بنام خدا

جزوه هندسه ۳

(دوازدهم ریاضی)

تهیه و تنظیم از :
امیر حسین مطلّبی دبیر ریاضی دبیرستان نمونه دولتی استاد شهریار ناحیه ۳ تبریز

*** هزینه استفاده از این جزوه صلواتی بر محمّد و آل محمّد است ***

التماس دعا

فصل ۱ : ماتریس

هر آرایش مستطیل شکل از اعداد را ماتریس می‌گویند و آنرا معمولاً با حروف بزرگ انگلیسی مانند A و B و C و .... نشان می‌دهند. ماتریسی که دارای m سطر و n ستون باشد را ماتریسی از مرتبه $m\times n$ می‌نامند و هر یک از عضوهای ماتریس را درایه‌های ماتریس می‌نامند

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

a_{ij} = درایه روی سطر i و ستون j

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}_{2\times4} \qquad C=\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

مثال ۱: در ماتریس $A=[i^2+j^2]_{2\times3}$ درایه‌های A را بصورت عددی بنویسید.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times3}=\begin{bmatrix} 1^2+1^2 & 1^2+2^2 & 1^2+3^2 \\ 2^2+1^2 & 2^2+2^2 & 2^2+3^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

مثال ۲: در ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه:

$a_{11}=2 \qquad a_{12}=3 \qquad a_{13}=1 \qquad a_{21}=-1 \qquad a_{22}=-3 \qquad a_{23}=0$

مثال ۳: ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times2}$ با عضو عمومی a_{ij} بصورت زیر تعریف شده است:

$$a_{ij}=\begin{cases} 0 & i>j \\ 1 & i=j \\ -1 & i<j \end{cases}$$

ماتریس A را با عناصرش مشخص کنید

$a_{11}=1 \qquad a_{12}=-1$

$a_{21}=0 \qquad a_{22}=1 \qquad \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$a_{31}=0 \qquad a_{32}=0$

تساوی دو ماتریس:

دو ماتریس هم مرتبه را با هم مساوی می‌گویند هرگاه درایه‌های نظیر به نظیر آنها مساوی باشند.

مثال: مقادیر x و y را طوری بیابید که دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x+۳y & ۲ \\ ۱ & ۲x-y \end{bmatrix}$ باهم مساوی باشند:

$$\begin{cases} x+۳y=۵ \\ ۲x-y=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+۳y=۵ \\ ۶x-۳y=۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=۲ \\ y=۱ \end{matrix}$$

جمع دو ماتریس:

جمع ماتریس‌ها برای دو ماتریس هم مرتبه تعریف می‌شود. اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند $A+B$ ماتریسی است هم مرتبه با آن دو ماتریس که درایه‌های آن از جمع درایه‌های متناظر دو ماتریس A و B بدست می‌آید

مثال ۱: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ آنگاه مطلوبست محاسبه:

$$A+B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+(-۱) & -۱+۲ \\ ۳+(-۲) & ۲+۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

مثال ۲: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix} ۱ & x-y \\ ۲y-x & ۲ \end{bmatrix}$ آنگاه x و y را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & x-y \\ ۲y-x & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & x-y \\ ۲y-x & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=۳ \\ ۲y-x=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=۵ \\ y=۲ \end{matrix}$$

ماتریس صفر: ماتریسی که تمام درایه‌هایش صفر باشد، ماتریس صفر نامیده می‌شود و با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم:

$$\bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۳} \qquad \bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۱}$$

ماتریس مربع :

ماتریسی که تعداد سطرها و ستون هایش باهم برابر باشند را ماتریس مربع می نامند و a_{11} و a_{22} و a_{33} و ... را درایه های روی قطر اصلی می گویند

$$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$A_{2\times 2}=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 9 & -4 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

خواص جمع ماتریسها :

۱) $A+(B+C)=(A+B)+C$ خاصیت شرکت پذیری

۲) $A+B=B+A$ خاصیت جابجایی

۳) $A+B=A+C \Leftrightarrow B=C$ قاعده حذف

۴) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ عضو بی اثر

ضرب عدد در ماتریس :

اگر A یک ماتریس و K یک عدد حقیقی باشد برای ضرب عدد حقیقی K در ماتریس A کافی است تک تک درایه های ماتریس A در K ضرب شوند.

$$2\times\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & 10 \end{bmatrix}$$

خواص ضرب عدد در ماتریس :

اگر A و B دو ماتریس و K و S اعداد حقیقی باشند :

۱) $K(A+B)=KA+KB$

۲) $(K+S)A=KA+SA$

۳) $0\times A=\bar{O}$

۴) $K(SA)=(KS)A$

۵) $K\times\bar{O}=\bar{O}$

۶) $1\times A=A$

قرینه یک ماتریس :

از ضرب عدد (۱−) در ماتریس A ، قرینه ماتریس A بدست می‌آید که آنرا با علامت (A−) نشان می‌دهیم. حاصل جمع هر ماتریس با قرینه خودش برابر ماتریس صفر است.

$$A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه :

الف) $2A=2\times\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4 & 6\\ 0 & -2 & -4\end{bmatrix}$

ب) $-A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$

ج) $A+(-A)=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

تفاضل دو ماتریس :

برای تفاضل دو ماتریس A و B یعنی A−B ، کافی است قرینه ماتریس B را با A جمع کنیم :

$$A-B=A+(-B)$$

ضرب ماتریس‌ها :

دو ماتریس A و B را در نظر می‌گیریم . ضرب ماتریس A در ماتریس B را بصورت AB نشان داده و زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستونهای ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد.

$$A_{m\times n}\times B_{n\times p}=AB_{m\times p}$$

برای ضرب ماتریس A در ماتریس B کافی است درایه‌های سطرهای ماتریس A را در درایه‌های متناظر ستون‌های ماتریس B ضرب کرده و حاصل جمع آنها را بدست آورید.

$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}_{2\times 2}$

$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+0\times3 & 1\times2+0\times4\\ 0\times1+2\times3 & 0\times2+2\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 6 & 8\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}_{2\times1} = \begin{bmatrix} 2\times1 + 1\times5 \\ 3\times1 + 4\times5 \end{bmatrix}_{2\times1} = \begin{bmatrix} 7 \\ 23 \end{bmatrix}_{2\times1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times3} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} 1(-1)+2(2)+3(1) \end{bmatrix}_{1\times1} = \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}_{1\times1} = 6$$

ماتریس ۱×۱ را بصورت یک عدد نیز نمایش می دهند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times2} \times \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1\times0+2\times3 & 1\times(-2)+2\times1 & 1\times2+2(-1) \\ 3\times0+(-1)\times3 & 3\times(-2)+(-1)\times1 & 3\times2+(-1)(-1) \\ 1\times0+0(3) & 1\times(-2)+0\times1 & 1\times2+0(-1) \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 7 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد از ماتریس های $A\times B$ و $B\times A$ هرکدام که تعریف می شوند را بدست آورید.

حل: چون $A_{2\times3}$ و $B_{2\times2}$ است پس $A\times B$ تعریف نمی شود ولی $B\times A$ تعریف می شود.

$$B\times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2\times1+1\times0 & 2\times2+1\times3 & 2\times(-1)+1\times1 \\ 1\times1+3\times0 & 1\times2+3\times3 & 1\times(-1)+3\times1 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 11 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال) یک کارخانه از سه نوع سوخت نفت، بنزین و گازوئیل استفاده می کند. این کارخانه در هفته ۴۲۰ لیتر نفت، ۱۰۰ لیتر بنزین و ۱۴۰۰ لیتر گازوئیل مصرف می کند. درصورتی که نفت لیتری ۸ تومان، بنزین لیتری ۱۵ تومان و گازوئیل لیتری ۱۰ تومان باشد هزینه سوخت هفتگی کارخانه را تعیین کنید.

$$\begin{bmatrix} 420 & 100 & 1400 \end{bmatrix}_{1\times3} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} 8\times420 + 100\times15 + 1400\times10 \end{bmatrix}_{1\times1} = \begin{bmatrix} 25860 \end{bmatrix} = 25860$$

تومان

نکته ریاضی :
اگر A یک ماتریس مربعی باشد ماتریس های A^2 و A^3 و ... و A^n را بصورت زیر تعریف می کنیم ($n \in \mathbb{N}$ و $n>1$)

$$A^2 = A \times A \qquad A^3 = A^2 \times A = A \times A^2 \qquad A^n = A^{n-1} \times A = A \times A^{n-1}$$

$$A^4 = A \times A^3 = A^3 \times A = A^2 \times A^2$$

مثال ۱: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه :

الف) $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times1 + 2\times(-1) & 1\times2+2\times3 \\ -1\times1 + 3\times(-1) & -1\times2+3\times3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

ب) $A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-8 & -2+24 \\ -4-7 & -8+21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 22 \\ -11 & 13 \end{bmatrix}$

مثال ۲ : اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه :

الف) $A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4 & 1-4 \\ -5+6 & 5-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$

ب) $B \times A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+5 & -2+3 \\ 2+0 & 4-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

نتیجه :
درحالت کلی ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی ندارد. $AB \neq BA$

مثال ۳ : مقدار x را از رابطه زیر بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ -x \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + x^2 - 2x^2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 - x^2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

مثال ۴ : ماتریس A را چنان تعیین کنید که :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

حل : ماتریس A حتماً از مرتبه 2×3 است.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_{2\times2} \times \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}}_{2\times3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{2\times3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+4d & b+4e & c+4f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a=2 \Rightarrow a=1 \\ 2b=0 \Rightarrow b=0 \\ 2c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{2} \\ a+4d=0 \Rightarrow 1+4d=0 \Rightarrow d=-\frac{1}{4} \\ b+4e=2 \Rightarrow 4e=2 \Rightarrow e=\frac{1}{2} \\ c+4f=-1 \Rightarrow \frac{1}{2}+4f=-1 \Rightarrow f=-\frac{3}{8} \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

مثال ۵: از رابطه $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}=\bar{O}$ مقدار x را بدست آورید

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}=\bar{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} -x+2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}=\bar{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} -x^2+2x+6x \end{bmatrix}=\bar{O}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -x^2+8x \end{bmatrix}=\bar{O} \Rightarrow -x^2+8x=0 \Rightarrow x(-x+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=8 \end{cases}$$

مثال ۶: مقدار x و y را از رابطه زیر بیابید

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y+0-6 \\ 0+2+3x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y-6 \\ 2+3x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y-6=2 \Rightarrow y=8 \\ 2+3x=1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

مثال ۷: از تساوی ماتریسی زیر مقدار x را بیابید.

$$\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\bar{O}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+2 & -2 & -x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\bar{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} x^2+2x+0-x \end{bmatrix}=\bar{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} x^2+x \end{bmatrix}=\bar{O}$$

$$\Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

ماتریس واحد (یکّه):

ماتریس مربعی را که درایه‌های روی قطر اصلی آن 1 و سایر درایه‌هایش صفر باشند ماتریس واحد (همانی - یکّه) می‌گویند و با I نشان می‌دهند معمولاً مرتبه ماتریس I را بصورت اندیس می‌نویسند: $I_2=I_{2\times 2}$

حاصلضرب هر ماتریس مربع در ماتریس واحد هم مرتبه آن برابر خود آن ماتریس است:

$$A \times I = I \times A = A$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

تذکر مهم: $I^n = I$

$$I^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

(مثال)

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0 & 0+(-2) \\ 5+0 & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

مثال ۱: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ آنگاه اعداد حقیقی m و n را چنان بیابید که:

$$A^2 = mA + nI_2$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$mA + nI_2 = m\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 2m \\ 3m & 4m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n & 2m \\ 3m & 4m+n \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{bmatrix} m+n & 2m \\ 3m & 4m+n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2m = 10 \Rightarrow \boxed{m = 5} \\ m+n = 7 \Rightarrow 5+n = 7 \Rightarrow \boxed{n = 2} \end{cases}$$

مثال ۲: اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3+k & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه k را چنان بیابید که: $AB = I$

$$AB = I \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3+k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 8+3+k & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 11+k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 11+k = 0 \Rightarrow \boxed{k = -11}$$

مثال ۳: (هماهنگ ۸۹)

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس A^5 را بدست آورید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{bmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \end{bmatrix} \Rightarrow A^5 = A^4 \times A = \begin{bmatrix} 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \end{bmatrix}$$

تذکر مهم:

۱) اگر حاصلضرب دو ماتریس دارای خاصیت جابجائی (تعویض پذیر) باشند اتحادهای جبری برای آنها برقرار است و برعکس

$$AB = BA \Rightarrow \begin{cases} (A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 \\ A^2 - B^2 = (A-B)(A+B) \\ \cdots \end{cases}$$

۲) چون $AI = IA$ پس اتحادهای $A^2 - I^2 = (A+I)(A-I)$ و $(A \pm I)^2 = A^2 \pm 2A + I$ برقرار هستند.

۳) اگر $A_{m \times n}$ و $B_{n \times p}$ و $C_{n \times p}$ سه ماتریس باشند آنگاه رابطه زیر به خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع ماتریس‌ها معروف است پس آنها برقرار است.

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

مثال) اگر A ماتریسی مربعی و $A^2 = A$ و $B = 2A - I$ ثابت کنید $A^3 + B^3 = A + B$

$$A^3 + B^3 = AA^2 + BB^2 = A \cdot A + B(2A - I)^2 = A^2 + B(4A^2 - 4AI + I^2) = A + B(4A - 4A + I)$$

$$= A + B(I) = A + B$$

مثال ۲) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ثابت کنید: $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

حل: کافی است ثابت کنیم: $AB = BA$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

پس اتحاد فوق برقرار است.

تذکر مهم:

از طرفین رابطه ی ضرب ماتریسها، نمی توان یک ماتریس را حذف کرد یعنی اگر $AB = AC$ نمی توان نتیجه گرفت که: $B = C$

تمرین: فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$:

الف) A^2 و A^3 را محاسبه کنید. ب) A^n ($n \geq 2$) را حدس بزنید.

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\times 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\times 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^n=\begin{bmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

تمرین (هماهنگ ۸۶)

اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه ماتریس A^{10}.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}=-2\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=-2I$$

$$A^{10}=(-2I)^{10}=(-2)^{10}\times I^{10}=1024\times I=1024\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1024 & 0\\ 0 & 1024\end{bmatrix}$$

ماتریس های خاص:

۱) ماتریس قطری: ماتریس مربعی را که درایه‌های خارج از قطر اصلی آن همگی صفر باشد ماتریس قطری می نامند و معمولاً با D نشان می دهند.

$$D=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$D=[3]_{1\times 1}$$

«نکته کنکوری»

$$D=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}\Rightarrow D^n=\begin{bmatrix}a^n & 0 & 0\\ 0 & b^n & 0\\ 0 & 0 & c^n\end{bmatrix}$$

مثال) تمام ماتریس های قطری مرتبه ۳ را بنویسید که درایه های واقع بر قطر اصلی آنها اعداد طبیعی باشند و مجموع درایه های واقع بر قطر اصلی همگی آنها ۴ باشد.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

۲) ماتریس اسکالر :

ماتریس قطری که درایه های واقع بر قطر اصلی آن یک عدد ثابت باشد ماتریس اسکالر نامیده می شود و معمولاً با S نشان می دهند.

$$S=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \qquad S=\begin{bmatrix} \sqrt{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲} \end{bmatrix}_{۳\times۳} \qquad S=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}_{۴\times۴}$$

$$S=\begin{bmatrix} ۵ \end{bmatrix}_{۱\times۱}$$

۳) ماتریس بالا مثلثی :

ماتریس مربعی که درایه های زیر قطر اصلی آن همگی صفر باشند را ماتریس بالا مثلثی می نامند.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \qquad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۹ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \qquad C=\begin{bmatrix} ۵ & -۱ & ۴ & ۷ \\ ۰ & ۳ & ۹ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}_{۴\times۴}$$

۴) ماتریس پایین مثلثی :

ماتریس مربعی که درایه های بالای قطر اصلی آن همگی صفر باشند را ماتریس پایین مثلثی می نامند.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \qquad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۵ & ۰ \\ -۲ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \qquad C=\begin{bmatrix} ۶ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۵ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۲ & ۷ & ۰ \\ -۱ & ۵ & ۶ & ۱۱ \end{bmatrix}_{۴\times۴}$$

۵) ماتریس ترانهاده :

اگر A یک ماتریس باشد، جای سطرها و ستون های آنرا عوض کنیم ماتریسی بدست می آید که آنرا ماتریس ترانهاده A می نامند و با علامت A^t نشان می دهند.

$$A=\begin{bmatrix}1&5&3\\2&9&8\end{bmatrix}_{2\times3}\qquad A^t=\begin{bmatrix}1&2\\5&9\\3&8\end{bmatrix}_{3\times2}\qquad A_{m\times n}\Leftrightarrow A^t_{n\times m}$$

خواص ترانهاده یک ماتریس:

1) $(A^t)^t=A$ 2) $(A+B)^t=A^t+B^t$ 3) $(rA)^t=rA^t$

4) $(AB)^t=B^tA^t$ 5) $(A^n)^t=(A^t)^n$

مثال ۱: اگر $A=\begin{bmatrix}2&3\\-1&0\end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه: $(A^2-I)^t+3A=?$
(هماهنگ_۸۹)

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2&3\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6\\-2&-3\end{bmatrix}$$

$$A^2-I=\begin{bmatrix}1&6\\-2&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&6\\-2&-4\end{bmatrix}\Rightarrow(A^2-I)^t=\begin{bmatrix}0&-2\\6&-4\end{bmatrix}$$

$$(A^2-I)^t+3A=\begin{bmatrix}0&-2\\6&-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&9\\-3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&7\\3&-4\end{bmatrix}$$

مثال ۲: (هماهنگ ۸۳)

اگر $A=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$ باشد حاصل A^3-A^t+2I را بدست آورید.

$$A^2=\begin{bmatrix}1&6\\0&1\end{bmatrix}\qquad A^3=A.A^2=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&6\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&9\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3-A^t+2I=\begin{bmatrix}1&9\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&9\\-3&2\end{bmatrix}$$

مثال ۳: با فرض $A=\begin{bmatrix}-1&1\\0&2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2&-3\\3&2\end{bmatrix}$ مقادیر m و n را چنان تعیین کنید که داشته باشیم: $A^2+mI=A^t+nB^t$

$$\text{سمت چپ}=A^2+mI=\begin{bmatrix}-1&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\0&2\end{bmatrix}+m\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}m&0\\0&m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+m&1\\0&4+m\end{bmatrix}\quad ①$$

$$\text{سمت راست}=A^t+nB^t=\begin{bmatrix}-1&0\\1&2\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}2&3\\-3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+2n&3n\\1-3n&2+2n\end{bmatrix}\quad ②$$

$$①,②\Rightarrow\begin{cases}1+m=-1+2n\\1=3n\\0=1-3n\\4+m=2+2n\end{cases}\Rightarrow\boxed{m=-\frac{4}{3}}\ ,\ \boxed{n=\frac{1}{3}}$$

مثال ۴): اگر $A=\begin{bmatrix}0&-2\\1&-1\end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه a و b بطوریکه داشته باشیم:

$$a(A^2+A^t)+bI=\begin{bmatrix}-8&9\\-9&-8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a\left(\begin{bmatrix}0&2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\1&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\-2&-1\end{bmatrix}\right)+b\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&9\\-9&-8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a\left(\begin{bmatrix}-2&2\\-1&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\-2&-1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}b&0\\0&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&9\\-9&-8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a\begin{bmatrix}-2&3\\-3&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b&0\\0&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&9\\-9&-8\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2a+b&3a\\-3a&-2a+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&9\\-9&-8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2a+b=-8\\3a=9\\-3a=-9\\-2a+b=-8\end{cases}\Rightarrow\boxed{a=3}\quad\boxed{b=-2}$$

۶) ماتریس سطری:

ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد ماتریس سطری نامیده می‌شود

$A=[2]_{1\times1}$ $\quad B=[1\ \ 2]_{1\times2}$ $\quad C=[3\ \ 0\ \ -4]_{1\times3}$

۷) ماتریس ستونی:

ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد ماتریس ستونی نامیده می‌شود.

