بنام خدا

جزوه ریاضی ۱

(دهم تجربی و ریاضی)

تهیه و تنظیم از :
امیر حسین مطلّبی دبیر ریاضی دبیرستان نمونه دولتی استاد شهریار ناحیه ۳ تبریز

*** هزینه استفاده از این جزوه صلواتی بر محمّد و آل محمّد است ***

التماس دعا

مجموعه:

★ دسته‌ای از اشیای کاملاً مشخص را مجموعه می‌نامند.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad$ $B = \{$علی ، رضا$\}$ $\qquad$ $C = \{a, b, c, d, e\}$

★ مجموعه‌های معروف:

مجموعه اعداد طبیعی $= \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی $= \mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح $= \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا $= \mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

مجموعه اعداد گنگ $= \mathbb{Q}' =$ {اعدادی که جذر کامل ندارند} = {اعدادی که نتوان آنها را بصورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد}

مجموعه اعداد حقیقی $= \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

★ رابطه بین مجموعه‌های معروف:

۱) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

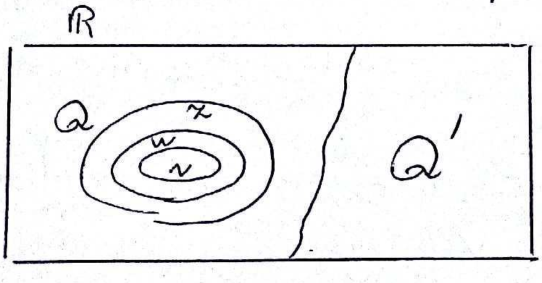
۲) $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$

۳) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$

۴) $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$

۵) $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{-1, -2, \dots\}$

۶) $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$



★ تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر است با: 2^n

مثال ۱: تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $(2n-5)$ عضوی ۱۶ برابر تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $(n-2)$ عضوی است. مقدار n چقدر است؟

$$2^{2n-5} = 16 \times 2^{n-2} \Rightarrow 2^{2n-5} = 2^4 \times 2^{n-2} \Rightarrow 2^{2n-5} = 2^{n+2} \Rightarrow 2n-5 = n+2$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 7}$$

مثال ۲: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه $(n+6)$ عضوی از تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه $(n+2)$ عضوی ۱۹۲۰ واحد بیش تر است. مقدار n چقدر است؟

$$2^{n+6} = 2^{n+2} + 1920 \Rightarrow 2^{n+6} - 2^{n+2} = 1920 \Rightarrow 2^n(2^6 - 2^2) = 1920 \Rightarrow$$

$$2^n(64-4) = 1920 \Rightarrow 2^n \times 60 = 1920 \Rightarrow 2^n = \frac{1920}{60} = 32 = 2^5 \Rightarrow \boxed{n=5}$$

مثال ۳: سه مجموعه $(n+3)$ عضوی، $(n+1)$ عضوی و $(n-2)$ عضوی روی هم ۱۴۴ زیر مجموعه دارند. مقدار n چقدر است؟

$$2^{n+3} + 2^{n+1} + 2^{n-2} = 144 \Rightarrow 2^n(2^3 + 2^1 + 2^{-2}) = 144 \Rightarrow 2^n\left(8+2+\frac{1}{4}\right) = 144$$

$$\Rightarrow 2^n \times \frac{32+8+1}{4} = 144 \Rightarrow 2^n \times \frac{41}{4} = 144 \Rightarrow 2^n = \frac{4\times 144}{41} \Rightarrow 2^n = 16 \Rightarrow \boxed{n=4}$$

* بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عمل:

مجموعه A را نسبت به عمل $*$ بسته می گویند هرگاه به ازای هر a و b عضو A داشته باشیم: $a * b \in A$

مثال ۱: مجموعه اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع و ضرب بسته است. زیرا:

$\begin{matrix} 5\in N \\ 3\in N \end{matrix} \Rightarrow 5+3=8\in N$ حاصل جمع دو عدد طبیعی، عددی طبیعی است

حاصل ضرب دو عدد طبیعی، عددی طبیعی است.

$\begin{matrix} 6\in N \\ 7\in N \end{matrix} \Rightarrow 6\times 7=42\in N$

مثال ۲: مجموعه اعداد طبیعی نسبت به عمل تفریق و تقسیم بسته نیست، زیرا:

$\begin{matrix} 5\in N \\ 8\in N \end{matrix} \Rightarrow 5-8=-3\notin N$ $\qquad$ $\begin{matrix} 3\in N \\ 2\in N \end{matrix} \Rightarrow 3\div 2=1.5\notin N$

مثال ۳: آیا مجموعه $A=\{2^n \mid n\in \mathbb{Z}\}$ نسبت به دو عمل ضرب و جمع بسته است؟ چرا؟

حل: نسبت به عمل ضرب بسته است زیرا:

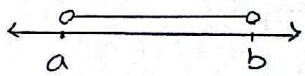
$$\left.\begin{array}{l}2^x\in A\\ 2^y\in A\end{array}\right\} \Rightarrow 2^x\times 2^y = 2^{x+y}\in A \quad (x+y\in \mathbb{Z})$$

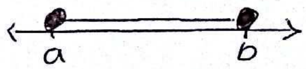
ولی نسبت به عمل جمع بسته نیست زیرا:

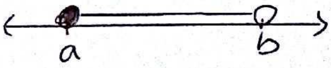
$$\left.\begin{array}{l}2^2\in A\\ 2^3\in A\end{array}\right\} \Rightarrow 2^2+2^3=4+8=12\notin A$$

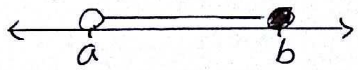
★ بازه‌ها (فاصله):

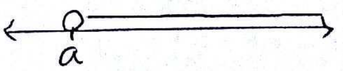
هر زیر مجموعه از اعداد حقیقی را یک بازه (فاصله) می‌نامند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

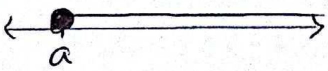
بازه‌ی باز $=(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$ 

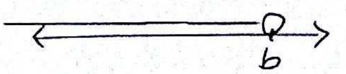
بازه‌ی بسته $=[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\leq b\}$ 

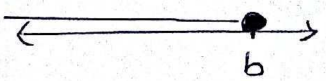
بازه‌ی نیم باز از راست $=[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x<b\}$ 

بازه‌ی نیم باز از چپ $=(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leq b\}$ 

بازه‌ی باز بی‌کران از راست $=(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$ 

بازه‌ی نیم باز بی‌کران از راست $=[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq a\}$ 

بازه‌ی باز بی‌کران از چپ $=(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$ 

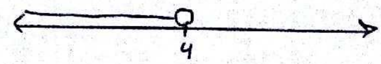
بازه‌ی نیم باز بی‌کران از چپ $=(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq b\}$ 

تذکر مهم: $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) عدد نیستند بلکه نماد (علامت‌هایی) هستند برای نشان دادن اعداد خیلی بزرگ و خیلی کوچک.

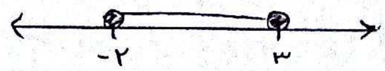
مثال: بازه‌های زیر را بصورت مجموعه نوشته و آنها را بصورت هندسی نمایش دهید.

الف) $(-\infty,6)$ ب) $[-2,3]$ ج) $(-1,4]$

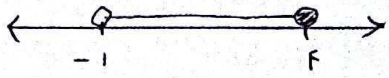
$(-\infty, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$



$[-2, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$

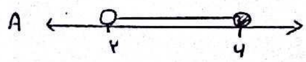


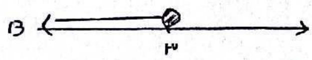
$(-1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 4\}$



مثال ۲: اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 2 < x \leq 4\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 3\}$ باشد. اولاً: A و B را بصورت بازه نشان دهید. ثانیاً: $A \cap B$ و $A \cup B$ را بصورت بازه مشخص کنید.

$A = (2, 4]$ $\quad$ $B = (-\infty, 3]$





$A \cup B = (-\infty, 4]$ $\quad$ $A \cap B = (2, 3]$

مثال ۳: نامعادلات زیر را حل کرده و جواب را بصورت بازه مشخص کنید:

الف) $-3x + 1 < 7$

$-3x < 7 - 1$

$-3x < 6$

$x > \frac{6}{-3}$

$x > -2$

$x \in (-2, +\infty)$

ب) $-1 \leq \frac{2x+1}{3} < 3$

$\times 3$

$-3 \leq 2x + 1 < 9$

$-3 - 1 \leq 2x + 1 - 1 < 9 - 1$

$-4 \leq 2x < 8$

$-\frac{4}{2} \leq \frac{2x}{2} < \frac{8}{2}$

$-2 \leq x < 4 \Rightarrow x \in [-2, 4)$

مثال ۴: درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید:

الف) $3 \in [-1, \sqrt{10})$ ✓

ب) $\frac{1}{\sqrt{2}} \in (0, 1]$ ✓

ج) $\{0, 1\} \subseteq [0, 1]$ ✓

د) $-1395 \in (-\infty, -1396)$ ×

ه) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \in [3, 4]$ ✓

و) $\varnothing \subseteq (-3, 3)$ ✓

*** مجموعه‌های متناهی و نامتناهی:**

مجموعه A را یک مجموعه متناهی (با پایان - قابل شمارش) می‌گویند، هرگاه تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد در غیر این صورت آن را مجموعه نامتناهی (بی پایان - غیرقابل شمارش) می‌گویند.

مثال: متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را بررسی کنید:

۱) مجموعه دانش آموزان سال دهم رشته ریاضی در کشور (متناهی)

۲) تعداد اعداد ۳ رقمی و بزرگتر از ۵۰۰ (متناهی)

۳) تعداد اعداد اول (نامتناهی)

۴) مجموعه اعداد طبیعی فرد (نامتناهی)

۵) مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان بالغ (متناهی حدود ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰)

۶) مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی (متناهی 9×10^{9})

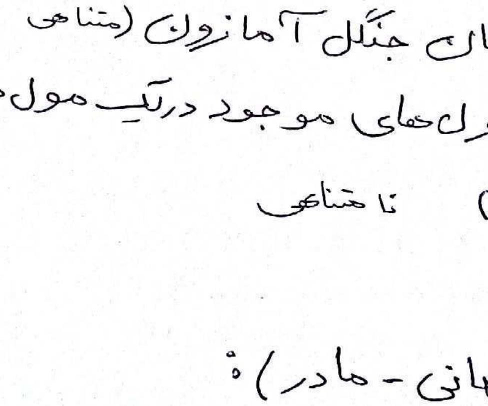
۷) مجموعه درختان جنگل آمازون (متناهی ۳۹۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰)

۸) مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب (متناهی $6/022\times10^{23}$)

۹) بازه (۲ و ۵) نامتناهی

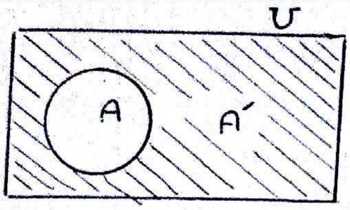
*** مجموعه مرجع (جهانی - مادر):**

در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعهٔ آن باشند، مجموعه مرجع نامیده و با U نشان می‌دهیم.



*** متمم یک مجموعه:**

اگر U مجموعه مرجع و $A \subseteq U$ باشد آنگاه مجموعهٔ $U-A$ را متمم مجموعه A نامیده و با نماد A' نشان می‌دهیم، به عبارت دیگر A' شامل



عضوهایی از U است که در A نیستند.

۱) $A' = U - A$ ۲) $A = U - A'$

۳) $A \cup A' = U$ ۴) $A \cap A' = \emptyset$

۵) $\emptyset' = U$ ۶) $U' = \emptyset$

۷) $(A')' = A$ ۸) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ۹) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

۱۰) $A - B = A \cap B'$

مثال) فرض کنیم $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ مجموعه مرجع و $A = \{1, 5, 6, 7, 9\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 10\}$ باشند مطلوبست محاسبه:

الف) A' ب) $(A')'$ ج) B' د) $A' \cap B'$ هـ) $A' \cup B'$

و) $(A \cup B)'$ ر) $(A \cap B)'$ ز) $A \cap B'$ ط) $A - B$

الف) $A' = \{2, 3, 4, 8, 10\}$

ب) $(A')' = \{1, 5, 6, 7, 9\} = A$

ج) $B' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

د) $A' \cap B' = \{8\}$

هـ) $A' \cup B' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

و) $(A \cup B)' = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\})' = \{8\} = A' \cap B'$

ر) $(A \cap B)' = (\{1\})' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = A' \cup B'$

ز) $A \cap B' = \{5, 6, 7, 9\}$

ط) $A - B = \{1, 5, 6, 7, 9\} - \{1, 2, 3, 4, 10\} = \{5, 6, 7, 9\} = A \cap B'$

* تعداد اعضای یک مجموعه :

اگر A یک مجموعه ی متناهی باشد، تعداد اعضای A را با علامت $n(A)$ نشان می دهیم. ($n(A)$ را عدد اصلی مجموعه A نیز می نامند و با $|A|$ نیز نشان می دهند)

$A=\{۲, ۵, ۷, ۱۱\} \Rightarrow n(A)=۴$ $\quad B=\{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰۰\} \Rightarrow n(B)=۱۰۰$

---

* دو مجموعه هم ارز (معادل) :

دو مجموعه A و B را باهم هم ارز می نامند هرگاه تعداد عضوهایشان باهم برابر باشند و با علامت $A \simeq B$ نشان می دهیم :

$$n(A)=n(B) \Leftrightarrow A \simeq B$$

$A=\{a, b, c, d\} \Rightarrow n(A)=۴$ $\quad B=\{۳, ۱۰, ۱۱, ۱۷\} \Rightarrow n(B)=۴$

$$A \simeq B$$

---

* دو مجموعه جدا از هم :

دو مجموعه A و B را جدا از هم می نامند هرگاه : $A \cap B=\varnothing$

$A=\{۱, ۳, ۵, ۷\}$ $\quad B=\{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\}$ $\quad A \cap B=\varnothing$
(جدا از هم)

---

* تعریف قطعه ای از اعداد طبیعی :

فرض کنیم K یک عدد طبیعی باشد مجموعه $N_K=\{۱, ۲, ۳, \dots, K\}$ را قطعه ای از اعداد طبیعی می نامند.

$N_۵=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ $\quad N_{۵۷}=\{۱, ۲, ۳, \dots, ۵۷\}$

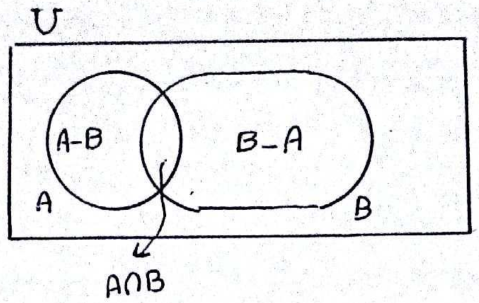
---

* تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه :

اگر A و B دو مجموعه متناهی و $n(A)$ برابر تعداد اعضای A و $n(B)$ برابر تعداد اعضای B باشند در اینصورت تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ را با علامت $n(A \cup B)$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می کنیم :

$$\boxed{n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)}$$

درستی رابطه فوق را می‌توان از روی نمودار ون (ven) بصورت زیر تحقیق کرد :



(حداقل یکی) 1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

2) $n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$

3) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$ (فقط A)

4) $n(A)+n(A')=n(U) \Rightarrow \begin{cases} n(A)=n(U)-n(A') \\ n(A')=n(U)-n(A) \end{cases}$

5) $n($ عضوهایی که فقط در A یا فقط در B باشند. $)=n(A\cup B)-n(A\cap B)=n(A-B)+n(B-A)$

مثال ۱ : در یک کلاس ۳۰ نفری ، ۲۲ نفر از آنها فوتبال بازی می‌کنند و ۱۸ نفر هم والیبال بازی می‌کنند . چند نفر هم فوتبال بازی می‌کنند و هم والیبال ؟

کل $= n(A\cup B)=30$

فوتبال $= n(A)=22$

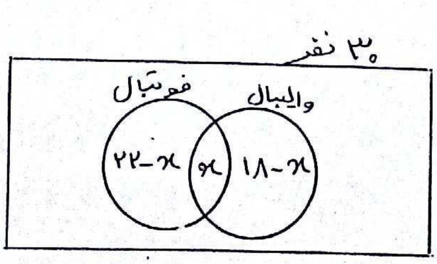
والیبال $= n(B)=18$

هردو $= n(A\cap B)=?$

روش اول : $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$30=22+18-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=10$

روش دوم :



$22-\cancel{x}+\cancel{x}+18-x=30$

$40-x=30 \Rightarrow \boxed{x=10}$

مثال ۲ : در یک جمع ۴۰ نفره ، ۲۰ نفر به چای علاقه دارند و ۱۵ نفر هم چای دوست دارند و هم قهوه ، چند نفر به قهوه علاقه دارند ولی به چای علاقه ندارند ؟

چای $= n(A)=20$

قهوه $= n(B)=?$

هردو $= n(A\cap B)=15$

کل $= n(A\cup B)=40$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$40=20+n(B)-15 \Rightarrow n(B)=35$

$n(B-A)=n(B)-n(B\cap A)=35-15=20$

تذکر مهم : از ۱ تا n چند عدد وجود دارند که بر a بخش‌پذیرند ؛ جواب $=\left[\frac{n}{a}\right]$ خارج قسمت

مثال ۳ : از بین اعداد ۱ تا ۲۰۰ چند عدد وجود دارد که :

الف) بر ۵ یا ۷ بخش‌پذیر باشد؟

ب) بر ۵ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشد؟

ج) نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش‌پذیر باشد؟

بر ۵ بخش‌پذیر $= A = \left[\frac{200}{5}\right] = 40$

بر ۷ بخش‌پذیر $= B = \left[\frac{200}{7}\right] = 28$

بر ۵ و ۷ بخش‌پذیر $= A \cap B = \left[\frac{200}{35}\right] = 5$

بر ۵ یا ۷ بخش‌پذیر $= A \cup B = ?$

الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 40 + 28 - 5 = 63$

ب) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

$= 40 - 5 = 35$

ج) $n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 200 - 63 = 137$

مثال ۴ : در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند؟

$25 - 5 = 20$

عضو فوتبال $= A = 15$

عضو بسکتبال $= B = 11$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$\Rightarrow 20 = 15 + 11 - n(A \cap B)$

$\Rightarrow n(A \cap B) = 6$

مثال ۵ : یک جشنوارهٔ فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم کارتونی و ۸ فیلم طنز وجود دارد. به طوری که ۳ تا از فیلم‌های کارتونی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوبست تعداد کل فیلم‌هایی که :

الف) پویا نمایی یا طنز هستند ب) غیر پویا نمایی و غیر طنزند.

