایره از D نگذرد پس نقطه D' را روی دایره در نظر می گیریم $D \neq D'$ (فرض خلف) چهار ضلعی $ABCD'$ محاطی است.

$$\left.\begin{array}{l} B+D'=180^\circ \\ B+D=180^\circ \quad \text{فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow B+D=B+D' \Rightarrow D=D'$$

و این تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مثال) در شکل روبرو از راس های چهار ضلعی $ABCD$، یک دایره می گذرد مقدار x را بیابید.



$$\text{محاطی } D\hat{A}C=\dfrac{\overset{\frown}{DC}}{2} \Rightarrow 3x=\dfrac{\overset{\frown}{DC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{DC}=6x$$

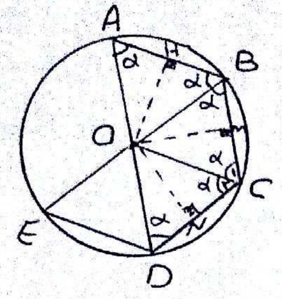
$$\text{محاطی } A\hat{B}D=\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} \Rightarrow x=\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AD}=2x$$

$$\text{محاطی } A\hat{C}D=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow 2x=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=4x$$

$$\text{محاطی } B\hat{D}C=\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow 3x=\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=6x$$

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AD}=360^\circ \Rightarrow 18x=360^\circ \Rightarrow \boxed{x=20^\circ}$$

قضیه: ثابت کنید هر n ضلعی منتظم محاطی است.



اثبات: عمود منصف AB و BC را رسم می‌کنیم

OH و OM همدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند O روی عمود منصف AB و BC است پس: $① \; OA = OB = OC$

O را به D وصل می‌کنیم

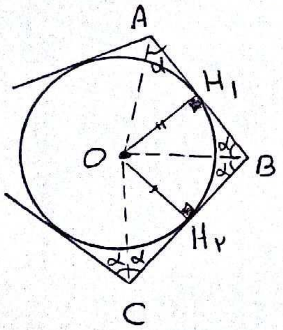
$$\left.\begin{array}{l} BC = CD \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \alpha \\ OC = OC \quad \text{مشترک} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{OBC} \cong \overset{\triangle}{OCD} \Rightarrow OB = OD \quad ②$$

$① , ② \Rightarrow OA = OB = OC = OD$

بهمین ترتیب ثابت می‌شود $OA = OB = OC = OD = \dots = R$

پس رئوس n ضلعی روی این دایره هستند و n ضلعی منتظم محاطی است

قضیه: ثابت کنید هر n ضلعی منتظم محیطی است.



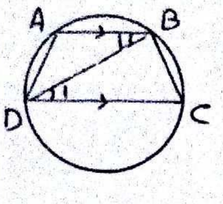
اثبات: نیمسازهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در O قطع کنند

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \alpha \\ AB = BC \\ B_2 = C_1 = \alpha \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OBC} \Rightarrow OH_1 = OH_2 = R$$

بهمین ترتیب ثابت می‌شود: $OH_1 = OH_2 = OH_3 = \dots = R$ پس دایره بر تمام اضلاع n ضلعی مماس است و n ضلعی منتظم محیطی است

تمرینات ص ۲۹ و ص ۳۰ و ص ۳۱ کتاب درسی

۱) ثابت کنید یک ذوزنقه محاطی است اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.



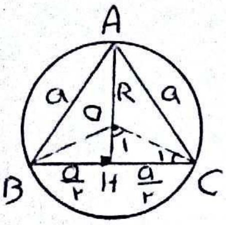
فرض: ذوزنقه متساوی الساقین
حکم: ذوزنقه محاطی

$$\hat{A}+\hat{D}=180^\circ \xrightarrow{\hat{C}=\hat{D}} \hat{A}+\hat{C}=180^\circ$$
$$\hat{A}+\hat{D}=180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}} \hat{B}+\hat{D}=180^\circ$$
$\Rightarrow$ ذوزنقه ABCD محاطی است

فرض: ذوزنقه محاطی
حکم: ذوزنقه متساوی الساقین

$(AB \parallel CD$ ، مورب $BD) \Rightarrow \hat{B}_1=\hat{D}_1 \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD} \Rightarrow AD=BC \Rightarrow$
ABCD متساوی الساقین

۲) مساحت مثلث متساوی الاضلاع را برحسب آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.



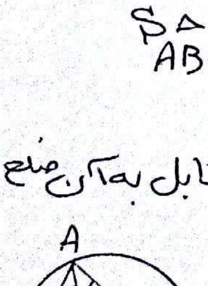
حل: می دانیم نقطه تقاطع عمود منصف ها در هر مثلث، مرکز دایره محیطی است پس AH عمود منصف است و چون مثلث متساوی الاضلاع است عمود منصف ها میانه هم هستند و میانه ها همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می کنند

$$2OH=OA \Rightarrow 2OH=R \Rightarrow OH=\frac{R}{2} \qquad AH=R+\frac{R}{2}=\frac{3R}{2}$$

$$\overset{\triangle}{ACH}: \; AH^2=AC^2-CH^2 \Rightarrow \left(\frac{3R}{2}\right)^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{9R^2}{4}=\frac{3}{4}a^2 \Rightarrow a=\sqrt{3}R$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{(\sqrt{3}R)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

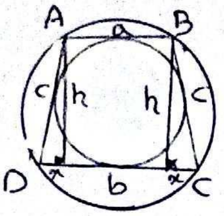
۳) ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می کنند.



$BH=CH$ $\qquad$ نیمساز $AD \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{A}_2 \Rightarrow \overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{MC}$

می دانیم مرکز دایره محیطی، روی عمود منصف قرار دارد و قطری که عمود بر وتر باشد وتر و کمان آن را نصف می کند پس امتداد عمود منصف روی امتداد نیمساز یعنی M دایره محیطی را قطع می کند.

۴) یک ذوزنقه هم محیطی است و هم محاطی، ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها



حل: ذوزنقه $ABCD$ محاطی است پس متساوی الساقین است (تمرین ۱)
یعنی $AD=BC=c$ همچنین محیطی است پس: $a+b=c+c \Rightarrow c=\frac{a+b}{2}$

$$b=a+2x \Rightarrow x=\frac{b-a}{2}$$

$$h^2=c^2-x^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{a^2+2ab+b^2-b^2+2ab-a^2}{4}=\frac{4ab}{4}=ab \Rightarrow h=\sqrt{ab}$$

$$S=\frac{(AB+CD)\times h}{2}=\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}=\underbrace{\frac{1}{2}(a+b)}_{\text{میانگین حسابی}}\times\underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{میانگین هندسی}}$$

---

۵) اگر r_a و r_b و r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد نشان دهید:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

بهمین ترتیب اگر h_a و h_b و h_c اندازه های سه ارتفاع باشند نشان دهید:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

حل: اثبات قسمت اول:

$$S=Pr \Rightarrow r=\frac{S}{P} \Rightarrow \frac{1}{r}=\frac{P}{S}$$

$$r_a=\frac{S}{P-a} \Rightarrow \frac{1}{r_a}=\frac{P-a}{S} \Rightarrow \text{بهمین ترتیب}: \frac{1}{r_b}=\frac{P-b}{S} \quad \text{و} \quad \frac{1}{r_c}=\frac{P-c}{S}$$

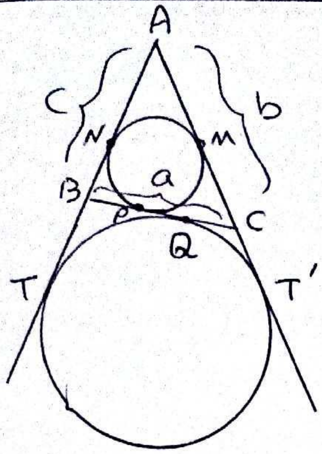
$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{P-a}{S}+\frac{P-b}{S}+\frac{P-c}{S}=\frac{3P-(a+b+c)}{S}=\frac{3P-2P}{S}=\frac{P}{S}=\frac{1}{r}$$