$A=[-4]_{1\times1}$ $\quad B=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}_{2\times1}$ $\quad C=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}_{3\times1}$

تمرین: ماتریسی 3×3 مثال بزنید که ترانهاده آن با قرینه‌اش برابر شود.

$$A=\begin{bmatrix}0&-a&-a\\a&0&-a\\a&a&0\end{bmatrix}\Rightarrow -A=\begin{bmatrix}0&a&a\\-a&0&a\\-a&-a&0\end{bmatrix},\ A^t=\begin{bmatrix}0&a&a\\-a&0&a\\-a&-a&0\end{bmatrix}$$

(همان ماتریس پادمتقارن است) $\quad -A=A^t \quad (a\in\mathbb{R})$

۸) ماتریس متقارن:

ماتریس مربع A را متقارن می‌گویند هرگاه با ترانهاده‌اش برابر باشد یعنی: $A = A^t$

روش شناخت ماتریس متقارن: درایه‌های طرفین قطر اصلی یکسان است.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۶ \\ ۱ & ۷ & ۳ \\ ۶ & ۳ & ۵ \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۶ \\ ۱ & ۷ & ۳ \\ ۶ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

$A = A^t \Rightarrow$ A متقارن

۹) ماتریس پادمتقارن:

ماتریس مربع A را پادمتقارن می‌گویند هرگاه ترانهاده‌اش با قرینه‌اش برابر باشد یعنی: $A^t = -A$

روش شناخت ماتریس پادمتقارن: درایه‌های روی قطر اصلی آن صفر و درایه‌های طرفین قطر اصلی آن قرینه هم باشند.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & -۳ & ۲ \\ ۳ & ۰ & ۵ \\ -۲ & -۵ & ۰ \end{bmatrix} \qquad -A = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & -۲ \\ -۳ & ۰ & -۵ \\ ۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & -۲ \\ -۳ & ۰ & -۵ \\ ۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

$A^t = -A \Rightarrow$ A پادمتقارن

مثال ۱: ثابت کنید مجموع دو ماتریس متقارن، ماتریسی متقارن است.

فرض	$B = B^t$ و $A = A^t$
حکم	$(A+B)^t = A+B$

اثبات: می‌دانیم $(A+B)^t = A^t + B^t$ است پس:

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A+B$$

مثال ۲: اگر A و B ماتریس‌هایی مربعی و هم مرتبه باشند ثابت کنید ماتریس $(A^tB + B^tA)$ ماتریسی متقارن است.

اثبات: کافی است ثابت کنیم ترانهاده ماتریس داده شده با خودش برابر است.

$$(A^tB + B^tA)^t = (A^tB)^t + (B^tA)^t = B^t \times (A^t)^t + A^t \times (B^t)^t = B^tA + A^tB = A^tB + B^tA$$

پس ماتریس $A^tB + B^tA$ متقارن است.

مثال ۳ (هماهنگ)

اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند نشان دهید ماتریس $(AB^t - BA^t)$ پادمتقارن است.

حل: کافی است ثابت کنیم ترانهاده‌اش با قرینه‌اش برابر است.

$$(AB^t - BA^t)^t = (AB^t)^t - (BA^t)^t = (B^t)^t A^t - (A^t)^t B^t = BA^t - AB^t = -(AB^t - BA^t)$$

پس ماتریس $(AB^t - BA^t)$ پادمتقارن است.

تذکر مهم ۱:

اگر A یک ماتریس مربعی باشد دراینصورت ماتریس‌های زیر متقارن هستند

۱) $A+A^t$ ۲) A^t+A ۳) AA^t ۴) A^tA

ولی ماتریسهای $(A-A^t)$ و (A^t-A) پادمتقارن هستند

تذکر مهم ۲:

هر ماتریس مربعی A را بادستور زیر می‌توان بصورت مجموع دو ماتریس متقارن و پادمتقارن نوشت:

$$\boxed{A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^t)}_{\text{متقارن}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^t)}_{\text{پادمتقارن}}}$$

مثال ۱: (هماهنگ اردیبهشت ۸۲)

ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ رابصورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن بنویسید.

$$A = \frac{1}{2}(A+A^t) + \frac{1}{2}(A-A^t) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) +$$

$$\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{متقارن}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{پادمتقارن}}$$

نکته کنکوری :

اگر A ماتریس مربعی از مرتبه $n\times n$ باشد بطوریکه درایه های روی قطر اصلی آن یک و سایر درایه های آن نسبت به قطر اصلی معکوس هم باشند درانیصورت درایه های روی قطر اصلی ماتریس A^2 همگی برابر n خواهد بود

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{3} & 1 & 7\\ 5 & \frac{1}{7} & 1\end{bmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{bmatrix}$$

(کنکور ریاضی ۹۷)

(سوال ۱۳۸) اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 6 & 24\\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4\\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}$

باشند مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس C^2 کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

حل : گزینه (۱) صحیح است.

$$C=\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 6 & 24\\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4\\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}_{4\times 4} \Longrightarrow C^2=\begin{bmatrix}4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4\end{bmatrix} \Rightarrow 4+4+4+4=16$$

ماتریس خودتوان :

ماتریس مربع A را خودتوان می نامند هرگاه : $A^2=A$

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}=A$$

نکته ریاضی :

اگر ماتریس A خودتوان باشد درانیصورت : $A^n=A \quad (n\in N)$

تمرینات ص ۲۰

۱) اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$ ماتریسی ۳×۴ باشد بطوریکه برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^2$ در اینصورت ماتریس A را با درایه هایش مشخص کنید.

$a_{11}=7 \quad a_{12}=1^2=1 \quad a_{13}=1^2=1 \quad a_{14}=1^2=1$

$a_{21}=2+1=3 \quad a_{22}=7 \quad a_{23}=2^2=4 \quad a_{24}=2^2=4$

$a_{31}=3+1=4 \quad a_{32}=3+2=5 \quad a_{33}=7 \quad a_{34}=3^2=9$

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

۲) اگر $A=\begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ در اینصورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x+y=5 \\ \boxed{z=-2} \end{cases} \qquad \boxed{x=2} \quad \boxed{y=1}$$

$$x+y+z=2+1+(-2)=1$$

۳) دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq \bar{O}$ و $B\neq \bar{O}$ ولی $AB=\bar{O}$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}\neq \bar{O} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}\neq \bar{O} \qquad A\times B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}=\bar{O}$$

۴) با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس ها برقرار نمی باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی توان نتیجه گرفت: $B=C$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad AC=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow B\neq C$$

۵) اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان های A را بصورت $A^2=AA$ و $A^3=AA^2$ و ... و $A^n=AA^{n-1}$ $(n\in\mathbb{N})$ در اینصورت با فرض $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ حاصل A^2 و A^3 و A^7 را بیابید.

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I \Rightarrow A^4=A^2.A^2=I.I=I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=AA^2=A.I=A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix} \qquad A^7=A^3A^4=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

---

۶) اگر $A=\begin{bmatrix}4&a\\b&-1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&-2\\3&2\end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری بدست آورید که حاصلضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

$$A\times B=\begin{bmatrix}4&a\\b&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&-2\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+3a&-8+2a\\b-3&-2b-2\end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{A\times B=\text{قطری}}\begin{cases}-8+2a=0\Rightarrow \boxed{a=4}\\ b-3=0\Rightarrow \boxed{b=3}\end{cases}$$

---

۷) اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n باشد نشان دهید ماتریس $(A+A^t)$ و ماتریس AA^t هردو متقارن هستند.

حل: یک ماتریس زمانی متقارن است که با ترانهاده اش برابر باشد.

$$(A+A^t)^t=A^t+(A^t)^t=A^t+A=A+A^t \Rightarrow \text{متقارن است } (A+A^t)$$

$$(AA^t)^t=(A^t)^t.A^t=A.A^t \Rightarrow \text{متقارن است. } A.A^t$$

---

۸) حکم مسئله ۷ را برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&0&5\\2&-4&7\end{bmatrix}$ بررسی کنید.

$$A+A^t=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&0&5\\2&-4&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&3&2\\2&0&-4\\-1&5&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5&1\\5&0&1\\1&1&14\end{bmatrix} \quad \text{متقارن}$$

$$A.A^t=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&0&5\\2&-4&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&2\\2&0&-4\\-1&5&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-2&-13\\-2&34&41\\-13&41&69\end{bmatrix} \quad \text{متقارن}$$

۹) درستی تساوی های $(AB)^t = B^tA^t$ و $(A+B)^t = A^t + B^t$ را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2\\-3&5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3&2\\0&-4\end{bmatrix}$ بررسی کنید.

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\-3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\0&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-6\\-9&-26\end{bmatrix} \Rightarrow (AB)^t=\begin{bmatrix}3&-9\\-6&-26\end{bmatrix}$$

$$B^tA^t=\begin{bmatrix}3&0\\2&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-9\\-6&-26\end{bmatrix}$$

تساوی $(AB)^t = B^tA^t$ برقرار است.

$$A+B=\begin{bmatrix}1&2\\-3&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2\\0&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&4\\-3&1\end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^t=\begin{bmatrix}4&-3\\4&1\end{bmatrix}$$

$$A^t+B^t=\begin{bmatrix}1&-3\\2&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0\\2&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-3\\4&1\end{bmatrix}$$

تساوی $(A+B)^t = A^t + B^t$ برقرار است.

---

۱۰) اگر $A=[a_{ij}]_{3\times2}$ و $B=[b_{ij}]_{2\times3}$ بصورت زیر معرفی شده باشند ابتدا A و B را با درایه هایشان نوشته و سپس $A\times B$ و $B\times A$ را بدست آورید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i^2-1 & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases} \quad , \quad b_{ij}=\begin{cases} i^2+1 & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+2 & i<j \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix}1^2-1&2-1\\2-1&2^2-1\\3-1&3-2\end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix}0&1\\1&3\\2&1\end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{bmatrix}_{2\times3}=\begin{bmatrix}1^2+1&1-2+2&1-3+2\\2+1&2^2+1&2-3+2\end{bmatrix}_{2\times3}=\begin{bmatrix}2&1&0\\3&5&1\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}3&5&1\\11&16&3\\7&7&1\end{bmatrix}_{3\times3} \qquad B\times A=\begin{bmatrix}1&5\\7&19\end{bmatrix}_{22}$$

۱۱) ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ بصورت زیر تعریف شده است ابتدا A را با درایه‌هایش بنویسید و سپس A^t را تشکیل داده و با A مقایسه کنید

$$a_{ij}=\begin{cases}0 & i=j\\ i^2-j & i<j\\ i-j^2 & i>j\end{cases}\qquad (1\leq i\leq 3 \text{ و } 1\leq j\leq 3)$$

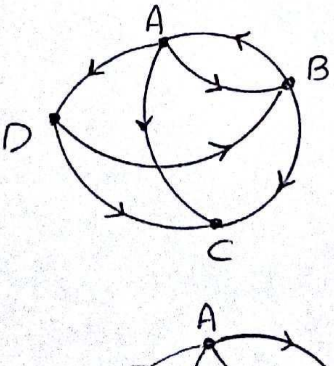
$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}_{3\times 3}=\begin{bmatrix}0&1^2-2&1^2-3\\2-1^2&0&2^2-3\\3-1^2&3-2^2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\1&0&1\\2&-1&0\end{bmatrix}$$

$$A^t=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&-1\\-2&1&0\end{bmatrix}$$

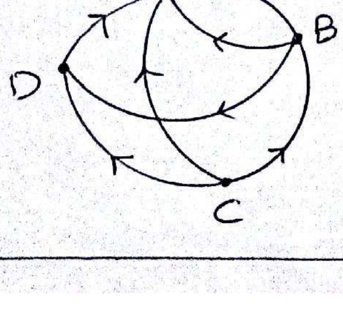
نتیجه: $A^t=-A$ ⇐ A پادمتقارن است.

---

۱۲) بین چهار تیم فوتبال A و B و C و D مسابقاتی برگزار شده است و نتایج توسط یک نمودار در زیر رسم شده است (جهت پیکان روی هر خط یا منحنی واصل بین دو تیم از طرف تیم برنده به سمت تیم بازنده است) درکنار این نمودار ماتریس ۴×۴ نوشته شده که متناظر با آن نمودار است. اگر این ماتریس را H بنامیم و جهت همه پیکان‌ها را برعکس کنیم ماتریس نمودار جدید را تشکیل داده و با H مقایسه کنید.



$$H=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}A&B&C&D\end{matrix}\\ \begin{matrix}A\\B\\C\\D\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$



$$M=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}A&B&C&D\end{matrix}\\ \begin{matrix}A\\B\\C\\D\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

نتیجه: $M=H^t$

ماتریس جدید با ترانهاده ماتریس H برابر است.

۱۳) اگر $A=\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی ۳×۳ و دلخواه باشد در اینصورت ماتریس $(A\times B)$ را تشکیل دهید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ برای $(B\times A)$ چه قانونی تعریف می‌کنید؟

حل: ماتریس دلخواه B را بصورت $B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{bmatrix}_{3\times 3}$ درنظر می‌گیریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}_{3\times 3}\times\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{bmatrix}_{3\times 3}=\begin{bmatrix} r_1a & r_1b & r_1c \\ r_2d & r_2e & r_2f \\ r_3m & r_3n & r_3p \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

نتیجه: اولین درایه روی قطر اصلی ماتریس قطری A در همه درایه‌های سطر اول ماتریس B ضرب می‌شود، دومین درایه روی قطر اصلی ماتریس قطری A در همه درایه‌های سطر دوم ماتریس B ضرب می‌شود و بهمین ترتیب برای درایه سوم و سطر سوم این اتفاق می‌افتد.

$$B\times A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{bmatrix}_{3\times 3}\times\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}_{3\times 3}=\begin{bmatrix} ar_1 & br_2 & cr_3 \\ dr_1 & er_2 & fr_3 \\ mr_1 & nr_2 & pr_3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

نتیجه بالا برای درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس قطری A و ستونهای ماتریس B اتفاق می‌افتد.

---

۱۴) اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و B ماتریسی هم مرتبه در اینصورت

الف) برای $A\times B$ و $B\times A$ قوانینی تعریف کنید.

$$A\times B=\overbrace{\begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}_{3\times 3}}^{\text{اسکالر}}\times\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{bmatrix}_{3\times 3}=\begin{bmatrix} Ka & Kb & Kc \\ Kd & Ke & Kf \\ Km & Kn & Kp \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\m&n&p\end{bmatrix}_{3\times3}\times\begin{bmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}ak&bk&ck\\dk&ek&fk\\mk&nk&pk\end{bmatrix}_{3\times3}$$

ب) آیا تساوی $A\times B=B\times A$ برقرار است؟ بلی

---

۱۵) اگر A و B ماتریس های 3×3 و تعویض پذیر باشند و $A\times B=B\times A$ ثابت کنید:

الف) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ ب) $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

اثبات الف) از خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع در ماتریس ها استفاده می کنیم:

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=(A+B)\cdot A+(A+B)\cdot B=A^2+BA+AB+B^2=A^2+2AB+B^2$$

اثبات ب) از خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع در ماتریس ها استفاده می کنیم:

$$(A-B)(A+B)=(A-B)\cdot A+(A-B)\cdot B=A^2-BA+AB-B^2=A^2-\cancel{AB}+\cancel{AB}-B^2=A^2-B^2$$

---

۱۶) اگر $A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}$ مفروض باشد حاصل A^3 را بدست آورید، چه نتیجه ای می گیرید؟

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&9&0\\0&0&16\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&9&0\\0&0&16\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&0&0\\0&27&0\\0&0&64\end{bmatrix}$$

نتیجه: $A=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{bmatrix}$

دترمینان ماتریس مربعی :

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. از کاربردهای دترمینان می‌توان به محاسبه وارون یک ماتریس و حل دستگاه معادلات و بحث در وجود یا عدم وجود جواب برای دستگاه معادلات اشاره کرد.

دترمینان ماتریس مربعی 2×2 :

اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه ۲ باشد در اینصورت دترمینان ماتریس A را با نماد $det(A)=|A|$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

1) $A=[k]_{1\times 1} \Rightarrow |A|=k$

2) $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=ad-bc$

مثال ۱ : دترمینان ماتریس‌های زیر را بدست آورید :

الف) $A=[-3] \Rightarrow |A|=-3$

ب) $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=5-(-6)=11$

ج) $A=\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

مثال ۲ : مقدار m را چنان تعیین کنید که دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} m & 2 \\ m-1 & -3 \end{bmatrix}$ برابر (-8) شود ؟

$|A|=-8 \Rightarrow (m)(-3)-(2)(m-1)=-8 \Rightarrow -3m-2m+2=-8 \Rightarrow -5m=-10 \Rightarrow \boxed{m=2}$

مثال ۳ : الف) اگر $a\neq 0$ و $A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 \end{bmatrix}$ مطلوبست :

الف) محاسبه A^{1396} ب) به شرط $a=2$ حاصل $|A+I|$ را بدست آورید.

$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I \Rightarrow A^{1396}=(A^2)^{698}=I^{698}=I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$a=2 \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A+I=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A+I|=1-1=0$

دترمینان ماتریس های مربعی ۳×۳ :

اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه ۳ باشد دترمینان آن را به دو روش زیر محاسبه می کنیم :

روش اول : بسط بر حسب سطر اول :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

تذکر مهم : برای هر ماتریس ۳×۳ دلخواه، می توان دترمینان A را بر حسب هر سطر یا ستونی به دست آورد که همواره حاصل عددی حقیقی و منحصر بفرد است .

مثال ۱ : دترمینان ماتریس زیر را یک بار بر حسب سطر اول و یک بار بر حسب ستون سوم بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

بسط بر حسب سطر اول : $|A| = 1\times\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -12+6+20=14$

بسط بر حسب ستون سوم : $|A| = 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 2(8+2) - 3(4-2) + 0 = 20-6 = 14$$

مثال ۲ : دترمینان ماتریس زیر را یک بار بر حسب سطر سوم و یک بار بر حسب ستون دوم بدست آورید.

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

بسط برحسب سطر سوم: $|B| = 0(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 0 + 0 + 3(2+1) = 3 \times 3 = 9$

بسط برحسب ستون دوم: $|B| = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(3-0) + 2(3-0) + 0 = 3 + 6 = 9$ (بسط برحسب درایه‌های صفر راحت‌تر است)

(کنکور ریاضی ۹۷)

۱۳۹) مقادیر x از رابطه $\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

۱) $-1, -6$ ۲) $-1, 6$ ۳) $1, -6$ ۴) $1, 6$

حل: گزینه (۳)

بسط برحسب سطر اول: $0\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - (x-3)\begin{vmatrix} x+3 & -4 \\ x+2 & 0 \end{vmatrix} + (x-2)\begin{vmatrix} x+3 & 0 \\ x+2 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 0 - (x-3)(+4x+8) + (x-2)(6x+18) = 0 \Rightarrow -4x^2 + 4x + 24 + 6x^2 + 6x - 36 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 10x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \;,\; x = -6$

روش دوم: دستور ساروس ( ) برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3:

از این دستور فقط می‌توان برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3 بصورت زیر استفاده کرد:

دو ستون اول و دوم ماتریس A را در کنار خودش می‌نویسیم دترمینان ماتریس A برابر است با مجموع حاصلضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن منهای مجموع حاصلضرب درایه‌های واقع بر قطر فرعی و دو قطر موازی آن.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

مثال) به کمک دستور ساروس دترمینان ماتریس‌های زیر را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 3\\ 5 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & -2 & 3 & 1 & -2\\ 4 & 0 & -1 & 4 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3\end{array}\right| =(0+4+36)-(0-3-8)=40+11=51$$

$$|B|=\left|\begin{array}{ccc|cc}0 & 2 & 1 & 0 & 2\\ 4 & 0 & 3 & 4 & 0\\ 5 & 1 & 0 & 5 & 1\end{array}\right| =(0+30+4)-(0+0+0)=34$$

(کنکور ریاضی ۹۶)

ماتریس $A=\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\ 4 & 3 & -2\\ 1 & 6 & 7\end{bmatrix}$ بصورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشته شده است، دترمینان ماتریس متقارن کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

حل: گزینه (۳)

$$A=\underbrace{\frac{1}{2}(A+A^t)}_{\text{متقارن}}+\underbrace{\frac{1}{2}(A-A^t)}_{\text{پادمتقارن}}$$

$$\text{قسمت متقارن}=\frac{1}{2}(A+A^t)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\ 4 & 3 & -2\\ 1 & 6 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 6\\ -1 & -2 & 7\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5 & 3 & 0\\ 3 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 7\end{bmatrix}$$

$$\text{دترمینان}=\left|\begin{array}{ccc|cc}5 & 3 & 0 & 5 & 3\\ 3 & 3 & 2 & 3 & 3\\ 0 & 2 & 7 & 0 & 2\end{array}\right| =(105+0+0)-(0+20+63)=105-83=22$$

مثال) دترمینان ماتریس زیر را بیابید:

$$A=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (1)(13)-(6)(-1) = 19$$

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $2A^2B-|B|A$ را بدست آورید.

$$2A^2B-|B|A = 2\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - (1)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -18 & 52 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -19 & 55 \end{bmatrix}$$

مثال) اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالر باشد و $a_{11}=4$ در اینصورت $|A|$ را بیابید.

$$a_{11}=4 \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{matrix} = (64+0+0)-(0+0+0) = 64$$

نکته ریاضی:

دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ab \qquad A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = abc$$

مثال) اگر A ماتریس 3×3 باشد و داشته باشیم
$$A=4\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{5}{4}&0\\0&0&\frac{5}{2}\end{bmatrix}$$
در اینصورت $|A|$ را بدست آورید.

$$A=4\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{5}{4}&0\\0&0&\frac{5}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&10\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=2\times5\times10=100$$

مثال) ماتریس های $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}$ مفروضند. ماتریس $A\times B$ را بدست آورده و برقراری تساوی $|AB|=|A||B|$ را بررسی کنید.

$$A\times B=\begin{bmatrix}2&-1\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\25&11\end{bmatrix}\Rightarrow |AB|=(2)(11)-(0)(25)=22$$

$$|A|=(2)(4)-(-1)(3)=11 \qquad |B|=(3)(2)-(1)(4)=2$$

برقرار است $|AB|=|A||B|$

مثال) ماتریس 3×3 چون A بنویسید به طوری که $|A|=-6$ پس ماتریس A^2 را محاسبه و $|A^2|$ را بدست آورید چه نتیجه ای می گیرید؟

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(2)(-1)(3)=-6 \Rightarrow |A|^2=(-6)^2=36$$

$$A^2=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&9\end{bmatrix}\Rightarrow |A^2|=4\times1\times9=36$$

نتیجه: $|A^2|=|A|^2$

ویژگی های دترمینان :

۱) دترمینان هر ماتریس با دترمینان ترانهاده آن ماتریس برابر است $|A|=|A^t|$

۲) دترمینان ضرب دو یا چند ماتریس برابر است با ضرب دترمینان های آنها

$$|AB| = |A||B|$$

۳) از ویژگی (۲) نتیجه می شود: $|A^n| = |A|^n$

۴) اگر A ماتریس مربع مرتبه n و k یک عدد حقیقی باشد آنگاه :

$$|kA| = k^n|A|$$

مثال)

$$A = 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow |A| = 5^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 125(1)(2)(3) = 750$$

مثال) اگر $|A_{3\times 3}| = 2$ باشد دترمینان ماتریس $4A$ را حساب کنید.

$$|4A| = 4^3|A| = 64\times 2 = 128$$

۵) اگر درایه های یک سطر یا یک ستون ماتریس همگی صفر باشند دترمینان آن ماتریس صفر است.