تمام فیلم‌ها $= U = 21$

فیلم کارتونی $= A = 7$

فیلم طنز $= B = 8$

فیلم کارتونی و طنز $= A \cap B = 3$

الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 7 + 8 - 3 = 12$

ب) $n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 21 - 12 = 9$

مثال ۶: در یک شهر، ۳۵٪ مردم روزنامه‌ی A و ۴۵٪ مردم روزنامه B و ۱۰٪ مردم هر دو روزنامه را مطالعه می‌کنند. اگر شخصی یک آگهی در دو روزنامه A و B چاپ کند، حداکثر چند درصد از کل جمعیت این شهر ممکن است این آگهی را ببینند؟

$n(A) = 35\%$

$n(B) = 45\%$

$n(A \cap B) = 10\%$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 35\% + 45\% - 10\% = 70\%$$

مثال ۷: اگر $n(A) + n(B) = 3 \times n(A \cap B)$ باشد حاصل $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$ کدام است؟ (کنکور)

الف) ۲ ب) ۱ ج) ۴ د) ۳

گزینه (الف)

$$n(A) + n(B) = n(A \cap B) + 2 \times n(A \cap B) \Rightarrow n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 2 \times n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = 2 \times n(A \cap B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} = 2$$

مثال ۸: فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند بطوریکه $n(U) = 48$ و $n(A) = 19$ و $n(B) = 21$ ، $n(A \cap B) = 8$ مطلوبست محاسبه:

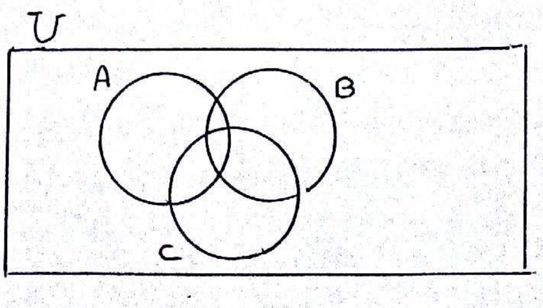
الف) $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 19 - 8 = 11$

ب) $n(A' \cup B') = n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cap B) = 48 - 8 = 40$

---

* فرمول تعداد اعضای اجتماع سه مجموعه:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



مثال: در میان اعداد ۱ تا ۲۱۰ چند عدد یافت می‌شود که بر ۲ یا ۳ یا ۵ بخش‌پذیر باشند؟ (کنکور)

الف) ۱۴۸ ب) ۱۴۷ ج) ۱۵۴ د) ۱۵۲

گزینه (ج) صحیح است.

مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۲ $= A \Rightarrow n(A) = \left[\frac{210}{2}\right] = 105$

مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۳ $= B \Rightarrow n(B) = \left[\frac{210}{3}\right] = 70$

مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۵ $= C \Rightarrow n(C) = \left[\frac{210}{5}\right] = 42$

مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۲ و ۳ $= A\cap B \Rightarrow n(A\cap B) = \left[\frac{210}{2\times 3}\right] = 35$

مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۲ و ۵ $= A\cap C \Rightarrow n(A\cap C) = \left[\frac{210}{2\times 5}\right] = 21$

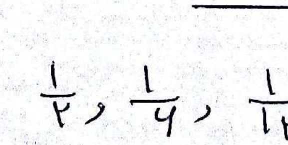
مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۳ و ۵ $= B\cap C \Rightarrow n(B\cap C) = \left[\frac{210}{3\times 5}\right] = 14$

مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۲ و ۳ و ۵ $= A\cap B\cap C \Rightarrow n(A\cap B\cap C) = \left[\frac{210}{2\times 3\times 5}\right] = 7$

$$n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$
$$= 105+70+42-35-21-14+7 = 154$$

الگو:
به هر ساختار منظم از اشکال یا اعداد، الگو می‌گویند.

مثال: با تعدادی چوب کبریت مربع‌های متوالی ساخته‌ایم. الگوی تعداد مربع‌ها و تعداد چوب کبریت‌ها را بیابید.



تعداد چوب کبریت	۴	۷	۱۰	۱۳
تعداد مربع	۱	۲	۳	۴

تعداد چوب کبریت = (تعداد مربع $\times 3$) $+1$

تعداد مربع = (تعداد چوب کبریت -1) $\div 3$

مثال) عددهای مقابل با چه الگویی نوشته شده‌اند؟

$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \ldots$

جواب: $\frac{1}{1\times 2}, \frac{1}{2\times 3}, \frac{1}{3\times 4}, \frac{1}{4\times 5}, \frac{1}{5\times 6}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)}$

هر یک از اعداد الگو را جملات آن الگو می نامند. جمله اول را با t_1 و جمله دوم را با t_2 و ... و جمله n ام را که جمله عمومی نامیده می شود با t_n نشان می دهند.

$$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \ldots$$

$$\underset{t_1}{5}, \underset{t_2}{8}, \underset{t_3}{11}, \underset{t_4}{14}, \ldots, \underset{t_n}{3n+2}, \ldots \qquad t_n = 3n+2$$

مثال ۱) جمله nام دنباله‌ای بصورت $t_n = (-1)^n + \frac{3}{n}$ است. چهار جمله اول این دنباله را بنویسید.

$a_1 = 2 \qquad a_2 = \frac{5}{2} \qquad a_3 = 0 \qquad a_4 = \frac{7}{4}$

مثال ۲) جمله nام دنباله‌ای بصورت $t_n = \frac{3n^2-1}{n+1}$ است چهار جمله اول این دنباله را بنویسید.

$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{11}{3} \qquad a_3 = \frac{26}{4} \qquad a_4 = \frac{47}{5}$

مثال ۳) جمله عمومی دنباله‌ای بصورت $t_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{3n-1}$ می باشد چندمین جمله این دنباله برابر با $(-\frac{3}{7})$ می باشد.

$$t_n = (-\frac{3}{7}) \Rightarrow \frac{(-1)^{\overset{\text{فرد}}{n}}(n+1)}{3n-1} = (-\frac{3}{7}) \Rightarrow \frac{-(n+1)}{3n-1} = (-\frac{3}{7}) \Rightarrow \frac{n+1}{3n-1} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow 9n-3 = 7n+7 \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow \boxed{n=5}$$

مثال ۴) چندمین جمله دنباله با جمله عمومی $t_n = \frac{5n-4}{n+2}$ برابر ۴ می باشد؟

$$t_n = 4 \Rightarrow \frac{5n-4}{n+2} = 4 \Rightarrow 5n-4 = 4n+8 \Rightarrow \boxed{n=12}$$

الگوی خطی:

الگوهایی را که جمله عمومی آنها بصورت $t_n = an + b$ باشد الگوی خطی می نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

ویژگی الگوهای خطی :

۱) فاصله بین جملات ثابت است و برابر ضریب n یعنی a است .

۲) نمودار جملات الگو خط راست است .

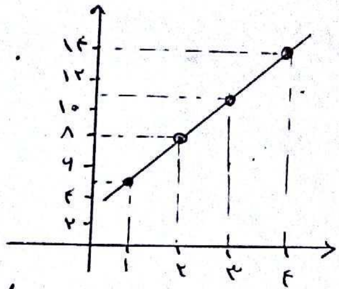
۳) توان n برابر یک است.

مثال) الگوی زیر را در نظر بگیرید:

$$5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \dots,\ 3n+2,\ \dots$$

n	1	2	3	4
t_n	5	8	11	14

$$t_n = 3n+2$$



مثال) در یک الگوی خطی جمله دوم برابر ۷ و جمله ششم برابر (۹-) است. جمله عمومی الگو را بیابید.

$$t_n = an+b$$

$$t_2 = 7 \Rightarrow a(2)+b=7$$
$$t_6 = -9 \Rightarrow a(6)+b=-9$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+b=7 \\ 6a+b=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a=-4 \\ b=15 \end{array} \qquad \boxed{a_n=-4n+15}$$

الگوهای غیرخطی :

الگوهایی که در آنها فاصله بین جملات ثابت نیست و نمودار جملات الگو خط راست نیست. الگوهای غیرخطی نامیده می شوند.

مثال ۱: جمله عمومی الگوی زیر را بدست آورید. آیا این الگو خطی است؟ چرا؟

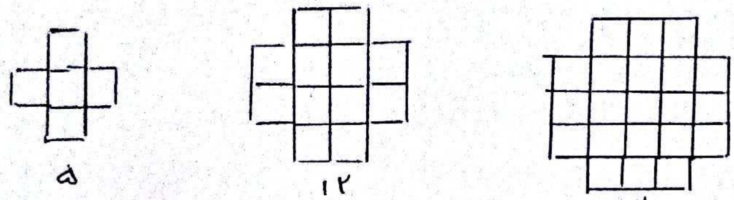
$$5,\ 12,\ 21,\ 32,\ \dots$$

$$t_1 = 5 = (1)^2+4(1)$$
$$t_2 = 12 = (2)^2+4(2)$$
$$t_3 = 21 = (3)^2+4(3)$$

$$t_n = n^2+4n$$

خطی نیست چون فاصله بین جملات ثابت نیست.

مثال) جمله عمومی را در الگوی زیر بدست آورید. آیا این الگو خطی است؟ چرا؟



۵ ۱۲ ۲۱

$t_۱ = ۵ = (۱+۲)^۲ - ۴$ $\qquad t_۲ = (۲+۲)^۲ - ۴$ $\qquad t_۳ = (۳+۲)^۲ - ۴$ $\qquad t_n = (n+۲)^۲ - ۴$

دنباله: تعدادی عدد که پشت سرهم نوشته شوند تشکیل دنباله اعداد را می دهند هر عدد دنباله را یک جمله ی آن دنباله می نامند.

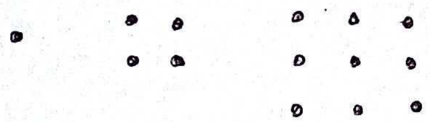
دنباله اعداد طبیعی: ۱, ۲, ۳, ۴, ...

دنباله اعداد اول: ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ...

دنباله اعداد زوج: ۲, ۴, ۶, ۸, ...

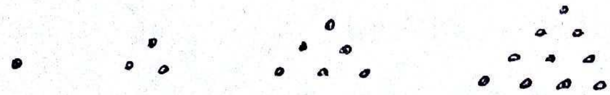
$t_۱, t_۲, t_۳, \ldots, t_{n-۱}, t_n, t_{n+۱}, \ldots$

دنباله اعداد مربعی:



$۱, \quad ۴, \quad ۹, \quad \ldots, n^۲, \ldots$

دنباله اعداد مثلثی:



$۱, \quad ۳, \quad ۶, \quad ۱۰, \quad \ldots, \frac{n(n+۱)}{۲}, \ldots$

دنباله فیبوناتچی:

۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ...

$t_۱ = ۱, \quad t_۲ = ۱ \qquad t_n = t_{n-۱} + t_{n-۲} \quad (n \geq ۳)$

دنباله حسابی (عددی):
دنباله ای که به هر جمله آن (غیر از جمله اول) مقدار ثابتی اضافه شود تا جمله بعدی بدست آید را دنباله حسابی (عددی) نامیده و آن مقدار ثابت را قدر نسبت نامیده و با d نشان می دهند:

$3, 10, 17, 24, 31, \dots \qquad t_1 = 3 \ , \ d = 7$

دنباله حسابی که قدر نسبت آن مثبت باشد را دنباله ی صعودی و اگر قدر نسبت آن منفی باشد را دنباله نزولی می نامند.

$1, 3, 5, 7, \dots \qquad t_1 = 1 \ , \ d = 2$ صعودی

$20, 15, 10, 5, 0, -5, \dots \qquad t_1 = 20 \ , \ d = -5$ نزولی

فرمول جمله ی nام در دنباله حسابی:

$$3 \xrightarrow{+4} 7 \xrightarrow{+4} 11 \xrightarrow{+4} 15, \dots$$

$t_1 \qquad t_2 = t_1 + d \qquad t_3 = t_1 + 2d \qquad t_4 = t_1 + 3d$

$$\boxed{t_n = t_1 + (n-1)d}$$

جمله nام — جمله اول — تعداد جملات — قدر نسبت

مثال ۱: جمله ی اول یک دنباله عددی (-15) و قدر نسبت آن ۸ می باشد
اولاً: جمله بیستم این دنباله را بدست آورید.
ثانیاً: چندمین جمله ی این دنباله برابر ۲۲۵ می باشد.

$t_1 = -15 \ , \ d = 8$

$t_{20} = t_1 + (20-1)d = -15 + 19(8) = 137$

$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow 225 = -15 + (n-1)8 \Rightarrow 225 = -15 + 8n - 8 \Rightarrow \boxed{n = 31}$

مثال ۲: جمله هفدهم یک دنباله عددی ۴۸ و جمله‌ی سی و یکم آن ۹۰ می باشد. این دنباله را مشخص کنید.

$t_{17}=48 \Rightarrow t_1+16d=48 \qquad t_{31}=90 \Rightarrow t_1+30d=90$

$$\begin{cases} t_1+16d=48 \\ t_1+30d=90 \end{cases} \Rightarrow \boxed{d=3} \,,\, \boxed{t_1=0} \qquad 0, 3, 6, 9, 12, \ldots$$

مثال ۳: در یک دنباله حسابی $t_4+t_{11}=10d$ و $t_3+t_7=80$ این دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} t_4+t_{11}=10d \\ t_3+t_7=80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1+3d+t_1+10d=10d \\ t_1+2d+t_1+6d=80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t_1+13d=10d \\ 2t_1+8d=80 \end{cases} \Rightarrow \boxed{t_1=20} \,,\, \boxed{d=5}$$

$20, 25, 30, 35, \ldots$

فرمول قدر نسبت در دنباله‌ی حسابی:

اگر در یک دنباله حسابی جمله n ام (t_n) و جمله‌ی m ام (t_m) مشخص باشد قدر نسبت این دنباله از فرمول زیر بدست می آید:

$$\boxed{d=\frac{t_n-t_m}{n-m}}$$

اثبات: $\dfrac{t_n-t_m}{n-m}=\dfrac{[t_1+(n-1)d]-[t_1+(m-1)d]}{n-m}=\dfrac{t_1+nd-d-t_1-md+d}{n-m}$

$$=\frac{nd-md}{n-m}=\frac{(n-m)d}{n-m}=d$$

مثال) جمله‌ی دوازدهم یک دنباله عددی ۱۲۷ و جمله هفتم آن ۹۲ می باشد، قدر نسبت این دنباله را بدست آورید.

روش I

$$d=\frac{t_{12}-t_7}{12-7}=\frac{127-92}{12-7}=\frac{35}{5}=7$$

روش II

$$\begin{cases} t_1+11d=127 \\ t_1+6d=92 \end{cases} \Rightarrow d=7$$

فرمول تعداد جملات در دنباله حسابی:

تعداد جملات در یک دنباله حسابی متناهی که جمله اول آن t_1 و جمله nام آن t_n و قدرنسبت آن d باشد از فرمول زیر بدست می‌آید:

جمله nام — جمله اول

$$\boxed{n = \left(\frac{t_n - t_1}{d}\right) + 1}$$

تعداد جملات ← n ، قدر نسبت ← d

مثال) تعداد جملات در دنباله زیر چندتا است؟

$$۴۰ , ۴۷ , ۵۴ , \ldots , ۲۰۸$$

$t_1 = ۴۰$

$t_n = ۲۰۸$

$n = ?$, $d = ۷$

$$n = \left(\frac{۲۰۸ - ۴۰}{۷}\right) + ۱ = \frac{۱۶۸}{۷} + ۱ = ۲۴ + ۱ = ۲۵$$

فرمول واسطه حسابی:

اگر a و b و c سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله حسابی باشند b را واسطه عددی بین a و c می‌نامند که از فرمول زیر بدست می‌آید.

دنباله حسابی: $a, b, c, \ldots \Rightarrow \boxed{a + c = ۲b}$ یا $\boxed{b = \frac{a+c}{۲}}$

اثبات: $\begin{cases} b = a + d \\ b = c - d \end{cases} \Rightarrow ۲b = a + c \Rightarrow b = \frac{a+c}{۲}$

مثال ۱: مقدار x را چنان تعیین کنید که سه جمله زیر یک دنباله عددی تشکیل دهند.

$$x^۲ + ۲ , \quad x^۲ + ۸ , \quad ۱۲x - ۶$$

$$۲(x^۲ + ۸) = (x^۲ + ۲) + (۱۲x - ۶) \Rightarrow ۲x^۲ + ۱۶ = x^۲ + ۱۲x - ۴ \Rightarrow x^۲ - \underset{\text{جمع}}{۱۲x} + \underset{\text{ضرب}}{۲۰} = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۲)(x - ۱۰) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = ۱۰ \end{cases}$$

مثال ۲): مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که عبارتهای زیر تشکیل دنباله حسابی بدهند.

$$a+b\ ,\ 2a+b+1\ ,\ 3b+2a-2\ ,\ 5a+b+1$$

$$\begin{cases}(a+b)+(3b+2a-2)=2(2a+b+1)\\(2a+b+1)+(5a+b+1)=2(3b+2a-2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a+2b=4\\3a-4b=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}a=2\\b=3\end{matrix}$$

مثال ۳): بین دو عدد (۷-) و ۲۳ پنج واسطه حسابی درج کنید.

$t_1=-7$

$t_7=23$

$$d=\frac{t_7-t_1}{7-1}=\frac{23-(-7)}{6}=\frac{30}{6}=5=d$$

$$-7\ ,\ -2\ ,\ 3\ ,\ 8\ ,\ 13\ ,\ 18\ ,\ 23$$

فرمول مجموع جملات در دنباله حسابی متناهی:

مجموع n جمله

1) $\boxed{S_n=\frac{n}{2}(t_1+t_n)}$ (زمانی استفاده می‌کنیم که جمله اول و جمله آخر و تعداد جملات مشخص باشد.)

2) $\boxed{S_n=\frac{n}{2}[2t_1+(n-1)d]}$ (زمانی استفاده می‌کنیم که جمله اول و قدرنسبت و تعداد جملات مشخص باشد)

مجموع n جمله

مثال ۱): در یک دنباله حسابی جمله اول برابر (۲۱-) و قدرنسبت برابر ۵ می‌باشد مجموع ۲۰ جمله اول این دنباله را بدست آورید.

$t_1=-21$

$d=5$

$S_{20}=?$

$n=20$

$$S_n=\frac{n}{2}[2t_1+(n-1)d]=\frac{20}{2}[2(-21)+(20-1)5]$$

$$\Rightarrow S_{20}=10(-42+95)=530$$

مثال ۲): مجموع بیست و یک جمله اول یک دنباله عددی برابر ۹۰۳ و جمله هفتم آن ۲۷ می‌باشد جمله اول و قدرنسبت این دنباله را مشخص کنید.

$S_{21}=903 \Rightarrow \frac{21}{2}[2t_1+(21-1)d]=903 \Rightarrow \boxed{2t_1+20d=86}$

$t_7=27 \Rightarrow \boxed{t_1+6d=27}$ $\quad \begin{cases} 2t_1+20d=86 \\ t_1+6d=27 \end{cases} \Rightarrow \boxed{t_1=3}\ \boxed{d=4}$

$a_{10}=56$
$a_6=2a_4$
$t_n=?$

حل چند تمرین مهم

تمرین ۱: مجموع ۵ جمله‌ی متوالی از یک دنباله حسابی ۱۰ و حاصلضرب این جمله‌ها ۳۲۰ است. دنباله را مشخص کنید.