اثبات قسمت دوم:

$$S=Pr \Rightarrow r=\frac{S}{P} \Rightarrow \frac{1}{r}=\frac{P}{S}$$

$$S=\frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow h_a=\frac{2S}{a} \Rightarrow \frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S} \xrightarrow[\text{ترتیب}]{\text{بهمین}} \frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S} \quad \text{و} \quad \frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}$$

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2P}{2S}=\frac{P}{S}=\frac{1}{r}$$



۱۶) اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث $A\hat{B}C$ با اضلاع، M و N و P باشند و T و T' نقطه های تماس یک دایره محاطی خارجی با خطهای شامل دو ضلع باشند نشان دهید:

$$AM = AN = P - a$$
$$BN = BP = P - b \quad , \quad AT = AT' = P$$
$$CM = CP = P - C$$

(P = نصف محیط)

$$P = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{AN + NB + AM + MC + BP + PC}{2} = \frac{2AN + 2PB + 2PC}{2}$$

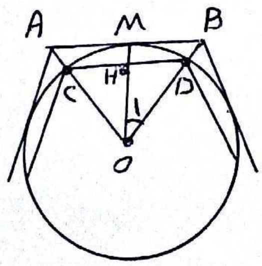
$$\Rightarrow P = AN + \underbrace{PB + PC}_{a} \Rightarrow AN = AM = P - a$$

بهمین ترتیب ثابت می شود:
$$BN = PB = P - b \quad , \quad CM = CP = P - c$$

$$\left.\begin{matrix} AT = C + BT \\ AT' = b + CT' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AT + AT' = c + b + (BT + CT') \xrightarrow[BT = BQ,\ CT' = CQ]{AT = AT'} 2AT = c + b + (BQ + CQ)$$

$$\Rightarrow 2AT = c + b + a \Rightarrow 2AT = 2P \Rightarrow AT = P$$

۱۷) یک دایره به شعاع r، n ضلعی های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه های ضلع های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند آنگاه:



$$AB = 2r \tan \frac{180}{n}$$

$$CD = 2r \sin \frac{180}{n}$$

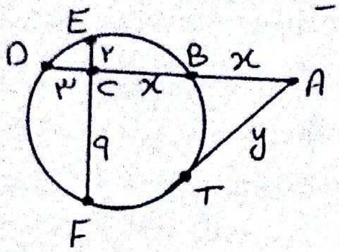
حل: $\hat{O} = \frac{360}{n} \Rightarrow \hat{O}_1 = \frac{\hat{O}}{2} = \frac{\frac{360}{n}}{2} = \frac{360}{2n} = \frac{180}{n}$

$$\overset{\triangle}{OHD}: \ \sin \hat{O}_1 = \frac{HD}{r} \Rightarrow HD = r \sin \frac{180^\circ}{n} \Rightarrow CD = 2HD = 2r \sin \frac{180}{n}$$

$$\overset{\triangle}{OMB}: \ tg \hat{O}_1 = \frac{MB}{OM} \Rightarrow MB = OM \, tg \hat{O}_1 = r \, tg \frac{180}{n} \Rightarrow AB = 2MB = 2r \, tg \frac{180}{n}$$

«تمرینات تکمیلی»

۱) در شکل روبرو از نقطه A مماس و قاطعی بر دایره رسم شده است مقادیر x و y را بیابید.



حل: با توجه به شکل دو وتر BD و EF متقاطع اند پس:

$$CD \cdot CB = CE \cdot CF \Rightarrow ۳ \times x = ۲ \times ۹ \Rightarrow \boxed{x = ۶}$$

$$AT^۲ = AB \cdot AD \Rightarrow y^۲ = x(x + x + ۳) = ۶(۶ + ۶ + ۳) \Rightarrow y^۲ = ۹۰ \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{۹۰}}$$

---

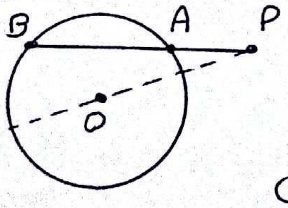
۲) دو دایره به شعاع های ۲ و ۳ مفروضند. اگر طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $۳\sqrt{۱۱}$ باشد طول مماس مشترک داخلی آنها را بیابید.

$$TT' \text{خارجی} = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} \Rightarrow ۳\sqrt{۱۱} = \sqrt{d^۲ - (۳ - ۲)^۲} \Rightarrow ۹۹ = d^۲ - ۱ \Rightarrow \boxed{d = ۱۰}$$

$$TT' \text{داخلی} = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲} = \sqrt{۱۰^۲ - (۳ + ۲)^۲} = \sqrt{۷۵}$$

---

۳) در شکل روبرو اگر $AP = ۴$ و $AB = ۶$ و محیط دایره ۱۶π باشد فاصله نقطه P از مرکز دایره را بیابید.



حل: نقطه P را به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می دهیم. می دانیم حاصلضرب قطعات حاصل روی هر قاطع مرسوم از یک نقطه خارج دایره برابر مقدار ثابت $d^۲ - R^۲$ است ($OP = d$)

$$\text{محیط دایره} = ۲\pi R \Rightarrow ۱۶\pi = ۲\pi R \Rightarrow \boxed{R = ۸}$$

$$PA \cdot PB = d^۲ - R^۲ \Rightarrow ۴(۴ + ۶) = d^۲ - ۸^۲ \Rightarrow d = \sqrt{۱۰۴}$$

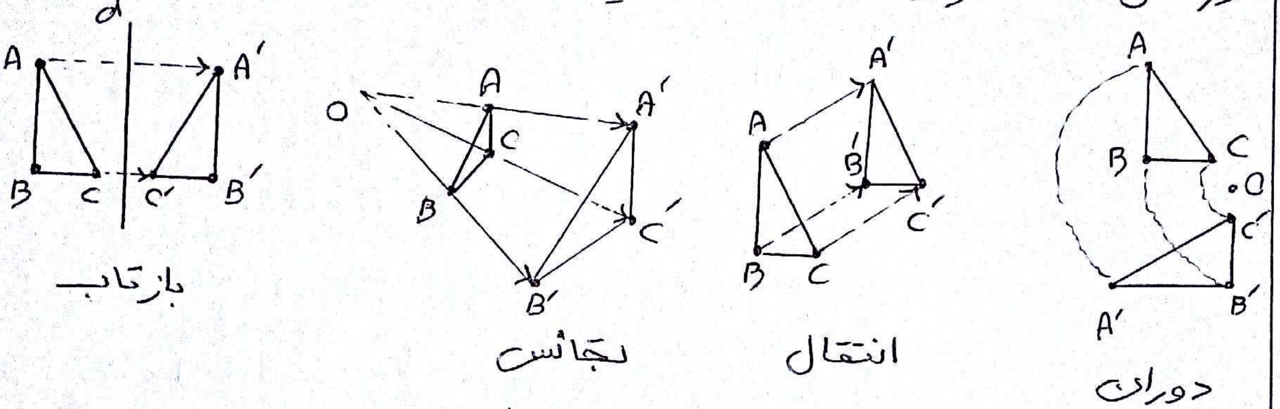
تبدیل های هندسی و کاربردها: فصل ۲

تعریف تبدیل: (Transformation)

تبدیلی مانند T، تابعی است که هر نقطه مانند A از صفحه P را دقیقاً به یک نقطه مانند A' از همین صفحه نظیر می کند و برعکس و آنرا بصورت زیر نشان می دهیم:

$$\begin{cases} T : P \longrightarrow P \\ T(A) = A' \end{cases}$$

در شکل های زیر تعدادی از تبدیل های متداول نشان داده شده است



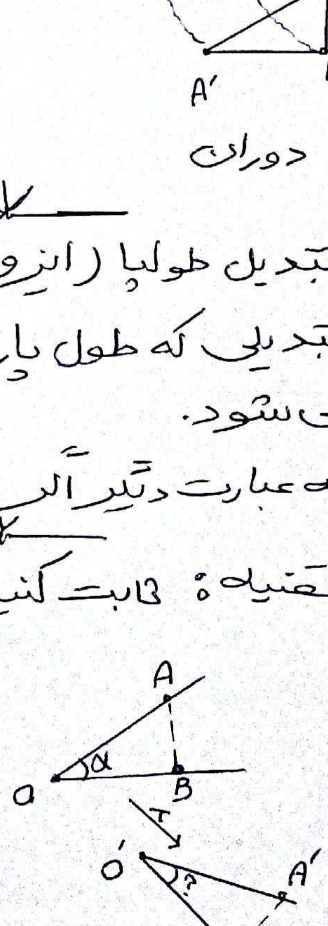
تبدیل طولپا (ایزومتری):

تبدیلی که طول پاره خط را حفظ می کند تبدیل طولپا (ایزومتری) نامیده می شود.