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

۶) اگر درایه های دو سطر یا دو ستون ماتریسی یکسان باشد دترمینان آن ماتریس صفر است.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & -1 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۷) از تعویض دو سطر یا دو ستون یک دترمینان، تنها علامت دترمینان تغییر می‌کند (قرینه می‌شود)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 5 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

۸) اگر در یک دترمینان درایه‌های یک سطر یا یک ستون هر کدام مجموع دو یا چند جمله باشند آنگاه آن دترمینان روی همان سطر یا ستون به دو یا چند دترمینان تفکیک می‌شود.

$$\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5+a & 1 & 5 \\ 3+b & 0 & 1 \\ -1+c & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 5 \\ b & 0 & 1 \\ c & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

۹) اگر در یک دترمینان مضربی از یک سطر یا ستون را به سطر یا ستون دیگر اضافه کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

مثلاً در دترمینان زیر چهار برابر سطر اول را به سطر سوم اضافه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 11 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 11+4(7) & -6+4(2) & 4+4(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 39 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

۱۰) دترمینان ماتریس‌های بالا مثلثی و پایین مثلثی برابر است با حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی:

$$\begin{vmatrix} 5 & 19 & 27 \\ 0 & 2 & 131 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (5)(2)(-1) = -10 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 42 & 3 & 0 \\ 120 & 19 & 7 \end{vmatrix} = (1)(3)(7) = 21$$

۱۱) دترمینان ماتریس واحد برابر یک است $|I| = 1$

تمرین ۱: اگر $\begin{vmatrix} 1 & b & a+1 \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} = ۸$ باشد مقدار $\begin{vmatrix} 1 & b & a \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix}$ را بیابید.

$$\begin{vmatrix} 1 & b & a+1 \\ ۲ & ۱ & ۳+۰ \\ -۱ & ۲ & ۰+۰ \end{vmatrix} = ۸ \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & b & a \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} = ۸$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & b & a \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} + ۵ = ۸ \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & b & a \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} = ۳$$

وارون ماتریس:

برای هر ماتریس مربعی مانند A ، وارون ماتریس A درصورت وجود، ماتریسی مانند B است به طوری که: $A \times B = B \times A = I$ دراینصورت B را وارون A نامیده و با A^{-1} نشان می‌دهیم.

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ دراینصورت وارون ماتریس A از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس A وارون پذیر باشد آنستکه دترمینان A مخالف صفر باشد.

$|A| \neq ۰ \Leftrightarrow$ A^{-1} وجود دارد

مثال ۱: وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ را بدست آورده و جواب را امتحان کنید.

$|A| = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix} = ۶ - ۰ = ۶ \neq ۰ \Rightarrow$ A وارون پذیر است

$$A^{-1} = \frac{1}{۶} \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۶} & -\frac{۱}{۶} \\ ۰ & \frac{۲}{۶} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۶} \\ ۰ & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۶} \\ ۰ & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

مثال ۲: مقدار m را چنان تعیین کنید که ماتریس $A=\begin{bmatrix} m+1 & m-4 \\ m+5 & m-1 \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد.

$$|A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m+1 & m-4 \\ m+5 & m-1 \end{vmatrix} = (m+1)(m-1)-(m-4)(m+5)=0$$

$$\Rightarrow m^2-1-m^2-m+20=0 \Rightarrow -m+19=0 \Rightarrow \boxed{m=19}$$

مثال ۳: اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه: $B^{-1}\times A^2+2I_2=?$

$$|B|=(1)(1)-(2)(-1)=3 \Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 16 \\ -8 & 23 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}\times A^2+2I_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 16 \\ -8 & 23 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{23}{3} & -10 \\ -\frac{1}{3} & 13 \end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{29}{3} & -10 \\ -\frac{1}{3} & 15 \end{bmatrix}$$

مثال ۴: اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه:

$$A^{-1}-3BA+2I_2=?$$

$$|A|=(3)(1)-(2)(1)=1 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$-3BA=-3\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=-3\begin{bmatrix} -9 & -7 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} +27 & +21 \\ -33 & -21 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}-3BA+2I_2=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 27 & 21 \\ -33 & -21 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 30 & 19 \\ -34 & -16 \end{bmatrix}$$

مثال ۵: اگر $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&a\end{bmatrix}$ و $A^2=A^{-1}$ در اینصورت مقدار a را بیابید.

$$|A|=(0)(a)-(-1)(1)=1 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}a&1\\-1&0\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}a&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&-1\\1&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-a\\a&a^2-1\end{bmatrix}$$

$$A^2=A^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix}-1&-a\\a&a^2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&1\\-1&0\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

مثال ۶: اگر A ماتریس وارون پذیر و $A=\begin{bmatrix}3|A|&5\\|A|&|A|\end{bmatrix}$ ، درایه سطر اول و ستون اول A^{-1} را بیابید.

$$|A|=\begin{vmatrix}3|A|&5\\|A|&|A|\end{vmatrix}=3|A|^2-5|A| \Rightarrow 3|A|^2-6|A|=0$$

$$\Rightarrow 3|A|(|A|-2)=0 \Rightarrow \begin{cases}|A|\neq 0 & (\text{وارون پذیر } A)\\ |A|=2\end{cases}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}|A|&-5\\-|A|&3|A|\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-5\\-2&6\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-\frac{5}{2}\\-1&3\end{bmatrix} \Rightarrow a_{11}=1$$

مثال ۷: اگر A ماتریسی وارون پذیر باشد ثابت کنید: $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

$$A^{-1}.A=I \Rightarrow |A^{-1}.A|=|I| \Rightarrow |A^{-1}|.|A|=1 \Rightarrow |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$$

ویژگی های ماتریس وارون:

اگر A و B وارون پذیر باشند آنگاه:

۱) $(AB)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$

۲) $(A^{-1})^{-1}=A$

۳) $(KA)^{-1}=\frac{1}{K}A^{-1}$

۴) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

۵) $(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$

قضیه یکتایی وارون:

وارون هر ماتریس مربعی (مرتبه ۲) در صورت وجود منحصر بفرد است.

اثبات: فرض می‌کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون ماتریس A باشند ثابت می‌کنیم: $B = C$

B وارون A $\Rightarrow AB = BA = I$

C وارون A $\Rightarrow AC = CA = I$

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = C(I) = C \Rightarrow B = C$$

حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به روش ماتریس وارون:

دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} ax + by = e_1 \\ cx + dy = e_2 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. این

دستگاه را بصورت حاصل ضرب ماتریس ضرایب $\left(A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$ در ماتریس

مجهولات $\left(X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ مساوی با ماتریس مقادیر $\left(B = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}\right)$ می‌نویسیم

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow IX = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

★ شرط وجود آن اینکه دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد ★

مثال ۱: دستگاه مقابل را به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{(3)(-1) - (-2)(3)}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

مثال ۲) دستگاه مقابل را به روش ماتریس وارون حل کنید:

$$\begin{cases} -2x+5y=4 \\ 3x-4y=1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{8-15}\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

مثال ۳) دستگاه مقابل را به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases} 3x-4y=4 \\ -2x+3y=-2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{9-8}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$$

مثال ۴: اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$، ماتریس X را طوری تعیین کنید که: $AX=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

$$AX=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}\cdot AX=A^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر a، معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} a+1 & 2 \\ -1 & a-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$ جواب دارد؟ (تجربی - ۸۸)

۱) $\{-1,0,1\}$ ۲) $R-\{0,1\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) R

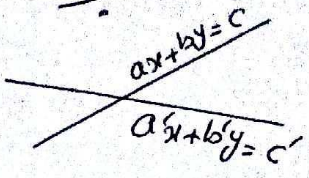
حل: گزینه (۴) صحیح است:
برای اینکه یک معادله ماتریسی جواب داشته باشد دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه باید مخالف صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 2 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow (a+1)(a-1)-(2)(-1)\neq 0 \Rightarrow a^2+1\neq 0$$

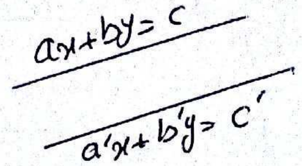
همواره برقرار است و $a\in R$

بحث در وجود یا عدم وجود جوابهای دستگاه دو معادله دو مجهولی:

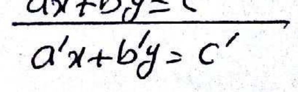
سه حالت برای دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ در نظر می گیریم:



الف) $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'} \Rightarrow$ دستگاه یک جواب منحصر بفرد دارد



ب) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'} \Rightarrow$ دستگاه جواب ندارد



ج) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \Rightarrow$ دستگاه بیشمار جواب دارد.

نتیجه:

اگر ماتریس ضرایب دستگاه را $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم در اینصورت با توجه به سه حالت بالا می توان گفت:

۱) اگر $|A| \neq 0$ آنگاه دستگاه دارای یک جواب منحصر بفرد است (دو خط متقاطع اند)

۲) اگر $|A|=0$ در اینصورت یا دستگاه جواب ندارد (دو خط موازی اند) و یا اینکه دستگاه بیشمار جواب دارد (دو خط بر هم منطبق هستند)

مثال ۱: در وجود جواب دستگاه $\begin{cases} 2x+my=4 \\ x+y=m \end{cases}$ برحسب m بحث کنید.

دترمینان ماتریس ضرایب $= |A| = \begin{vmatrix} 2 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-m$

$|A| \neq 0 \Rightarrow 2-m \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$ دستگاه فقط یک جواب دارد

$|A| = 0 \Rightarrow 2-m=0 \Rightarrow m=2 \Rightarrow \dfrac{2}{1}=\dfrac{2}{1}=\dfrac{4}{2} \Rightarrow$ دستگاه بیشمار جواب دارد.

مثال۲ : به ازای چه مقداری از m دستگاه
$\begin{cases} 2x+my=1 \\ (m-1)x+y=3 \end{cases}$
جواب ندارد؟

شرط نداشتن جواب : $\dfrac{2}{m-1}=\dfrac{m}{1}\neq\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{2}{m-1}=\dfrac{m}{1}\Rightarrow m(m-1)=2\Rightarrow m^2-m-2=0\Rightarrow (m-2)(m+1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} m=2 \Rightarrow \dfrac{2}{1}=\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{1}{3} \\ m=-1\Rightarrow \dfrac{2}{-2}=\dfrac{-1}{1}\neq\dfrac{1}{3} \end{cases}$ $\Rightarrow$ درهردوحالت دستگاه جواب ندارد

مثال۳ : برحسب m در وجود جواب دستگاه زیر بحث کنید:

$\begin{cases} mx+(m-3)y=-2 \\ 2x+5y=2 \end{cases}$

شرط داشتن جواب منحصر بفرد : $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}\Rightarrow\dfrac{m}{2}\neq\dfrac{m-3}{5}\Rightarrow 5m\neq 2m-6\Rightarrow 3m\neq-6$

$\Rightarrow\boxed{m\neq-2}$

شرط داشتن بیشمار جواب : $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}\Rightarrow\dfrac{m}{2}=\dfrac{m-3}{5}=\dfrac{-2}{2}$

$\Rightarrow\begin{cases} 5m=2m-6\Rightarrow m=-2 \\ 2m-6=-10\Rightarrow m=-2 \end{cases}\xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{جواب}}\boxed{m=-2}$

شرط نداشتن جواب : $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

$\Rightarrow\dfrac{m}{2}=\dfrac{m-3}{5}\neq\dfrac{-2}{2}\Rightarrow\begin{cases} 5m=2m-6\Rightarrow m=-2 \\ 2m-6\neq-10\Rightarrow m\neq-2 \end{cases}\xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{جواب}}$ مقداری برای m وجود ندارد

مثال ۴ (ص ۲۹):

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در اینصورت اعداد حقیقی a و b و c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^2-5|A|+6=0$ برقرار باشد.

$$|A|^2-5|A|+6=0 \Rightarrow (|A|-2)(|A|-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} |A|=2 \Rightarrow ad-bc=2 \\ |A|=3 \Rightarrow ad-bc=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ad-bc=2 \\ ad-bc=3 \end{cases} \Rightarrow \text{دترمینان ماتریس ضرایب} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

دستگاه یا جواب ندارد یا بیشمار جواب دارد

اگر $a=b=2$ و $c=3$ و $d=4$ در اینصورت: $|A|=ad-bc=2\times4-2\times3=2$

پس مسئله بیشمار جواب دارد.

«مطالب خارج از کتاب»

۱) با استفاده از ویژگی های دترمینان و بدون بسط ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = (a+4)(a-2)^2$$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ستون اول اضافه می کنیم}]{\text{یک برابر ستون دوم و ستون سوم را به}} \begin{vmatrix} a+4 & 2 & 2 \\ a+4 & a & 2 \\ a+4 & 2 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سطر سوم اضافه می کنیم}]{\text{(-1) برابر سطر اول را به سطر دوم و}} \begin{vmatrix} a+4 & 2 & 2 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+4)(a-2)(a-2)=(a+4)(a-2)^2$$

---

۲) با استفاده از ویژگی های دترمینان و بدون بسط ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{را به ستون اول اضافه می کنیم}]{\text{یک برابر ستون دوم و ستون سوم}} \begin{vmatrix} 1+x+y+z & y & z \\ 1+x+y+z & 1+y & z \\ 1+x+y+z & y & 1+z \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{دوم و سوم اضافه می کنیم}]{\text{(-1) برابر سطر اول را به سطر}} \begin{vmatrix} 1+x+y+z & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(1+x+y+z)(1)(1)=1+x+y+z$$

۳) در صورتیکه $x+y+z=0$ با استفاده از ویژگی های دترمینان و بدون بسط ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a+x & y & z \\ x & a+y & z \\ x & y & a+z \end{vmatrix} = a^3$$

$$\begin{vmatrix} a+x & y & z \\ x & a+y & z \\ x & y & a+z \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{اضافه می کنیم}]{\text{یک برابر ستون دوم و سوم را به ستون اول}} \begin{vmatrix} \overset{0}{\overbrace{x+y+z}}+a & y & z \\ x+y+z+a & a+y & z \\ x+y+z+a & y & a+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & y & z \\ a & a+y & z \\ a & y & a+z \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر سوم اضافه می کنیم}]{\text{(-1) برابر سطر اول را به سطر دوم و}} \begin{vmatrix} a & y & z \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \times a \times a = a^3$$

۴) با استفاده از ویژگی های دترمینان و بدون بسط ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 104 & 105 & 106 \\ 107 & 108 & 109 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 104 & 105 & 106 \\ 107 & 108 & 109 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{دوم و سوم اضافه می کنیم}]{\text{قرینه سطر اول را به سطرهای}} \begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سطر سوم اضافه می کنیم}]{\text{قرینه سطر دوم را به}} \begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

(تمرینات صفحه ۳۰ کتاب درسی)

۱) اگر $A=[1 \quad 2 \quad -3]$ و $B=\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix}$ در اینصورت $|AB|$ و $|BA|$ را بدست آورید.

$$AB=[1 \quad 2 \quad -3]\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix}=[-2-2-9]=[-13] \Rightarrow |AB|=-13$$

$$BA=\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix}[1 \quad 2 \quad -3]=\begin{bmatrix}-2&-4&6\\-1&-2&3\\3&6&-9\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |BA|=\begin{vmatrix}-2&-4&6\\-1&-2&3\\3&6&-9\end{vmatrix}\begin{matrix}-2&-4\\-1&-2\\3&6\end{matrix}=(-36-36-36)-(-36-36-36)=0$$

۲) اگر $A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-3&0\\0&0&-5\end{bmatrix}$ در اینصورت $|A^2|$ را بدست آورید.

$$A^2=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-3&0\\0&0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-3&0\\0&0&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&9&0\\0&0&25\end{bmatrix}\Rightarrow |A^2|=4\times9\times25=180$$

۳) اگر $A=\begin{bmatrix}5|A| & |A|\\5 & 4|A|^2\end{bmatrix}$ در اینصورت حاصل $(|A|^3-2)$ را بیابید.

$$|A|=(5|A|\times4|A|^2)-(5|A|)\Rightarrow |A|=20|A|^3-5|A|\Rightarrow 20|A|^3-6|A|=0$$

$$\Rightarrow |A|(20|A|^2-6)=0\Rightarrow\begin{cases}|A|=0\Rightarrow |A|^3-2=0^3-2=-2\\20|A|^2-6=0\Rightarrow |A|^2=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}\Rightarrow |A|=\sqrt{\frac{3}{10}}\Rightarrow |A|^3-2=\sqrt{\frac{27}{1000}}-2\end{cases}$$

۴) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}$ را بر حسب سطر سوم بیابید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$|A|=d(bc-bc)-e(ac-ac)+f(ab-ab)=0$$

نتیجه: اگر دو سطر ماتریسی برابر باشند دترمینان صفر است

۵) ماتریسی ۳×۳ چون A بیابید که $|A|=3$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=1\times3\times1=3$$

---

۶) اگر $A=\begin{bmatrix}4&3\\2&5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-2&-3\\5&-1\end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(2A^{-1}-3B^{-1})$ را بیابید.

$$A^{-1}=\frac{1}{20-6}\begin{bmatrix}5&-3\\-2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{14}&-\frac{3}{14}\\-\frac{2}{14}&\frac{4}{14}\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{2+15}\begin{bmatrix}-1&3\\-5&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{17}&\frac{3}{17}\\-\frac{5}{17}&-\frac{2}{17}\end{bmatrix}$$

$$2A^{-1}-3B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{10}{14}&-\frac{6}{14}\\-\frac{4}{14}&\frac{8}{14}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{3}{17}&\frac{9}{17}\\-\frac{15}{17}&-\frac{6}{17}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{212}{238}&-\frac{228}{238}\\\frac{142}{238}&\frac{220}{238}\end{bmatrix}$$

---

۷) اگر $A=\begin{bmatrix}5&2\\3&2\end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس A^{-1} را بدست آورده و $|A|$ را با $|A^{-1}|$ مقایسه کنید.

$$A^{-1}=\frac{1}{10-6}\begin{bmatrix}2&-2\\-3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{4}&-\frac{2}{4}\\-\frac{3}{4}&\frac{5}{4}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}|A^{-1}|=\frac{1}{4}\\|A|=4\end{cases}\Rightarrow |A|=\frac{1}{|A^{-1}|}$$

---

۸) الف) ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}ka&kb&kc\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید

و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و باهم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc}a&b&c&a&b\\d&e&f&d&e\\g&h&i&g&h\end{array}\right|=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

$$|B|=\left|\begin{array}{ccc|cc}ka&kb&kc&ka&kb\\d&e&f&d&e\\g&h&i&g&h\end{array}\right|=k(aei+bfg+cdh)-k(ceg+afh+bdi)$$

نتیجه: $|B|=k|A|$

اگر درایه‌های یک سطر یا ستون ماتریسی k برابر شود دترمینان k برابر می‌شود.