$(x-2d)+(x-d)+x+(x+d)+(x+2d)=10 \Rightarrow 5x=10 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$(x-2d)(x-d)(x)(x+d)(x+2d)=320 \Rightarrow x(x^2-d^2)(x^2-4d^2)=320$

$\Rightarrow 2(4-d^2)(4-4d^2)=320 \Rightarrow 2(4-d^2)4(1-d^2)=320 \Rightarrow (4-d^2)(1-d^2)=40$

$\Rightarrow d^4-5d^2+4=40 \Rightarrow d^4-5d^2-36=0 \Rightarrow (d^2-9)(d^2+4)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} d^2=9 \Rightarrow d=\pm 3 \\ d^2=-4 \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=3\ ,\ x=2 \Rightarrow \dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots \\ d=-3\ ,\ x=2 \Rightarrow \dots, 8, 5, 2, -1, -4, \dots \end{cases}$

تمرین ۲: مجموع سه عدد که تشکیل دنباله حسابی می‌دهند ۲۱ و مجموع مربعات آنها ۱۶۵ می‌باشد. آن سه عدد کدامند؟

$x-d\ ,\ x\ ,\ x+d$

$(x-d)+x+(x+d)=21 \Rightarrow 3x=21 \Rightarrow \boxed{x=7}$

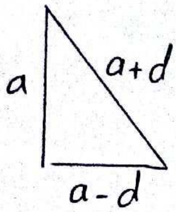
$(x-d)^2+x^2+(x+d)^2=165 \Rightarrow (7-d)^2+7^2+(7+d)^2=165 \Rightarrow$

$49-14d+d^2+49+49+14d+d^2=165 \Rightarrow d^2=9 \Rightarrow d=\pm 3$

$10, 7, 4$ یا $4, 7, 10$

تمرین ۳: اضلاع یک مثلث قائم الزاویه تشکیل یک دنباله حسابی می دهند اگر محیط این مثلث ۳۶ باشد، مساحت آن چقدر است؟

حل: اضلاع مثلث را $a+d$ ، a ، $a-d$ درنظر می گیریم



محیط $= 36 \Rightarrow (a-d)+a+(a+d)=36 \Rightarrow 3a=36 \Rightarrow \boxed{a=12}$

فیثاغورس: $(a-d)^2+a^2=(a+d)^2 \Rightarrow (12-d)^2+12^2=(12+d)^2$

$\Rightarrow 144-24d+d^2+144=144+24d+d^2 \Rightarrow 144=48d \Rightarrow \boxed{d=3}$

اضلاع: $9, 12, 15 \Rightarrow S=\frac{9\times 12}{2}=54$

تمرین ۴: زاویه های داخلی یک ۵ ضلعی محدب تشکیل دنباله حسابی می دهند. اگر اندازه کوچکترین زاویه ۹۲ درجه باشد. اندازه بزرگترین زاویه را بدست آورید.

حل: می دانیم مجموع زاویه های داخلی هر ۵ ضلعی محدب برابر 540° است.

زاویه ها: $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$

$(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=540^\circ \Rightarrow 5a=540^\circ \Rightarrow \boxed{a=108^\circ}$

کوچکترین زاویه $= a-2d=92^\circ \Rightarrow 108^\circ-2d=92^\circ \Rightarrow 2d=16^\circ \Rightarrow \boxed{d=8^\circ}$

بزرگترین زاویه $= a+2d = 108^\circ+2(8^\circ)=124^\circ$

تمرین ۵: ۳۰۰ قرص نان را بین ۵ نفر چنان تقسیم کرده ایم که سهم های دریافت شده تشکیل دنباله حسابی دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگتر مساوی مجموع دو سهم کوچکتر باشد. بیشترین سهم دریافتی نان چند قرص است؟

سهم ها: $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$

$(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=300 \Rightarrow 5a=300 \Rightarrow \boxed{a=60}$

$\frac{1}{3}\left[(60+2d)+(60+d)+60\right]=(60-2d)+(60-d) \Rightarrow \boxed{d=15}$

بیشترین سهم نان $= 60+2(15)=90$

دنباله هندسی:

دنباله ای که هر جمله آن (غیر از جمله اول) در مقدار ثابتی ضرب شود تا جمله بعدی بدست آید را دنباله هندسی می نامند و آن مقدار ثابت را قدر نسبت نامیده و با r (یا q) نشان می دهند.

الف) $2, 6, 18, 54, \ldots \qquad r=3$

ب) $4, -8, 16, -32, \ldots \qquad r=-2$

فرمول جمله n ام در دنباله ی هندسی بصورت زیر است:

$$t_1, \quad t_1 \cdot r, \quad t_1 \cdot r^2, \quad t_1 \cdot r^3, \quad \ldots, \quad t_1 \cdot r^{n-1}$$

$$\boxed{t_n = t_1 \cdot r^{n-1}}$$

تعداد جملات

جمله n ام

جمله اول

قدر نسبت

مثال ۱: جمله دهم در دنباله هندسی $\ldots, 20, 10, 5$ را بیابید.

$t_1 = 5$

$r = 2$

$$t_{10} = t_1 \cdot r^9 = 5 \times 2^9 = 5 \times 512 = 2560$$

مثال ۲: در یک دنباله هندسی جمله هشتم ۸۱ برابر جمله چهارم است. قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید.

$$t_8 = 81 \times t_4 \Rightarrow t_1 r^7 = 81 \times t_1 \cdot r^3 \Rightarrow r^7 = 81 \times r^3 \Rightarrow r^4 = 81 \Rightarrow r = \pm 3$$

فرمول قدر نسبت در دنباله ی هندسی:

اگر جمله n ام (t_n) و جمله m ام (t_m) در یک دنباله هندسی مشخص باشد قدر نسبت دنباله از فرمول زیر بدست می آید:

$$\boxed{r^{n-m} = \frac{t_n}{t_m}}$$

مثال ۱: جمله هفتم یک دنباله هندسی مساوی هشت برابر جمله چهارم آن است. نسبت جمله دوازدهم به جمله هشتم آن را حساب کنید.

$$t_7 = 8\, t_4 \Rightarrow t_1 r^6 = 8 \times t_1 r^3 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow \boxed{r=2}$$

$$\frac{t_{12}}{t_8} = r^{12-8} = r^4 = 2^4 = 16$$

مثال ۲ : در یک دنباله هندسی جمله ششم ۵۳ و جمله هشتم ۴۷۷ می باشد قدر نسبت را بدست آورید.

$$r^{8-6} = \frac{t_8}{t_6} \Rightarrow r^2 = \frac{477}{53} \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow \boxed{r = \pm 3}$$

مثال ۳ : حاصل ضرب ۱۰۰ جمله از دنباله هندسی ... , ۱۲۵ , ۲۵ , ۵ را بدست آورید

$$5^1 \times 5^2 \times 5^3 \times \cdots \times 5^{100} = 5^{1+2+3+\cdots+100} = 5^{\frac{100\times 101}{2}} = 5^{5050}$$

واسطه هندسی :

اگر a و b و c سه جمله ی متوالی از یک دنباله هندسی باشند b را واسطه هندسی بین a و c می نامند و بین آنها رابطه زیر برقرار است :

$$\text{دنباله هندسی } a, b, c \Rightarrow \boxed{b^2 = a.c} \quad \text{یا} \quad \boxed{b = \sqrt{a.c}}$$

مثال ۱ : مقدار x را چنان تعیین کنید که سه عبارت $x-1$ و $2x+6$ و $4x+44$ تشکیل یک دنباله هندسی بدهند.

$$b^2 = ac \Rightarrow (2x+6)^2 = (x-1)(4x+44) \Rightarrow 4x^2+24x+36 = 4x^2+44x-4x-44$$

$$\Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

مثال ۲ : بین ۱۰ و ۳۲۰ چهار واسطه هندسی درج کنید

۱۰ , ○ , ○ , ○ , ○ , ۳۲۰

$$\begin{aligned} t_1 &= 10 \\ t_6 &= 320 \end{aligned} \Rightarrow \frac{t_6}{t_1} = r^{6-1} \Rightarrow \frac{320}{10} = r^5 \Rightarrow r^5 = 32 \Rightarrow \boxed{r = 2}$$

۱۰ , ۲۰ , ۴۰ , ۸۰ , ۱۶۰ , ۳۲۰

فرمول مجموع جملات در دنباله هندسی :

اگر در یک دنباله هندسی جمله اول برابر t_1 و جمله ی n ام برابر t_n و قدر نسبت برابر r باشد مجموع n جمله اول را با S_n نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می کنیم :

$$S_n = \frac{t_1(r^n - 1)}{r-1} \quad \text{یا} \quad \boxed{S_n = \frac{t_1(1-r^n)}{1-r}}$$

مثال ۱ : در یک دنباله هندسی $t_1=3$ و $r=4$ ، $n=5$ است. t_n و S_n را بدست آورید.

$$t_5=t_1 \cdot r^4 \Rightarrow t_5=3\times 4^4=768$$

$$S_5=\frac{t_1(r^5-1)}{r-1}=\frac{3(4^5-1)}{4-1}=4^5-1=1023$$

مثال ۲ : در یک دنباله هندسی $t_1=6$ و $r=2$ است مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله را بدست آورید.

$$S_{10}=\frac{t_1(r^{10}-1)}{r-1}=\frac{6(2^{10}-1)}{2-1}=6(2^{10}-1)=6(1024-1)=6\times 1023=6138$$

مثال ۳ : در یک دنباله هندسی $t_5-t_1=20$ و $S_4=10$ است. قدر نسبت دنباله را بدست آورید.

$$t_5-t_1=20 \Rightarrow t_1 \cdot r^4-t_1=20 \Rightarrow t_1(r^4-1)=20$$

$$S_4=\frac{t_1(r^4-1)}{r-1} \Rightarrow 10=\frac{20}{r-1} \Rightarrow r-1=2 \Rightarrow \boxed{r=3}$$

مثال ۴ : در یک دنباله هندسی جمله اول ۲ و مجموع ۶ جمله اول ۲۸ برابر مجموع ۳ جمله اول است. قدر نسبت و جمله پنجم را بدست آورید.

$$S_6=28\times S_3 \Rightarrow \frac{t_1(r^6-1)}{r-1}=28\times\frac{t_1(r^3-1)}{r-1} \Rightarrow r^6-1=28(r^3-1)$$

$$\Rightarrow (r^3+1)(r^3-1)=28(r^3-1) \Rightarrow r^3+1=28 \Rightarrow r^3=27 \Rightarrow \boxed{r=3}$$

$$t_5=t_1\times r^4=2\times 3^4=2\times 81=162$$

مثال ۵ : حاصلضرب سه عدد که تشکیل دنباله هندسی می دهند برابر ۲۷۴۴ و مجموع آنها ۴۹ می باشد. آن سه عدد کدامند؟

$$\frac{x}{r}\times x\times xr=2744 \Rightarrow x^3=2744 \Rightarrow \boxed{x=14}$$

$$\frac{14}{r}+14+14r=49 \Rightarrow 2r^2-5r+2=0 \Rightarrow \boxed{r=2} \text{ یا } \boxed{r=\frac{1}{2}}$$

۲۸ ، ۱۴ ، ۷

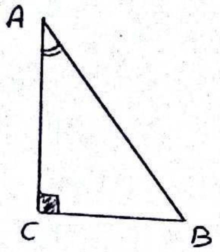
فرمول حد مجموع جملات در یک دنباله هندسی نامتناهی :

$$S=\frac{t_1}{1-r} \quad |r|<1$$

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=\frac{t_1}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

«مثلثات»

در هر مثلث قائم الزاویه، نسبتهای مثلثاتی هر یک از زاویه‌های تند مثلث را که عبارتند از: سینوس و کسینوس و تانژانت و کتانژانت به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



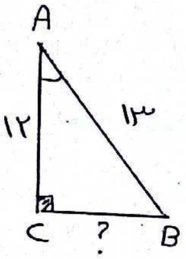
$$\text{سینوس} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{کسینوس} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} \Rightarrow \cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{تانژانت} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \tan A = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{کتانژانت} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} \Rightarrow \cot an A = \frac{AC}{BC}$$

مثال ۱: با توجه به شکل مقابل نسبتهای مثلثاتی زاویه $\hat{A}$ را بدست آورید.



$BC^2 + 12^2 = 13^2$

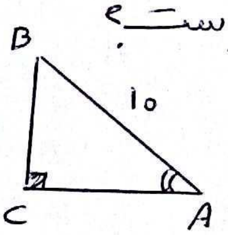
$BC^2 + 144 = 169$

$BC^2 = 25 \Rightarrow \boxed{BC = 5}$

$\sin A = \frac{5}{13}$, $\cos A = \frac{12}{13}$

$\tan A = \frac{5}{12}$, $\cot an A = \frac{12}{5}$

مثال ۲: طول وتر یک مثلث قائم الزاویه ۱۰ سانتیمتر و سینوس یکی از زاویه‌های آن $\frac{3}{5}$ است. محیط مثلث چند سانتیمتر است؟



$\sin A = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{BC}{10} \Rightarrow \boxed{BC = 6}$

$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow AC^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow \boxed{AC = 8}$

$\text{محیط} = 6 + 8 + 10 = 24$

جدول نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های 30° و 45° و 60°:

نسبت \ زاویه	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot an\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال ۱: مقدار عددی عبارت‌های زیر را بدست آورید

$$A=\frac{2\sin^2 60^\circ-3\cos^2 45^\circ}{1+4\tan 60^\circ \tan 30^\circ}=$$

$$B=\frac{2\cos^2 30^\circ-2\sin 30^\circ}{2\tan 45^\circ+3\cos^2 60^\circ}=$$

$$C=\sin 30^\circ \cos 60^\circ+\cos 30^\circ \sin 60^\circ=$$

$$D=4\cos 30^\circ \sin 60^\circ-\tan 45^\circ \tan 60^\circ+\sin 45^\circ \cos 45^\circ=$$

$$E=4\cos 30^\circ-4\sin^2 60^\circ=$$

$$F=\frac{\tan 60^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 60^\circ \tan 30^\circ}=$$

$$G=4\sin 60^\circ . \cos 60^\circ+2\sin 45^\circ \cos 45^\circ=$$

مثال ۲: درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

الف) $\sin 30^\circ \cos 60^\circ+\cos 30^\circ \sin 60^\circ=\tan 45^\circ$

ب) $\dfrac{\cos 30^\circ+2\sin 30^\circ-\tan 45^\circ}{\tan 45^\circ-\cos 60^\circ}=\tan 60^\circ$

ب) $4\sin 60^\circ \cos 30^\circ - 3\tan 45^\circ + \tan^2 60^\circ = 3$

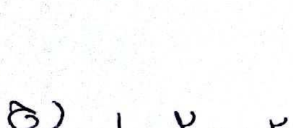
ت) $\sin 30^\circ \tan 60^\circ = \sqrt{3}\sin^2 45^\circ$

ث) $\tan 45^\circ + \sin 30^\circ \operatorname{cotan} 45^\circ = \frac{3}{2}$

ج) $3\cos 30^\circ - 4\cos^3 30^\circ = 0$

چ) $1 - 2\sin^2 30^\circ = 2 - 2\sin^2 60^\circ$

مثال ۳: هواپیمایی در ارتفاع ۳۰۰۰ متری در حال پرواز است. این هواپیما وقتی به فاصلهٔ ۵ کیلومتری باند فرود می‌رسد روی یک خط شروع به پایین آمدن می‌کند. تانژانت زاویه‌ای که مسیر این هواپیما با زمین می‌سازد چقدر است؟



$$3000\,m = 3\,Km$$

$$\tan\theta = \frac{3}{5} = 0.6$$

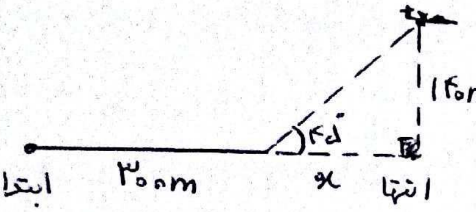
مثال ۴: با توجه به شکل اندازه BC را به دست آورید.

حل: ارتفاع BH را رسم می‌کنیم:

$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{BH}{30} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{30} \Rightarrow BH = 15\sqrt{3} \simeq 25.5$$

$$\sin 65^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow 0.9 = \frac{25.5}{BC} \Rightarrow BC = \frac{25.5}{0.9} \simeq 28.3$$

مثال ۵: هواپیمایی می‌خواهد از باند بلند شود. ابتدا ۳۰۰ متر روی باند حرکت می‌کند تا سرعت لازم را پیدا کند سپس با زاویه‌ی ۴۵° از زمین بلند می‌شود وقتی به بالای انتهای باند می‌رسد ۱۴۰ متر ارتفاع گرفته است طول کل باند چقدر است؟

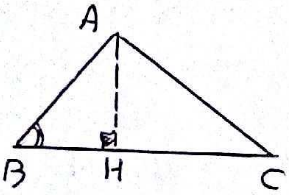


$$\tan 45^\circ = \frac{140}{x} \Rightarrow 1 = \frac{140}{x} \Rightarrow x = 140\,m$$

طول باند $= 300 + 140 = 440\,m$

فرمول مساحت مثلث:

ثابت کنید مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصلضرب دو ضلع آن در سینوس زاویه بین همان دو ضلع:



$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times$ قاعده $\times$ ارتفاع $= \frac{1}{2} BC \times AH$

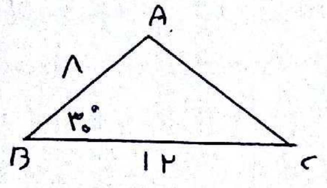
از طرفی: $\sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \cdot \sin B$

$$\Rightarrow \boxed{S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AB \cdot \sin B}$$

بطور کلی در مثلث $\triangle ABC$:

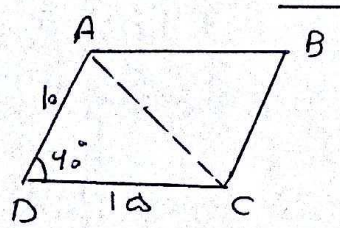
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin C$$

مثال ۱: مساحت مثلث $\triangle ABC$ را بیابید.



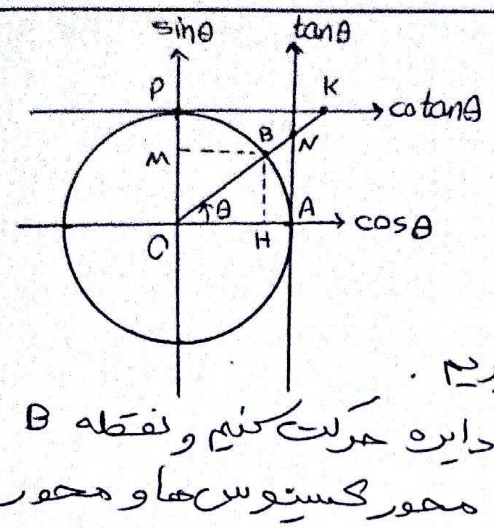
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \frac{1}{2} = 24$$

مثال ۲: مساحت متوازی الاضلاع مقابل را بیابید.



$$S_{ABCD} = 2 \times S_{\triangle ACD} = 2 \times \frac{1}{2} \times 15 \times 10 \times \sin 60^\circ$$

$$= 15 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 75\sqrt{3}$$



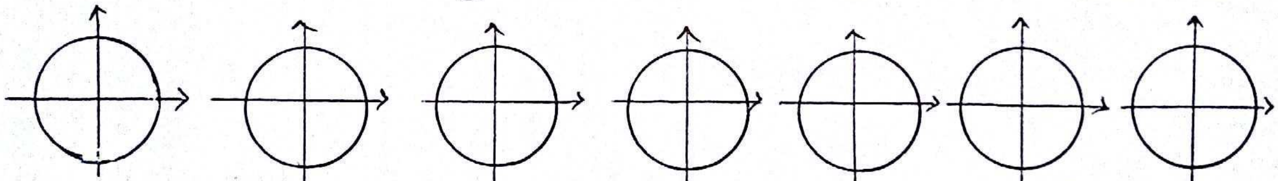
دایره مثلثاتی :

دایره‌ای است به شعاع واحد که نقطه A را به عنوان مبدا حرکت کمانها روی آن درنظر می‌گیریم. جهت حرکت عقربه‌های ساعت را جهت منفی و خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت را جهت مثبت درنظر می‌گیریم.

اگر از نقطه A و در جهت مثبت مثلثاتی روی دایره حرکت کنیم و به نقطه B برسیم زاویه θ تشکیل می‌شود. محور xها را محور کسینوس‌ها و محور yها را محور سینوسها درنظر می‌گیریم. مماس بر دایره مثلثاتی و موازی محور سینوسها را محور تانژانت‌ها و مماس بر دایره مثلثاتی و موازی محور کسینوسها را محور کتانژانت‌ها درنظر می‌گیریم مطابق شکل :

$\sin\theta = OM$ $\cos\theta = OH$ $\tan\theta = AN$ $\cot\theta = PK$

مثال) هر یک از زاویه‌های داده شده را روی دایره مثلثاتی نمایش دهید.