به عبارت دیگر اگر $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ آنگاه $AB=A'B'$

قضیه: ثابت کنید هر تبدیل طولپا، اندازه زاویه را حفظ می کند

اثبات: فرض کنیم T تبدیلی طولپا است و داریم:



$$T(A)=A' \qquad T(B)=B' \qquad T(O)=O'$$

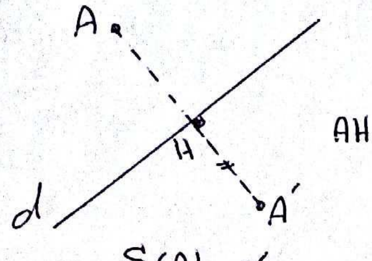
می دانیم تبدیل طولپا فاصله ها را ثابت نگه می دارد پس:

$$\left.\begin{array}{l} OA=O'A' \\ OB=O'B' \\ AB=A'B' \end{array}\right\} \overset{ضضض}{\Longrightarrow} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{O'A'B'} \Rightarrow \hat{O}=\hat{O'}$$

نتیجه: در هر تبدیل طولپا، تبدیل یافته هر زاویه، زاویه ای هم اندازه آن است.

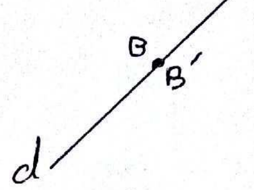
تعریف بازتاب:

به ازای هر خط d در صفحه، بازتاب S نسبت به خط d، تبدیلی است که هر نقطه مانند A را که روی خط d قرار نداشته باشد به نقطه‌ای مانند A' تصویر کند به طوری که خط d عمود منصف AA' باشد و تصویر هر نقطه مثل B که روی خط d قرار داشته باشد بر خودش منطبق کند. خط d را محور تقارن بازتاب یا محور بازتاب می‌نامند.



$AH = A'H$

$S(A) = A'$

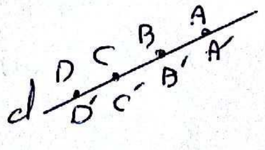


$S(B) = B' = B$

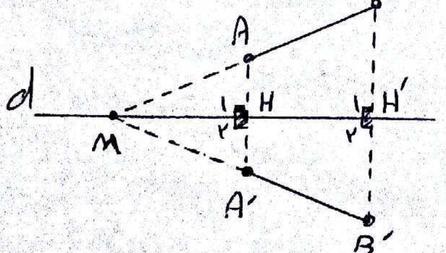
تعریف نقطه ثابت تبدیل:

در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، نقطه ثابت تبدیل می‌نامند.

نتیجه: بازتاب نسبت به خط، بیشمار نقطه ثابت تبدیل دارد.



قضیه: ثابت کنید بازتاب، یک تبدیل طولپاست.



$$\left.\begin{array}{l} AH = A'H \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ MH = MH \end{array}\right\} \overset{\text{ض ز ض}}{\Rightarrow} \triangle MAH \cong \triangle MA'H \Rightarrow MA = MA'$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $MB = MB'$

$$\left.\begin{array}{l} AB = MB - MA \\ A'B' = MB' - MA' \\ MB = MB',\ MA = MA' \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

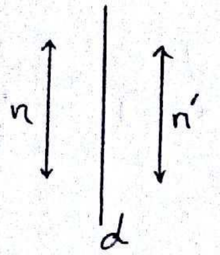
(کتاب کمالات در نظر گرفته)

نتیجه: در هر بازتاب، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن باهم برابرند

$$\left.\begin{matrix} S(A)=A' \\ S(B)=B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB=A'B'$$

قضیه: ثابت کنید در حالت کلی بازتاب، شیب خط را حفظ نمی کند.

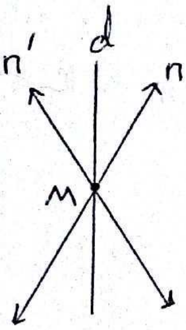
اثبات: دو حالت کلی زیر را در نظر می گیریم:



الف) خط داده شده با خط بازتاب موازی است

اگر خط n موازی خط بازتاب d باشد تصویر آن را تحت بازتاب، خط n' می نامیم

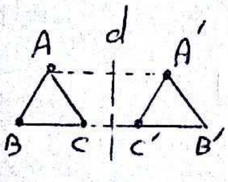
خطوط n و n' باهم موازیند زیرا برای رسم خط n' باید دو نقطه از n در نظر گرفت و از آنها دو عمود بر d رسم کرد و امتداد داد تا خط n' رسم شود چون این خطوط بر n، d، n' عمودند پس: $n \| d \| n'$ و شیب حفظ می شود.



ب) خط داده شده با خط بازتاب موازی نباشد.

اگر خط n با خط بازتاب d موازی نباشد خطهای d و n و n' در نقطه ای مانند M متقاطع هستند پس n و n' موازی نیستند و در این حالت بازتاب شیب خط را حفظ نمی کند.

خواص بازتاب:

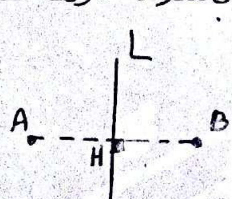


۱) بازتاب، تبدیلی طولپا (ایزومتری) است.

۲) بازتاب شیب خط را حفظ نمی کند.

۳) بازتاب جهت شکل (جهت نامگذاری شکل) را حفظ نمی کند.

تمرین ۱: اگر $B(-5,3)$ بازتاب $A(3,-1)$ نسبت به خط L باشد معادله خط L را بنویسید.

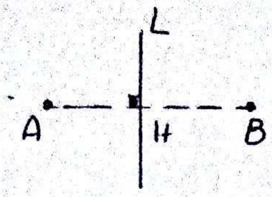


$$H\left|\begin{matrix} \dfrac{-5+3}{2}=1 \\ \dfrac{3-1}{2}=1 \end{matrix}\right. \Rightarrow H(1,1) \qquad m_{AB}=\frac{-1-3}{3-(-5)}=-\frac{1}{2}$$

قرینه و معکوس

$$\Rightarrow m_L=2 \qquad L: y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-1=2(x-1) \Rightarrow L: y=2x+3$$

تمرین ۲: بازتاب نقطه $A(2,3)$ را نسبت به خط $y=-3x-1$ بدست آورید.



$$m_L=-3 \Rightarrow m_{AB}=\frac{1}{3} \qquad AB: y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-3=\frac{1}{3}(x-2)$$

$$\Rightarrow y-3=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$$ معادله AB

$$\begin{cases} y=-3x-1 \\ y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y=-1 \\ -x+3y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y=-1 \\ -3x+9y=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=2 \\ x=-1 \end{matrix} \Rightarrow H\Big|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}$$

$$x_H=\frac{x_A+x_B}{2} \Rightarrow -1=\frac{2+x_B}{2} \Rightarrow x_B=-4$$

$$y_H=\frac{y_A+y_B}{2} \Rightarrow 2=\frac{3+y_B}{2} \Rightarrow y_B=1$$

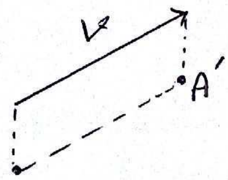
$$\Rightarrow B\Big|\begin{matrix}-4\\1\end{matrix}$$

تعریف انتقال: (Translation)

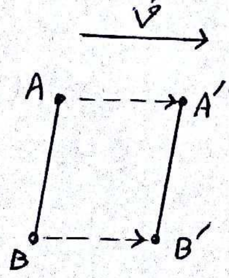
انتقال T تحت بردار $\vec{v}$، تبدیلی از صفحه است که در آن تصویر هر نقطه مانند A از صفحه P، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که:

$\overrightarrow{AA'}=\vec{v}$

$\overrightarrow{AA'} \parallel \vec{v}$



قضیه: ثابت کنید انتقال تبدیل طولپا (ایزومتری) است.