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$ بررسی کنید.

$$\left.\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \\ |B| &= \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = kad-kbc = k(ad-bc) = k|A| \end{aligned}\right\} \Rightarrow |B| = k|A|$$

---

۹) برای ماتریس ۲×۲ مانند A دو مقدار $|A|$ و $|kA|$ را باهم مقایسه کنید چه نتیجه ای می گیرید؟

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad-bc$$

$$|kA| = \begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k^2ad-k^2bc = k^2(ad-bc) = k^2|A|$$

اگر درایه‌های یک ماتریس مربع k برابر شوند مقدار دترمینان k^2 برابر می‌شود یا اگر عددی مانند k را از درایه‌های دترمینان فاکتور بگیریم عدد k به توان مرتبه دترمینان می رسد.

---

۱۰) اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A|=5$ در اینصورت حاصل $\left||A|\cdot A\right|$ را بیابید.

$$\left||A|\cdot A\right| = |5A| = 5^3|A| = 125\times 5 = 625$$

---

۱۱) دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از A^{-1} بیابید.

$$\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 4x+2y=10 \end{cases} \qquad A^{-1} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{26} & \frac{5}{26} \\ -\frac{4}{26} & \frac{3}{26} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{26} & \frac{5}{26} \\ -\frac{4}{26} & \frac{3}{26} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{26}+\frac{50}{26} \\ -\frac{4}{26}+\frac{30}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

۱۲) به ازای چه مقادیری از K، دستگاه $\begin{cases} Kx+3y=4 \\ x-2y=3 \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد؟

شرط وجود جواب: $|A| \neq 0$

$$A=\begin{bmatrix} K & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -2K-3 \neq 0 \Rightarrow -2K \neq 3 \Rightarrow K \neq \frac{3}{-2}$$

---

۱۳) روی وجود و عدم وجود و تعداد جوابهای هر یک از دستگاه های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از A^{-1} بیابید.

الف) $\begin{cases} 3x-5y=-1 \\ 2x+y=8 \end{cases}$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 13 \neq 0 \quad A^{-1}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

جواب دارد

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{13}+\frac{40}{13} \\ \frac{2}{13}+\frac{24}{13} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

ب) $\begin{cases} x+3y=5 \\ -2x-6y=1 \end{cases}$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=0$$

$$\frac{1}{-2}=\frac{3}{-6}\neq\frac{5}{1}$$

$\Rightarrow$ دستگاه جواب ندارد

ج) $\begin{cases} -2x+3y=2 \\ 4x-6y=-4 \end{cases}$

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=0$$

$$\frac{-2}{4}=\frac{3}{-6}=\frac{2}{-4}$$

$\Rightarrow$ دستگاه بیشمار جواب دارد

فصل ۲ : (آشنایی با مقاطع مخروطی)

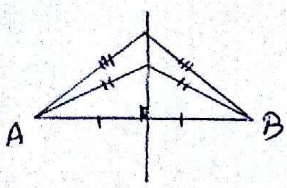
مکان هندسی :

مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا است که :

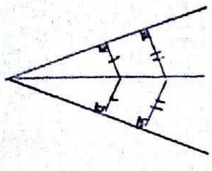
۱) دارای یک ویژگی مشترک باشند.

۲) هر نقطه که این ویژگی مشترک را داشته باشد عضو مجموعه نقاط مورد نظر باشد

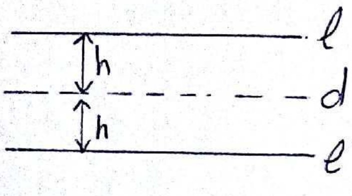
مکان‌های هندسی مهم و معروف :



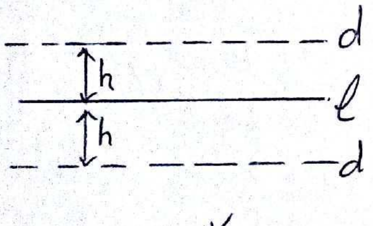
۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله‌اند عمود منصف پاره خط AB است.



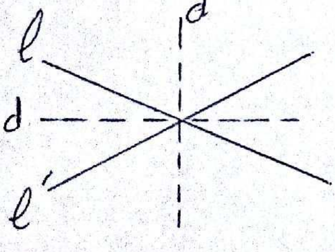
۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه مورد نظر است.



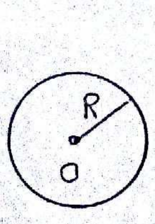
۳) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی به یک فاصله‌اند، خطی است موازی با دو خط و در وسط آنها.



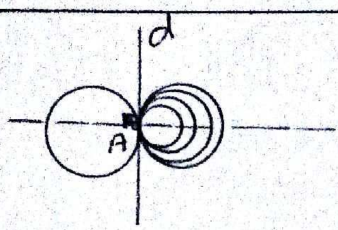
۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط l به فاصله ثابت h باشند دو خط d و d' به موازات l و در طرفین خط l است



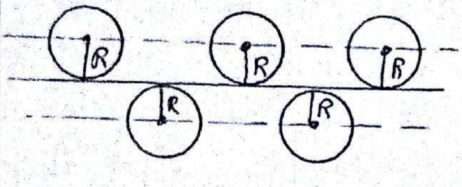
۵) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع l و l' به یک فاصله باشند نیمسازهای زوایای بین l و l' است که برهم عمودند.



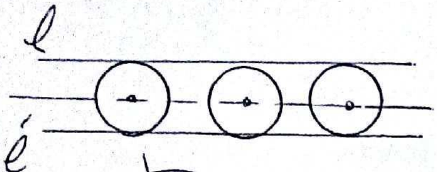
۶) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه معلوم O به فاصله R هستند دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است.



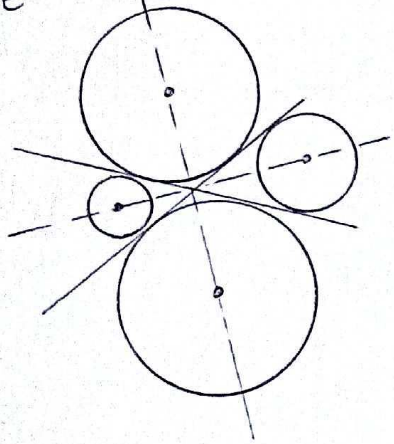
۷) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در نقطه A بر خط d مماس باشند خطی است که در نقطه A بر d عمود است.



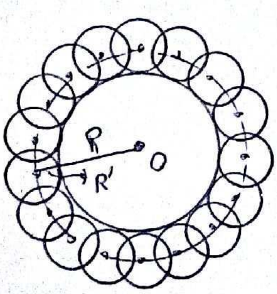
۸) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R که بر خط d مماس‌اند (روی خط d می‌غلتند) دو خط به موازات d و به فاصله R از آن است که از مراکز دایره‌ها می‌گذرد.



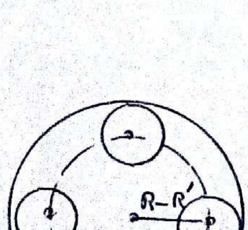
۹) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو خط موازی l و l' مماس‌اند خطی است موازی با l و l' و در وسط آنها که از مرکز دایره‌ها می‌گذرد



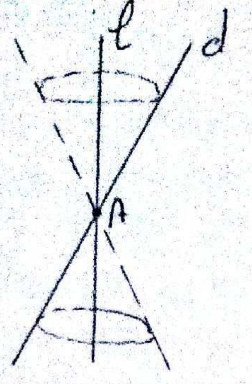
۱۰) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو خط l و l' مماس‌اند نیمسازهای زوایای بین دو خط l و l' است.



۱۱) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R' که روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع R و در خارج آن می‌غلتند (دو دایره مماس خارج‌اند) دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $R+R'$



۱۲) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R' که روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع R و در داخل آن می‌غلتند (دو دایره مماس داخل‌اند) دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $R-R'$

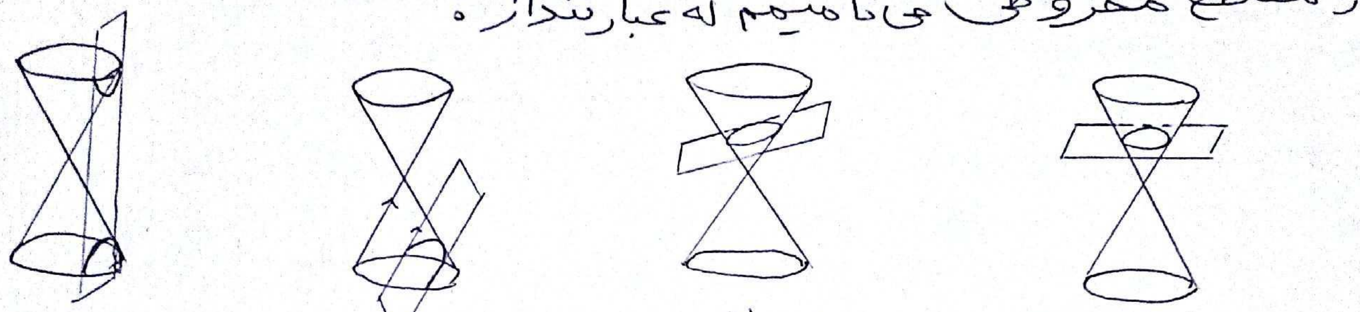


رویهٔ مخروطی:

اگر دو خط d و l در نقطه A متقاطع باشند سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی) می گویند. نقطه A را رأس، خط l را محور و خط d را مولد سطح مخروطی می نامند.

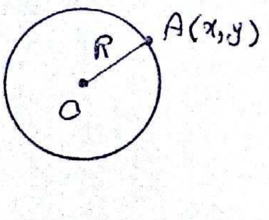
مقاطع مخروطی:

از برخورد یک صفحه با رویهٔ مخروطی اشکالی بدست می آید که آنها را مقاطع مخروطی می نامیم که عبارتند از:



۱) دایره ۲) بیضی ۳) سهمی ۴) هذلولی

دایره:



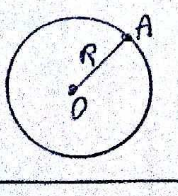
دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت به نام مرکز به فاصله ثابت (شعاع) هستند.

معادله استاندارد (کلاسیک) دایره:

معادله دایره‌ای که مرکزش نقطه $O\big|^{\alpha}_{\beta}$ و شعاعش برابر R باشد از فرمول زیر بدست می آید:

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2}$$

اثبات:



$O\big|^{\alpha}_{\beta}$ $\quad OA=R \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=R$

$A\big|^{x}_{y}$ $\quad \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

مثال ۱: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطه $O\begin{vmatrix}-2\\3\end{vmatrix}$ و شعاع آن برابر ۲ باشد.

$O\begin{vmatrix}-2 \rightsquigarrow \alpha\\3 \rightsquigarrow \beta\end{vmatrix}$ $\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

$R=2 \qquad \Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=4$

مثال ۲: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ بوده و $A(3,-1)$ نقطه‌ای از آن باشد.

$R=OA=\sqrt{(1-3)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=13$

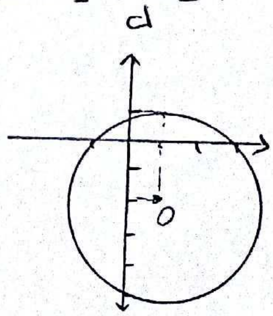
مثال ۳: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطه $O\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix}$ بوده و بر خط به معادله $-3x+4y=4$ مماس باشد، سپس آن را رسم کنید.

حل: می‌دانیم فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر شعاع دایره است.

$O\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix}$ $\qquad R=OH=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|-3(1)+4(-2)-4|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\dfrac{15}{5}=3$

خط مماس: $-3x+4y-4=0$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=9$



مثال ۴: مکان هندسی نقاطی مانند $M(x,y)$ را پیدا کنید که فاصله آنها از نقطه $A\begin{vmatrix}2\\4\end{vmatrix}$، $\sqrt{2}$ برابر فاصله آنها از نقطه $B\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ باشد.

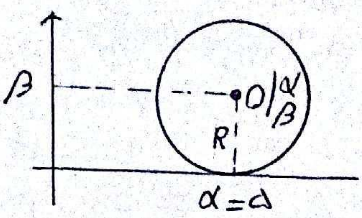
$AM=\sqrt{2}\,BM \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=2\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right] \Rightarrow x^2+y^2=10 \Rightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=(\sqrt{10})^2$

مکان مطلوب، دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و به شعاع $\sqrt{10}$ است.

مثال ۵) معادله دایره ای رابنویسید که مرکز آن روی خط $x=y+2$ بوده و در نقطه‌ای به طول ۵ بر محور طولها مماس باشد (هماهنگ ۸۶ - دی ماه)

$O\left|\begin{array}{l}\alpha=5\\ \beta=R\end{array}\right.$ $\quad O\in x=y+2 \Rightarrow 5=R+2 \Rightarrow \boxed{R=3}$



$O\left|\begin{array}{l}5\\ 3\end{array}\right.$, $R=3 \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

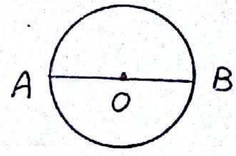
$\Rightarrow (x-5)^2+(y-3)^2=9$

مثال ۶) معادله دایره‌ای رابنویسید که نقاط $A\left|\begin{array}{l}1\\ -1\end{array}\right.$ و $B\left|\begin{array}{l}3\\ 3\end{array}\right.$ دو سر قطری از دایره باشند.

وسط AB $O\left|\begin{array}{l}\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+3}{2}=2\\ \frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-1+3}{2}=1\end{array}\right. \Rightarrow O\left|\begin{array}{l}2\\ 1\end{array}\right.$

$R=OA=\sqrt{(2-1)^2+(1+1)^2}$

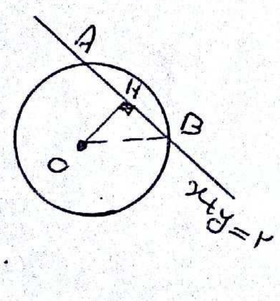
$\Rightarrow \boxed{R=\sqrt{5}}$



$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=5$

مثال ۷) معادله دایره‌ای رابنویسید که $O\left|\begin{array}{l}0\\ 1\end{array}\right.$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.



حل: می دانیم عمودی که از مرکز دایره بر وتر آن رسم می شود، آن وتر را نصف می کند:

$AB=2\sqrt{2} \Rightarrow BH=\sqrt{2}$

$OH=\frac{|0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad OB^2=OH^2+BH^2 \Rightarrow R^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2=\frac{5}{2}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=\frac{5}{2}$

مثال ۸) معادله دایره‌ای رابنویسید که از دو نقطه $A(1,-2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و مرکزش روی خط $y=2x$ باشد.

$O\in y=2x \Rightarrow O\left|\begin{array}{l}\alpha\\ 2\alpha\end{array}\right.$ $\qquad OA=OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha-1)^2+(2\alpha+2)^2}=\sqrt{(\alpha-3)^2+(2\alpha)^2}$

$\Rightarrow \alpha^2-2\alpha+1+4\alpha^2+8\alpha+4=\alpha^2-6\alpha+9+4\alpha^2 \Rightarrow 6\alpha+5=-6\alpha+9 \Rightarrow 12\alpha=4$

$\Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{1}{3}} \Rightarrow O\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ $\qquad R=OA=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{2}{3}+2\right)^2}=\sqrt{\frac{68}{9}}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{68}{9}$

معادله گسترده دایره (معادله ضمنی):

اگر معادله استاندارد دایره را باز کنیم معادله ضمنی یا گسترده دایره بصورت زیر خواهد بود:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

که در آن: $\text{مختصات مرکز} = O = \left(-\frac{a}{2} , -\frac{b}{2}\right)$ و $\text{شعاع} = R = \sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}$

مثال) مرکز و شعاع دایره $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ را بدست آورید.

$a=-4$
$b=-4$
$c=7$

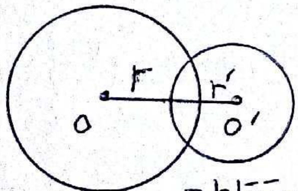
$$O\left|\begin{array}{l} -\frac{a}{2} = -\frac{-4}{2} = 2 \\ -\frac{b}{2} = -\frac{-4}{2} = 2 \end{array}\right.$$

$$R=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}} = \sqrt{\frac{(-4)^2+(-4)^2-4(7)}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

یادآوری (هندسه ۲):

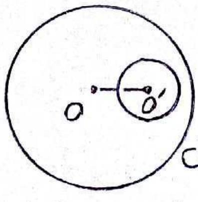
$\text{فاصله مراکز دو دایره} = \text{خط المرکزین} = OO' = d$

وضعیت دو دایره نسبت بهم:



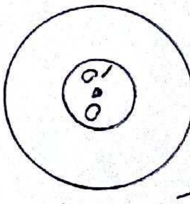
متقاطع

$r-r'<d<r+r'$



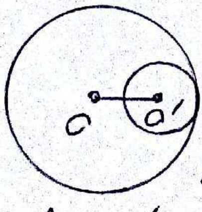
متداخل

$d<r-r'$



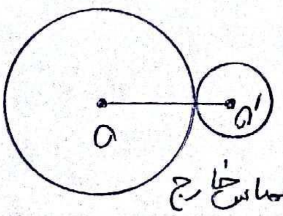
هم مرکز

$d=0$



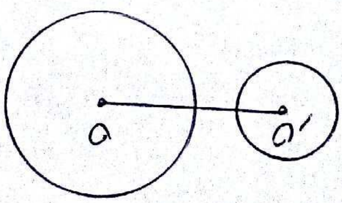
مماس داخل

$d=r-r'$



مماس خارج

$d=r+r'$



متخارج

$d>r+r'$

مثال) وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت بهم مشخص کنید:

الف) $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ و $x^2+y^2-10x-14y+73=0$

$O\left(-\frac{a}{2} , -\frac{b}{2}\right)=(2,3)$ $\quad r=\sqrt{\frac{(-4)^2+(-6)^2-4(-3)}{4}}=\sqrt{\frac{64}{4}}=\sqrt{16}=4$

$O'=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(5,7)$ $\qquad$ $r'=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\sqrt{\frac{(-10)^2+(-14)^2-4(73)}{4}}=\sqrt{1}=1$

$d=OO'=\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ $\qquad$ $\begin{cases} d=5 \\ r+r'=4+1=5 \end{cases} \Rightarrow d=r+r' \Rightarrow$ دو دایره مماس مشترک خارجی اند

ب) $x^2+y^2=9$ و $x^2+y^2-2x+2y+1=0$

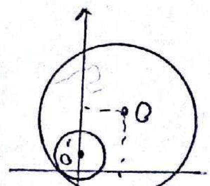
$O(0,0)\ ,\ r=3$ $\qquad$ $O'(1,-1)$ $\qquad$ $r'=\sqrt{\frac{(-2)^2+(2)^2-4(1)}{4}}=1$

$d=OO'=\sqrt{(1-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}$ $\qquad$ $\begin{cases} d=\sqrt{2} \\ r+r'=3+1=4 \\ r-r'=3-1=2 \end{cases}$ $\quad d<r-r' \Rightarrow$ دو دایره متداخل

مثال) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ بوده و با دایره $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس داخل باشد.