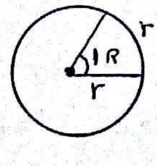
$\theta = 120^\circ$ $\theta = 90^\circ$ $\theta = 150^\circ$ $\theta = -130^\circ$ $\theta = -210^\circ$ $\theta = 450^\circ$ $\theta = -500^\circ$

واحدهای اندازه‌گیری زاویه :

۱) درجه (D) : اگر یک زاویه نیم صفحه را به ۱۸۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک درجه می‌نامند.

۲) گراد (G) : اگر یک زاویه نیم صفحه را به ۲۰۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک گراد می‌نامند.

۳) رادیان (R) : یک رادیان برابر کمانی از دایره است که اندازه آن برابر شعاع دایره باشد.



رابطه بین واحدهای اندازه‌گیری زاویه :

$$\boxed{\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}}$$

مثال) ۴۰ درجه برابر چند گراد و چند رادیان است؟

$$\frac{D}{180}=\frac{G}{200} \Rightarrow \frac{40}{180}=\frac{G}{200} \Rightarrow G=\frac{40\times 200}{180}=\frac{200}{3}\simeq 44{,}4$$

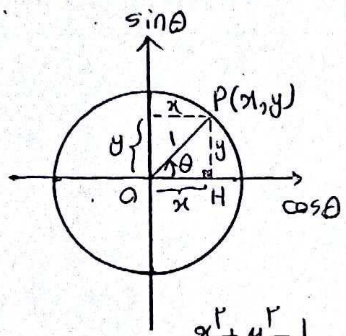
$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{40}{180}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow R=\frac{40\pi}{180} \Rightarrow R=\frac{\pi}{3}$$

مثال) ۱۵۰ درجه چند گراد چند رادیان است؟

$$\frac{D}{180}=\frac{G}{200} \Rightarrow \frac{150}{180}=\frac{G}{200} \Rightarrow G=\frac{150\times 200}{180}\simeq 144{,}4$$

$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{150}{180}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow R=\frac{150\pi}{180} \Rightarrow R=\frac{5\pi}{4}$$

بطورکلی: ۱۸۰ درجه = ۲۰۰ گراد = π رادیان



$x^2+y^2=1$

فرض کنید $P(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه روی دایره مثلثاتی روبرو باشد و θ زاویه‌ای است که نیم خط OP با محور x در جهت مثبت می‌سازد. از نقطه P عمودهایی بر محور xها و yها رسم می‌کنیم

مطابق شکل در مثلث OPH داریم:

$$\cos\theta=x \quad , \quad \sin\theta=y \quad , \quad \tan\theta=\frac{y}{x} \quad , \quad \cot an\theta=\frac{x}{y}$$

مثال ۱: اگر θ زاویه‌ای در جهت مثبت مثلثاتی باشد بطوریکه نقطه انتهایی کمان θ دایره مثلثاتی را در نقطه $P(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ قطع کند نسبتهای مثلثاتی θ را بدست آورید.

$x=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$y=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\sin\theta=y=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{-2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\theta=x=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=-\frac{2}{1}=-2$$

$$\cot an\theta=\frac{x}{y}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}}=-\frac{1}{2}$$

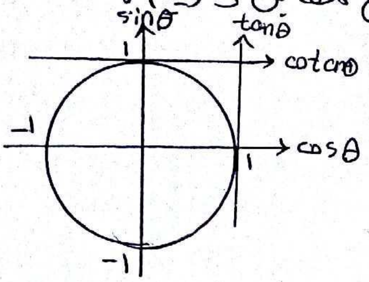
مثال ۲: اگر θ زاویه‌ای در جهت مثبت مثلثاتی باشد و انتهای کمان θ دایره مثلثاتی را در نقطه $P(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ قطع کند نسبتهای مثلثاتی θ را بیابید.

$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\theta = y = -\frac{1}{2}$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$y = -\frac{1}{2}$ $\cos\theta = x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cot an\theta = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

جدول نسبتهای مثلثاتی $0°$ و $90°$ و $180°$ و $270°$ و $360°$:

می دانیم شعاع دایره مثلثاتی برابر یک است طبق شکل مقابل داریم:



نسبت ↓ \ زاویه →	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
$\cot an\theta$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

$0° < \theta < 90° \iff$ θ در ربع اول $90° < \theta < 180° \iff$ θ در ربع دوم

$180° < \theta < 270° \iff$ θ در ربع سوم $270° < \theta < 360° \iff$ θ در ربع چهارم

نکته ریاضی: به ازای هر زاویه دلخواه θ داریم:

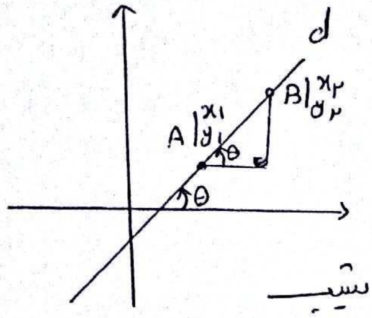
$-1 \leq \sin\theta \leq 1$ و $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

علامت نسبتهای مثلثاتی:

نسبت ↓ \ ربع →	ربع اول $x>0, y>0$	ربع دوم $x<0, y>0$	ربع سوم $x<0, y<0$	ربع چهارم $x>0, y<0$
$y = \sin\theta$	+	+	−	−
$x = \cos\theta$	+	−	−	+
$\frac{y}{x} = \tan\theta$	+	−	+	−
$\frac{x}{y} = \cot an\theta$	+	−	+	−

مثال) حاصل عبارت مقابل را بدست آورید.

$$A=\frac{2\sin 90^\circ+3\cos 270^\circ-\operatorname{tg}360^\circ}{1+2\cos 180^\circ+\sin 270^\circ}=\frac{2\times 1+3\times 0-0}{1+2(-1)+(-1)}=\frac{2}{-2}=-1$$



شیب خط و رابطه آن با تانژانت زاویه:

از نظر هندسی شیب هر خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با محور xها در جهت مثبت مثلثاتی می‌سازد.

$$\left.\begin{aligned}\text{شیب}&=m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\\ \tan\theta&=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{شیب}=m=\tan\theta$$

مثال) خط d با محور xها در جهت مثبت مثلثاتی زاویه 30° ساخته است شیب خط چقدر است؟

$$m=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

نکته ریاضی: معادله خطی که از نقطه $A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ گذشته و شیب آن برابر m باشد از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

مثال) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A\left|\begin{matrix}\sqrt{3}\\2\end{matrix}\right.$ گذشته و با محور xها زاویه 60° بسازد.

$m=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

$A\left|\begin{matrix}\sqrt{3}\to x_1\\2\to y_1\end{matrix}\right.$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-2=\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$$

$$y-2=\sqrt{3}x-3\Rightarrow \boxed{y=\sqrt{3}x-1}$$

مثال) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$ گذشته و با محور xها زاویه 45° بسازد.

$m=\tan 45^\circ=1$

$A\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$\Rightarrow y-2=1(x-(-1))$$

$$\Rightarrow y-2=x+1$$

$$\Rightarrow \boxed{y=x+3}$$

نکته ریاضی: اگر معادله خطی بصورت $ax+by=c$ باشد دراینصورت:

$$\text{شیب} = m = -\frac{a}{b} = -\frac{x \text{ ضریب}}{y \text{ ضریب}}$$

مثال) خط $3x-\sqrt{3}y=7$ با محور xها چه زاویه‌ای را درجهت مثبت مثلثاتی می‌سازد؟

$$\text{شیب} = m = -\frac{3}{-\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$m=\tan\theta \Rightarrow \tan\theta=\sqrt{3} \Rightarrow \theta=60^\circ$$

مثال) خط $5x-5y=8$ با محور xها درجهت مثبت مثلثاتی چه زاویه‌ای می‌سازد؟

$$\text{شیب} = m = -\frac{5}{-5} = 1$$

$$m=\tan\theta \Rightarrow \tan\theta=1 \Rightarrow \theta=45^\circ$$

روابط بین نسبتهای مثلثاتی:

۱) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\theta=1-\cos^2\theta \\ \cos^2\theta=1-\sin^2\theta \end{cases}$

۲) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ۳) $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

۴) $\tan\theta \cdot \cot\theta=1 \Rightarrow \begin{cases} \tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta} \\ \cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases}$

۵) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ ۶) $1+\cot^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

۷) $\hat{A}+\hat{B}=90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin A=\cos B \\ \cos A=\sin B \\ \tan A=\cot B \\ \cot A=\tan B \end{cases}$ $15^\circ+75^\circ=90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin 15^\circ=\cos 75^\circ \\ \cos 15^\circ=\sin 75^\circ \\ \tan 15^\circ=\cot 75^\circ \\ \cot 15^\circ=\tan 75^\circ \end{cases}$

مثال ۱) : اگر θ یک زاویه حاده و $\sin\theta=\frac{2}{3}$ باشد مقدار $\cos\theta$ و $\tan\theta$ و $\cot an\theta$ را بدست آورید.

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\Rightarrow\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{5}{9}}=\pm\frac{\sqrt5}{3}\xrightarrow[\text{(ربع اول)}]{\theta\ \text{حاده}}\cos\theta=\frac{\sqrt5}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt5}{3}}=\frac{2}{\sqrt5}=\frac{2\sqrt5}{5}\qquad \cot an\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{\sqrt5}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt5}{2}$$

مثال ۲) اگر θ زاویه‌ای در ربع سوم و $\cos\theta=-\frac{3}{5}$ باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را بدست آورید.

حل : در ربع سوم سینوس و کسینوس هر دو منفی است.

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\Rightarrow\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}\xrightarrow[\text{سوم}]{\theta\ \text{در ربع}}\sin\theta=-\frac{4}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}\qquad \cot an\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$$

مثال ۳) اگر $\tan\theta=\frac{1}{2}$ و θ یک زاویه حاده باشد سایر نسبتهای مثلثاتی زاویه θ را بدست آورید.

$$\tan\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\cot an\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\Rightarrow\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{4}{5}}=\pm\frac{2}{\sqrt5}=\pm\frac{2\sqrt5}{5}\xrightarrow[\text{حاده}]{\theta}\cos\theta=\frac{2\sqrt5}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{\sin\theta}{\frac{2\sqrt5}{5}}\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt5}{5}\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt5}{5}$$

مثال ۴) اگر $\sin\theta=2a+b$ و $\cos\theta=a-2b$ باشد چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟

می‌دانیم : $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow(2a+b)^2+(a-2b)^2=1$

$$\Rightarrow 4a^2+\cancel{4ab}+b^2+a^2-\cancel{4ab}+4b^2=1\Rightarrow 5a^2+5b^2=1$$

$$\Rightarrow 5(a^2+b^2)=1\Rightarrow a^2+b^2=\frac{1}{5}$$

مثال ۵) اگر $\tan\theta = 2$ باشد حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$A = \frac{3\sin^2\theta + 2\cos^2\theta}{5\sin^2\theta - 4\cos^2\theta} = \frac{\frac{3\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{2\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}{5\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \frac{4\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{3\tan^2\theta + 2}{5\tan^2\theta - 4}$$

$$= \frac{3(2)^2 + 2}{5(2)^2 - 4} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

مثال ۶) اگر $\frac{\tan\theta + 4}{2\tan\theta + 1} = 3$ حاصل عبارت $A = \frac{\sin\theta + 3\cos\theta}{3\sin\theta - 6\cos\theta}$ را بدست آورید.

$$\frac{\tan\theta + 4}{2\tan\theta + 1} = 3 \Rightarrow \tan\theta + 4 = 6\tan\theta + 3 \Rightarrow 5\tan\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos\theta = 5\sin\theta$$

$$A = \frac{\sin\theta + 3(5\sin\theta)}{3\sin\theta - 6(5\sin\theta)} = \frac{16\sin\theta}{-27\sin\theta} = -\frac{16}{27}$$

مثال ۷: درستی تساوی های زیر را ثابت کنید:

A) $1 - \frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta} = \sin\theta$

$$\text{سمت چپ} = 1 - \frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta} = 1 - \frac{1-\sin^2\theta}{1+\sin\theta} = 1 - \frac{(1-\sin\theta)\cancel{(1+\sin\theta)}}{\cancel{1+\sin\theta}} = 1-(1-\sin\theta) = \sin\theta$$

سمت راست

B) $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2}{\sin\theta}$

$$\text{سمت چپ} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{2 + 2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{2}{\sin\theta} = \text{سمت راست}$$

C) $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \cdot \sin^2\theta$

$$\text{سمت چپ} = \tan^2\theta - \sin^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta = \frac{\sin^2\theta - \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}(1-\cos^2\theta) = \tan^2\theta \cdot \sin^2\theta = \text{سمت راست}$$

D) $\frac{\cos\theta}{tg\theta} + \sin\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$$\text{سمت چپ} = \frac{\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \sin\theta = \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \sin\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} = \text{سمت راست}$$

E) $\frac{۲\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = ۲\sin\theta.\cos\theta$

$$\text{سمت چپ} = \frac{۲\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{1+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^۲} = \frac{\frac{۲\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos^۲\theta+\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}} = \frac{\frac{۲\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos^۲\theta}} = \frac{۲\sin\theta.\cos^۲\theta}{\cos\theta} = ۲\sin\theta.\cos\theta$$

F) $\cos^۲\theta - \sin^۲\theta = 1 - ۲\sin^۲\theta$

$$\text{سمت چپ} = \cos^۲\theta - \sin^۲\theta = 1 - \sin^۲\theta - \sin^۲\theta = 1 - ۲\sin^۲\theta = \text{سمت راست}$$

G) $\sin^۴\theta - \cos^۴\theta = ۲\sin^۲\theta - 1$

$$\text{سمت چپ} = (\sin^۲\theta)^۲ - (\cos^۲\theta)^۲ = (\underbrace{\sin^۲\theta + \cos^۲\theta}_{1})(\sin^۲\theta - \cos^۲\theta) = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta$$

$$= \sin^۲\theta - (1 - \sin^۲\theta) = \sin^۲\theta - 1 + \sin^۲\theta = ۲\sin^۲\theta - 1$$

H) $(\sin\theta + \cos\theta)^۲ + (\sin\theta - \cos\theta)^۲ = ۲$

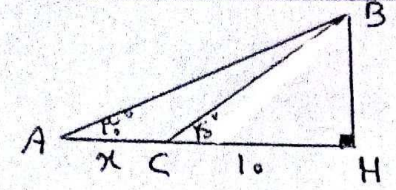
$$\text{سمت چپ} = \sin^۲\theta + \cancel{۲\sin\theta.\cos\theta} + \cos^۲\theta + \sin^۲\theta - \cancel{۲\sin\theta.\cos\theta} + \cos^۲\theta = 1+1 = ۲$$

مثال ۸) اگر $\frac{۲}{\sin\theta} + \frac{۳}{\cos\theta} = ۰$ باشد حاصل $tg\theta + cotg\theta$ را بدست آورید.

$$\frac{۲}{\sin\theta} + \frac{۳}{\cos\theta} = ۰ \Rightarrow \frac{۲}{\sin\theta} = -\frac{۳}{\cos\theta} \Rightarrow ۲\cos\theta = -۳\sin\theta \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow tg\theta = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow cotg\theta = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow tg\theta + cotg\theta = -\frac{۲}{۳} + \left(-\frac{۳}{۲}\right) = \frac{-۴۹}{۶} = \frac{-۱۳}{۶}$$

مثال ۹) در شکل مقابل مقدار x را بیابید.
($\sqrt{3}\approx 1.7$ و $tg\,40^\circ = 0.83$)

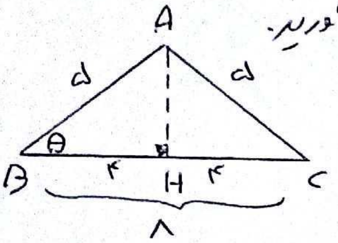


$$tg\,40^\circ = \frac{BH}{10} \Rightarrow 0.83 = \frac{BH}{10} \Rightarrow BH = 10\times 0.83 \Rightarrow \boxed{BH = 8.3}$$

$$tg\,30^\circ = \frac{BH}{x+10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{8.3}{x+10} \Rightarrow 1.7(x+10) = 3\times 8.3 \Rightarrow 1.7x+17 = 24.9$$

$$\Rightarrow 1.7x = 7.9 \Rightarrow \boxed{x = 4.6}$$

مثال ۱۰) در مثلث مقابل مقدار $2\cos\theta+\sin\theta$ را بدست آورید.

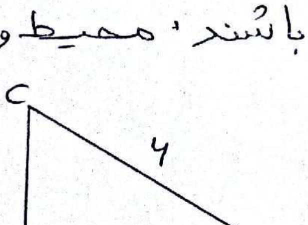


حل: می دانیم در مثلث متساوی الساقین ارتفاع، نیمساز و میانه بر هم منطبق هستند.
ارتفاع AH را رسم می کنیم:

$$\overset{\triangle}{ABH}: AH^2+BH^2=AB^2 \Rightarrow AH^2+16=25 \Rightarrow AH^2=9 \Rightarrow \boxed{AH=3}$$

$$\sin\theta = \frac{AH}{AB} = \frac{3}{5} \qquad \cos\theta = \frac{BH}{AB} = \frac{4}{5} \qquad 2\cos\theta+\sin\theta = \frac{8}{5}+\frac{3}{5} = \frac{11}{5}$$

مثال ۱۱) در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، $\hat{A}=90^\circ$، $tg\,B=\frac{\sqrt{5}}{2}$ و $BC=6$ می باشند، محیط و مساحت مثلث را بدست آورید.



$$tg\,B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{5}}{2}AB$$

$$AB^2+AC^2=6^2 \Rightarrow AB^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}AB\right)^2=36 \Rightarrow AB^2+\frac{5}{4}AB^2=36$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}AB^2=36 \Rightarrow AB^2=\frac{4\times 36}{9}=16 \Rightarrow \boxed{AB=4} \Rightarrow AC=\frac{\sqrt{5}}{2}\times 4 \Rightarrow \boxed{AC=2\sqrt{5}}$$

محیط $= 6+4+2\sqrt{5} = 10+2\sqrt{5}$ مساحت $= \frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

فصل ۳ : توانهای گویا و عبارتهای جبری :

ریشه n ام :

فرض کنیم $n \geq 2$ عددی طبیعی باشد . در اینصورت عدد حقیقی b را یک ریشه n ام عدد حقیقی a می گویند هرگاه $b^n = a$ باشد

مثال) ریشه سوم ۲۷ برابر ۳ است زیرا : $۳^۳ = ۲۷$

ریشه پنجم (۳۲-) برابر (۲-) است زیرا : $-۳۲ = (-۲)^۵$

ریشه چهارم ۱۶ برابر (۲±) است زیرا : $۱۶ = (\pm ۲)^۴$

اگر n زوج باشد عدد حقیقی و مثبت a دارای دو ریشه n ام می باشد که قرینه یکدیگرند . در این حالت ریشه n ام مثبت را ریشه n ام اصلی نامیده و آن را با رادیکال بصورت $\sqrt[n]{a}$ نشان می دهند $\sqrt[۴]{۸۱} = ۳$

اعداد منفی دارای ریشه n ام زوج نیستند ولی ریشه n ام فرد دارند .