اثبات: $A'B'$ پاره‌خطی است که تحت بردار $\vec{v}$ انتقال یافته است.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'}=\vec{v} \\ \overrightarrow{BB'}=\vec{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AA'=BB' \\ AA' \parallel BB' \end{cases} \Rightarrow$$ متوازی‌الاضلاع $AA'B'B \Rightarrow AB=A'B'$

خواص انتقال:

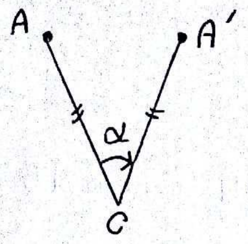
۱) انتقال یک تبدیل طولپا (ایزومتری) است   ۲) انتقال شیب خط را حفظ می‌کند

۳) انتقال جهت شکل را حفظ می‌کند.

۴) بردارهایی که هر نقطه را به نقطه تصویرش انتقال می‌دهند دارای طول‌های برابر و جهت‌های یکسان هستند

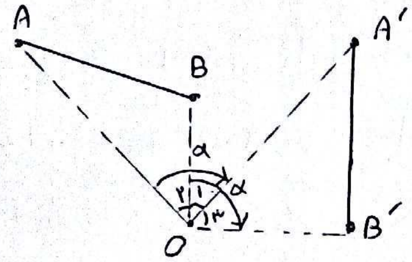
تعریف دوران : (Rotation)

دوران R به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطه A باشد داریم :



$$OA = OA' \quad \text{و} \quad \widehat{AOA'} = \alpha$$

قضیه : ثابت کنید دوران یک تبدیل طولپا (ایزومتری) است.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1+\hat{O}_2=\alpha \\ \hat{O}_1+\hat{O}_3=\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1+\hat{O}_2=\hat{O}_1+\hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_2=\hat{O}_3$$

$$\left.\begin{array}{l}OA=OA' \\ \hat{O}_2=\hat{O}_3 \\ OB=OB'\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle OAB \cong \triangle OA'B' \Rightarrow AB = A'B'$$

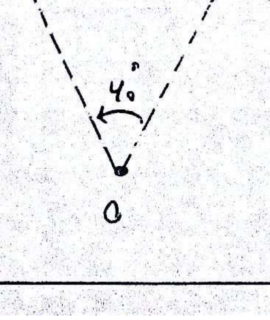
خواص دوران :

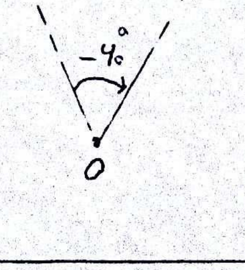
۱) دوران حول نقطه O و تحت زاویه α ، مرکز دوران را ثابت نگه می دارد.

۲) دوران شیب خط را همواره حفظ نمی کند مگر دورانهای 180° و 360°

۳) دوران حول نقطه O و تحت زاویه α ، یک تبدیل ایزومتری (طولپا) است پس شکل دوران یافته با شکل اولیه همنهشت بوده و زاویه های شکل ثابت می ماند

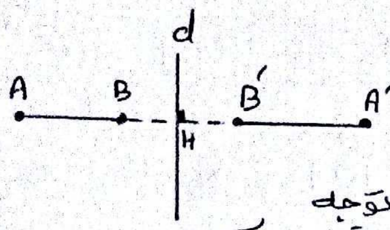
۴) دوران در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت را مثبت و دوران در جهت حرکت عقربه های ساعت را منفی در نظر می گیریم.





تمرین ۱ ص ۴۴:

در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد AB و $A'B'$ هم اندازه اند.



با توجه به ویژگی بازتاب $\Rightarrow \begin{cases} AH = A'H \\ BH = B'H \end{cases} \Rightarrow AH - BH = A'H - B'H \Rightarrow AB = A'B'$

تعریف تجانس:

اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k می‌گوییم هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

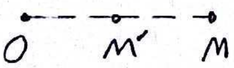
۱) سه نقطه O، M و M' روی یک خط راست باشند.

۲) $OM' = |k| \cdot OM$

۳) اگر k مثبت باشد، M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطه O قرار دارند (مثال)

$k = 2$


$OM' = 2OM$

$k = \frac{1}{2}$


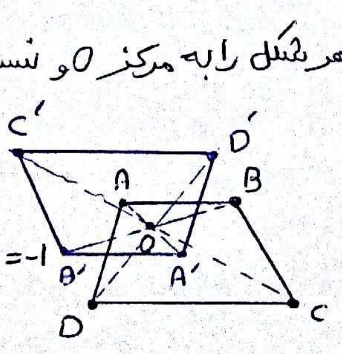
$OM' = \frac{1}{2}OM$ $\quad (\frac{OM'}{OM} = k) \quad k > 0$

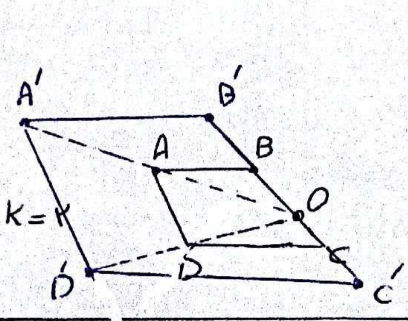
اگر k منفی باشد نقطه O بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد.

$k = -2$


$OM' = 2OM$ $\quad (\frac{OM'}{OM} = k) \quad k < 0$

مثال) مجانس هر شکل را به مرکز O و نسبت تجانس داده شده رسم کنید.

ب) $k = -1$


الف) $k = 2$


نکته ریاضی:

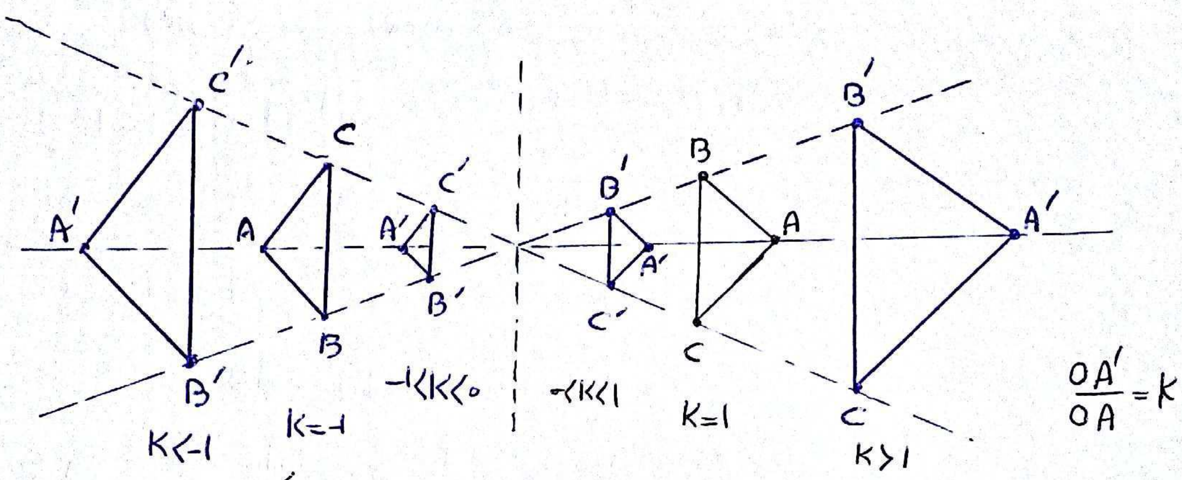
در تجانس به مرکز O و نسبت K:

۱) اگر $K>0$ ، تجانس را ، تجانس مستقیم می نامیم.

۲) اگر $K<0$ ، تجانس را ، تجانس معکوس می نامیم.