$O'(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(2,3)$ $\qquad$ $r'=\sqrt{\frac{(-4)^2+(-6)^2-4(-3)}{4}}=\sqrt{\frac{64}{4}}=\sqrt{16}=4$

$d=OO'=\sqrt{(0-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$



$d=|r-r'| \Rightarrow |r-4|=2\sqrt{2} \Rightarrow r-4=\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow r=\pm 2\sqrt{2}+4$

$\Rightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=(4\pm 2\sqrt{2})^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2y-23-16\sqrt{2}=0 \\ x^2+y^2-2y-23+16\sqrt{2}=0 \end{cases}$

چون مرکز دو دایره می‌تواند درون دایره دوم قرار داشته باشد مسئله ۲ جواب دارد

مثال) وضعیت خط به معادله $x+y=4$ و دایره $x^2+y^2-2y-3=0$ را تعیین کنید

فاصله مرکز دایره تا خط را پیدا می‌کنیم

$O\begin{cases} -\frac{a}{2}=-\frac{-2}{2}=1 \\ -\frac{b}{2}=-\frac{0}{2}=0 \end{cases}$ $\qquad$ $R=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\sqrt{\frac{(-2)^2+0^2-4(-3)}{4}}=\sqrt{\frac{16}{4}}=\sqrt{4}=2$

$OH=\frac{|1+0-4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $OH>r \Rightarrow$ خط خارج دایره است و نقطه برخورد ندارند.

شرط دایره بودن معادله گسترده:

برای اینکه معادله گسترده $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله یک دایره باشد باید:

۱) ضریب x^2 و ضریب y^2 برابر باشند (در موقع استفاده از فرمولهای مرکز و شعاع در معادله گسترده ضرایب x^2 و y^2 برابر یک باشد)

۲) $a^2+b^2-4c>0$ (زیر رادیکال باید مثبت باشد).

مثال) در تساوی $mx^2+5y^2+20x-10y+n+1=0$ مقادیر m و n را چنان بیابید که معادله دایره باشد:

ضرایب x^2 و y^2 باید برابر باشند $\Rightarrow \boxed{m=5} \Rightarrow 5x^2+5y^2+20x-10y+n+1=0$

$$\xrightarrow{\div 5} x^2+y^2+4x-2y+\frac{n+1}{5}=0$$

$$a^2+b^2-4c>0 \Rightarrow 16+4-4\left(\frac{n+1}{5}\right)>0 \Rightarrow 20>4\left(\frac{n+1}{5}\right) \Rightarrow 5>\frac{n+1}{5}$$

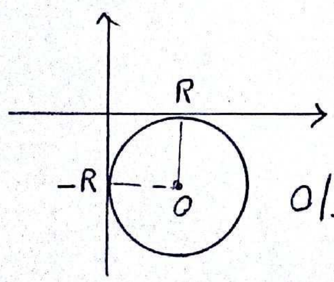
$$\Rightarrow 25>n+1 \Rightarrow \boxed{n<24}$$

(کنکور ریاضی ۹۵)

دو دایره گذرا بر نقطه $(2,-9)$ بر هر دو محورهای مختصات مماس هستند. شعاع دایره بزرگتر کدام است؟

۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۱۷
۴) ۱۹

حل) گزینه (۳) نقطه $(2,-9)$ در ناحیه چهارم است پس دو دایره در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس اند:



$O\left|\begin{smallmatrix}R\\-R\end{smallmatrix}\right.$

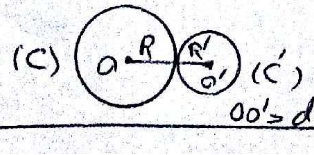
$$(x-R)^2+(y+R)^2=R^2 \Rightarrow (2,-9)\in C$$

$$\Rightarrow (2-R)^2+(-9+R)^2=R^2 \Rightarrow R^2-22R+85=0$$

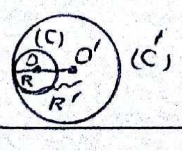
$$\Rightarrow (R-17)(R-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} R=5 & \text{شعاع دایره کوچک} \\ R=17 & \text{شعاع دایره بزرگ} \end{cases}$$

مثال) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش $O'(5,7)$ بوده و بر دایره $C: x^2+y^2-4x-6y+4=0$ مماس باشد:

حل: دایره مورد نظر را $C'(O',R')$ در نظر می‌گیریم دو حالت داریم:



$OO'=d=R+R'$



$OO'=d=R'-R$

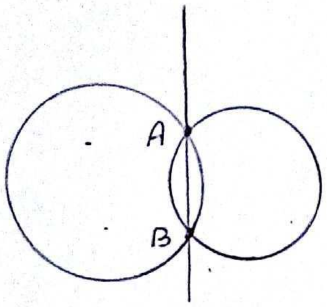
$C: x^2+y^2-4x-6y+4=0 \Rightarrow O \left| \begin{array}{l} -\frac{a}{2}=2 \\ -\frac{b}{2}=3 \end{array} \right. \qquad R=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=3$

$d=OO'=\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$d=R'+R \Rightarrow 5=R'+3 \Rightarrow R'=2 \Rightarrow C': (x-5)^2+(y-7)^2=4$

$d=R'-R \Rightarrow 5=R'-3 \Rightarrow R'=8 \Rightarrow C': (x-5)^2+(y-7)^2=64$

وتر مشترک دو دایره:



اگر دو دایره همدیگر را در دو نقطه A و B قطع کنند به پاره خط AB وتر مشترک دو دایره می گوییم. برای بدست آوردن معادله وتر مشترک، کافی است معادله دو دایره را از هم کم کنیم (زیرا مختصات A و B در معادله دو دایره صدق می کنند پس در تفاضل آنها هم صدق می کنند)

مثال) معادله وتر مشترک دو دایره $C: x^2+y^2-2x+y+1=0$ و $C': x^2+y^2-y-1=0$ را بنویسید و سپس مختصات محل تلاقی دو دایره و طول وتر مشترک را بیابید.

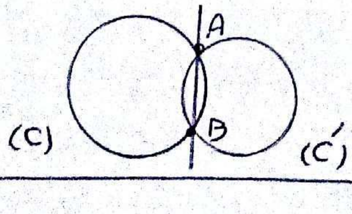
$C-C'=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x+y+1-x^2-y^2+y+1=0 \Rightarrow -2x+2y+2=0$

$\xRightarrow{\div(-2)} \boxed{x-y-1=0}$ معادله وتر مشترک

$$\begin{cases} x-y-1=0 \Rightarrow y=x-1 \\ C': x^2+y^2-y-1=0 \Rightarrow x^2+(x-1)^2-(x-1)-1=0 \Rightarrow x^2+x^2-2x+1-x+1-1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2-3x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1-1=0 \Rightarrow A(1,0) \\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2} \Rightarrow B(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) \end{cases}$$

$AB=\sqrt{(1-\frac{1}{2})^2+(0+\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ طول وتر مشترک



(هماهنگ - شهریور ۹۹)

معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(3,1)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله $4x+3y+5=0$ مماس باشد (۱٫۲۵ نمره)

$$R=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|4(3)+3(1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{20}{5}=4$$

$O\begin{vmatrix}3\\1\end{vmatrix}$ $\quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=16$

$R=4$

(هماهنگ شهریور ۹۹)

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ باشد و با دایره به معادله $x^2+y^2-8x+4y+16=0$ مماس داخل باشد (۲ نمره)

$$O'\begin{cases}-\frac{a}{2}=-\frac{-8}{2}=4\\ -\frac{b}{2}=-\frac{4}{2}=-2\end{cases} \Rightarrow O'\begin{vmatrix}4\\-2\end{vmatrix}$$

$$r'=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\sqrt{\frac{(-8)^2+4^2-4(16)}{4}} \Rightarrow \boxed{r'=2}$$

$$OO'=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

$$|r-r'|=OO' \Rightarrow |r-2|=5 \Rightarrow \begin{cases}r-2=5 \Rightarrow \boxed{r=7} \text{ ق ق}\\ r-2=-5 \Rightarrow r=-3 \text{ غ ق ق}\end{cases}$$

$$O\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix},\ r'=2 \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(r')^2$$

$$\Rightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=2^2$$

$$\Rightarrow x^2+(y-1)^2=4$$

(تمرینات صفحه ۴۶ کتاب درسی)

۱) معادله دایره‌ای را بنویسید که:

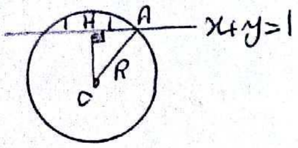
الف) $O(1,1)$ مرکز آن و $A(3,2)$ نقطه‌ای از آن باشد.

$OA=R=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$ $\quad (x-1)^2+(y-1)^2=5$

ب) $O(2,1)$ مرکز آن بوده و بر خط $3x+4y=0$ مماس باشد.

$R=OH=\frac{|3(2)+4(1)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$ $\quad (x-2)^2+(y-1)^2=4$

پ) $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=1$ وتری به طول ۲ ایجاد کند:



$OH=\frac{|(-1)+(-1)-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$ $\quad R^2=1^2+(\frac{3}{\sqrt{2}})^2=1+\frac{9}{2}=\frac{11}{2}$

$(x+1)^2+(y+1)^2=\frac{11}{2}$

ت) خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد

حل: محل برخورد قطرها همان مرکز دایره است

$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=2 \\ y=-1 \end{matrix} \Rightarrow O\Big|_{-1}^{2}$ $\quad OH=R=\frac{|4(2)+3(-1)-6|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{1}{5}$ $\quad (x-2)^2+(y+1)^2=\frac{1}{25}$

ج) از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

$O\in y=2x-1 \Rightarrow O\Big|_{2x-1}^{x}$ $\quad OA=OB \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(2x-1-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(2x-1-0)^2}$

$\Rightarrow x^2-2x+1+4x^2-12x+9=x^2-6x+9+4x^2-4x+1 \Rightarrow x=0 \Rightarrow O\Big|_{-1}^{0}$

$R=OA=\sqrt{(1-0)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{10}$ $\quad (x-0)^2+(y+1)^2=10$

۲) حدود a را طوری بدست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادله یک دایره باشد.

$\underbrace{x^2-3x+\frac{9}{4}}-\frac{9}{4}+\underbrace{y^2+5y+\frac{25}{4}}-\frac{25}{4}+a=0 \Rightarrow (x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{5}{2})^2=\frac{34}{4}-a$

$\frac{34}{2}-a\geq 0 \Rightarrow \frac{34}{4}\geq a$

۳) وضعیت هر یک از نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,-2)$ و $C(2,3)$ و $D(4,-1)$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ تعیین کنید

$O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(1,-2)$ $\quad R=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\sqrt{10}$

$OA=\sqrt{(-1-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{5}<\sqrt{10}$ نقطه A داخل دایره $\quad OB=\sqrt{(1-1)^2+(-2+2)^2}=0<\sqrt{10}$ نقطه B مرکز دایره

به همین ترتیب $OC=\sqrt{26}>\sqrt{10}$ خارج دایره و $OD=\sqrt{10}=\sqrt{10}$ روی دایره است.

۴) وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت بهم مشخص کنید:

الف) $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2-2x=4$

$O(0,0)$ و $R=2$ $\qquad$ $O'(1,0)$ و $R'=\sqrt{5}$

$OO'=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2}=1$ $\qquad$ $R-R'<OO'<R+R' \Rightarrow$ دو دایره در دو نقطه متقاطع

ب) $x^2+(y-1)^2=1$ و $(x-1)^2+y^2=1$

$O(0,1)$ ، $R=1$ $\qquad$ $O'(1,0)$ ، $R'=1$

$OO'=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$ $\qquad$ $R-R'<OO'<R+R' \Rightarrow$ دو دایره در دو نقطه متقاطع

ج) $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$

$O(0,0)$ ، $R=1$ $\qquad$ $O'(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2})$ ، $R'=2$

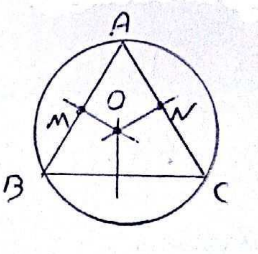
$OO'=\sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{2}-0)^2+(\frac{3\sqrt{2}}{2}-0)^2}=\sqrt{\frac{9}{2}+\frac{9}{2}}=3=R+R' \Rightarrow$ دو دایره مماس خارج

به همین ترتیب قسمت (د) دو دایره متخارج اند.

---

۵) نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث $\hat{ABC}$ هستند. معادله دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید.

حل: مرکز دایره محیطی مثلث محل برخورد عمود منصف اضلاع مثلث است.



وسط AB : $M\left|\begin{array}{l}\frac{-1+1}{2}=0\\ \frac{-1+1}{2}=0\end{array}\right.$ $\qquad$ AB شیب $=\frac{-1-1}{-1-1}=1 \xrightarrow{\text{قرینه}} -1 \xrightarrow{\text{معکوس}} -1$

$m_{\text{عمود منصف } AB}=-1 \Rightarrow y-0=-1(x-0) \Rightarrow \boxed{y=-x}$

وسط AC : $N\left|\begin{array}{l}\frac{-1+1}{2}=0\\ \frac{-1-3}{2}=-2\end{array}\right.$ $\qquad$ AC شیب $=\frac{-1-(-3)}{-1-1}=\frac{2}{-2}=-1 \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} 1 \Rightarrow m_{\text{عمود منصف } AC}=1$

$\Rightarrow y-(-2)=1(x-0) \Rightarrow \boxed{y=x-2}$

$\begin{cases} y=x-2\\ y=-x\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}x=1\\ y=-1\end{array} \Rightarrow O\left|\begin{array}{l}1\\ -1\end{array}\right.$ $\quad R=OA=\sqrt{(-1-1)^2+(-1-(-1))^2}=2 \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4$

---

۶) وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت بهم مشخص کنید:

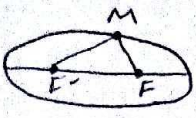
الف) $3x+4y=0$ ، $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

$O(2,2)$ و $R=1$ $\qquad$ فاصله O تا خط $=OH=\frac{|3(2)+4(2)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{14}{5}>R \Rightarrow$ خط دایره را قطع نمی‌کند

قسمت (ب) و (ج) مانند الف حل می‌شود.

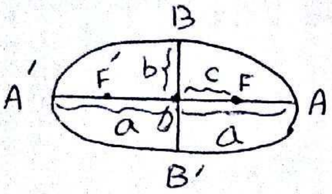
بیضی:

بیضی مکان هندسی نقاطی است مانند M که مجموع فواصل نقطه M از دو نقطه ثابت F و F' داخل بیضی مقدار ثابت $2a$ است که این مقدار ثابت را قطر بزرگ بیضی می نامند.



$MF+MF'=2a=$ طول قطر بزرگ

اجزاء بیضی:



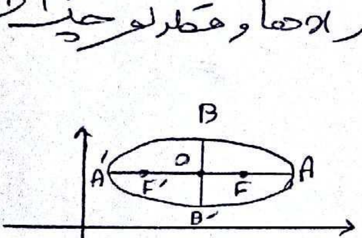
۱) دو نقطه F و F' داخل بیضی را کانونهای بیضی می نامند و فاصله آنها را فاصله کانونی نامیده و با $FF'=2c$ نشان می دهیم.

۲) $AA'=2a$ را قطر بزرگ بیضی و $BB'=2b$ را قطر کوچک بیضی نامیده که همان دو محور تقارن بیضی است و محل برخورد آنها یعنی O را مرکز بیضی می نامند که همان مرکز تقارن بیضی است.

۳) به مقدار ثابت $e=\frac{c}{a}$ که $0<e<1$ است خروج از مرکز بیضی می گوئیم که همواره مثبت است. اگر e به عدد 1 نزدیک شود بیضی کشیده تر و هر قدر e به صفر نزدیکتر شود بیضی به دایره نزدیکتر می شود.

معادلات بیضی:

۱) بیضی افقی: اگر قطر بزرگ بیضی هم راستا با محور xها و قطر کوچک آن هم راستا با محور yها باشد بیضی را افقی می نامند.



که دارای ویژگی های زیر است:

$AA'=2a=$ قطر بزرگ

$BB'=2b=$ قطر کوچک

$FF'=2c=$ فاصله کانونی

$O|^{\alpha}_{\beta}=$ مرکز بیضی

$a>b>0$

$a>c$

$c^2=a^2-b^2$: رابطه بین a و b و c

$e=\frac{c}{a}=$ خروج از مرکز بیضی

A و A' را رئوس کانونی (در امتداد کانونها) هستند و B و B' را رئوس غیر کانونی (در امتداد کانونها نیستند) می نامند.

$A|^{\alpha+a}_{\beta}$, $A'|^{\alpha-a}_{\beta}$, $B(\alpha,\beta+b)$, $B'(\alpha,\beta-b)$

مختصات کانونها: $F|^{\alpha+c}_{\beta}$ ، $F'|^{\alpha-c}_{\beta}$

$AB=\sqrt{a^2+b^2}$ فاصله یک راس کانونی از یک راس غیر کانونی

معادله بیضی افقی: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ مخرج x بزرگتر باشد افقی

* در بیضی افقی A و A' و F و F' با O هم عرض و B و B' با O هم طول هستند.

مثال ۱: طول قطرها، مختصات رئوس و کانونها و خروج از مرکز بیضی به معادله $9x^2+16y^2=144$ را بدست آورید.

$$9x^2+16y^2=144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144}+\frac{16y^2}{144}=\frac{144}{144} \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{(x-0)^2}{16}+\frac{(y-0)^2}{9}=1$$

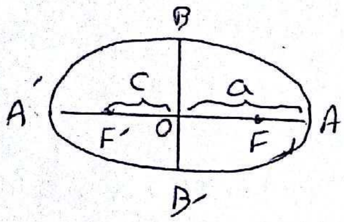
بیضی افقی است

مرکز $O\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ $a^2=16 \Rightarrow a=\pm 4 \Rightarrow A\left|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right.$ $A'\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right.$ ، $AA'=2a=2\times 4=8$

$b^2=9 \Rightarrow b=\pm 3 \Rightarrow B\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.$ و $B'\left|\begin{matrix}0\\-3\end{matrix}\right.$ ، $BB'=2b=2(3)=6$

$c^2=a^2-b^2=16-9=7 \Rightarrow c=\pm\sqrt{7}$ $F\left|\begin{matrix}\sqrt{7}\\0\end{matrix}\right.$ و $F'\left|\begin{matrix}-\sqrt{7}\\0\end{matrix}\right.$ $FF'=2c=2\sqrt{7}$

مثال ۲: فاصله یک راس کانونی بیضی از مرکز و رأس ناکانونی به ترتیب ۲ و $\sqrt{5}$ است. بیشترین فاصله نقطه M روی بیضی از یکی از کانونهای بیضی چقدر است؟



O تا A فاصله $= a = 2$

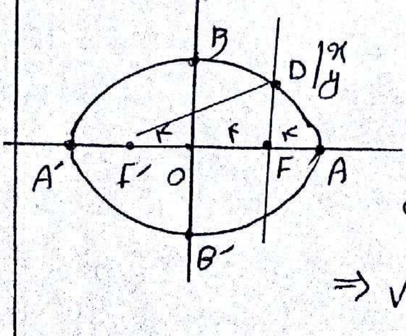
$$AB=\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{2^2+b^2}=\sqrt{5} \Rightarrow 4+b^2=5$$

$b^2=1 \Rightarrow \boxed{b=1}$ $c^2=a^2-b^2=2^2-1^2=3 \Rightarrow c=\sqrt{3}$

بیشترین فاصله یکی از نقاط بیضی از کانون فاصله A تا F' تا A' تا F است

$$AF'=A'F=a+c=2+\sqrt{3}$$

مثال ۳: مرکز بیضی مقابل بر مبدا مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای مختصات منطبق هستند و فاصله F از هردو نقطه O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطه F بر AA' عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطه D قطع کرده باشد مختصات D را بدست آورید.