$\sqrt[۴]{-۱۶} =$ وجود ندارد $\qquad \sqrt[۵]{-۳۲} = -۲$

تمرین : کامل کنید :

۱) $\sqrt[۳]{۶۴} =$

۲) $\sqrt[۶]{۶۴} =$

۳) $\sqrt[۵]{۱۰۲۴} =$

۴) $\sqrt[۴]{۰/۰۶۲۵} =$

۵) $\sqrt{\dfrac{۱۲۱}{۱۰۰}} =$

۶) $\sqrt[۳]{\dfrac{۱}{x^۳}} =$

۷) $\sqrt{\dfrac{۳۶}{۲۵}} =$

۸) $\sqrt[۳]{۲\dfrac{۱۰}{۲۷}}$

۹) $\sqrt[۳]{(۲\sqrt{۲})^۲} =$

۱۰) $\sqrt{۸\sqrt{۴\sqrt[۳]{۶۴}}} =$

فرمولهای رادیکالها :

۱) $\sqrt{a^۲} = |a|$

۲) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{فرد } n \\ |a| & \text{زوج } n \end{cases}$

۳) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

۴) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

مثال) $\sqrt[۵]{۲} \times \sqrt[۵]{۱۶} = \sqrt[۵]{۳۲} = ۲$

مثال) $\dfrac{\sqrt[۳]{۸۱}}{\sqrt[۳]{۳}} = \sqrt[۳]{\dfrac{۸۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲۷} = ۳$

۵) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

مثال) $\sqrt[3]{5^{18}} = 5^{\frac{18}{3}} = 5^6$

۶) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

۷) $a>1 \Rightarrow \dots < \sqrt[4]{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots$

$\dots < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2} < 2 < 2^2 < 2^3 < 2^4 < \dots$

۸) $0<a<1 \Rightarrow \dots < a^4 < a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \dots$

$\left(\frac{1}{4}\right)^2 < \frac{1}{4} < \sqrt{\frac{1}{4}}$

۹) $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n \pm b} \simeq a \pm \frac{b}{na^{n-1}}$

$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64+1} = \sqrt[3]{4^3+1} \simeq 4 + \frac{1}{3\times 4^2} = 4+0/02 = 4/02$

$\sqrt[5]{30} = \sqrt[5]{32-2} = \sqrt[5]{2^5-2} \simeq 2 - \frac{2}{5\times 2^4} = 2-0/02 = 1/98$

$\sqrt[3]{31} = \sqrt[3]{27+4} = \sqrt[3]{3^3+4} \simeq 3 + \frac{4}{3\times 3^2} = 3+0/14 = 3/14$

$\sqrt[7]{125} = \sqrt[7]{2^7-3} \simeq 2 - \frac{3}{7\times 2^6} = 2-0/01 = 1/99$

$\sqrt{8} = \sqrt{3^2-1} = 3 - \frac{1}{2\times 3^1} = 3-0/17 = 2/83$

۱۰) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$

تمرین: حاصل کنید:

۱) $\sqrt[3]{125}=$

۲) $\sqrt[5]{-32}=$

۳) $\sqrt[7]{128}=$

۴) $\sqrt[8]{256}=$

۵) $\sqrt[9]{-1}=$

۶) $\sqrt[4]{(-3)^4}=$

۷) $\sqrt[3]{-0/001}=$

۸) $-\sqrt[4]{16}=$

9) $\sqrt[4]{16}\times\sqrt[4]{81}=$

10) $a^2 \qquad a^3 \qquad 0<a<1$

11) $\sqrt{a} \qquad \sqrt[3]{a} \qquad 0<a<1$

12) $\sqrt[3]{a} \qquad \sqrt[5]{a} \qquad 0<a<1$

13) $(\sqrt[3]{-8})^2=$

14) $\sqrt{150}=$

15) $\sqrt{72}=$

16) $\sqrt{48}=$

17) $\sqrt[5]{800}=$

18) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\times\sqrt[3]{\frac{9}{16}}=$

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را به ساده ترین صورت بنویسید

1) $\sqrt[4]{\frac{(a+b)^4}{(a-b)^4}}=$

2) $\sqrt{4x^2+4x+1}=$

3) $\frac{\sqrt{x^3y^3}}{\sqrt{xy}}=$

4) $2\sqrt{27}\times3\sqrt{12}=$

5) $-5\sqrt{20}\times3\sqrt{5}=$

6) $\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[4]{a^3}=$

7) $\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}\times\sqrt[6]{6+4\sqrt{2}}=\sqrt[6]{(4-2\sqrt{2})^2}\times\sqrt[6]{6+4\sqrt{2}}=\sqrt[6]{16-16\sqrt{2}+8}\times\sqrt[6]{6+4\sqrt{2}}$

$=\sqrt[6]{24-16\sqrt{2}}\times\sqrt[6]{6+4\sqrt{2}}=\sqrt[6]{4(6-4\sqrt{2})}\times\sqrt[6]{6+4\sqrt{2}}=\sqrt[6]{4(36-32)}=\sqrt[6]{16}$

8) $\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt[4]{(4+4\sqrt{2}+2)}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})^2}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$

فرمول رادیکالهای مرکب:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}} \quad , \quad C=\sqrt{A^2-B}$$

مثال) عبارت $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ را به رادیکالهای ساده تبدیل کنید.

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{4+\sqrt{12}} \qquad A=4 \qquad B=12 \qquad C=\sqrt{4^2-12}=\sqrt{16-12}=\sqrt{4}=2$$

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2}{2}} + \sqrt{\frac{4-2}{2}} = \sqrt{3}+1$$

مثال) عبارت $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$ را به رادیکالهای ساده تبدیل کنید.

$$\sqrt{7-2\sqrt{6}} = \sqrt{7-\sqrt{24}} \qquad A=7 \qquad B=24 \qquad C=\sqrt{7^2-24}=\sqrt{25}=5$$

$$\sqrt{7-2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{7+5}{2}} - \sqrt{\frac{7-5}{2}} = \sqrt{6}-1$$

چهار فرمول خیلی مهم از رادیکالها:

۱) $x=\sqrt{A\sqrt{A\sqrt{A\cdots\sqrt{A^2}}}} = A$

مثال) $6\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\cdots\sqrt{\frac{1}{9}}}}} = 6\times\frac{1}{3}=2$

۲) $x=\sqrt{A\sqrt{A\sqrt{A\cdots}}} = A$

مثال) $\frac{3}{10}\times\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\cdots}}} = \frac{3}{10}\times 5 = \frac{3}{2}$

۳) $x=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}} = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

$\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\cdots}}} = \frac{1+\sqrt{1+80}}{2} = \frac{1+9}{2} = 5$

۴) $x=\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\cdots}}} = \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$

مثال) $\sqrt{30-\sqrt{30-\sqrt{30-\cdots}}} = \frac{-1+\sqrt{1+120}}{2} = \frac{-1+11}{2} = 5$

توانهای گویا:

۱) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$　۲) $a^0 = 1$　۳) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

۴) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$　۵) $a^n \div a^m = a^{n-m}$　۶) $(a^n)^m = a^{nm}$

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

۱) $\sqrt[3]{2\sqrt[5]{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{2^5 \times 3}} = \sqrt[15]{32 \times 3} = \sqrt[15]{96}$

۲) $\sqrt[9]{\frac{a}{\sqrt[10]{a}}} = \sqrt[9]{\sqrt[10]{\frac{a^{10}}{a}}} = \sqrt[9]{\sqrt[10]{a^9}} = \sqrt[90]{a^9} = a^{\frac{9}{90}} = a^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{a}$

۳) $\sqrt[3]{3x \cdot \sqrt{\frac{1}{9x^2}}} = \sqrt[3]{3x \times \frac{1}{3x}} = \sqrt[3]{1} = 1$

۴) $\sqrt[6]{8} \times \sqrt[8]{8} = \sqrt[6]{2^3} \times \sqrt[8]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} \times 2^{\frac{3}{8}} = 2^{\frac{12+9}{24}} = 2^{\frac{21}{24}} = 2^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{2^7} = \sqrt[8]{128}$

۵) $\sqrt{\sqrt[3]{2} \times \sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2}} = \sqrt{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{2^{\frac{7}{12}}} = 2^{\frac{\frac{7}{12}}{2}} = 2^{\frac{7}{24}} = \sqrt[24]{2^7} = \sqrt[24]{128}$

۶) $3^{2-2\sqrt{5}} \times 3^{\sqrt{20}+1} = 3^{2-2\sqrt{5}} \times 3^{2\sqrt{5}+1} = 3^{2-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}+1} = 3^3 = 27$

۷) $\left((\sqrt{10})^{1-\sqrt{3}}\right)^{1+\sqrt{3}} = (\sqrt{10})^{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = (\sqrt{10})^{1-3} = (\sqrt{10})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{10})^2} = \frac{1}{10}$

۸) $(3\sqrt{5} - \sqrt{44})^{\sqrt{5}+2} \times (3\sqrt{5} + \sqrt{44})^{\frac{1}{\sqrt{5}-2}} = ?$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \frac{\sqrt{5}+2}{1} = \sqrt{5}+2$$

$$(3\sqrt{5} - \sqrt{44})^{\sqrt{5}+2} (3\sqrt{5} + \sqrt{44})^{\sqrt{5}+2} = (45 - 44)^{\sqrt{5}+2} = 1^{\sqrt{5}+2} = 1$$

تمرین: مقدار x را از معادله $x^{\sqrt{2}} = 2$ بیابید.

$$x^{\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow (x^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}} \Rightarrow x^2 = 2^{\sqrt{2}} \Rightarrow (x^2)^{\frac{1}{2}} = (2^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

تمرین: اگر $7^x=\sqrt{3}$ و $3^y=\sqrt{7}$ باشد حاصل xy را بدست آورید.

$7^x=\sqrt{3} \Rightarrow (7^x)^2=(\sqrt{3})^2 \Rightarrow 7^{2x}=3 \Rightarrow (7^{2x})^y=3^y \Rightarrow 7^{2xy}=\sqrt{7} \Rightarrow (7^{2xy})^2=(\sqrt{7})^2$

$\Rightarrow 7^{4xy}=7 \Rightarrow 4xy=1 \Rightarrow xy=\frac{1}{4}$

عبارتهای جبری و اتحادها:

۱) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ اتحاد مربع مجموع دوجمله (اتحاد اول)

۲) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ اتحاد مربع تفاضل دوجمله (اتحاد دوم)

۳) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ (اتحاد مزدوج)

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحادها بدست آورید.

الف) $99^2=(100-1)^2=$

ب) $101^2=(100+1)^2=$

ج) $98\times102=(100-2)(100+2)=$

د) $537^2-530^2-7^2=$

هـ) $295^2-290^2-5^2=$

و) $850^2-750^2=$

تمرین: اگر $a^2=a+3$ باشد نشان دهید: $a^5=19a+21$

$a^5=a\times a^4=a\times(a^2)^2=a(a+3)^2=a(a^2+6a+9)=a(a+3+6a+9)$

$=a(7a+12)=7a^2+12a=7(a+3)+12a=7a+21+12a=19a+21$

۴) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$: اتحاد جمله مشترک

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحاد جمله مشترک بدست آورید.

$(x-3)(x+5)=$

$(x+7)(x-2)=$

$(x-6)(x-2)=$

$(x+5)(x+7)=$

۵) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$: اتحاد مربع مجموع سه جمله

مثال) $(2x+3y-4z)^2=$

تمرین: اگر $a+b+c=10$ و $ab+ac+bc=15$ باشد حاصل $a^2+b^2+c^2$ چقدر است؟

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$\Rightarrow 10^2=a^2+b^2+c^2+2(15) \Rightarrow a^2+b^2+c^2=70$

۶) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$: اتحاد مکعب مجموع دو جمله

$(2x+1)^3=$

$(3x+2y)^3=$

۷) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$: اتحاد مکعب تفاضل دو جمله

$(3x-1)^3=$

$(x-2)^3=$

اتحاد مجموع مکعبات دو جمله:

۸) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(مثال) $(x+2)(x^2-2x+4)=$

$(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$

اتحاد تفاضل مکعبات دو جمله:

۹) $\boxed{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$

$(2a-d)(4a^2+10a+2d)=$

$(a^2-2a)(a^4+2a^3+4a^2)=$

$(3a^2-2b^3)(9a^4+6a^2b^3+4b^6)=$

۱۰) اتحادهای ناقص:

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$\Rightarrow (a+b)^2-2ab=a^2+b^2$

$\Rightarrow \boxed{a^2+b^2=(a+b)^2-2ab}$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$\Rightarrow (a-b)^2+2ab=a^2+b^2$

$\Rightarrow \boxed{a^2+b^2=(a-b)^2+2ab}$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$\Rightarrow (a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$

$\Rightarrow \boxed{a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)}$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$\Rightarrow (a-b)^3=a^3-3ab(a-b)-b^3$

$\Rightarrow \boxed{a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)}$

تمرین: اگر $x+y=7$ و $xy=10$ و $x>y$ باشد حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $x^2+y^2=(x+y)-2xy=7^2-2\times10=29$

ب) $x-y=?$ $\quad (x-y)^2=x^2+y^2-2xy=29-20=9\Rightarrow x-y=3$

ج) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=7^3-3\times10\times7=343-210=133$

$\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}=?$ $\quad (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x+y+2\sqrt{xy} = 7+2\sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{7+2\sqrt{10}}$

ه) $x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=29^2-2\times 100=641$

و) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=3^3+3\times 10\times 3=27+90=117$

تمرین: اگر $a+b+c=0$ ثابت کنید: $a^3+b^3+c^3=3abc$

اثبات: $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c \Rightarrow (a+b)^3=(-c)^3 \Rightarrow$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=-c^3 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=-3a^2b-3ab^2$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=+3ab(\underbrace{-a-b}_{c}) \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

کاربرد تمرین بالا:
مقدار عددی عبارت $a^3+b^3+c^3$ را به ازای $a=3+\sqrt{2}$ و $b=3-\sqrt{2}$ و $c=-6$ حساب کنید.

$$a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc=3(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})(-6)=3(9-2)(-6)=-126$$

تمرین: اگر $x+\frac{1}{x}=5$ حاصل $x^2+\frac{1}{x^2}$ را بدست آورید.

$$x^2+\frac{1}{x^2}=(x)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2(x)\left(\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=5^2-2=23$$

فرمول: $x+\frac{1}{x}=a \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2$

تمرین: اگر $x-\frac{1}{x}=7$ حاصل $x^2+\frac{1}{x^2}$ را بدست آورید.

$$x^2+\frac{1}{x^2}=(x)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2(x)\left(\frac{1}{x}\right)=7^2+2=49+2=51$$

فرمول: $x-\frac{1}{x}=a \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=a^2+2$

تمرین: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) = ?$

حل) $(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) = (1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$

$= (1-x^8)(1+x^8)(1+x^{16}) = (1-x^{16})(1+x^{16}) = 1-x^{32}$

تمرین: اگر $x^2+x+1=0$ حاصل عبارت $x^3+\frac{1}{x^3}$ را بدست آورید.

$x^2+x+1=0 \xRightarrow{\div x} x+1+\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=-1$

$x^3+\frac{1}{x^3} = (x+\frac{1}{x})^3 - 3(x)(\frac{1}{x})(x+\frac{1}{x}) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$

تجزیه عبارتهای جبری

۱) تجزیه به کمک فاکتورگیری:

الف) $2ab+3b = b(2a+3)$

ب) $5a^2b^3+10a^3b^2 = 5a^2b^2(b+2a)$

ج) $2(a-b)^2-(a-b) = (a-b)[2(a-b)-1] = (a-b)(2a-2b-1)$

---

۲) تجزیه به کمک دسته بندی و فاکتورگیری:

الف) $ac+bc+ad+bd = (ac+bc)+(ad+bd) = c(a+b)+d(a+b)$

$= (a+b)(c+d)$

ب) $6ax+9ay-4bx-6by = 3a(2x+3y)-2b(2x+3y)$

$= (2x+3y)(3a-2b)$

ج) $a^5-a^4+a^3-a^2 = (a^5-a^4)+(a^3-a^2) = a^4(a-1)+a^2(a-1)$

$= (a-1)(a^4+a^2) = (a-1)(a^2)(a^2+1)$

د) $3x^2-13xy+10y^2 = 3x^2-3xy-10xy+10y^2 = 3x(x-y)-10y(x-y) = (x-y)(3x-10y)$

---

۳) تجزیه به کمک اتحادهای اول و دوم:

الف) $25a^2-30ab+9b^2=(5a-3b)^2$

ب) $4x^2+12xy+9y^2=(2x+3y)^2$

---

۴) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج:

الف) $4a^2-9b^2=(2a-3b)(2a+3b)$

ب) $x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$

ج) $1-(2x-3)^2=[1-(2x-3)][1+(2x-3)]=(4-2x)(2x-2)=2(2-x)2(x-1)$
$=4(2-x)(x-1)$

د) $(4x+3)^2-(3x-1)^2=[(4x+3)-(3x-1)][(4x+3)+(3x-1)]$
$=(4x+3-3x+1)(4x+3+3x-1)=(x+4)(7x+2)$

---

۵) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک:

الف) $x^2+10x+24=(x+6)(x+4)$

ب) $x^2-7x-60=(x-12)(x+5)$

ج) $(x-2y)^2-(x-2y)-20=(x-2y-5)(x-2y+4)$

---

۶) تجزیه به روش A: (ضریب x^2 مجذور کامل نباشد) $A=2x^2+7x+3$

$2A=(2x)^2+7(2x)+6 \Rightarrow 2A=(2x+1)(2x+6) \Rightarrow 2A=(2x+1)2(x+3)$

$\Rightarrow A=(2x+1)(x+3)$

ب) $A=6x^2-x-1$

$6A=(6x)^2-(6x)-6 \Rightarrow 6A=(6x-3)(6x+2) \Rightarrow 6A=3(2x-1)2(3x+1)$

$\Rightarrow A=(2x-1)(3x+1)$

ج) $A=2x^2+3x+1$

$2A=(2x)^2+3(2x)+2 \Rightarrow 2A=(2x+1)(2x+2) \Rightarrow 2A=(2x+1)2(x+1)$

$\Rightarrow A=(2x+1)(x+1)$

---

۷) تجزیه به کمک اتحادهای تفاضل مکعبات و مجموع مکعبات دوجمله:

الف) $a^3-8=a^3-2^3=(a-2)(a^2+2a+4)$

ب) $8a^3+b^3=(2a)^3+(b)^3=(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$

ج) $27a^3-1=(3a)^3-1^3=(3a-1)(9a^2+3a+1)$

د) $64a^3-27=(4a)^3-3^3=(4a-3)(16a^2+12a+9)$

ه) $a^3+125=a^3+5^3=(a+5)(a^2-5a+25)$

تمرین: عبارتهای زیر را تجزیه کنید:

الف) $8x^2+8x+2=2(4x^2+4x+1)=2(2x+1)^2$

ب) $20x^2-100x+125=5(4x^2-20x+25)=5(2x-5)^2$

ج) $3x^2-27y^2=3(x^2-9y^2)=3(x-3y)(x+3y)$

د) $4x^4-4=4(x^4-1)=4(x^2-1)(x^2+1)=4(x-1)(x+1)(x^2+1)$

تمرین کتاب
ه) $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3-y^3)(x^3+y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)$

تمرین کتاب
و) $x^4-y^4=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

تمرین کتاب
ز) $a^6-2b^6+2a^3b^3=a^6-2b^6+2a^3b^3+b^6-b^6=(a^6+2a^3b^3+b^6)-3b^6$

$=(a^3+b^3)^2-(\sqrt{3}b^3)^2=(a^3+b^3-\sqrt{3}b^3)(a^3+b^3+\sqrt{3}b^3)$

تمرین: در اتحاد $a^3+b^3=(a+b)(a^2-a+b^2)$ با قرار دادن $a=\sqrt[3]{x^2}$ حاصل را باز نویسی کنید.

$x^2+1=(\sqrt[3]{x^2})^3+1^3=(\sqrt[3]{x^2}+1)(\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2}+1)$

تذکر مهم: این عبارت قابل تجزیه به عبارتهای گویا نیست

عبارتهای گویا:
عبارتهایی که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای باشد عبارتهای گویا نامیده می‌شوند.