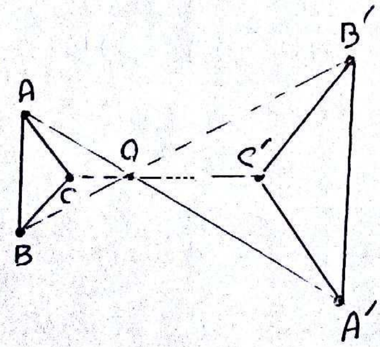
۳) اگر $|K|<1$ (یا $0<K<1$) تصویر شکل، کوچکتر می شود و آنرا انقباض می نامیم

۴) اگر $|K|>1$ (یا $K>1$) تصویر شکل، بزرگتر می شود و آنرا انبساط می نامیم.



تمرین صفحه:

۱) در تجانس با نسبت $K>0$ و مرکز تجانس O نشان دهید:



الف) تجانس شیب خط را حفظ می کند

حل: می دانیم A' مجانس A و B' مجانس B است.

$OA=|K|.OA'$ ، $OB=|K|.OB'$ $\Rightarrow \frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=K$

$\hat{O}_1=\hat{O}_2$ متقابل به راس

$\Rightarrow O\overset{\triangle}{A}B \sim O\overset{\triangle}{A'}B' \Rightarrow \begin{cases} O\hat{A}B=O\hat{A'}B' \\ O\hat{B}A=O\hat{B'}A' \end{cases}$

در نتیجه $AB \parallel A'B'$

ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می کند.

$AB \parallel A'B'$ ، AA' مورب (طبق الف) $\Rightarrow O\hat{A}B=O\hat{A'}B'$

$AC \parallel A'C'$ ، AA' مورب $\Rightarrow O\hat{A}C=O\hat{A'}C'$

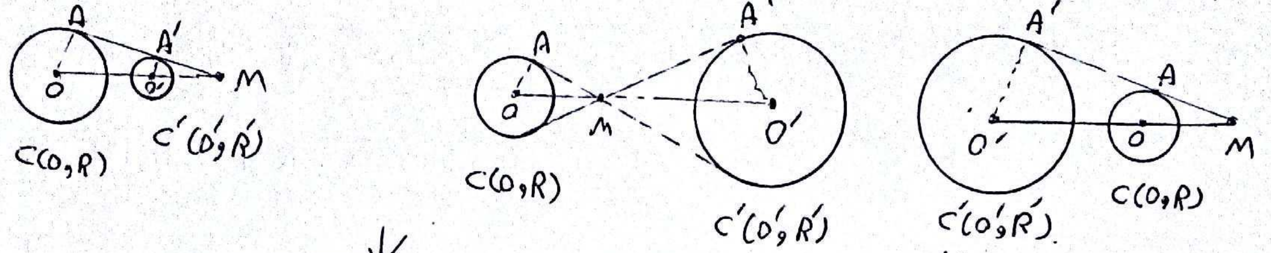
$\Rightarrow O\hat{A}B-O\hat{A}C=O\hat{A'}B'-O\hat{A'}C'$

$\Rightarrow \hat{A}=\hat{A'}$

تمرین ۲ صفحه

دایره $C(O,R)$ و نقطه M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطه M در هر حالت رسم کنید:

الف) $K=2$ ب) $K=-2$ ج) $K=\frac{1}{2}$

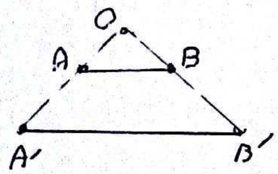


قضیه: ثابت کنید تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

حالت اول: مرکز تجانس (O) روی پاره خط AB است

در این حالت واضح است که مجانس‌های A و B یعنی A' و B' هم در امتداد AB قرار گرفته و در نتیجه AB و $A'B'$ روی یک خط واقع شده و شیب آنها مساوی می‌شود.

حالت دوم: مرکز تجانس روی پاره خط AB نیست

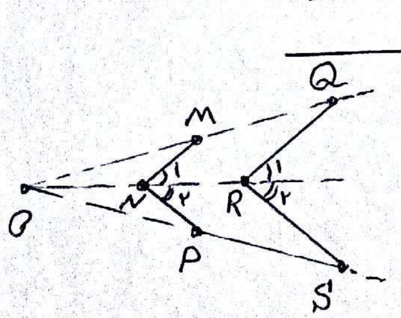


در این حالت مطابق شکل A' و B'، مجانس‌های A و B را می‌یابیم

$$\left.\begin{array}{l} \text{مجانس } A \text{ به مرکز } O \text{ و نسبت تجانس } K:\ A' \Rightarrow OA'=|K|OA \\ \text{〃 〃 〃 〃 } B \text{ 〃 } B' \Rightarrow OB'=|K|OB \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OB'}=\frac{|K|OA}{|K|OB}=\frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}$$

$$\xRightarrow{\text{عکس تالس}} AB \parallel A'B' \Rightarrow m_{AB}=m_{A'B'}$$

قضیه: ثابت کنید تجانس اندازه زاویه را حفظ می‌کند.



اثبات: فرض کنیم $M\hat{N}P$ مجانس $Q\hat{R}S$ به مرکز تجانس O و نسبت تجانس K باشد می‌دانیم تجانس شیب خط را حفظ می‌کند:

$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel QR \Rightarrow \hat{N}_1=\hat{R}_1 \\ NP \parallel RS \Rightarrow \hat{N}_2=\hat{R}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{N}_1+\hat{N}_2=\hat{R}_1+\hat{R}_2 \Rightarrow M\hat{N}P=Q\hat{R}S$$

خواص تجانس:

۱) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند ۲) تجانس همیشه جهت شکل را حفظ نمی‌کند (جهت شکل $K<0$ باشد عوض می‌شود)

۳) تجانس طول یا مساحت را حفظ نمی‌کند (مگر در حالت $|K|=1$)

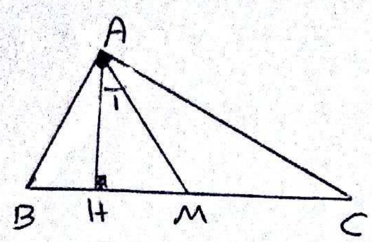
۴) تجانس طول و محیط را به نسبت K و مساحت را به نسبت K^2 تغییر می‌دهد.

۵) خطوطی که نقاط مجانس را به هم وصل می‌کنند در مرکز تجانس همرسند.

فصل ۳ :

روابط طولی در مثلث :

۱) روابط طولی در مثلث قائم الزاویه :



۱) $AH^2 = BH \cdot CH$

۲) $AB^2 = BH \cdot BC$

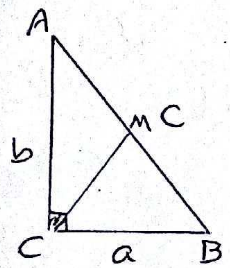
۳) $AC^2 = CH \cdot BC$

۴) $AH \cdot BC = AB \cdot AC$

۵) $AM = \frac{BC}{2}$

۶) $\hat{A}_1 = |\hat{B} - \hat{C}|$

مثال ۱ : در مثلث قائم الزاویه ای به مساحت ۵۴ ، نسبت اضلاع قائم ۳ به ۴ است . طول میانه وارد بر وتر در این مثلث چقدر است ؟



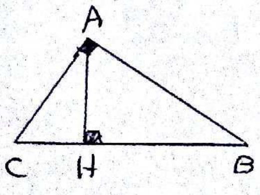
$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{4}b$$

$$S = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}b \times b}{2} = 54 \Rightarrow \frac{3}{4}b^2 = 108 \Rightarrow b^2 = 144 \Rightarrow \boxed{b=12}$$

$$a = \frac{3}{4}b = \frac{3}{4} \times 12 \Rightarrow \boxed{a=9}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow \boxed{c=15} \qquad CM = \frac{AB}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

مثال ۲ : در مثلث قائم الزاویه روبرو $BH=12$ و $CH=4$ است . محیط و مساحت مثلث $A\hat{B}C$ را بیابید .