$DF'^2=y^2+8^2$ $OA=a=8 \Rightarrow AA'=2a=16$

طبق تعریف بیضی: $DF+DF'=2a=16 \Rightarrow y+\sqrt{y^2+64}=16$

$$\Rightarrow \sqrt{y^2+64}=16-y \Rightarrow y^2+64=256-32y+y^2 \Rightarrow 32y=192 \Rightarrow \boxed{y=6}$$

$x=OF=4 \Rightarrow D\left|\begin{matrix}x=4\\y=6\end{matrix}\right.$

مثال ۴: نقاط $F\begin{vmatrix}-8\\4\end{vmatrix}$ و $F'\begin{vmatrix}2\\4\end{vmatrix}$ کانونهای یک بیضی اند. اگر بزرگترین قطر بیضی برابر ۲۶ باشد مختصات دوسر قطر بزرگ، دوسر قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

$$F\begin{vmatrix}-8\\4\end{vmatrix},\ F'\begin{vmatrix}2\\4\end{vmatrix} \Rightarrow O\begin{vmatrix}\frac{-8+2}{2}=-3=\alpha\\ \frac{4+4}{2}=4=\beta\end{vmatrix} \Rightarrow$$ عرض مرکز با عرض کانونها برابر است $\Rightarrow$ بیضی افقی

$$FF'=\sqrt{(-8-2)^2+(4-4)^2}=\sqrt{100}=10 \Rightarrow FF'=2c=10 \Rightarrow \boxed{c=5}$$

قطر بزرگ $=2a=26 \Rightarrow \boxed{a=13}$ $\quad c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 25=169-b^2 \Rightarrow b^2=144 \Rightarrow \boxed{b=12}$

دوسر قطر بزرگ: $A\begin{vmatrix}\alpha+a=-3+13=10\\ \beta=4\end{vmatrix}$ $\quad A'\begin{vmatrix}\alpha-a=-3-13=-16\\ \beta=4\end{vmatrix}$

دوسر قطر کوچک: $B\begin{vmatrix}\alpha=-3\\ \beta+b=4+12=16\end{vmatrix}$ $\quad B'\begin{vmatrix}\alpha=-3\\ \beta-b=4-12=-8\end{vmatrix}$

خروج از مرکز $=e=\frac{c}{a}=\frac{5}{13}$

مثال ۵: نقاط $B\begin{vmatrix}3\\7\end{vmatrix}$ و $B'\begin{vmatrix}3\\-1\end{vmatrix}$ دوسر قطر کوچک یک بیضی اند. اگر اندازه فاصله کانونی بیضی برابر ۶ باشد مختصات دوسر قطر بزرگ و مختصات کانونها و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

$$B\begin{vmatrix}3\\7\end{vmatrix},\ B'\begin{vmatrix}3\\-1\end{vmatrix} \Rightarrow O\begin{vmatrix}\frac{3+3}{2}=3\\ \frac{-1+7}{2}=3\end{vmatrix} \Rightarrow$$ مختصات مرکز با طول قطر کوچک برابر $\Rightarrow$ طول $\Rightarrow$ بیضی افقی

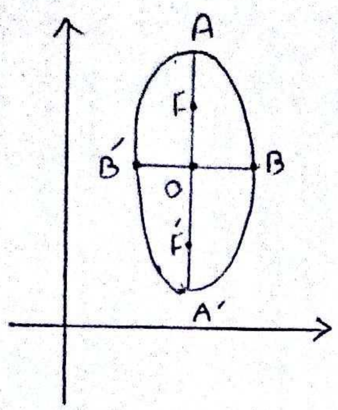
$$BB'=\sqrt{(3-3)^2+(7-(-1))^2}=\sqrt{64}=8 \Rightarrow BB'=2b=8 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

فاصله کانونی $=FF'=2c=6 \Rightarrow \boxed{c=3}$ ، $c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 9=a^2-16 \Rightarrow a^2=25$ $\boxed{a=5}$

دوسر قطر بزرگ: $A\begin{vmatrix}\alpha+a=8\\ \beta=3\end{vmatrix}$ $\quad A'\begin{vmatrix}\alpha-a=-2\\ \beta=3\end{vmatrix}$

کانونها: $F\begin{vmatrix}\alpha+c=6\\ \beta=3\end{vmatrix}$ $\quad F'\begin{vmatrix}\alpha-c=0\\ \beta=3\end{vmatrix}$

خروج از مرکز: $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$



۲) بیضی قائم: اگر قطر بزرگ بیضی هم راستا با محور yها و قطر کوچک آن هم راستا با محور xها باشد بیضی را قائم می نامند که دارای ویژگی های زیر است:

قطر بزرگ $= AA' = 2a$ قطر کوچک $= BB' = 2b$

فاصله کانونی $= FF' = 2c$ مرکز بیضی $= O\Big|^{\alpha}_{\beta}$ $a > b > 0$ ، $a > c$

رابطه بین a و b و c : $c^2 = a^2 - b^2$ خروج از مرکز بیضی $= e = \frac{c}{a}$

A و A' را رئوس کانونی (در امتداد کانونها هستند) و B و B' را رئوس غیر کانونی (در امتداد کانونها نیستند) می نامند:

$A\Big|^{\alpha}_{\beta+a}$ $A'\Big|^{\alpha}_{\beta-a}$ $B\Big|^{\alpha+b}_{\beta}$ $B'\Big|^{\alpha-b}_{\beta}$

مختصات کانونها : $\begin{cases} F\Big|^{\alpha}_{\beta+c} \\ F'\Big|^{\alpha}_{\beta-c} \end{cases}$

فاصله یک راس کانونی از یک راس غیر کانونی $= AB = \sqrt{a^2+b^2}$

معادله بیضی قائم : $\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1}$

مخرج y^2 بزرگتر باشد بیضی قائم

در بیضی قائم A و A' و O و F و F' هم طول و B و B' و O هم عرض هستند.

مثال) معادله یک بیضی بصورت $2x^2 + y^2 = 10$ است نوع بیضی را مشخص کرده سپس مختصات رئوس، کانونها، مرکز و اندازه قطرها را بیابید

$$2x^2 + y^2 = 10 \Rightarrow \frac{2x^2}{10} + \frac{y^2}{10} = \frac{10}{10} \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{10} = 1 \Rightarrow \frac{(x-0)^2}{5} + \frac{(y-0)^2}{10} = 1$$

بیضی قائم است (مخرج y^2 بزرگتر است)

$O\Big|^{0}_{0}$

$a^2 = 10 \Rightarrow a = \pm\sqrt{10} \Rightarrow A\Big|^{0}_{\sqrt{10}}$ $A'\Big|^{0}_{-\sqrt{10}}$ قطر بزرگ $= 2a = 2\sqrt{10}$

$b^2 = 5 \Rightarrow b = \pm\sqrt{5} \Rightarrow B\Big|^{\sqrt{5}}_{0}$ $B'\Big|^{-\sqrt{5}}_{0}$ قطر کوچک $= 2b = 2\sqrt{5}$

$c^2 = a^2 - b^2 = 10 - 5 = 5 \Rightarrow c = \pm\sqrt{5} \Rightarrow F\Big|^{0}_{\sqrt{5}}$ و $F'\Big|^{0}_{-\sqrt{5}}$

مثال ۲: نقاط $A(-3,4)$ و $A'(-3,-6)$ دو سر قطر بزرگ یک بیضی اند. اگر اندازه کوچکترین قطر برابر ۶ باشد مختصات دو سر قطر کوچک، کانونها و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

$$O\left|\begin{array}{l}\dfrac{-3-3}{2}=-3\sim\alpha\\[2mm] \dfrac{4+(-6)}{2}=-1\sim\beta\end{array}\right.$$
$\Rightarrow$ A و A' و O هم طول هستند $\Rightarrow$ بیضی قائم

$$AA'=2a\Rightarrow\sqrt{(-3-(-3))^2+(-6-4)^2}=2a\Rightarrow 10=2a\Rightarrow\boxed{a=5}$$

$$2b=6\Rightarrow\boxed{b=3}\qquad c^2=a^2-b^2=5^2-3^2=16\Rightarrow\boxed{c=4}$$

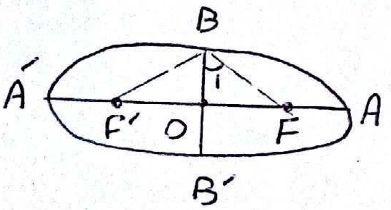
دو سر قطر کوچک: $\begin{cases}B\left|\begin{array}{l}\alpha+b=-3+3=0\\ \beta=-1\end{array}\right.\\[3mm] B'\left|\begin{array}{l}\alpha-b=-3-3=-6\\ \beta=-1\end{array}\right.\end{cases}$

کانونها: $\begin{cases}F\left|\begin{array}{l}\alpha=-3\\ \beta+c=-1+4=3\end{array}\right.\\[3mm] F'\left|\begin{array}{l}\alpha=-3\\ \beta-c=-1-4=-5\end{array}\right.\end{cases}$

خروج از مرکز $= e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$

(هماهنگ - دیماه ۹۷)

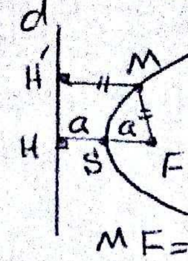
اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟



$$2a=2(2b)\Rightarrow a=2b$$

$$c^2=a^2-b^2=4b^2-b^2=3b^2\Rightarrow c=\sqrt{3}\,b$$

$$tg\,\hat{B}_1=\frac{OF}{OB}=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}b}{b}=\sqrt{3}\Rightarrow\hat{B}_1=60^\circ\Rightarrow F\hat{B}F'=2\times60=120^\circ$$



$MF = MH'$

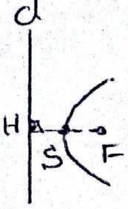
$SF = SH = a$

سهمی:

مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت مانند d و یک نقطه ثابت مانند F خارج از خط به یک فاصله باشند. نقطه ثابت F را کانون سهمی و خط ثابت d را خط هادی سهمی می نامند. هر نقطه دیگری هم روی سهمی در نظر بگیریم فاصله اش از F و خط هادی به یک اندازه است.

ویژگی های سهمی:

۱) سهمی سه جزء اصلی دارد:



F = کانون سهمی S = راس سهمی d = خط هادی سهمی

۲) فاصله راس سهمی تا کانون برابر است با فاصله راس سهمی تا خط هادی به عبارت دیگر راس سهمی وسط کانون و خط هادی قرار دارد.

$SH = SF$

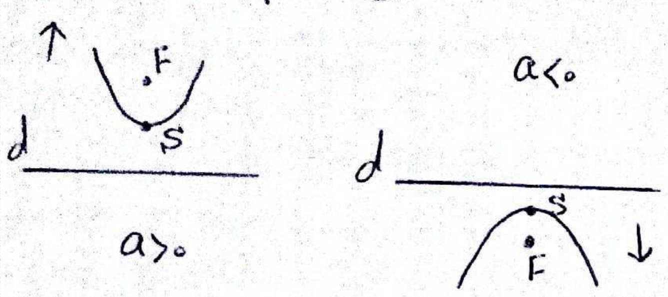
۳) فاصله راس سهمی تا کانون را فاصله کانونی سهمی نامیده با a نشان می دهیم a را پارامتر سهمی نیز می نامند.

$SF = SH = a$

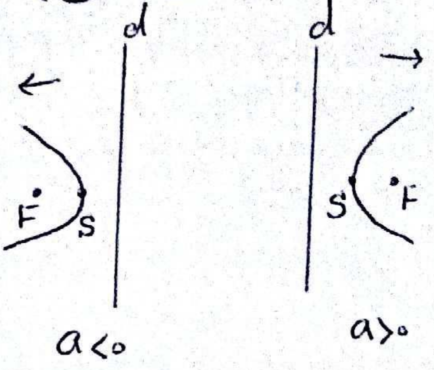
۴) کانون همواره در دهانه سهمی قرار دارد و خط هادی همواره پشت سهمی است و سهمی هرگز خط هادی را قطع نمی کند.

۵) اگر $a > 0$ باشد دهانه سهمی در جهت مثبت محورهای مختصات (راست یا بالا) باز می شود و اگر $a < 0$ باشد دهانه سهمی در جهت منفی محورهای مختصات (چپ یا پایین) باز می شود.

(سهمی قائم)



(سهمی افقی)



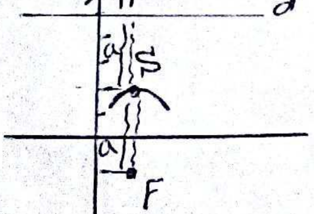
۶) اگر سهمی افقی باشد خط هادی با محور yها موازی است و معادله خط هادی بصورت $x=k$ است.

۷) اگر سهمی قائم باشد خط هادی با محور xها موازی است و معادله خط هادی بصورت $y=k$ است.

۸) امتداد SF محور تقارن یا محور کانونی سهمی است که بر خط هادی عمود است.

مثال) اگر $S(1,2)$ و $F(1,-1)$ به ترتیب راس و کانون یک سهمی باشند معادله خط تقارن سهمی را بنویسید.

حل: رأس و کانون را رسم می‌کنیم:



$$a=SF=\sqrt{(1-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{9}=\pm 3$$

چون دهانه سهمی رو به پایین است پس: $a=-3<0$

$SF=SH=3$

خط هادی پشت سهمی است.

$y=2+3 \Rightarrow \boxed{y=5}$

معادلات استاندارد (کلاسیک - صورت متعارف) سهمی:

۱) سهمی افقی باشد: $S\Big|{}^{h}_{k}$ راس سهمی و a پارامتر

$$\boxed{(y-k)^2=4a(x-h)}$$

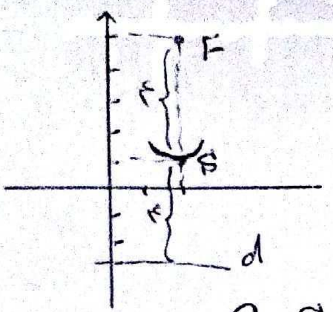
معادله سهمی — توان y برابر ۲ است.

۲) سهمی قائم باشد: $S\Big|{}^{h}_{k}$ راس سهمی و a پارامتر

$$\boxed{(x-h)^2=4a(y-k)}$$

توان x برابر ۲ است.

مثال ۱: معادله سهمی به راس $S\begin{vmatrix}2\\1\end{vmatrix}$ و کانون $F\begin{vmatrix}2\\5\end{vmatrix}$ را بیابید. و معادله خط هادی آن را نوشته نوع سهمی را مشخص کنید:



حل: راس و کانون را رسم می کنیم:

کانون در دهانه سهمی قرار دارد سهمی قائم و رو به بالا است پس $a>0$

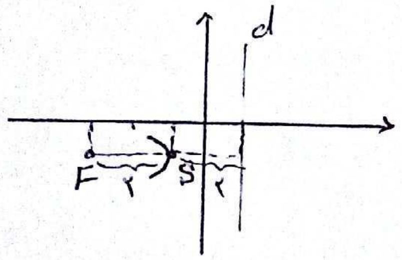
$$a=SF=\sqrt{(2-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{16}=\pm 4 \xrightarrow{a>0} \boxed{a=4}$$

$$(x-h)^2=4a(y-k)$$

معادله خط هادی: $y=-3$

معادله سهمی: $\Rightarrow \boxed{(x-2)^2=16(y-1)}$

مثال ۲: معادله سهمی به راس $S\begin{vmatrix}-1\\-1\end{vmatrix}$ و کانون $F\begin{vmatrix}-3\\-1\end{vmatrix}$ را بیابید و معادله خط هادی آن را نوشته نوع سهمی را مشخص کنید:



حل: راس و کانون را رسم می کنیم:

کانون در دهانه سهمی قرار دارد، سهمی افقی و رو به چپ است پس: $a<0$

$$a=SF=\sqrt{(-1-(-3))^2+(-1-(-1))^2}=\sqrt{4}=\pm 2 \xrightarrow{a<0} \boxed{a=-2}$$

معادله خط هادی: $\boxed{x=1}$

$$(y-k)^2=4a(x-h)$$

$$\Rightarrow (y-(-1))^2=4(-2)(x-(-1))$$

معادله سهمی: $\Rightarrow \boxed{(y+1)^2=-8(x+1)}$

تذکر مهم:

اگر در معادله استاندارد سهمی پرانتزها را حساب کنیم معادله گسترده (ضمنی) سهمی بدست می آید که به روش مربع کامل کردن قابل تبدیل به معادله استاندارد می شود.

مثال ۱: با استاندارد کردن سهمی به معادله $x^2+4y-6x+9=0$ مختصات رأس و پارامتر سهمی را تعیین کنید:

$$x^2+4y-6x+9=0 \Rightarrow x^2-6x+9=-4y \Rightarrow (x-3)^2=-4(y-0)$$

سهمی قائم دهانه رو به پایین

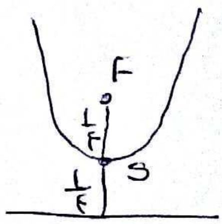
$$\Rightarrow S\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right. \quad , \quad 4a=-4 \Rightarrow a=-1$$

مثال ۲: معادله یک سهمی بصورت $y=x^2+3x+5$ داده شده است. آن را بصورت استاندارد (متعارف) تبدیل کرده و کانون، خط هادی و راس و محور سهمی را مشخص کنید.

$$x^2+3x+5=y \Rightarrow x^2+3x=y-5 \Rightarrow x^2+3x+\frac{9}{4}=y-5+\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=1\left(y-\frac{11}{4}\right) \Rightarrow$$ سهمی قائم، دهانه رو به بالا

$$S\left|\begin{matrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{11}{4}\end{matrix}\right. \qquad 4a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{4} \qquad F\left|\begin{matrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{11}{4}+\frac{1}{4}=3\end{matrix}\right.$$



خط هادی: $y=\frac{11}{4}-\frac{1}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

محور سهمی: $x=-\frac{3}{2}$

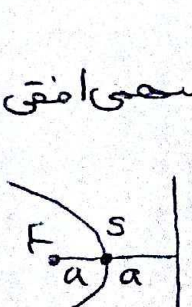
مثال ۳: معادله یک سهمی بصورت $y^2-2y+8x+9=0$ داده شده است آنرا بصورت استاندارد (متعارف) نوشته و کانون، خط هادی و مختصات راس و محور سهمی را مشخص کنید

$$y^2-2y=-8x-9 \Rightarrow y^2-2y+1=-8x-9+1 \Rightarrow (y-1)^2=-8(x+1)$$

$$S\left|\begin{matrix}-1\\+1\end{matrix}\right. \qquad 4a=-8 \Rightarrow a=-2$$ سهمی افقی، دهانه به سمت چپ

اندازه a = ۲

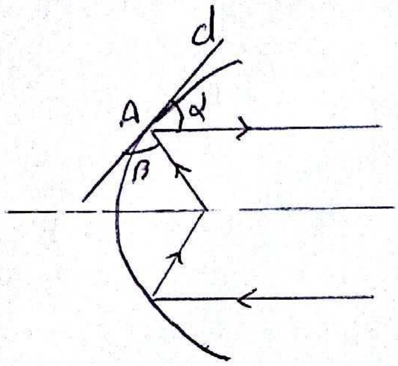
$$F\left|\begin{matrix}-1-2=-3\\+1\end{matrix}\right. \qquad y=1$$ محور تقارن



خط هادی: $x=-1+2=1$

ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها:

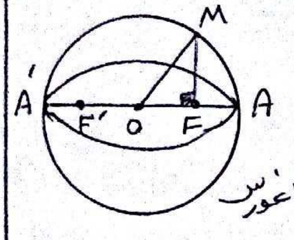
یکی از ویژگی‌های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی باز خواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت در واقع اگر خط d بر سهمی مماس و نقطه A نقطه تماس آن باشد زاویه‌های α و β برابرند



از این ویژگی در ساخت چراغ جلوی اتومبیل‌ها استفاده می‌شود.

(تمرینات مهم ص ۶۷ کتاب درسی)

۲) قطر دایره C، مانند شکل قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



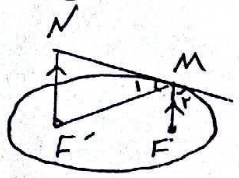
$$\text{شعاع دایره} = OM = OA = a \quad , \quad OF = c$$

فیثاغورس: $MF^2 = a^2 - c^2$

در بیضی $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$$\Rightarrow MF^2 = b^2 \Rightarrow MF = b = \frac{BB'}{2} = \text{نصف قطر کوچک}$$

۳) در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانونهای F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $NF' = MF'$

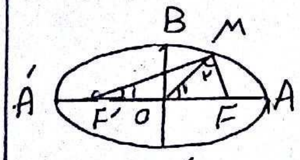


$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (ویژگی مماس بر بیضی)

$(NF' \parallel MF$ و MN مورب$) \Rightarrow \hat{N} = \hat{M}_2$

$$\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N} \Rightarrow NF' = MF'$$

۴) نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.



الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$

$OA = 5 \ , \ OB = 3 \ , \ OF = 4 = OF' = c$

$c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow c = 4 = OM$

ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

$OM = OF \Rightarrow \hat{F}_1 = \hat{M}_2 \Rightarrow \overset{\triangle}{OMF}$ متساوی‌الساقین

$OM = OF' \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{F'}_1 = x \Rightarrow$ خارجی $\hat{O}_1 = \hat{M}_1 + \hat{F'}_1 = 2x$

$\hat{M}_2 = \frac{180 - 2x}{2} = 90 - x$, $\hat{M}_1 = x$ $\Rightarrow \hat{M} = \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 90 - x + x = 90 \Rightarrow \overset{\triangle}{MFF'}$ قائم‌الزاویه

ج) طولهای MF و MF' را بدست آورید.