$\frac{1}{y}$ و $\frac{a+1}{3}$ و $\frac{x^2+1}{x-3}$

عبارتهایی که در آنها حرف انگلیسی داخل رادیکال باشد عبارتهای گویا نیستند و آنها را عبارتهای گنگ می‌نامند:

$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}}$ $\quad$ $\sqrt[3]{x^2}+x-1$ $\quad$ $\frac{\sqrt{x}}{3}$

تذکر مهم: عبارتهای گویا به ازای جوابهای مخرج تعریف نمی‌شوند.

مثال) عبارت $\frac{x-1}{x^2-4}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

به ازای $x=\pm 2$ تعریف نشده است

تمرین: عبارت گویای $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+4}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

به ازای $x=\pm 1$ تعریف نشده است.

تمرین: صورت و مخرج عبارت‌های گویای زیر را تجزیه کرده و آنها را ساده کنید

الف) $\dfrac{x^6+1}{x^4+2x^2+1}=\dfrac{(x^2)^3+1^3}{(x^2)^2+2(x^2)+1}=\dfrac{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^4-x^2+1}{x^2+1}$

ب) $\dfrac{x^3-1}{(x-1)^3}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^3}=\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$

ج) $\dfrac{x^2+1}{x^4-1}=\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+1)}=\dfrac{1}{x^2-1}$

د) $\dfrac{x^7-x}{x^3+x^2+x}=\dfrac{x(x^6-1)}{x(x^2+x+1)}=\dfrac{x(x^3-1)(x^3+1)}{x(x^2+x+1)}=\dfrac{x(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)}{x(x^2+x+1)}$

$=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)$

ه) $\dfrac{y^5-y^3-12y}{8y^2+16y}=\dfrac{y(y^4-y^2-12)}{8y(y+2)}=\dfrac{y(y^2-4)(y^2+3)}{8y(y+2)}=\dfrac{y(y-2)(y+2)(y^2+3)}{8y(y+2)}$

$=\dfrac{(y-2)(y^2+3)}{8}$

گویا کردن مخرج های گنگ:

مخرج	عامل ضرب شونده به صورت و مخرج	حاصل
$\sqrt{x}$	$\sqrt{x}$	x
$a+\sqrt{x}$	$a-\sqrt{x}$	a^2-x
$\sqrt{x}+\sqrt{y}$	$\sqrt{x}-\sqrt{y}$	$x-y$
$a\sqrt{x}+b$	$a\sqrt{x}-b$	a^2x-b^2
$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$	$a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$	a^2x-b^2y
$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{x^2}$	x
$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$	$a+b$ (اتحاد چاق و لاغر)
$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$	$a-b$

تمرین: مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

۱) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$

۲) $\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$

۳) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$

۴) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

۵) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-2}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{8}}\times\frac{\sqrt[3]{(x^2)^2}+\sqrt[3]{8x^2}+\sqrt[3]{8^2}}{\sqrt[3]{(x^2)^2}+\sqrt[3]{8x^2}+\sqrt[3]{8^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^4}+2\sqrt[3]{x^2}+4}{x^2-8}$

۶) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{1}}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{1x}+\sqrt[3]{1^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{1x}+\sqrt[3]{1^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{x-1}$

۷) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{8}}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{8^2}}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{8^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{x-8}$

۸) $\frac{1}{x-3\sqrt{x}}=\frac{1}{x-3\sqrt{x}}\times\frac{x+3\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}}=\frac{x+3\sqrt{x}}{x^2-9x}$

۹) $\frac{3}{\sqrt[3]{2}+1}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}+1}\times\frac{(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}+1}=\frac{3(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{2+1}=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1$

۱۰) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+2}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{8}}\times\frac{\sqrt[3]{5^2}+2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{8^2}}{\sqrt[3]{5^2}+2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{8^2}}=\frac{\sqrt[3]{25}-2\sqrt[3]{5}+4}{5-8}=\frac{\sqrt[3]{25}-2\sqrt[3]{5}+4}{-3}$

فصل ۴ :

معادله درجه ۲ :

هر معادله بصورت $ax^2+bx+c=0$ را که در آن $a\neq 0$ باشد، معادله درجه دوم می نامند.

روشهای حل معادله درجه دوم :

۱) روش تجزیه :

$A\times B=0 \Rightarrow A=0$ یا $B=0$

۱) $x^2-7x+12=0$

$(x-3)(x-4)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3} \\ x-4=0 \Rightarrow \boxed{x=4} \end{cases}$

۲) $x^2+5x+6=0$

$(x+2)(x+3)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2} \\ x+3=0 \Rightarrow \boxed{x=-3} \end{cases}$

۳) $3x^2-x=0$

$x(3x-1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 3x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{3}} \end{cases}$

۲) روش ریشه گیری :

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی ($a\geq 0$) باشد ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2=a$ عبارتند از :

$x^2=a \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{a} \\ x=-\sqrt{a} \end{cases}$

۱) $(x-3)^2=25$

$\begin{cases} x-3=\sqrt{25} \Rightarrow x=5+3=8 \\ x-3=-\sqrt{25} \Rightarrow x=-5+3=-2 \end{cases}$

۲) $x^2-8=0$

$\Rightarrow x^2=8$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2} \end{cases}$

۳) $5x^2=20$

$\Rightarrow x^2=4$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{4}=2 \\ x=-\sqrt{4}=-2 \end{cases}$

۳) روش مربع کامل کردن :

ابتدا معادله را بصورت $x^2+px+q=0$ می نویسیم پس جملات شامل x را به سمت چپ و بقیه جملات را به سمت راست می بریم، ضریب x را نصف کرده آنرا به توان ۲ رسانده و به دو طرف اضافه می کنیم سمت چپ اتحاد اول یا دوم است. از دو طرف جذر گرفته و معادله را حل می کنیم

۱) $x^2+8x+12=0$

$x^2+8x=-12$

ضریب x $=8 \xrightarrow{\text{نصف}} 4 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 16$

$x^2+8x+16=-12+16$

$(x+4)^2=4 \Rightarrow x+4=\pm 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+4=2 \Rightarrow \boxed{x=-2} \\ x+4=-2 \Rightarrow \boxed{x=-6} \end{cases}$$

۲) $x^2+5x+6=0$

$x^2+5x=-6$

ضریب x $=5 \xrightarrow{\text{نصف}} \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{25}{4}$

$x^2+5x+\frac{25}{4}=-6+\frac{25}{4}$

$(x+\frac{5}{2})^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x+\frac{5}{2}=\pm\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=\boxed{-2} \\ x+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=\boxed{-3} \end{cases}$$

۴) روش کلی (روش دلتا Δ):

$ax^2+bx+c=0$

$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow$

- $\Delta>0 \Rightarrow$ معادله دو ریشه (جواب) متمایز دارد $\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ فرمول ریشه ها
- $\Delta=0 \Rightarrow$ معادله دو ریشه مضاعف (جواب مساوی) دارد $\Rightarrow x=\frac{-b}{2a}$
- $\Delta<0 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

۱) $2x^2-3x+1=0$

$\Delta=(-3)^2-4(2)(1)=9-8=1>0$

$x=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2(2)}=\frac{3\pm1}{4}=\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{1}{2} \end{cases}$

۲) $x^2+4x+4=0$

$\Delta=4^2-4(1)(4)=0$ ریشه مضاعف

$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2}=\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-2 \end{cases}$

۳) $x^2+2x+9=0$

$\Delta=2^2-4(1)(9)<0$

معادله جواب ندارد.

نکته ریاضی:

اگر در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ داشته باشیم: $a+b+c=0$ (مجموع ضرایب صفر باشد)

آنگاه: $x_1=1 \quad , \quad x_2=\frac{c}{a}$

اثبات: $a+b+c=0 \Rightarrow b=-a-c$

$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow ax^2+(-a-c)x+c=0 \Rightarrow ax^2-ax-cx+c=0$

$\Rightarrow (ax^2-ax)-(cx-c)=0 \Rightarrow ax(x-1)-c(x-1)=0 \Rightarrow (x-1)(ax-c)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1} \\ ax-c=0 \Rightarrow ax=c \Rightarrow x=\frac{c}{a} \end{cases}$$

نکته ریاضی: اگر در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ داشته باشیم:

$$a+c=b \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

اثبات: $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow ax^2+(a+c)x+c=0 \Rightarrow ax^2+ax+cx+c=0$

$$\Rightarrow ax(x+1)+c(x+1)=0 \Rightarrow (x+1)(ax+c)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ ax+c=0 \Rightarrow x=-\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

تمرینات اضافی:

۱) مقدار m را چنان تعیین کنید که معادلات درجه دوم زیر دارای یک جواب باشند.

الف) $x^2-4x+m+2=0$

$\Delta=0 \Rightarrow (-4)^2-4(1)(m+2)=0$

$16-4(m+2)=0 \Rightarrow 16-4m-8=0$

$\Rightarrow -4m=-8 \Rightarrow \boxed{m=2}$

ب) $mx^2-2(m-1)x+m=0$

$\Delta=0 \Rightarrow [-2(m-1)]^2-4(m)(m)=0$

$\Rightarrow 4(m^2-2m+1)-4m^2=0$

$\Rightarrow \cancel{4m^2}-8m+4-\cancel{4m^2}=0$

$\Rightarrow -8m+4=0 \Rightarrow \boxed{m=+\frac{1}{2}}$

۲) عددی را بیابید که اگر ۱ واحد به آن اضافه کنیم و در عدد حاصل ضرب کنیم و حاصل را منهای عدد ماقبل عدد اولی کنیم حاصل برابر ۱۰ شود.

$x=$ عدد مورد نظر

$$x(x+1)-(x-1)=10 \Rightarrow x^2+x-x+1=10 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$$

۳) عددی طبیعی پیدا کنید که حاصلضرب عدد طبیعی قبل از آن در عدد طبیعی بعد از آن ۱۲۰ باشد.

$x=$ عدد مورد نظر

$$(x-1)(x+1)=120 \Rightarrow x^2-1=120 \Rightarrow x^2=121 \Rightarrow x=\pm 11$$

۴) اگر یکی از جوابهای معادله $2x^2-mx-4=0$ برابر ۲ باشد جواب دیگر را بیابید.

$x=2 \Rightarrow 2(2)^2-m(2)-4=0 \Rightarrow 8-2m-4=0 \Rightarrow -2m=-4 \Rightarrow \boxed{m=2}$

$m=2 \Rightarrow 2x^2-2x-4=0 \Rightarrow \Delta=(-2)^2-4(2)(-4)=4+32=36 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{cases}$

۵) مجموع دو عدد صحیح ۱۰ و مجموع مربعات آنها ۱۴۸ می باشد. این دو عدد را بیابید.

$$x+y=10 \Rightarrow y=10-x$$

$$x^2+y^2=148 \Rightarrow x^2+(10-x)^2=148 \Rightarrow x^2+100-20x+x^2=148 \Rightarrow 2x^2-20x-48=0$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2-10x-24=0 \Rightarrow (x+2)(x-12)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \Rightarrow y=12 \\ x=12 \Rightarrow y=-2 \end{cases}$$

آن دو عدد صحیح ۲- و ۱۲ است.

---

۶) مجموع ارقام یک عدد دو رقمی ۱۰ و رقم دهگان آن ۲ واحد کمتر از مربع رقم یکان آن می باشد این عدد را تعیین کنید.

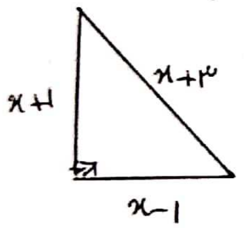
دهگان $= x$ یکان $= y$

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x=y^2-2 \end{cases} \Rightarrow y^2-2+y=10 \Rightarrow y^2+y-12=0 \Rightarrow (y+4)(y-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=-4 & \text{غ ق ق} \\ y=3 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$y=3 \Rightarrow x=3^2-2=7 \Rightarrow \text{عدد مورد نظر}=73$$

---

۷) مقدار x را بیابید.



$$(x-1)^2+(x+1)^2=(x+3)^2$$

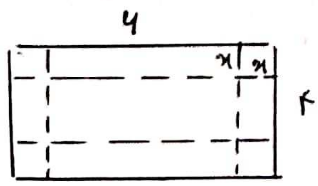
$$\Rightarrow x^2-2x+1+x^2+2x+1=x^2+6x+9$$

$$\Rightarrow 2x^2+2=x^2+6x+9 \Rightarrow x^2-6x-7=0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-7)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=7 & \text{ق ق} \\ x=-1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

---

۸) یک قالی در اتاقی به ابعاد ۶ متر و ۴ متر قرار دارد. به طوری که فاصله هر طرف آن تا کنار دیوار اتاق یکسان است. اگر مساحت قالی ۸ متر مربع باشد فاصله‌ی هر طرف قالی تا دیوار را حساب کنید.



طول قالی $= 6-2x$ عرض قالی $= 4-2x$

$$\text{مساحت قالی} = (6-2x)(4-2x)=8 \Rightarrow 4x^2-20x+16=0$$

$$\xrightarrow{\div 4} x^2-5x+4=0 \Rightarrow (x-1)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{ق ق} \\ x=4 & \text{(غ ق ق)} \end{cases}$$

سهمی:

نمودار هر معادله به شکل $y=ax^2+bx+c$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی بوده و $a\neq 0$ را سهمی می‌گویند که دارای ویژگی‌های زیر است:

۱) اگر $a>0$ باشد شکل سهمی بصورت ∪ است که در این حالت نمودار دارای پایین‌ترین نقطه (مینیمم = Min) بوده که همان رأس سهمی است.

۲) اگر $a<0$ باشد شکل سهمی بصورت ∩ است که در این حالت نمودار دارای بالاترین نقطه (ماکزیمم = Max) بوده که همان رأس سهمی است.

۳) خط $x=-\frac{b}{2a}$ را خط تقارن سهمی می‌نامند که از رأس سهمی می‌گذرد.

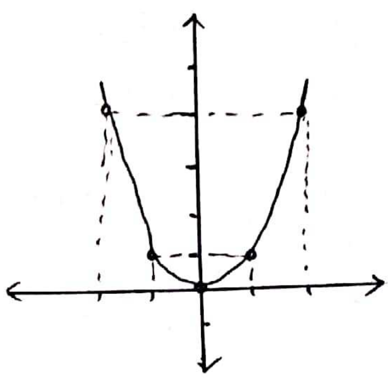
۴) رأس سهمی را با S نشان داده و طول رأس سهمی از رابطه $x=-\frac{b}{2a}$ بدست می‌آید که اگر آن را در معادله قرار دهیم عرض رأس سهمی یعنی y بدست می‌آید. $S=\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

۵) اگر در معادله $y=ax^2+bx+c$، y را مساوی صفر قرار دهیم جوابهای معادله همان طول نقاط برخورد نمودار سهمی با محور xها است که در رسم سهمی استفاده می‌شود.

مثال ۱: با نقطه یابی نمودار سهمی های زیر را رسم کنید.

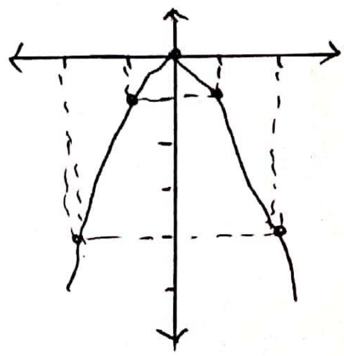
1) $y=x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	2



2) $y=-x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4



سهمی به معادلات زیر را رسم کنید.

۱) $y = x^2 + 5x + 6$

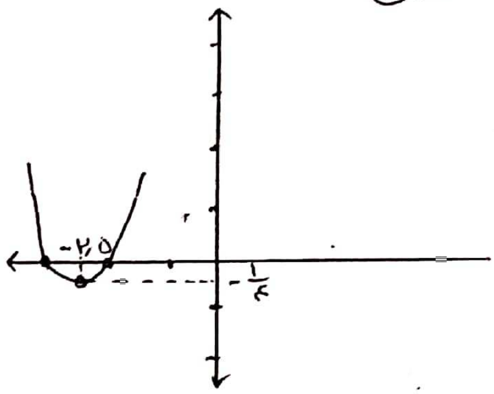
$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2}$ طول راس سهمی

$a = 1 > 0 \Rightarrow$ شکل $\cup$

$x = -\frac{5}{2} \Rightarrow y = (-\frac{5}{2})^2 + 5(-\frac{5}{2}) + 6 = \frac{25}{4} + \frac{-25}{2} + 6 = \frac{25 - 50 + 24}{4} = \frac{-1}{4}$ عرض راس سهمی

$y = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+3) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$ طول نقاط برخورد با محور xها



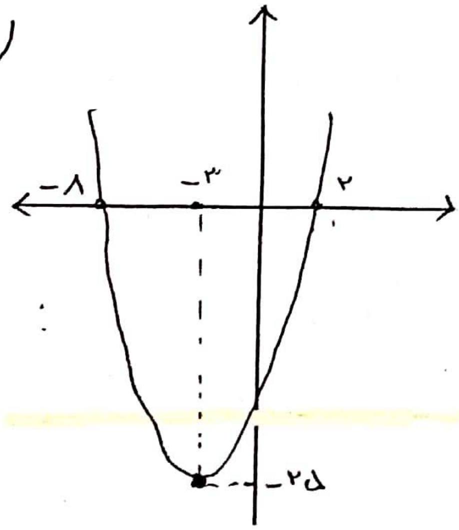
۲) $y = x^2 + 6x - 16$ $a = 1 > 0 \Rightarrow$ شکل $\cup$

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3$ طول راس سهمی

$y = (-3)^2 + 6(-3) - 16 = 9 - 18 - 16 = -25$
عرض راس سهمی

$y = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0 \Rightarrow (x+8)(x-2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 2 \end{cases}$ طول نقاط برخورد با محور xها

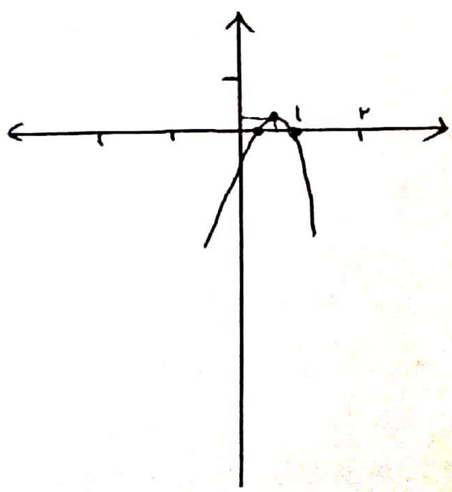


۳) $y = -2x^2 + 3x - 1$ $a = -2 < 0 \Rightarrow$ شکل $\cap$

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(-2)} = \frac{3}{4}$ طول راس سهمی

$y = -2(\frac{3}{4})^2 + 3(\frac{3}{4}) - 1 = -2(\frac{9}{16}) + \frac{9}{4} - 1 = \frac{1}{8}$ عرض راس سهمی

$y = 0 \Rightarrow -2x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ طول نقاط برخورد با محور xها



صورت دیگر معادله سهمی:

صورت دیگر معادله سهمی بصورت $y=a(x-h)^2+k$ که $a\neq 0$ است که در آن $S(h,k)$ مختصات راس سهمی و $x=h$ معادله خط تقارن سهمی و $a>0$ شکل بصورت $\cup$ و $a<0$ شکل بصورت $\cap$ است.

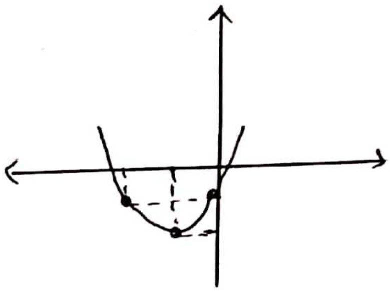
مثال) سهمی به معادلات زیر را رسم و مختصات راس آن را بدست آورید.