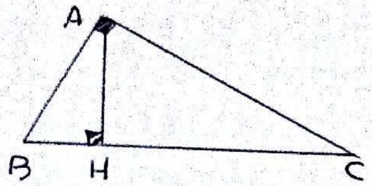
$$AH^2 = BH \cdot CH = 12 \times 4 = 48 \Rightarrow AH = 4\sqrt{3}$$

$$BC = BH + CH = 12 + 4 = 16$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times 16 \times 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} AC^2 = CH \cdot BC = 4 \times 16 = 64 \Rightarrow AC = 8 \\ AB^2 = BH \cdot BC = 12 \times 16 = 192 \Rightarrow AB = 8\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{A\hat{B}C}{\text{محیط}} = 8\sqrt{3} + 8 + 16 = 8(\sqrt{3} + 3)$$

مثال ۳: در مثلث قائم الزاویه روبرو اگر $AC=8$ و $BC=10$ باشد طول پاره خط های BH و CH چقدر است؟

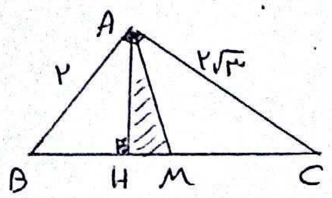


$$AB^2+AC^2=BC^2 \Rightarrow AB^2+8^2=10^2 \Rightarrow AB^2=36 \Rightarrow \boxed{AB=6}$$

$$AB^2=BH\cdot BC \Rightarrow 36=BH\times 10 \Rightarrow BH=3.6$$

$$CH=BC-BH=10-3.6=6.4$$

مثال ۴: در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ طول اضلاع قائمه ۲ و $2\sqrt{3}$ است. مساحت مثلث AMH چقدر است؟ (AM میانه وارد بر وتر است)



$$BC^2=AB^2+AC^2=(2)^2+(2\sqrt{3})^2=4+12=16 \Rightarrow BC=4$$

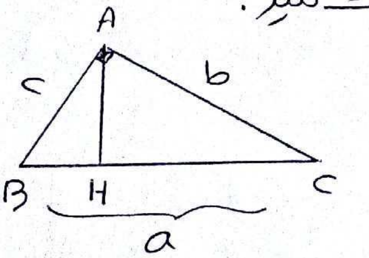
$$\Rightarrow AM=\frac{BC}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$\overset{\triangle}{ABC}:\ AH\cdot BC=AB\cdot AC \Rightarrow AH\times 4=2\times 2\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{AH=\sqrt{3}}$$

$$\overset{\triangle}{AHM}:\ MH^2+AH^2=AM^2 \Rightarrow MH^2+(\sqrt{3})^2=2^2 \Rightarrow MH^2=1 \Rightarrow \boxed{MH=1}$$

$$S_{\overset{\triangle}{AHM}}=\frac{1}{2}\times MH\times AH=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

قضیه: در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ $(\hat{A}=90^\circ)$ ثابت کنید:



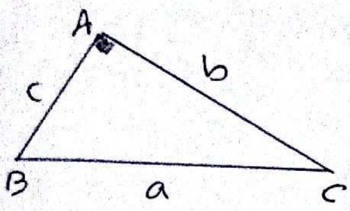
$$\boxed{\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} \quad \text{یا} \quad \boxed{\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AB^2}}$$

$$\left.\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}AH\cdot BC\\ S&=\frac{1}{2}AB\cdot AC\end{aligned}\right\} \Rightarrow AH\cdot BC=AB\cdot AC=2S$$

$$\Rightarrow AH^2\cdot BC^2=AB^2\cdot AC^2 \Rightarrow \frac{1}{AH^2\cdot BC^2}=\frac{1}{AB^2\cdot AC^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{BC^2}{AB^2\cdot AC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{AB^2+AC^2}{AB^2\cdot AC^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{AH^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}$$

قضیه: ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت هرکدام از اضلاع به سینوس زاویه‌ی روبرویش برابر است با وتر مثلث:



فرض: $\hat{A}=90^\circ$

حکم: $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=a$

اثبات: می‌دانیم در هر مثلث قائم الزاویه، سینوس هر زاویه حاده برابر است با نسبت ضلع مقابل بر وتر:

$$\sin\hat{B}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b}{\sin\hat{B}}=a \quad (1) \qquad \sin\hat{C}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{c}{\sin\hat{C}}=a \quad (2)$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{a}{\sin 90^\circ}=\frac{a}{1}=a \quad (3) \qquad (1),(2),(3)\Rightarrow \boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=a}$$

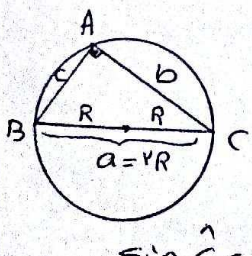
مثال ۱: در مثلث قائم الزاویه $A\hat{B}C$ ($\hat{A}=90^\circ$) اگر $tg\hat{B}=\sqrt{2}$ و $a=3\sqrt{3}$ آنگاه اندازه ضلع AB را بیابید.

$$\hat{B}+\hat{C}=90^\circ \rightarrow tg\hat{B}=cotg\hat{C}=\sqrt{2}$$

$$1+cotg^2C=\frac{1}{\sin^2C}\Rightarrow 1+(\sqrt{2})^2=\frac{1}{\sin^2C}\Rightarrow 3=\frac{1}{\sin^2C}\Rightarrow \sin^2C=\frac{1}{3}\Rightarrow \sin C=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{\hat{C}\ \text{حاده}} \sin\hat{C}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{c}{\sin\hat{C}}=a\Rightarrow\frac{c}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=3\sqrt{3}\Rightarrow c=3\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \boxed{c=3}$$

قضیه: ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌رو به آن ضلع برابر است با قطر دایره محیطی مثلث:



$$a=2R$$

$$\sin\hat{B}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b}{\sin\hat{B}}=a\Rightarrow\frac{b}{\sin\hat{B}}=2R \quad (1)$$

$$\sin\hat{C}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{c}{\sin\hat{C}}=a\Rightarrow\frac{c}{\sin C}=2R \quad (2)$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{a}{\sin 90^\circ}=\frac{a}{1}=a=2R \quad (3) \qquad (1),(2),(3)\Rightarrow\boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R}$$

مثال) در مثلث قائم الزاویه $A\hat{B}C$ $(\hat{A}=90^\circ)$ شعاع دایره محیطی برابر R است ثابت کنید:
$$\frac{b^2}{R^2}+\frac{c^2}{R^2}=4$$

اثبات: $$\frac{b^2}{R^2}+\frac{c^2}{R^2}=\frac{b^2+c^2}{R^2}=\frac{a^2}{R^2}=\frac{(2R)^2}{R^2}=\frac{4R^2}{R^2}=4$$

مثال) در یک مثلث قائم الزاویه، محیط دایره محیطی برابر 20π است اگر یکی از زاویه های حاده این مثلث 60° باشد مساحت مثلث را بیابید.

$$\hat{A}=90^\circ \quad , \quad \hat{B}=60^\circ \Rightarrow \hat{C}=30^\circ$$

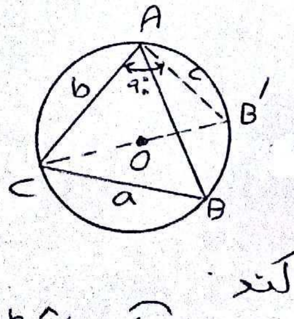
$$\text{محیط}=20\pi \Rightarrow 2\pi R=20\pi \Rightarrow \boxed{R=10}$$

$$\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R \Rightarrow \frac{b}{\sin 60^\circ}=\frac{c}{\sin 30^\circ}=20 \Rightarrow \begin{cases} b=10\sqrt{3} \\ c=10 \end{cases}$$

$$S_{A\hat{B}C}=\frac{1}{2}.b.c=\frac{1}{2}\times 10\sqrt{3}\times 10=50\sqrt{3}$$

قضیه سینوس ها: در هر مثلث غیر مشخص، نسبت طول هر ضلع به سینوس زاویه مقابلش برابر است با قطر دایره محیطی مثلث.

فرض	$AB=c$, $AC=b$, $BC=a$
حکم	$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$



اثبات: دو حالت در نظر می گیریم:

حالت اول: مثلث $A\hat{B}C$ را با زاویه های حاده A و B و C در نظر می گیریم. رأس C را به مرکز دایره محیطی یعنی نقطه O وصل کرده و امتداد می دهیم تا دایره را در B' قطع کند.