$MF + MF' = 10 \Rightarrow MF^2 + MF'^2 + 2MF.MF' = 100$

قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{MFF'}$: $MF^2 + MF'^2 = 64$

$\Rightarrow 64 + 2MF.MF' = 100 \Rightarrow$

$$2MF\cdot MF' = 36 \Rightarrow MF\cdot MF' = 18$$

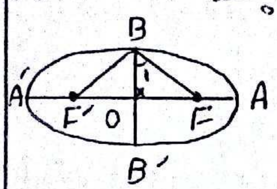
$$(MF'-MF)^2 = MF'^2 + MF^2 - 2MF'\cdot MF = 64 - 2(18) = 28 \Rightarrow MF'-MF = \sqrt{28}$$

$$\begin{cases} MF' - MF = \sqrt{28} \\ MF' + MF = 10 \end{cases} \Rightarrow MF' = \frac{2\sqrt{7}+10}{2} = \sqrt{7}+5$$

$$MF = 10-(\sqrt{7}+5) = 5-\sqrt{7}$$

---

۵) در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟



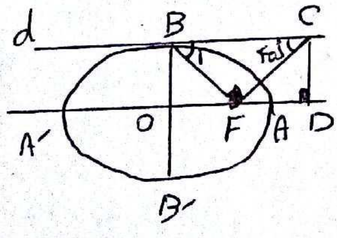
$$AA' = 2BB' \Rightarrow 2a = 2(2b) \Rightarrow a = 2b$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = (2b)^2 - b^2 = 4b^2 - b^2 = 3b^2 \Rightarrow c = b\sqrt{3}$$

$$tg\hat{B}_1 = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{b\sqrt{3}}{b} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{B}_1 = 60^\circ \Rightarrow F\hat{B}F' = 2\hat{B}_1 = 120^\circ$$

---

۶) در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطر اند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. الف) اگر $B\hat{C}F = 45^\circ$ مقدار $\frac{AD}{AF}$ را بدست آورید.



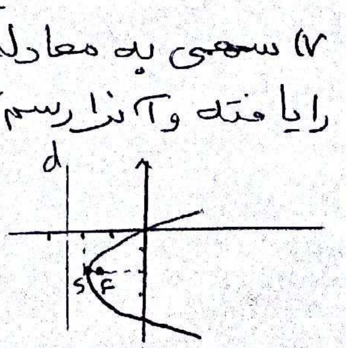
$$\left.\begin{matrix} \hat{F} = 90^\circ \\ B\hat{C}F = 45^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = 45^\circ \Rightarrow FC = BF = \sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{a^2} = a$$

$$\square BCDO:\ CD = OB = b \Rightarrow FD = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{c^2} = c$$

$$AF = a-c \Rightarrow AD = c-(a-c) = 2c-a \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{2c-a}{a-c}$$

---

۷) سهمی به معادله $y^2 = 2x - 4y$ مفروض است. مختصات راس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.



$$y^2 + 4y = 2x \Rightarrow y^2 + 4y + 4 = 2x + 4 \Rightarrow (y+2)^2 = 2(x+2)$$

راس سهمی: $S(-2,-2)$ $\quad 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ $\quad F\left|\begin{matrix} -2+\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\ -2 \end{matrix}\right.$

$x=0 \Rightarrow y^2 + 4y = 0 \Rightarrow y(y+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-4 \end{cases}$ $\quad$ خط هادی: $x = -\frac{5}{2}$

۸) مختصات راس و کانون سهمی به معادله $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ را بدست آورید.

$$y=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c \Rightarrow y=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2})+c \Rightarrow y=a(x+\frac{b}{a})^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

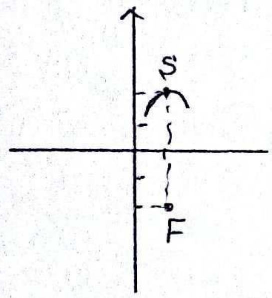
$$\Rightarrow y=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-b^2+4ac}{4a} \Rightarrow y=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y+\frac{\Delta}{4a}=a(x+\frac{b}{2a})^2$$

$$\Rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{1}{a}(y+\frac{\Delta}{4a}) \Rightarrow \quad S(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})$$

$$4a=\frac{1}{a} \Rightarrow 4a^2=1 \Rightarrow a^2=\frac{1}{4} \Rightarrow a=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow \quad F\left|\begin{array}{l}\pm\frac{1}{2}-\frac{b}{2a}\\ -\frac{\Delta}{4a}\end{array}\right.$$

---

۹) معادله سهمی را بنویسید که $S(1,2)$ راس و $F(1,-2)$ کانون آن باشد.



حل: با رسم راس و کانون داریم:

دهانه سهمی رو به پایین است پس $a<0$

فاصله F تا S برابر ۴ واحد است پس $a=-4$

نوع سهمی قائم است.

$$(x-h)^2=4a(y-k) \Rightarrow (x-1)^2=4(-4)(y-2) \Rightarrow (x-1)^2=-16(y-2)$$

---

۱۰) سهمی $y^2=4x-4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

$$y^2=4(x-1) \Rightarrow (y-0)^2=4(1)(x-1) \Rightarrow S\left|\begin{array}{l}1\\0\end{array}\right. \qquad a=1$$

$F\left|\begin{array}{l}1+1=2\\0 \qquad 0\end{array}\right.$ سهمی افقی و دهانه آن به سمت راست است.

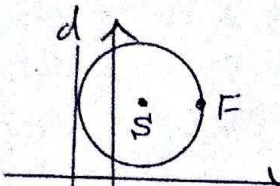
معادله دایره: $(x-2)^2+(y-0)^2=3^2 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=9 \Rightarrow y^2=9-(x-2)^2 \xRightarrow{y^2=4(x-1)}$

$$4(x-1)=9-(x-2)^2 \Rightarrow 4x-4=9-x^2+4x-4 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$$

$$x=3 \Rightarrow y^2=4(3-1)=8 \Rightarrow y=\pm\sqrt{8} \qquad (3,\sqrt{8}),(3,-\sqrt{8})$$

$x=-3 \Rightarrow y^2=4(-3-1) \Rightarrow y^2=-16$ غ ق ق

۱۱) سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و بر عکس



حل: فرض کنیم

$$(y-k)^2=4a(x-h)$$

$$F\left|\begin{matrix}a+h\\k\end{matrix}\right. \qquad S\left|\begin{matrix}h\\k\end{matrix}\right.$$ خط هادی: $x=h-a$

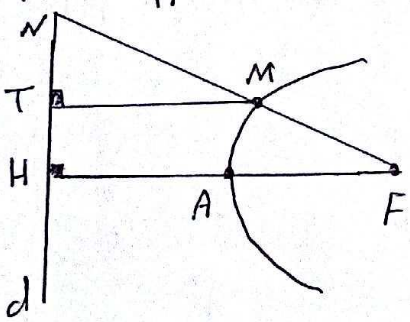
اگر دایره از F بگذرد و بر d مماس باشد باید مرکز دایره همان راس سهمی باشد و قطر دایره برابر $2a$ بوده بنابراین $R=a$ و معادله دایره برابر خواهد بود با:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

پس مرکز دایره روی سهمی است پس نقاط روی سهمی در واقع مراکز دایره‌هایی هستند که از نقطه F گذشته و با چرخش او بر خط هادی نیز مماس باشند.

---

۱۲) در شکل سهمی با راس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید $\frac{FN}{FA}=\frac{2NT}{TH}$



$$MT=MF, \qquad FA=HA=\frac{1}{2}HF$$

$$TM\parallel HF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{FM}{FN}=\frac{TH}{NH} \Rightarrow FN=\frac{FM\cdot NH}{TH}$$

$$TM\parallel HF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{NT}{NH}=\frac{TM}{HF} \Rightarrow HF=\frac{NH\cdot TM}{NT}$$

$$\Rightarrow 2FA=\frac{NH\cdot TM}{NT} \Rightarrow FA=\frac{NH\cdot TM}{2NT}$$

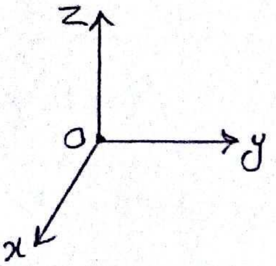
$$\frac{FN}{FA}=\frac{\frac{FM\cdot NH}{TH}}{\frac{NH\cdot TM}{2NT}}=\frac{2NT\cdot FM}{TH\cdot TM}\overset{FM=TM}{=}\frac{2NT}{TH}$$

فصل ۳ : بردارها

فضای $\mathbb{R}^3$:

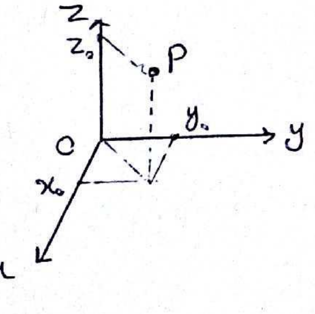
منظور از فضای $\mathbb{R}^3$ ، مجموعه تمام سه تایی های مرتبی مانند (x,y,z) است که در آنها x و y و z اعداد حقیقی باشند بعبارت دیگر:

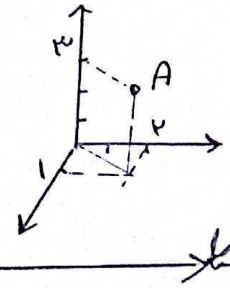
$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$$



دستگاه قائم مختصات یا محورهای مختصات دکارتی در فضا را بصورت $O.xyz$ نشان می دهند.

بطور کلی مختصات هر نقطه مانند P را در فضای $\mathbb{R}^3$ بصورت $P(x_0,y_0,z_0)$ مشخص می کنند که در آن x_0 طول نقطه P ، y_0 عرض نقطه P و z_0 ارتفاع نقطه P نامیده می شود.





مثال) مختصات نقطه $A(1,2,3)$ را در فضا مشخص کنید.

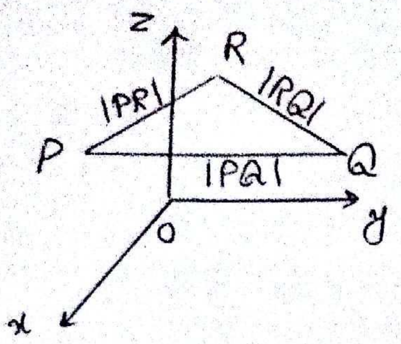
فرمول فاصله ی بین دو نقطه در فضا:

الف) $P(x_0,y_0,z_0)$ و $Q(x_1,y_1,z_1)$ دو نقطه در فضا باشند طول پاره خط PQ را با علامت $|PQ|$ نشان داده و از رابطه زیر بدست می آوریم:

$$|PQ|=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}$$

مثال) الف) $A(2,-3,1)$ و $B(4,2,0)$ دو نقطه در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند طول AB را بیابید.

$$|AB|=\sqrt{(2-4)^2+(-3-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{30}$$



تذکر مهم:

۱) $|PQ|=0$ اگر و تنها اگر $P=Q$

۲) $|PQ|=|QP|$

۳) $|PQ|\leq|PR|+|RQ|$ (نامساوی مثلثی)

مثال ۱: نقطه $P(6-3m\ ,\ m^2+m\ ,\ m^2-4)$ مفروض است. مقدار m را چنان بیابید که:

الف) نقطه P روی محور y ها واقع باشد.

ب) نقطه P داخل صفحه xoz واقع شود.

حل: الف) برای آنکه نقطه‌ای روی محور y ها باشد باید x و z آن نقطه صفر باشد.

$$x_P=0 \Rightarrow 6-3m=0 \Rightarrow m=2$$
$$z_P=0 \Rightarrow m^2-4=0 \Rightarrow m=\pm 2$$
$$\xrightarrow{\cap} m=2 \Rightarrow P(0,6,0)$$

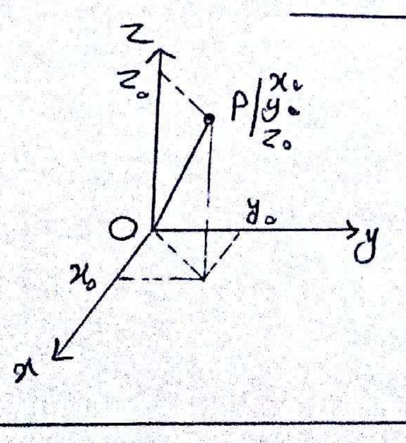
ب) برای آنکه نقطه‌ای داخل صفحه xoz باشد باید y آن نقطه صفر باشد.

$$y_P=0 \Rightarrow m^2+m=0 \Rightarrow m(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \Rightarrow P(6,0,-4) \\ m=-1 \Rightarrow P(9,0,-3) \end{cases}$$

مثال ۲: اگر $A(a,1,-1)$ و $B(2,a-1,2a)$ دو نقطه در فضا باشند به ازای کدام مقادیر a، طول پاره خط AB برابر $\sqrt{11}$ می باشد؟

$$|AB|=\sqrt{(a-2)^2+(1-a+1)^2+(-1-2a)^2}=\sqrt{11} \Rightarrow 6a^2-4a-2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

فاصله نقطه از مبدا مختصات:



فاصله نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ از مبدا مختصات $O(0,0,0)$ یعنی طول پاره خط $|OP|$ از رابطه زیر بدست می آید:

$$|OP|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$$

مثال: به ازای چه مقادیری از a فاصله نقطه $P(a+1, 3, -1)$ از مبدا مختصات برابر $\sqrt{26}$ است؟

$$|OP| = \sqrt{(a+1)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} \Rightarrow \sqrt{(a+1)^2 + 10} = \sqrt{26} \Rightarrow (a+1)^2 + 10 = 26$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 = 16 \Rightarrow a+1 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -5 \end{cases}$$

فرمول مختصات نقطه وسط پاره خط:

اگر $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ دو نقطه دلخواه در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند، مختصات نقطه M وسط پاره خط AB از رابطه های زیر بدست می آید:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

(هماهنگ - ۸۲)

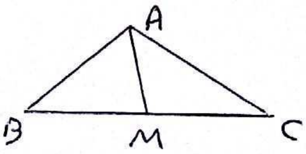
نقاط $A(1, 2, 1)$ و $B(3, 1, 4)$ و $C(1, 5, 2)$ سه رأس مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ هستند. طول میانه AM را پیدا کنید:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$z_M = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$$

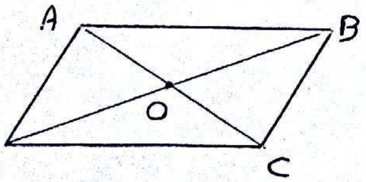
$M(2, 3, 3)$



$$|AM| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{6}$$

فرمول مختصات چهار رأس متوازی الاضلاع در فضا:

در متوازی الاضلاع $ABCD$ رابطه های زیر بین مختصات چهار رأس آن برقرار است:



$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \\ z_A + z_C = z_B + z_D \end{cases}$$

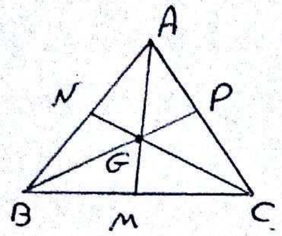
مثال: اگر $A(1, 2, 1)$ و $B(3, 1, -1)$ و $C(2, 1, 2)$ مختصات سه رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند مختصات D را بدست آورید:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 1 + 2 = 3 + x_D \Rightarrow x_D = 0$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 2 + 1 = 1 + y_D \Rightarrow y_D = 2$$

$$z_A + z_C = z_B + z_D \Rightarrow 1 + 2 = -1 + z_D \Rightarrow z_D = 4$$

$D(0, 2, 4)$



فرمول مختصات مرکز ثقل مثلث در فضای $\mathbb{R}^3$:

در مثلث $A\hat{B}C$ نقطه برخورد سه میانه مثلث را مرکز ثقل مثلث نامیده و با G نامگذاری می‌کنیم

مختصات نقطه G از رابطه های زیر بدست می‌آید :

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad , \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \quad , \quad z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

مثال : نقاط $A(1,2,-3)$ و $B(-2,1,1)$ دو راس مثلث $A\hat{B}C$ هستند اگر نقطه $G(1,-3,4)$ محل برخورد میانه های مثلث $A\hat{B}C$ باشند مختصات راس C را بیابید.

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow 1 = \frac{1 + (-2) + x_C}{3} \Rightarrow x_C = 4$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow -3 = \frac{2 + 1 + y_C}{3} \Rightarrow y_C = -12 \qquad C(4,-12,14)$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \Rightarrow 4 = \frac{-3 + 1 + z_C}{3} \Rightarrow z_C = 14$$

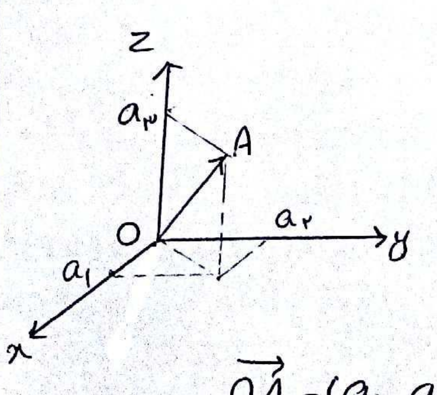
بردار در فضای $\mathbb{R}^3$:

هر پاره خط جهت دار را یک بردار هندسی می نامند. برداری که نقطه ابتدای آن A و نقطه انتهای آن B باشد را بصورت $\overrightarrow{AB}$ نشان می دهند

هر بردار دارای سه مشخصه است : ۱) راستا ۲) جهت ۳) اندازه

مولفه های یک بردار :

فرض کنید $A(a_1, a_2, a_3)$ نقطه ای دلخواه در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد. پاره خط جهت دار با نقطه ی شروع مبدا $O(0,0,0)$ و نقطه پایان $A(a_1, a_2, a_3)$ را یک بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ می گوئیم.



$$\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$$

ویژگی های بردار در فضای $\mathbb{R}^3$:

۱) مختصات برداری که ابتدای آن نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ و مختصات انتهای آن $B(x_2, y_2, z_2)$ باشد عبارت است از:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

$A\begin{vmatrix}1\\2\\3\end{vmatrix}$ $B\begin{vmatrix}-2\\4\\1\end{vmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} = (-2-1, 4-2, 1-3) = (-3, 2, -2)$$

۲) برداری که ابتدا و انتهای آن یک نقطه باشد بردار صفر نامیده می شود و آنرا بصورت $\vec{0}=(0,0,0)$ نشان می دهند.

۳) تساوی دو بردار: دو بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ مساوی هستند اگر و تنها اگر مولفه های آنها نظیر به نظیر برابر باشند.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

مثال) مقادیر m و n را طوری بیابید که دو بردار $\vec{a}=(2m, 3, -7)$ و $\vec{b}(4, n-1, -7)$ باهم مساوی باشند.