1) $y=(x+1)^2-2$

$y=1(x-(-1))^2+(-2)$

$S\begin{vmatrix}-1\\-2\end{vmatrix}$

x	-2	-1	0
y	-1	-2	-1

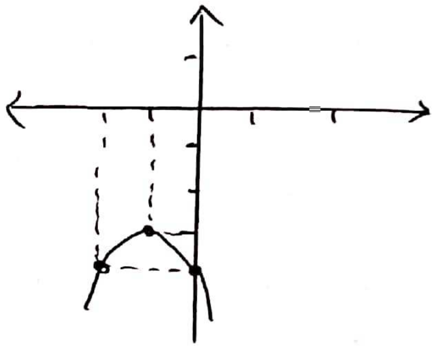


2) $y=-(x+1)^2-3$

$y=-1(x-(-1))^2+(-3)$

$S\begin{vmatrix}-1\\-3\end{vmatrix}$

x	-2	-1	0
y	-4	-3	-4



تعیین علامت چند جمله‌ای درجه اول:

$P=ax+b$

$ax+b=0 \Rightarrow ax=-b \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax+b$	علامت مخالف علامت a	0	علامت موافق علامت a

مثال) تعیین علامت کنید.

1) $P=2x-4$

$2x-4=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x-3$	$-$	0	$+$

2) $P=-3x+12$

$-3x+12=0 \Rightarrow x=4$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$-3x+12$	$+$	0	$-$

تعیین علامت چند جمله‌ای درجه دوم:

$P = ax^2+bx+c$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ معادله دو ریشه دارد.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

$\Delta = 0 \Rightarrow$ معادله ریشه مضاعف دارد.

x	$-\infty$		$x_1=x_2$		$+\infty$
ax^2+bx+c		موافق علامت a	0	موافق علامت a	

$\Delta < 0 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد.

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		علامت موافق علامت a	

مثال: تعیین علامت کنید.

1) $P = x^2+5x+6$

$\Delta = 5^2-4(1)(6) = 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-3 \end{cases}$

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
x^2+5x+6		+	0	−	0	+	

2) $P = x^2-6x+9$

$\Delta = (-6)^2-4(1)(9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_1=3 \end{cases}$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
x^2-6x+9		+	0	+	

3) $P = 2x^2+3x+5$

$\Delta = 3^2-4(2)(5) = -31 < 0$

جواب ندارد.

x	
$2x^2+3x+5$	+

تمرین: تعیین علامت کنید.

1) $P = \dfrac{(x^2-4)(2x+1)}{(x^2-9)}$

$x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$

$2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3$

x	$-\infty$		-3		-2		$-\frac{1}{2}$		2		3		$+\infty$
x^2-4		+		+	0	−		−	0	+		+	
$2x+1$		−		−		−	0	+		+		+	
x^2-9		+	0	−		−		−		−	0	+	
$P=\dfrac{(x^2-4)(2x+1)}{x^2-9}$		−	تعریف نشده	+	0	−	0	+	0	−	تعریف نشده	+	

۲) $P=\dfrac{x(x-3)^2}{x^2+x-2}$ ۳) $P=(x^2-16)(2x-1)$ ۴) $P=\dfrac{|x+1|(x^2-16)}{x^2+6x+8}$

نکته ریاضی:
شرط اینکه عبارت درجه دوم $P=ax^2+bx+c$ همواره مثبت باشد آنستکه: $\Delta<0$, $a>0$.

مثال ۱: به ازای چه مقدار m عبارت $P=x^2+mx+1$ همواره مثبت است؟

$a=1>0$ $\Delta=m^2-4(1)(1)<0 \Rightarrow m^2-4<0$

m	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
m^2-4		$+$	0	$-$ ج	0	$+$	

$-2<m<2$

مثال ۲: به ازای چه مقدار از m عبارت $P=(m-1)x^2-3x+7$ همواره مثبت است؟

$$\begin{cases} a>0 \Rightarrow m-1>0 \Rightarrow m>1 \\ \Delta<0 \Rightarrow 9-4(m-1)(7)<0 \Rightarrow m>\dfrac{37}{28} \end{cases} \xRightarrow[\text{اشتراک جوابها}]{\cap} m>\dfrac{37}{28}$$

نکته ریاضی:
شرط اینکه عبارت درجه دوم $P=ax^2+bx+c$ همواره منفی باشد آنستکه:

$\Delta<0$, $a<0$

مثال ۳: به ازای چه مقدار m عبارت $P=-2x^2-3m+(m-2)$ همواره منفی است؟

$a=-2<0$

$\Delta<0 \Rightarrow (-3)^2-4(-2)(m-2)<0 \Rightarrow 9+8m-16<0 \Rightarrow 8m-7<0 \Rightarrow m<\dfrac{7}{8}$

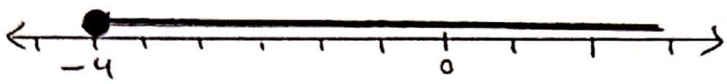
نامعادله:

۱) $A<B \Rightarrow A\pm C<B\pm C$

۲) $\begin{cases} A>B,\ C>0 \Rightarrow AC>BC \\ A>B,\ C<0 \Rightarrow AC<BC \end{cases}$

مثال) نامعادله $3x-7 \leq 5x+5$ را حل و جواب را روی محور نمایش دهید.

$$3x-7 \leq 5x+5 \Rightarrow 3x-5x \leq 5+7 \Rightarrow -2x \leq 12 \Rightarrow x \geq -6$$



تمرین: نامعادلات زیر را حل کنید:

1) $x^2+7x+12 \geq 0$

x	$-\infty$		-4		-3		$+\infty$
$x^2+7x+12$		+ ج	0 ج	−	0 ج	+ ج	

$$x^2+7x+12=0 \Rightarrow (x+3)(x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=-4 \end{cases}$$

مجموعه جواب $= \{x \leq -4 \ , \ -3 \leq x\} = (-\infty, -4] \cup [-3, +\infty)$

2) $\dfrac{x^2-9}{2x+1} \geq 0$

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
x^2-9		+	0	−		−	0	+	
$2x+1$		−		−	0	+		+	
$\dfrac{x^2-9}{2x+1}$		−	0 ج	+ ج	تعریف نشده	−	0 ج	+ ج	

$$x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3$$

$$2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

مجموعه جواب $= \{-3 \leq x < -\frac{1}{2} \ , \ 3 \leq x\} = [-3, -\frac{1}{2}) \cup [3, +\infty)$

3) $3x^2-4x+1 < 0$

x		$\frac{1}{3}$		1	
$3x^2-4x+1$	+	0	− ج	0	+

$$3x^2-4x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

مجموعه جواب $= \{\frac{1}{3} < x < 1\} = (\frac{1}{3}, 1)$

4) $-x^2(x+1) \geq 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-x^2$		−		−	0	−	
$x+1$		−	0	+		+	
$-x^2(x+1)$		+ ج	0 ج	−	0 ج	−	

$$-x^2=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

مجموعه جواب $= \{x=0$ یا $x \leq -1\} = \{0\} \cup (-\infty, -1]$

۵) $\dfrac{6-x^2}{x} > 1$ ۶) $\dfrac{x^2-2x}{x} < 0$ ۷) $\dfrac{3x+1}{x^2-1} < 0$

جواب $= (-\infty, -3) \cup (0, 2)$ جواب $= (-\infty, 0) \cup (0, 2)$ جواب $= (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, 1)$

حل نامعادلات شامل قدر مطلق:

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد
دراینصورت:

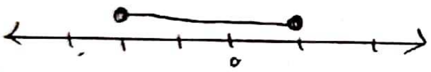
۱) $|u| \leq a \Rightarrow -a \leq u \leq a$

۲) $|u| \geq a \Rightarrow \begin{cases} u \geq a \\ \text{یا} \\ u \leq -a \end{cases}$

تمرین: نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $|2x+1| \leq 3$

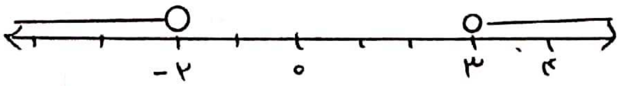
$-3 \leq 2x+1 \leq 3 \Rightarrow -3-1 \leq 2x+1-1 \leq 3-1 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 2 \overset{\div 2}{\Rightarrow} -2 \leq x \leq 1$



مجموعه جواب $= [-2, 1]$

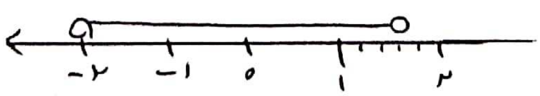
۲) $|2x-1| > 5$

$\begin{cases} 2x-1 > 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3 \\ 2x-1 < -5 \Rightarrow 2x < -4 \Rightarrow x < -2 \end{cases} \Rightarrow$ مجموعه جواب $= (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$



۳) $|-5x-1| < 9$

$-9 < -5x-1 < 9 \Rightarrow -8 < -5x < 10 \Rightarrow \frac{8}{5} > x > -2$ جواب $= (-2, \frac{8}{5})$



۴) $|-4x+5| > 13$

$\begin{cases} -4x+5 > 13 \Rightarrow -4x > 8 \Rightarrow x < -2 \\ -4x+5 < -13 \Rightarrow -4x < -18 \Rightarrow x > \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow$ جواب $= (-\infty, -2) \cup (\frac{9}{2}, +\infty)$

فصل ۳ : تابع

تعریف زوج مرتب :

اگر برای دو عدد حقیقی a و b ترتیب قائل شویم و آنها را داخل پرانتز به صورت (x,y) بنویسیم تشکیل زوج مرتب می دهند. a را مولفه اول (مختص اول) و b را مولفه دوم (مختص دوم) می نامند.

شرط تساوی دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) آنست که :

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

مثال ۱ : مقادیر x و y را طوری تعیین کنید که :

۱) $(x+y\,,\,6)=(3\,,\,2y)$

$$\begin{cases} x+y=3 & \Rightarrow x=0 \\ 2y=6 & \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

۲) $(x^2+xy\,,\,y^2+xy)=(28\,,\,-12)$

$$\begin{cases} x^2+xy=28 \\ y^2+xy=-12 \end{cases} + \Rightarrow x^2+2xy+y^2=16 \Rightarrow (x+y)^2=16$$

$$\Rightarrow x+y=\pm 4$$

$$\begin{cases} x^2+xy=28 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=7 \\ y=-3 \end{matrix} \qquad \begin{cases} x^2+xy=28 \\ x+y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=-7 \\ y=3 \end{matrix}$$

مثال ۲ : مقادیر x و y را طوری تعیین کنید که دو زوج مرتب $(15\,,\,x-y)$ و $(x^2-y^2\,,\,3)$ باهم برابر باشند.

$$(x^2-y^2\,,\,3)=(15\,,\,x-y) \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=15 \Rightarrow \overbrace{(x-y)}^{3}(x+y)=15 \Rightarrow x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow x=4 \;,\; y=1$$

حاصلضرب دکارتی :

اگر A و B دو مجموعه باشند حاصلضرب دکارتی مجموعه A در مجموعه B را بصورت $A\times B$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$A\times B=\{(x,y) \mid x\in A\,,\, y\in B\}$$

واضح است : $B\times A=\{(x,y) \mid x\in B\,,\, y\in A\}$

مثال) اگر $A=\{2,3,-7\}$ و $B=\{1,4\}$ مطلوبست محاسبه:

الف) $A\times B=\{(2,1),(2,4),(3,1),(3,4),(-7,1),(-7,4)\}$

ب) $B\times A=\{(1,2),(1,3),(1,-7),(4,2),(4,3),(4,-7)\}$

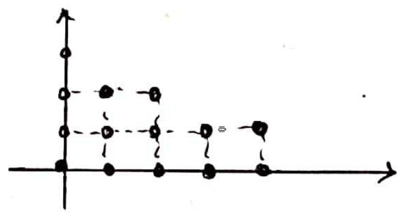
نتیجه: $\boxed{A\times B\neq B\times A}$

تعریف رابطه:

هر زیر مجموعه از حاصلضرب دکارتی را یک رابطه می نامند و آنرا با R نشان می دهند: $R\subseteq A\times B$

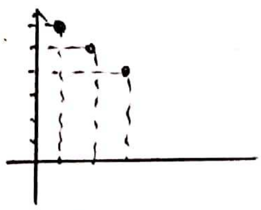
مثال ۱: اگر $A=\{0,1,2,3,4\}$ و $R=\{(x,y)|x,y\in A\ ,\ x+2y<4\}$ باشند، رابطه R را با نوشتن اعضاء مشخص کنید و نمودار مختصاتی آنرا رسم کنید.

$R=\{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(4,0),(4,1)\}$



مثال ۲: رابطه $R=\{(x,y)|x,y\in \mathbb{N}\ ,\ x+y=7\ ,\ x<y\}$ مفروض است. R را بصورت زوج مرتب نوشته و نمودار مختصاتی آنرا رسم کنید.

$R=\{(1,6),(2,5),(3,4)\}$



تعریف تابع:

تعریف تابع بصورت زوج مرتب:

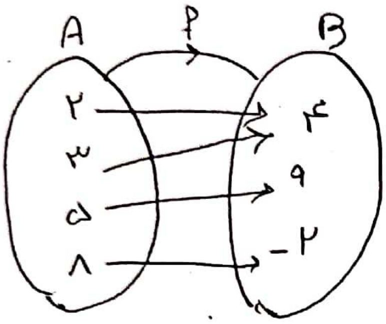
هر رابطه که در آن هیچ دو زوج مرتب دارای مولفه های اول مساوی نباشند یک تابع نامیده می شود و معمولاً با f نشان می دهیم.

$f=\{(1,3),(7,2),(5,6),(2,3)\}$ تابع است

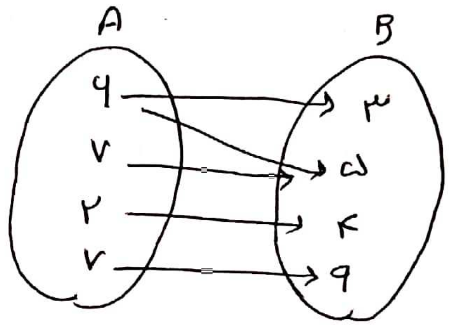
$f=\{(1,9),(-2,5),(6,7),(1,4)\}$ تابع نیست.

تعریف تابع بصورت مجموعه (نمودار ون - نمودار پیکانی):

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شود. به عبارت دیگر از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد.



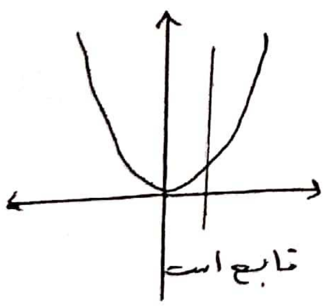
تابع است.



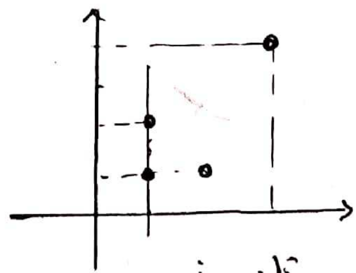
تابع نیست.

تعریف تابع از روی نمودار مختصاتی:

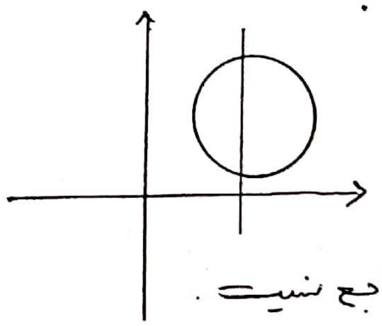
اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد هنگامی این نمودار یک تابع است که هر خط موازی محور yها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



تابع است



تابع نیست



تابع نیست.

دامنه و برد توابع:

مجموعهٔ همه مولفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل دهنده هر تابع را دامنه و مجموعه همه مولفه‌های دوم زوج‌های مرتب تشکیل دهنده هر تابع را برد تابع می‌نامند.

اگر f یک تابع باشد دامنه آنرا با D_f و برد آنرا با R_f نشان می‌دهیم.

$f=\{(1,7),(3,8),(5,2),(6,4)\}$

$D_f=\{1,3,5,6\}$ $R_f=\{7,8,2,4\}$

تصویر روی محور xها $= D_f$ $R_f =$ تصویر روی محور yها

ضابطه تابع:

رابطه بین مولفه های اول ودوم زوج های مرتب تابع f را قانون یا ضابطه تابع f نامیده و با علامت $y=f(x)$ نشان می دهیم:

$$(x,y)\in f \iff y=f(x)$$

مثال) ضابطه تابع $f=\{(1,2),(2,3),(3,4),\dots\}$ را بدست آورید.

عرض = طول +1

$$y=x+1 \Rightarrow y=f(x)=x+1$$

مثال) ضابطه تابع مقابل را بدست آورید.

x	-2	-1	0	1	2
y	5	3	0	3	5

عرض $= (\text{طول})^2+1 \Rightarrow y=x^2+1 \Rightarrow y=f(x)=x^2+1$

مثال) اگر $f(x)=2x^2+3$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$ مطلوبست محاسبه:

الف) $f(2)=2(2)^2+3=11$

ب) $f(-3)=2(-3)^2+3=21$

ج) $f(\frac{1}{\sqrt{2}})=2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+3=2\times\frac{1}{2}+3=4$

د) $g(5)=\sqrt{5-1}=\sqrt{4}=2$

ه) $f(g(10))=f(3)=2(3)^2+3=21$

تابع خطی:

هر تابع بصورت $y=f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامند و نمودار آن یک خط راست است.