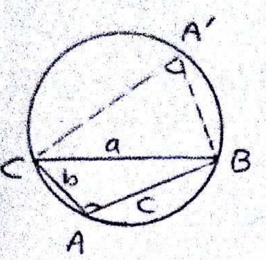
$$\left.\begin{array}{l} \text{محاطی } \hat{B'}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \\ \text{محاطی } \hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}=\hat{B'} \Rightarrow \sin\hat{B}=\sin\hat{B'} \quad (1)$$

زاویه محاطی $B'\hat{A}C$ روبرو به قطر است پس: $B'\hat{A}C=90^\circ$

قائم الزاویه $B'\overset{\triangle}{A}C$: $\sin\hat{B'}=\frac{b}{B'C}=\frac{b}{2R} \overset{(1)}{\Rightarrow} \sin\hat{B}=\frac{b}{2R} \Rightarrow \frac{b}{\sin\hat{B}}=2R$

بهمین ترتیب با رسم قطرهای گذرنده از راس های A و B ثابت می شود:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R}$$



حالت دوم: مثلث $A\hat{B}C$ را با فرض $\hat{A}>90°$ در نظر می گیریم:

نقطه A' را به دلخواه روی دایره محیطی مثلث ABC و در طرف دیگر راس A در نظر می گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}\ \text{محاطی} = \dfrac{\overset{\frown}{BA'C}}{2} \\ \hat{A'}\ \text{محاطی} = \dfrac{\overset{\frown}{BAC}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{A'}=\frac{\overset{\frown}{BA'C}+\overset{\frown}{BAC}}{2}=\frac{360}{2}=180°$$

چون زاویه A منفرجه است پس $\hat{A'}$ حاده خواهد بود از طرفی چون $\hat{A}$ و $\hat{A'}$ مکمل اند پس سینوس آنها مساوی است یعنی: $\sin\hat{A}=\sin\hat{A'}$ ②

مثلث $A'\hat{B}C$ دارای سه زاویه حاده است طبق قسمت الف داریم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A'}}=2R \xRightarrow{②} \frac{a}{\sin A}=2R$$

بهمین ترتیب ثابت می شود:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R}$$

مثال ۱: در مثلث $A\hat{B}C$ با فرض $b=20$ و $\hat{B}=30°$ و $c=20\sqrt{2}$ مطلوبست شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زاویه های $\hat{A}$ و $\hat{C}$:

$$\frac{b}{\sin\hat{B}}=2R \Rightarrow \frac{20}{\sin 30}=2R \Rightarrow \frac{20}{\frac{1}{2}}=2R \Rightarrow 40=2R \Rightarrow \boxed{R=20}$$

$$\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R \Rightarrow \frac{20\sqrt{2}}{\sin C}=40 \Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\hat{C}=45°\\ \hat{C}=135°\end{array}\right.$$

$$\hat{A}=180°-(\hat{B}+\hat{C}) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\hat{A}=180°-(30°+45°)=105°\\ \hat{A}=180°-(30°+135°)=15°\end{array}\right.$$

مثال ۲: در مثلث $a=۶$ و $b=۶\sqrt{۳}$ و $\hat{A}=۳۰^\circ$ ، اندازه ضلع AB را بیابید

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{۶}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{۶\sqrt{۳}}{\sin B} \Rightarrow \sin B=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} B=۶۰^\circ \\ B=۱۲۰^\circ \end{cases}$$

$$\hat{C}=۱۸۰-(\hat{A}+\hat{B}) \Rightarrow \begin{cases} \hat{C}=۱۸۰^\circ-(۳۰^\circ+۶۰^\circ) \Rightarrow \hat{C}=۹۰^\circ \\ \hat{C}=۱۸۰^\circ-(۳۰^\circ+۱۲۰^\circ) \Rightarrow \hat{C}=۳۰^\circ \end{cases}$$

$$\hat{C}=۹۰^\circ \Rightarrow c^۲=a^۲+b^۲=۶^۲+(۶\sqrt{۳})^۲=۳۶+۱۰۸=۱۴۴ \Rightarrow \boxed{c=۱۲}$$

$\hat{C}=۳۰^\circ=\hat{A} \Rightarrow$ متساوی الساقین $\hat{A}BC \Rightarrow c=a=۶$

مثال ۳: مساحت دایره محیطی مثلث $A\hat{B}C$ برابر ۱۶π است. اگر $c=۴\sqrt{۳}$ و $b=۴$ مطلوبست مقدار a (زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هردو حاده هستند)

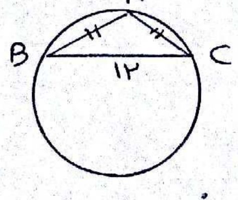
$$S=\pi R^۲ \Rightarrow ۱۶\pi=\pi R^۲ \Rightarrow \boxed{R=۴}$$

$$\frac{b}{\sin B}=۲R \Rightarrow \frac{۴}{\sin B}=۸ \Rightarrow \sin B=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{B}=۳۰^\circ$$

$$\frac{c}{\sin \hat{C}}=۲R \Rightarrow \frac{۴\sqrt{۳}}{\sin C}=۸ \Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{C}=۶۰^\circ$$

$$\hat{A}=۱۸۰^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=۱۸۰^\circ-(۳۰^\circ+۶۰^\circ)=۹۰^\circ \Rightarrow a=۲R=۸$$

مثال ۴: طول قاعده مثلث متساوی الساقین ۱۲ و شعاع دایره محیطی آن $۴\sqrt{۳}$ است. طول ساق مثلث را بیابید.



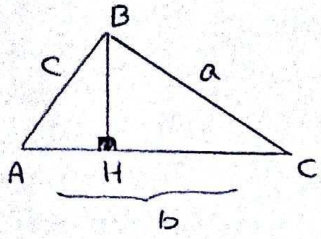
$$\frac{a}{\sin A}=۲R \Rightarrow \frac{۱۲}{\sin A}=۲(۴\sqrt{۳}) \Rightarrow \sin\hat{A}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}=۶۰^\circ \\ \hat{A}=۱۲۰^\circ \end{cases}$$

$$\hat{A}=۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=۶۰^\circ \Rightarrow \frac{b}{\sin B}=۲R \Rightarrow \frac{b}{\sin ۶۰}=۲(۴\sqrt{۳}) \Rightarrow b=۸\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۲$$

$$\hat{A}=۱۲۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=۳۰^\circ \Rightarrow \frac{b}{\sin B}=۲R \Rightarrow \frac{b}{\sin ۳۰}=۲(۴\sqrt{۳}) \Rightarrow b=۸\sqrt{۳}\times\frac{۱}{۲}=۴\sqrt{۳}$$

قضیه کسینوس ها:

در هر مثلث مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربعات اندازه های دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصلضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها



فرض	$AB=c \ , \ AC=b \ , \ BC=a$
حکم	$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\hat{A}$ $b^2=a^2+c^2-2ac.\cos\hat{B}$ $c^2=a^2+b^2-2ab.\cos\hat{C}$

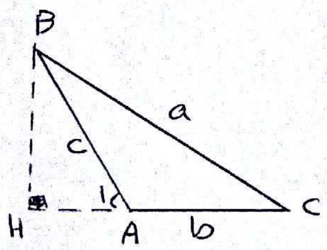
حالت اول: $\hat{A}<90^\circ$

$\cos\hat{A}=\frac{AH}{c} \Rightarrow AH=c.\cos\hat{A}$ $\quad \sin\hat{A}=\frac{BH}{c} \Rightarrow BH=c.\sin\hat{A}$

$\overset{\triangle}{BHC}: \ a^2=BH^2+CH^2=(c.\sin A)^2+(b-AH)^2=c^2\sin^2A+b^2-2bAH+AH^2$

$\Rightarrow a^2=c^2\sin^2A+b^2-2b(c.\cos A)+c^2\cos^2A \Rightarrow a^2=c^2(\sin^2A+\cos^2A)+b^2$
$-2bc.\cos A \Rightarrow \boxed{a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A}$

بهمین ترتیب دو رابطه بعدی اثبات می‌شود.