$2m = 4 \Rightarrow m = 2$ $\quad$ $n-1 = 3 \Rightarrow n = 4$

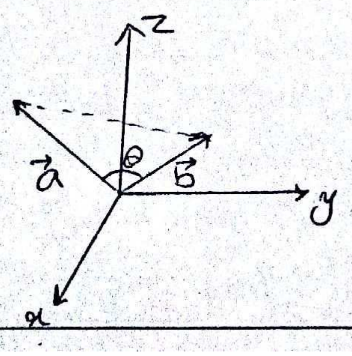
۴) اندازه (طول) یک بردار:

طول یا اندازه بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ را با علامت $|a|$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می کنیم:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

مثال) طول بردار $\vec{a} = (-3, 0, 4)$ را بیابید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5$$



۵) زاویه بین دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را زاویه ای مانند θ در نظر می گیریم که:

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

۶) ضرب عدد در بردار:

اگر m یک عدد حقیقی و $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ یک بردار باشد حاصلضرب m در بردار a را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$m\vec{a} = (ma_1, ma_2, ma_3)$

مثال) $m=2$ ، $\vec{a}(1,2,-3)$

$m\vec{a} = 2(1,2,-3) = (2,4,-6)$

۷) قرینه بردار:

اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ یک بردار باشد قرینه $\vec{a}$ را با علامت $-\vec{a}$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$

مثال) $\vec{a} = (-1, 2, -3) \Rightarrow -\vec{a} = (1, -2, 3)$

۸) جمع بردارها:

اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند مجموع آنها را با علامت $\vec{a}+\vec{b}$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$

بهمین ترتیب داریم:

$$\vec{a}-\vec{b} = (a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$$

مثال) بردارهای $\vec{a}(2,-1,3)$ و $\vec{b}(-1,3,-2)$ و $\vec{c}(2,4,1)$ مفروض است بردار $2a+b-c$ را بدست آورده سپس طول آن را بیابید.

$$2a+b-c = 2(2,-1,3) + (-1,3,-2) - (2,4,1) = (1,-3,3)$$

$$|2a+b-c| = \sqrt{1^2+(-3)^2+3^2} = \sqrt{19}$$

دو بردار هم راستا:

دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را هم راستا می‌گویند هرگاه یکی مضربی از دیگری باشد بعبارت دیگر: $\vec{b} = r\vec{a}$

مثال) $\vec{a} = (1,2,3)$ ، $\vec{b} = (4,8,12)$ ، $\vec{b} = 4\vec{a}$

خواص جمع بردارها:

اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار دلخواه و $\vec{0}=(0,0,0)$ بردار صفر و نیز r و s دو عدد حقیقی باشند آنگاه:

۱) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (خاصیت جابجایی جمع)

۲) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (خاصیت شرکت پذیری جمع)

۳) $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$ (عضو قرینه)

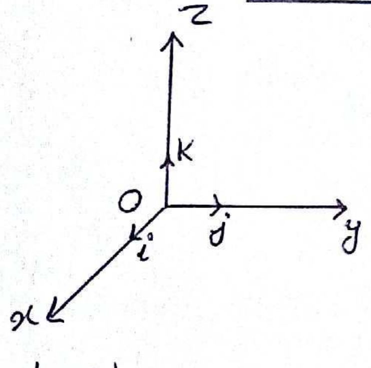
۴) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ (عضو خنثی)

۵) $r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$

۶) $(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{a}$

۷) $(rs)\vec{a}=r(s\vec{a})$

۸) اگر $\vec{b}=r\vec{a}$ آنگاه: $|\vec{b}|=|r|\cdot|\vec{a}|$



بردارهای یکه محورهای مختصات در فضای $\mathbb{R}^3$:

هر بردار که طول (اندازه) آن یک واحد باشد بردار یکه نامیده می‌شود. بردار یکه در جهت محور طولها را با $\vec{i}=(1,0,0)$ و بردار یکه در جهت محور عرضها را با $\vec{j}=(0,1,0)$ و بردار یکه در جهت محور ارتفاع‌ها را با $\vec{k}=(0,0,1)$ نشان می‌دهیم هر بردار مانند $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ را می‌توان برحسب بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ نوشت:

$$a=(a_1,a_2,a_3)=(a_1,0,0)+(0,a_2,0)+(0,0,a_3)=a_1(1,0,0)+$$
$$a_2(0,1,0)+a_3(0,0,1)=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

$$\boxed{a=(a_1,a_2,a_3)=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}}$$

مثال (هماهنگ دیماه ۹۷)

اگر $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(3,1,-1)$ و $r=2$ باشد بردار $r\vec{b}-\vec{a}$ را بدست آورید:

$$\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}=(3,2,-1)$$

$$r\vec{b}-\vec{a}=2\vec{b}-\vec{a}=2(3,1,-1)-(3,2,-1)=(6,2,-2)-(3,2,-1)=(3,0,-1)$$

ضرب داخلی دو بردار:

۱) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر و زاویه بین آنها θ ($0\leq\theta\leq\pi$) باشد در اینصورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ با علامت $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\theta}$$

۲) اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند در اینصورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را با علامت $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

مثال ۱: زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $b=(1,-1,0)$ را پیدا کنید.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2\times1)+(-1\times-1)+(0\times2)=3$$

$$|a|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3 \qquad |b|=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\theta\Rightarrow 3=3\sqrt{2}\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۲: زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(2,2,2)$ و $\vec{b}=(2,0,-2)$ را بیابید.

$$|a|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=\sqrt{12} \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=(2)(2)+(0)(2)+(+2)(-2)=0$$

$$|b|=\sqrt{2^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{8} \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|.\cos\theta\Rightarrow 0=\sqrt{12}\times\sqrt{8}\cos\theta$$

$$\Rightarrow\cos\theta=0\Rightarrow\theta=90^\circ$$

مثال ۳: مقدار m را طوری تعیین کنید که زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(m,-1,2)$ و $\vec{b}=(1,-1,0)$ برابر 45° باشد.

$a.b = m+1+0 = m+1$

$|a| = \sqrt{m^2+1+4} = \sqrt{m^2+5}$

$|b| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$

$$\cos\alpha = \frac{a.b}{|a||b|} \Rightarrow \frac{m+1}{\sqrt{m^2+5}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2(m+1) = 2\sqrt{m^2+5} \Rightarrow m+1 = \sqrt{m^2+5}$$

$$\Rightarrow m^2+2m+1 = m^2+5 \Rightarrow 2m=4 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

خواص ضرب داخلی:

۱) چون حاصلضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است به آن ضرب اسکالر یا ضرب عددی نیز می‌گویند.

۲) اگر یکی از دو بردار a یا b یا هر دو برابر بردار صفر باشند حاصلضرب داخلی آنها صفر می‌باشد.

$$\vec{a}=\vec{0} \text{ یا } \vec{b}=\vec{0} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$$

عکس رابطه درست نیست

$$\vec{a}.\vec{b}=0 \not\Rightarrow \vec{a}=\vec{0} \text{ یا } \vec{b}=\vec{0}$$

۳) ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد.

$$\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$$

۴) برای هر دو بردار a و b و هر عدد حقیقی m داریم: $m\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.m\vec{b}=m(\vec{a}.\vec{b})$

۵) حاصلضرب داخلی هر بردار در خودش برابر است با مجذور اندازه آن بردار

$$\vec{a}.\vec{a}=|a||a|\cos 0=|a|^2$$

۶) اگر دو بردار بر هم عمود باشند حاصلضرب داخلی آنها صفر است و برعکس

(اثبات هامش دیباچه ۸۷) $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow |a||b|\cos\theta=0 \Leftrightarrow \cos\theta=0 \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$

مثال) به ازای چه مقدار m دو بردار $\vec{a}=(-4,5,m)$, $\vec{b}=(1,-2,2)$ بر هم عمودند.

$$\vec{a}.\vec{b}=0 \Rightarrow (-4)(1)+(5)(-2)+(m)(2)=0 \Rightarrow -4-10+2m=0 \Rightarrow \boxed{m=7}$$

۷) ضرب داخلی بر روی جمع بردارها، خاصیت توزیع پذیری (پخشی) دارد.

$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c} \qquad (\vec{a}+\vec{b}).\vec{c}=\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}$$

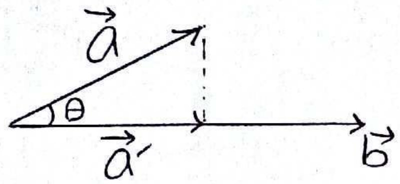
ضرب داخلی بردارهای یکه $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$:

چون بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ دو به دو بر هم عمودند پس:

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0 \quad , \quad \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

تصویر قائم یک بردار روی بردار دیگر:

دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را که زاویه بین آنها θ است در نظر می‌گیریم. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ را با بردار $\vec{a'}$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:



$$\vec{a'}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|b|^2}\vec{b}$$

مثال ۱: تصویر قائم بردار $\vec{a}=(2,3,-2)$ را بر روی امتداد بردار $\vec{b}=(-1,2,-2)$ بیابید.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2+6+4=8$ $\qquad |\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$

$$\vec{a'}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{8}{9}(-1,2,-2)\Rightarrow \vec{a'}=\left(-\frac{8}{9},\frac{16}{9},-\frac{16}{9}\right)$$

مثال ۲: تصویر قائم بردار $\vec{a}=(2,-1,2)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(-1,3,2)$ بیابید و اندازه آن را بدست آورید.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2-3+4=-1$ $\qquad |\vec{b}|=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$

$$\vec{a'}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{-1}{14}(-1,3,2)\Rightarrow \vec{a'}=\left(\frac{1}{14},-\frac{3}{14},-\frac{2}{14}\right)$$

$$|\vec{a'}|=\sqrt{\left(\frac{1}{14}\right)^2+\left(-\frac{3}{14}\right)^2+\left(-\frac{2}{14}\right)^2}=\sqrt{\frac{1+9+4}{14^2}}=\sqrt{\frac{14}{14^2}}=\sqrt{\frac{1}{14}}=\frac{\sqrt{14}}{14}$$

(هماهنگ دیماه ۹۷)

مثال ۳: اگر $\vec{a}=(-1,-3,0)$ و $\vec{b}=(3,-4,2)$ و $\vec{c}=(-1,1,4)$ باشند آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را بدست آورید.

$\vec b+\vec c=(2,-3,6)$ $\qquad |\vec b+\vec c|=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=7$

$\vec a\cdot(\vec b+\vec c)=(-1,-3,0)\cdot(2,-3,6)=-2+9+0=7$

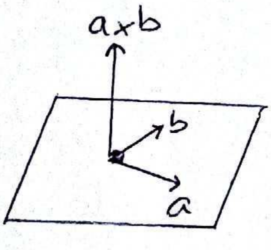
$$\vec a'=\frac{\vec a\cdot(\vec b+\vec c)}{|\vec b+\vec c|^2}(\vec b+\vec c)=\frac{7}{49}(2,-3,6)=\frac{1}{7}(2,-3,6)=\left(\frac{2}{7},-\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)$$

ضرب خارجی:

فرض کنیم $\vec a=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec b=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند ضرب خارجی $\vec a$ در $\vec b$ را با علامت $\vec a\times\vec b$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec i-\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec j+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec k$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2\,,\,-a_1b_3+a_3b_1\,,\,a_1b_2-a_2b_1)$$



از نظر هندسی:

ضرب خارجی دو بردار بر هر دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ و صفحه تشکیل دهنده از دو بردار $\vec a$ و $\vec b$، عمود است.

مثال) اگر $\vec a=(1,2,-1)$, $\vec b=(0,1,2)$ مطلوبست محاسبه: $\vec a\times\vec b$

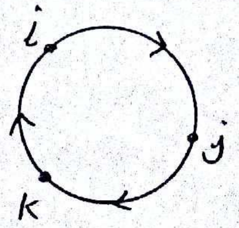
$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec i-\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec j+\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec k=(5,-2,1)$$

حاصلضرب خارجی بردارهای یکه $\vec i$ و $\vec j$ و $\vec k$:

$\vec i\times\vec j=\vec k$ $\qquad \vec j\times\vec i=-\vec k$

$\vec j\times\vec k=\vec i$ $\qquad \vec k\times\vec j=-\vec i$

$\vec k\times\vec i=\vec j$ $\qquad \vec i\times\vec k=-\vec j$



مثال) حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

الف) $\vec{i}\times(\vec{i}\times\vec{k}) = \vec{i}\times(-\vec{j}) = -\vec{i}\times\vec{j} = -\vec{k}$

ب) $(\vec{j}\times\vec{k})\times\vec{k} = \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$

ویژگی های ضرب خارجی:

۱) ضرب خارجی دو بردار خاصیت جابجایی ندارد ولی: $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

۲) ضرب خارجی هر بردار در خودش برابر بردار صفر است. $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$

اثبات: $\vec{a}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{a} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{a} = 0 \Rightarrow 2(\vec{a}\times\vec{a}) = 0 \Rightarrow \vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$

نتیجه: $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$

۳) ضرب خارجی هر بردار در بردار صفر، برابر بردار صفر است. $\vec{a}\times\vec{0} = \vec{0}$

۴) برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و هر عدد حقیقی m داریم:

$$m\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times m\vec{b} = m(\vec{a}\times\vec{b})$$

۵) ضرب خارجی بردارها نسبت به جمع بردارها، خاصیت توزیع پذیری دارد:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c} \qquad (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

۶) ضرب خارجی بردارها خاصیت شرکت پذیری ندارد: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

۷) فرض کنیم $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند در اینصورت:

$$\begin{cases} a\cdot(a\times b) = 0 \\ b\cdot(a\times b) = 0 \end{cases}$$

اثبات: فرض کنیم $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ در نتیجه:

$$a\cdot(a\times b) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_1 - a_2b_1) = 0$$

۸) برای هر دو بردار غیر صفر a و b که زاویه بین آنها θ باشد داریم:

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ (فرمول اندازه ضرب خارجی)

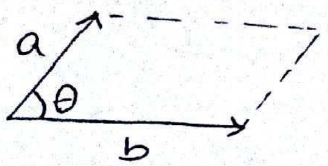
مثال) $|\vec{a}| = 2$ $\quad |\vec{b}| = 3$ $\quad \theta = 30^\circ$ $\quad |\vec{a}\times\vec{b}| = 2\times3\times\sin30^\circ = 2\times3\times\frac{1}{2} = 3$

۱۹) برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، بردار $\vec{a}$ با $\vec{b}$ موازی است اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ یا $|\vec{a}\times\vec{b}|=0$

اثبات:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=0 \Leftrightarrow |a|\,|b|\sin\theta=0 \Leftrightarrow \sin\theta=0 \Rightarrow \theta=0 \text{ یا } \theta=\pi \Leftrightarrow a\parallel b$$

مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده روی دو بردار:



اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر باشند که زاویه بین آنها θ باشد مساحت متوازی الاضلاعی که توسط دو بردار ساخته می‌شود و $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور آن هستند برابر است با اندازه حاصلضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$:

$$\boxed{S=|\vec{a}\times\vec{b}|}$$

مثال ۱: مساحت متوازی الاضلاعی که بر روی بردارهای $\vec{a}=(2,-1,3)$ و $\vec{b}=(1,2,-2)$ ساخته می‌شود را بیابید.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\big((-1)(-2)-(3)(2),\ (3)(1)-(2)(-2),\ (2)(2)-(-1)(1)\big)=(-4,7,5)$$

$$\Rightarrow S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{16+49+25}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$$

مثال ۲: (هماهنگ دی ماه ۹۷):

مساحت متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}=(-1,0,1)$ و $\vec{b}=(0,1,1)$ تولید می‌شود را بدست آورید:

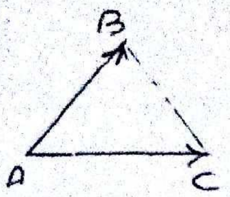
$$\vec{a}\times\vec{b}=(-1,-1,-1) \qquad S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

مساحت مثلث:

مساحت مثلثی که بوسیله دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود برابر است با:

$$\boxed{S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|}$$

مثال) مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ به رئوس $A=(1,2,0)$ و $B=(3,0,-3)$ و $C=(5,2,6)$



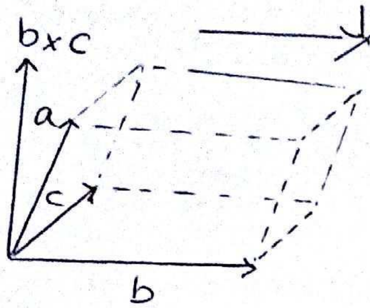
را بیابید

$$\vec{AB} = (3-1,\ 0-2,\ -3-0) = (2,-2,-3)$$

$$\vec{AC} = (5-1,\ 2-2,\ 6-0) = (4,0,6)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-12,-24,8)$$

$$S = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{144+576+64} = \frac{1}{2}\sqrt{784} = \frac{1}{2} \times 28 = 14$$



حجم متوازی السطوح :

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند که در یک صفحه نباشند حجم متوازی السطوحی که روی این سه بردار ساخته می شود بطوریکه سه بردار یالهای مجاور آن باشند از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})| = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$$

قدر مطلق

مثال) حجم متوازی السطوحی که روی بردارهای $\vec{a}=(2,-2,1)$ و $\vec{b}=(1,1,0)$ و $\vec{c}=(-1,0,1)$ ساخته می شود را بیابید.

$$\vec{b} \times \vec{c} = \big((1)(1)-(0)(0),\ (0)(-1)-(1)(1),\ (1)(0)-(1)(-1)\big) = (1,-1,1)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (2,-2,1) \cdot (1,-1,1) = 2+2+1 = 5$$

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |5| = 5$$

مثال) حجم متوازی السطوحی را بدست آورید که توسط بردارهای $\vec{a}=(1,1,0)$ و $\vec{b}=(0,1,1)$ و $\vec{c}=(1,0,1)$ تولید می شود.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (1,1,-1)$$

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |1+1+0| = 2$$

سه بردار هم صفحه :

سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را هم صفحه می گویند هرگاه : $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ (حجم متوازی السطوح صفر)

مثال) ثابت کنید سه بردار $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=(1,2,-3)$ و $\vec{c}=(3,-4,7)$ هم صفحه اند

$$\vec{b} \times \vec{c} = (2,-16,-10)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (2,-1,2) \cdot (2,-16,-10) = 4+16-20 = 0$$

تمرین صـ ۸۰ (کتاب درسی)

۱) تصویر بردار $\vec{i}=(1,0,0)$ بر امتداد بردار $\vec{j}=(0,1,0)$ را بیابید.

$\vec{i}\cdot\vec{j}=0+0+0=0$ $\quad |\vec{j}|=\sqrt{0^2+1^2+0^2}=1$ $\quad \vec{i}'=\frac{\vec{i}\cdot\vec{j}}{|\vec{i}|^2}\vec{j}=\frac{0}{1}(0,1,0)=(0,0,0)$

۲) نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمود باشند آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری، بردار صفر می‌شود.

$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \Rightarrow \vec{a}'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}b=\frac{0}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=0$

۳) نشان دهید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند آنگاه تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر خود $\vec{a}$ می‌شود.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||\vec{b}|\cos 0=|a||b|$

$\vec{b},\vec{a}$ هم راستا $\Rightarrow \vec{a}=kb$

$\vec{a}'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{k\vec{b}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{k\vec{b}^2}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=k\vec{b}=\vec{a}$

تمرین صـ ۸۴ (کتاب درسی)

۱) برای هریک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ بدست آورید.

الف) $\vec{a}=(2,-1,2)$ $\quad \vec{b}=\vec{i}=(1,0,0)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2+0+0=2$ $\quad |\vec{b}|=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$ $\quad \vec{a}'=\frac{a\cdot b}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{2}{1}(1,0,0)=(2,0,0)$

ب) $\vec{a}=(2,3,1)$, $\vec{b}=(3,2,1)$ $\Rightarrow$ جواب $=\vec{a}'=(\frac{39}{14},\frac{4}{14},\frac{13}{14})$

ج) $\vec{a}=(1,1,0)$, $\vec{b}=(-1,2,4)$ $\Rightarrow$ جواب $=\vec{a}'=(\frac{-1}{21},\frac{2}{21},\frac{4}{21})$

۲) فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طولهای ۱و۲و۳ با این خاصیت که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ را محاسبه کنید.

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{0}=0\\ b\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{b}\cdot\vec{0}=0\\ \vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{c}\cdot\vec{0}=0\end{cases} + \Rightarrow |\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{b}|^2+$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+|\vec{c}|^2=0\Rightarrow 1+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})+4+9=0$$

$$\Rightarrow 2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})=-14\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-7$$

۳) سه بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$

$$\vec{a}=(1,0,0)=\vec{i} \quad \vec{b}=(0,1,0)=\vec{j} \quad \vec{c}=(0,0,1)=\vec{k} \quad \left.\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{b}=0\\ \vec{a}\cdot\vec{c}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{b}\neq\vec{c}$$

۴) اگر $\vec{a}=(1,-3,4)$ و $\vec{b}=(3,-4,2)$ و $\vec{c}=(-1,1,4)$ باشند آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را بدست آورید.

$$\vec{b}+\vec{c}=(4,-7,6)$$

$$|\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{16+49+36}=\sqrt{101}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=-4-7+24=13$$

$$\vec{a}'=\frac{13}{101}(4,-7,6)=\left(\frac{52}{101},\frac{-91}{101},\frac{78}{101}\right)$$

۵) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}=(1,-3,4)$ و $\vec{b}=(-2,1,-5)$ پیدا کنید.

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=(15-2,-5+4,1-6)=(13,-1,-5)$$

۶) سه بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$

$$\vec{a}=(1,0,0) \quad \vec{b}=(1,0,0) \quad \vec{c}=(0,0,1) \quad \left.\begin{array}{l}\vec{a}\times\vec{b}=(0,-1,0)\\ \vec{a}\times\vec{c}=(0,-1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{b}\neq\vec{c}$$

۷) بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروضند بطوریکه $|\vec{a}|=3$ و $|\vec{b}|=26$ ، $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$ مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را محاسبه کنید (هماهنگ دیماه ۹۷)

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \Rightarrow 72=3\times 26\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{12}{13}$$

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{169}}=\pm\frac{5}{13}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=3\times 26\times\left(\pm\frac{5}{13}\right)=\pm 30$$

۸) مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A=(3,5,7)$ و $B(5,5,0)$ و $C=(-4,0,4)$ داده شده است را بیابید.

$$\overrightarrow{AB}=(2,0,-7)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-7,-5,-3)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-35,55,-10)$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-35)^2+55^2+(-10)^2}=\sqrt{4350}$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4350}$$

(پایان)