حالت دوم: $\hat{A}>90^\circ$

$\sin\hat{A}_1=\frac{BH}{c} \Rightarrow BH=c.\sin\hat{A}_1$

$\cos\hat{A}_1=\frac{AH}{c} \Rightarrow AH=c.\cos\hat{A}_1$

$\overset{\triangle}{BCH}: \ a^2=BH^2+CH^2 \Rightarrow a^2=(c.\sin\hat{A}_1)^2+(b+AH)^2$

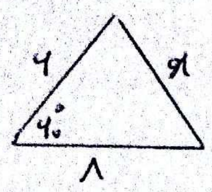
$\Rightarrow a^2=c^2.\sin^2\hat{A}_1+b^2+AH^2+2b.AH \Rightarrow a^2=c^2.\sin^2A_1+b^2+c^2.\cos^2A_1+$
$2b(c.\cos\hat{A}_1) \Rightarrow a^2=c^2(\sin^2A_1+\cos^2A_1)+b^2+2bc.\cos\hat{A}_1$

$\Rightarrow a^2=c^2+b^2+2bc(-\cos A) \Rightarrow \boxed{a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\hat{A}}$

بهمین ترتیب دو رابطه دیگر اثبات می شوند:

حالت سوم: $\hat{A}=90^\circ$ در اینصورت قضیه کسینوس ها تبدیل به رابطه فیثاغورس می شود.

مثال ۱: مطلوبست محاسبه x:



$$x^2 = 6^2 + 8^2 - 2(6)(8)\cos 60^\circ = 36 + 64 - 2\times 6\times 8\times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 = 52 \Rightarrow x = \sqrt{52}$$

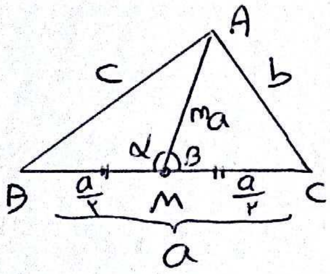
مثال ۲: طول اضلاع مثلثی $2\sqrt{2}$ و $4\sqrt{2}$ و $\sqrt{56}$ است. بزرگترین زاویه مثلث را بیابید.

$$(\sqrt{56})^2 = (2\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2(2\sqrt{2})(4\sqrt{2})\cos\theta$$

$$\Rightarrow 56 = 8 + 32 - 32\cos\theta \Rightarrow 16 = -32\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$

قضیه میانه‌ها:

ثابت کنید در هر مثلث، مجموع مربعات هر دو ضلع برابر است با نصف مربع ضلع سوم به علاوه دو برابر مربع میانه وارد بر ضلع سوم:



فرض	$AM = m_a$ و M وسط BC
حکم	$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2$ $a^2 + c^2 = \frac{b^2}{2} + 2m_b^2$ $a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2m_c^2$

$\overset{\triangle}{AMB}$: $c^2 = (\frac{a}{2})^2 + m_a^2 - 2m_a\cdot(\frac{a}{2})\cos\alpha \Rightarrow c^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - am_a\cos\alpha$ ①

$\overset{\triangle}{ACM}$: $b^2 = (\frac{a}{2})^2 + m_a^2 - 2m_a(\frac{a}{2})\cos\beta \Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - am_a\cos\beta$ ②

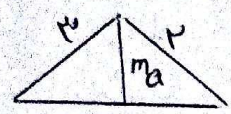
$$① + ② \Rightarrow b^2 + c^2 = 2(\frac{a^2}{4}) + 2m_a^2 - am_a(\cos\alpha + \cos\beta)$$

چون α و β مکمل هستند پس: $\cos\alpha = -\cos\beta \Rightarrow \cos\alpha + \cos\beta = 0$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2$$

مثال: در مثلثی به اضلاع ۲ و ۳ و ۴ طول کوچکترین میانه را بیابید.

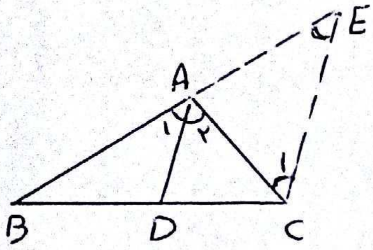
حل: کوچکترین میانه به بزرگترین ضلع وارد می‌شود.



$$b^2+c^2=\frac{a^2}{2}+2m_a^2 \Rightarrow 3^2+2^2=\frac{4^2}{2}+2m_a^2 \Rightarrow m_a^2=\frac{5}{2} \Rightarrow m_a=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

قضیه نیمساز داخلی:

ثابت کنید در هر مثلث، نیمساز هر زاویه ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند.



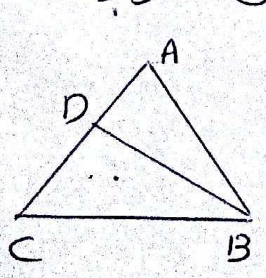
فرض	$\hat{A}_1=\hat{A}_2$
حکم	$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$

اثبات: از راس C خط موازی نیمساز AD چنان رسم می‌کنیم که امتداد AB را در نقطه E قطع کند، C را به E وصل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} AD\parallel CE \text{ و مورب } AC \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{C}_1 \\ AD\parallel CE \text{ و مورب } AE \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{E} \end{array}\right\} \xRightarrow{\hat{A}_1=\hat{A}_2} \hat{C}_1=\hat{E} \xRightarrow{\text{متساوی الساقین } \overset{\triangle}{ACE}} AE=AC$$

$$AD\parallel CE \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{AE}=\frac{BD}{DC} \xRightarrow{AE=AC} \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

مثال: در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، $AB=7$ و $AC=5$ و $BC=8$ است. طولهای دو قطعه‌ای که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند را بدست آورید.



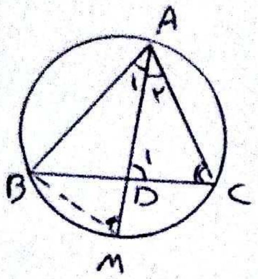
$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{AD}{CD}=\frac{7}{8} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD}=\frac{7+8}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{CD}=\frac{15}{8} \Rightarrow \frac{5}{CD}=\frac{15}{8} \Rightarrow CD=\frac{8}{3}$$

$$AD=AC-CD=5-\frac{8}{3}=\frac{7}{3}$$

قضیه طول نیمساز داخلی:

ثابت کنید در هر مثلث، مربع طول هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب طول اضلاع آن زاویه منهای حاصلضرب طول قطعات ایجاد شده توسط نیمساز داخلی روی ضلع مقابل.



فرض	AD نیمساز داخلی $\hat{A}$
حکم	$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$

اثبات: مطابق شکل ابتدا دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را رسم می‌کنیم پس نیمساز AD را امتداد داده تا دایره محیطی را در M قطع کند:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{C} = \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}\end{array}\right\} \overset{\text{زز}}{\Longrightarrow} \overset{\triangle}{ABM} \sim \overset{\triangle}{ACD} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AM} = \frac{DC}{BM}$$

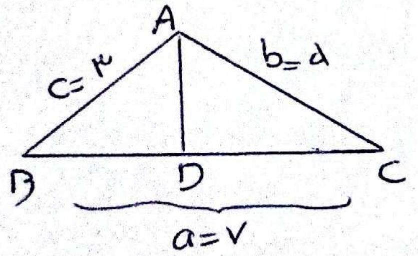
$$\Rightarrow AD \cdot AM = AB \cdot AC \Rightarrow AD(AD + MD) = AB \cdot AC$$

$$\Rightarrow AD^2 + AD \cdot MD = AB \cdot AC \quad (1)$$

طبق روابط طولی در دایره: $AD \cdot MD = BD \cdot DC \quad (2)$

$$(1),(2) \Rightarrow AD^2 + BD \cdot DC = AB \cdot AC \Rightarrow AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

مثال) در مثلثی به اضلاع ۳ و ۵ و ۷ طول نیمساز داخلی بزرگترین زاویه را بیابید.



AD نیمساز $\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BD}{BD+DC} = \frac{3}{3+5}$

$$\Rightarrow \frac{BD}{7} = \frac{3}{8} \Rightarrow \boxed{BD = \frac{21}{8}} \Rightarrow CD = 7 - \frac{21}{8} = \frac{35}{8}$$

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC = 3 \times 5 - \frac{21}{8} \times \frac{35}{8} = 15 - \frac{735}{64} = \frac{225}{64}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{15}{8}$$