مثال)

$y=f(x)=-2x+1$ $\qquad$ $y=f(x)=5x-3$

تذکر مهم: معادله خطی که از دو نقطه $A\Big|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}$ و $B\Big|\begin{matrix}x_2\\y_2\end{matrix}$ می‌گذرد از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

(فرمول ۱۲۱)

مثال ۱) در تابع خطی f داریم: $f(0)=5$ و $f(1)=4$ مطلوبست ضابطه تابع f و رسم نمودار آن:

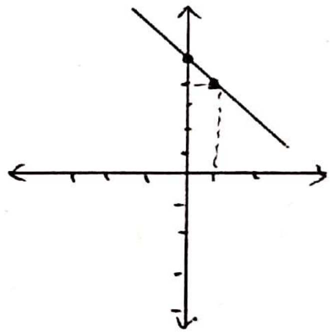
روش I)

$f(0)=5 \Rightarrow (0,5)\in f$

$f(1)=4 \Rightarrow (1,4)\in f$

$y=ax+b$

$$\begin{cases}5=a(0)+b \Rightarrow \boxed{b=5}\\ 4=a(1)+b \Rightarrow a+b=4 \Rightarrow \boxed{a=-1}\end{cases}$$



$$\boxed{y=f(x)=-1x+5}$$

روش II)

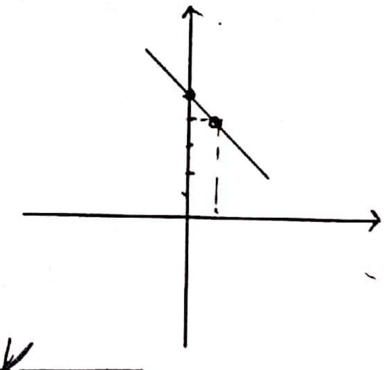
$(0,5)\in f$ ، x_1 ، y_1

$(1,4)\in f$ ، x_2 ، y_2

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-5=\frac{4-5}{1-0}(x-0)$$

$$y-5=-1x \Rightarrow \boxed{y=-1x+5}$$



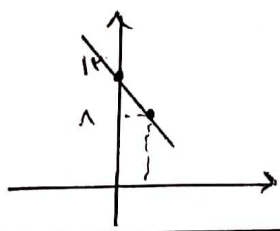
مثال ۲) در تابع خطی f داریم: $f(2)=4$ و $f(1)=8$ مطلوبست ضابطه تابع f و رسم نمودار آن:

$f(2)=4 \Rightarrow (2,4)\in f$

$f(1)=8 \Rightarrow (1,8)\in f$

$y=ax+b$

$$\begin{cases}4=a(2)+b\\ 8=a(1)+b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a+b=4\\ a+b=8\end{cases} \quad \begin{matrix}a=-4\\ b=12\end{matrix}$$



$$y=f(x)=-4x+12$$

(تمرینات تکمیلی)

تمرین ۱: اگر بدانیم رابطه زیر یک تابع است مقادیر a و b را بدست آورید:

الف) $R=\{(2,1),(4,8),(2,a-3),(a,b+2)\}$

$(2,1)=(2,a-3) \Rightarrow a-3=1 \Rightarrow \boxed{a=4} \Rightarrow (a,b+2)=(4,b+2)$

$(4,b+2)=(4,8) \Rightarrow b+2=8 \Rightarrow \boxed{b=6}$

ب) $R=\{(a-1,2),(5,a-2),(a-2,b+3),(3,5),(5,3)\}$

$(5,a-2)=(5,3) \Rightarrow a-2=3 \Rightarrow \boxed{a=5} \Rightarrow R=\{(4,2),(5,3),(3,b+3),(3,5),(5,3)\}$

$b+3=5 \Rightarrow \boxed{b=2}$

تمرین ۳: فرض کنید برای تابعی مانند f داشته باشیم $f(x-1)=5x$

مطلوبست محاسبه $f(7)=?$

$x-1=7 \Rightarrow x=8$ یا $x=8 \Rightarrow f(x-1)=f(8-1)=f(7)=5(7)=35$

$f(8-1)=f(7)=5(7)=35$

تمرین ۴: فرض کنید $f(x)=mx+b$ یک تابع خطی باشد و داشته باشیم $f(x+2)=f(x)+2$ و $f(2)=5$ مطلوبست تابع f و رسم نمودار آن:

$f(2)=5 \Rightarrow m(2)+b=5 \Rightarrow \boxed{2m+b=5}$

$$\left.\begin{aligned} f(x+2)&=m(x+2)+b=mx+2m+b \\ f(x+2)&=f(x)+2=mx+b+2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cancel{mx}+2m+\cancel{b}=\cancel{mx}+\cancel{b}+2$$

$\Rightarrow 2m=2 \Rightarrow \boxed{m=1}$

$2(1)+b=5 \Rightarrow \boxed{b=3}$

$\boxed{f(x)=1x+3}$

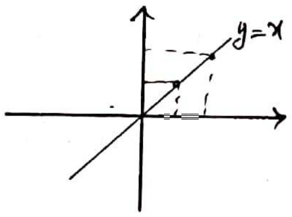
تمرین ۵: اگر $f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ و $f(1)=5$ و $f(-2)=-1$ مقدار $3a-2b$ را بدست آورید.

$$f(1)=5 \Rightarrow 1^3+2(1)^2+a(1)+b=5 \Rightarrow a+b=2$$
$$f(-2)=-1 \Rightarrow (-2)^3+2(-2)^2+a(-2)+b=-1 \Rightarrow -2a+b=-1$$
$$\Rightarrow \boxed{a=b=1}$$
$$3a-2b=3(1)-2(1)=1$$

انواع تابع:

۱) تابع همانی (واحد):

اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود تابع را همانی (واحد) می نامند ضابطه آن بصورت $y=f(x)=x$ و نمودار آن نیمساز ربع اول و سوم است.



$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=\mathbb{R}$

مثال) اگر تابع $f=\{(a-1,5),(b+3,8),(\frac{c}{2},10)\}$ یک تابع همانی باشد مقادیر a و b و c را بیابید.

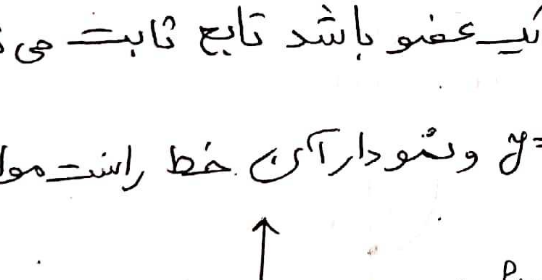
$a-1=5 \Rightarrow a=6$

$b+3=8 \Rightarrow b=5$

$\frac{c}{2}=10 \Rightarrow c=20$

۲) تابع ثابت:

تابعی مانند f که برد آن تنها شامل یک عضو باشد تابع ثابت می نامیم ضابطه آن بصورت $y=f(x)=c$ و نمودار آن خط راست موازی محور xها است.



مثال) اگر $f=\{(2,a+1),(14,b-2),(6,10),(8,4c)\}$ تابعی ثابت باشد مطلوبست محاسبه a و b و c؟

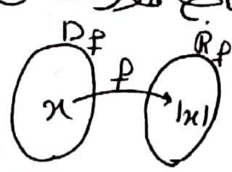
$a+1=10 \Rightarrow a=9$

$b-2=10 \Rightarrow b=12$

$4c=10 \Rightarrow c=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

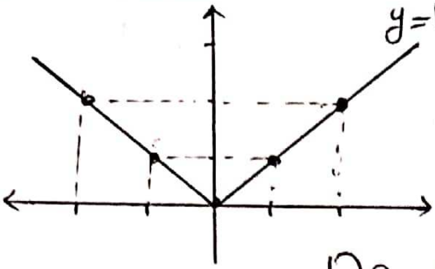
۳) تابع قدر مطلق:

تابعی که هر عدد حقیقی را به قدر مطلق آن نسبت می دهد تابع قدر مطلق نامیده می شود و با بصورت زیر قابل نمایش است:



$$\begin{cases} f: x \to |x| \\ y=f(x)=|x| \end{cases}$$

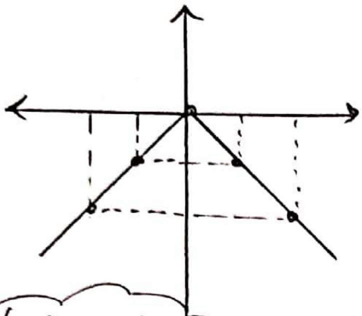
نمودار تابع $y=f(x)=|x|$ بصورت زیر است : $y=|x|$



x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

$D_f=\mathbb{R}$ $\qquad R_f=[0,+\infty)$

تمرین : نمودار تابع $y=-|x|$ را رسم کنید.
و دامنه و برد آنرا مشخص کنید.



$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=(-\infty,0]$

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-1	0	-1	-2

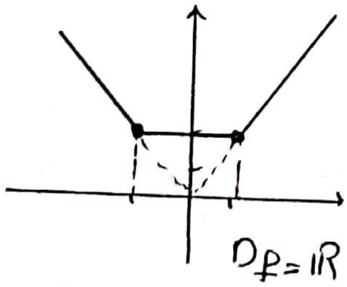
اشاره به نمودار $y=\sqrt{x}$ و $y=\frac{1}{x}$

توابع چند ضابطه‌ای :
توابعی که بخش‌های مختلف دامنه آن با ضابطه‌های مختلف تعریف می‌شوند توابع چند ضابطه‌ای نامیده می‌شوند.

تمرین : نمودار توابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید.

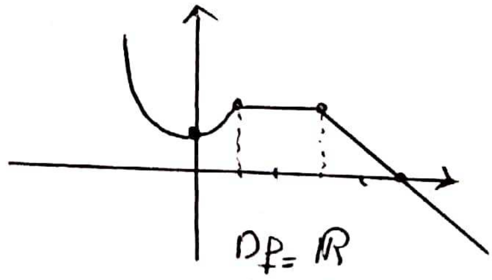
$$f(x)=\begin{cases} 2x & x>1 \\ 2 & -1\leqslant x\leqslant 1 \\ -2x & x<-1 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<1 \\ 2 & 1\leqslant x\leqslant 3 \\ -x+5 & x>3 \end{cases}$$



$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=[2,+\infty)$



$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=\mathbb{R}$

تمرین : اگر $f(x)=\begin{cases} 3x^2-5 & x\geqslant -1 \\ 2x+3 & x<-1 \end{cases}$ باشد مقدار $f(-2)$ ، $f(-1)$ و $f(\sqrt{2})$ و $f(0)$ را بدست آورید.

$f(-2)=2(-2)+3=-1$

$f(-1)=3(-1)^2-5=-2$

$f(\sqrt{2})=3(\sqrt{2})^2-5=1$

$f(0)=3(0)^2-5=-5$

تمرین: در تابع $f(x)=\begin{cases}2x^2+4 & x\geq 2\\ |x|-4 & x<2\end{cases}$ مقدار $f(2)+f(-2)$ را بدست آورید.

$f(2)=2(2)^2+4=12$

$f(-2)=|-2|-4=2-4=-2$

$f(2)+f(-2)=12+(-2)=10$

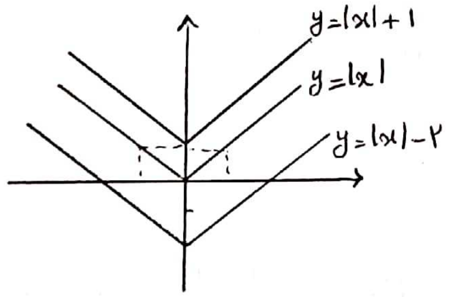
تمرین: اگر ضابطه $f(x)=\begin{cases}2x+3k & x\geq 1\\ 4x-k & x\leq 1\end{cases}$ یک تابع باشد مقدار k را بدست آورید.

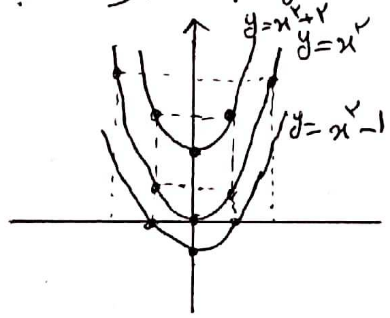
$\left.\begin{array}{l} f(1)=2(1)+3k=2+3k \\ f(1)=4(1)-k=4-k \end{array}\right\} \Rightarrow 2+3k=4-k \Rightarrow 4k=4 \Rightarrow \boxed{k=1}$

رسم نمودار توابع به کمک انتقال منحنی ها:

۱) برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+a$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ بصورت زیر عمل می کنیم:

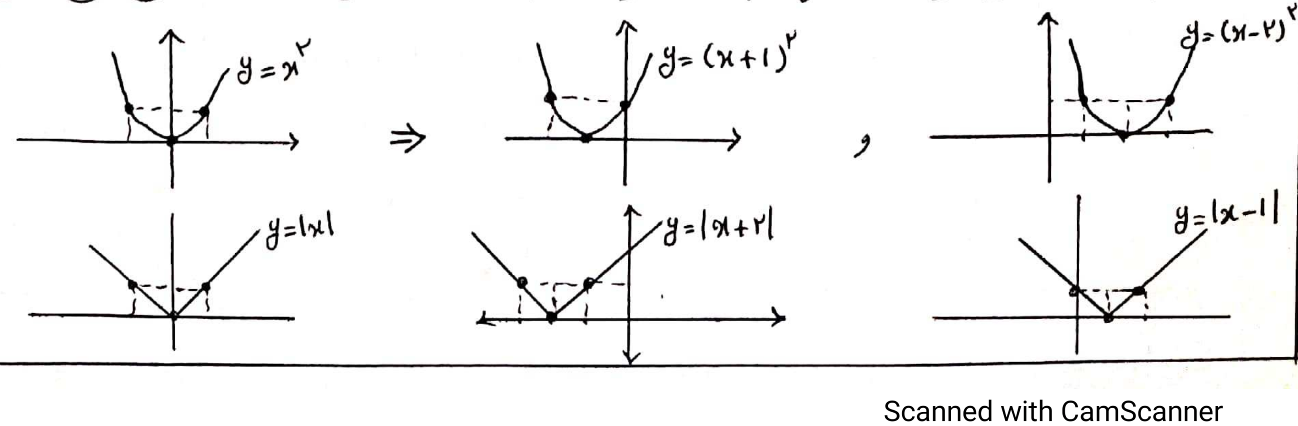
اگر a مثبت باشد نمودار $y=f(x)$ به اندازه a به سمت بالا و اگر a منفی باشد نمودار $y=f(x)$ به اندازه a به سمت پایین منتقل می شود.



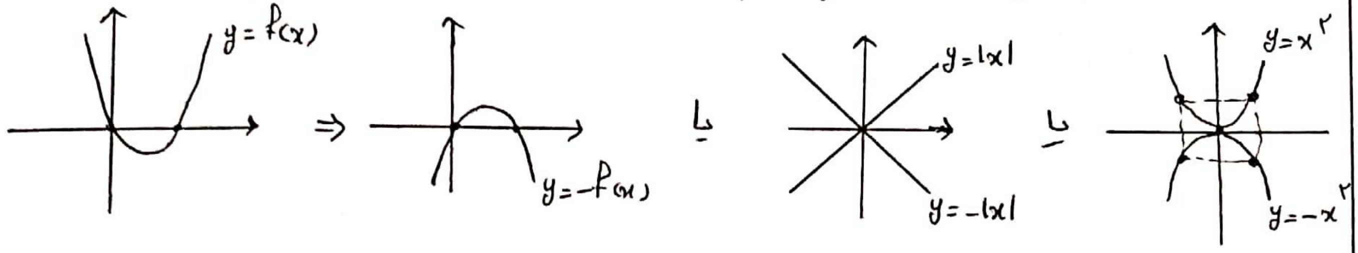


۲) برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ بصورت زیر عمل می کنیم:

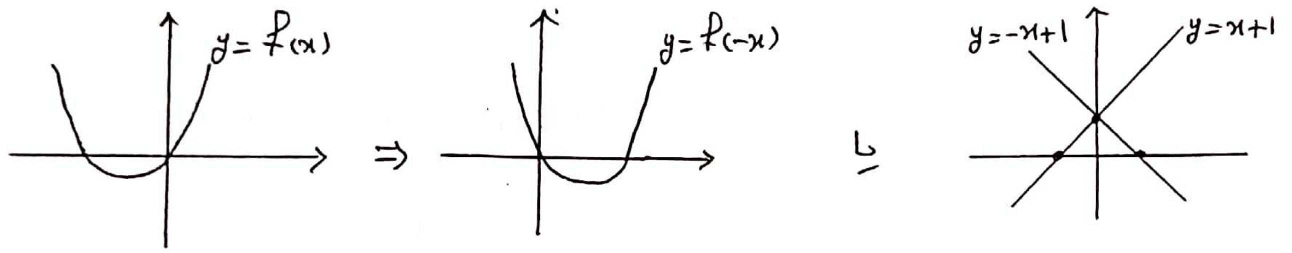
اگر a مثبت باشد نمودار تابع $y=f(x)$ به اندازه a به سمت چپ و اگر a منفی باشد نمودار $y=f(x)$ به اندازه a به سمت راست منتقل می شود.



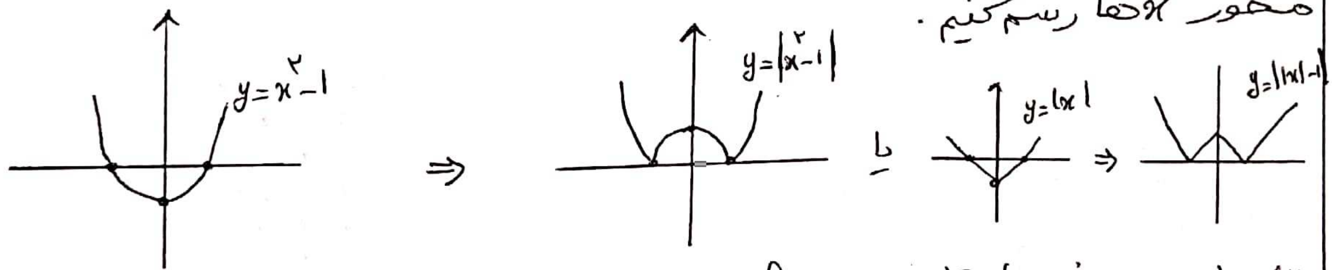
۳) برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ کافی است قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.



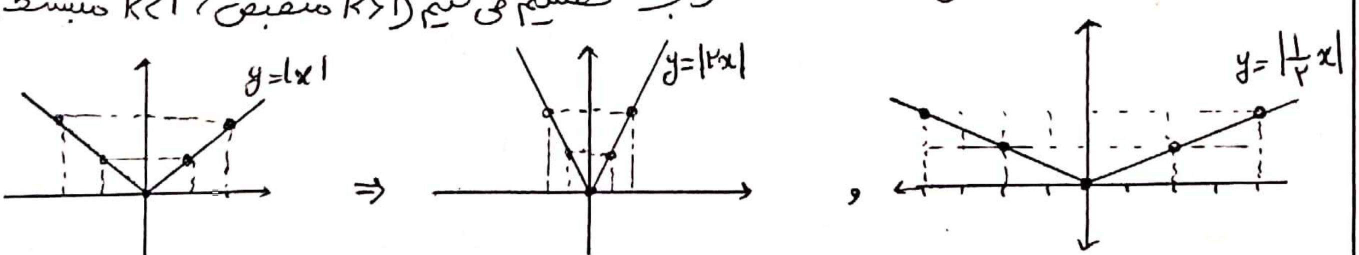
۴) برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ کافی است قرینه‌ی نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور yها رسم کنیم:



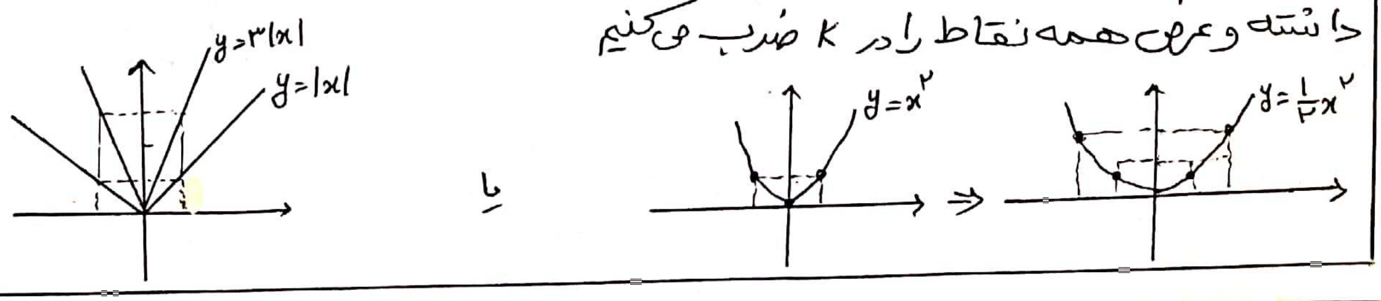
۵) برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ کافی است قرینه قسمتی از نمودار تابع $y=f(x)$ را که زیر محور xها است نسبت به محور xها رسم کنیم.



۶) برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، عرض نقاط را ثابت نگه داشته و طول همه نقاط را بر k تقسیم می‌کنیم ($k>1$ منقبض، $k<1$ منبسط)



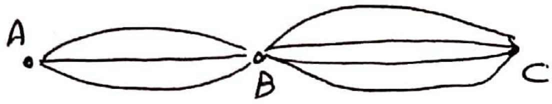
۷) برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، طولها را ثابت نگه داشته و عرض همه نقاط را در k ضرب می‌کنیم



فصل ۶ :

اصل ضرب : اگر کاری در مرحله اول به m روش و در مرحله دوم به n روش و در مرحله سوم به p روش و ...... انجام شود کل کار به $m \times n \times p \times \dots$ روش انجام می‌شود.

مثال ۱: بین دو شهر A و B سه جاده و بین دو شهر B و C چهار جاده وجود دارد. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت؟



۳×۴=۱۲

مثال ۲ : چند عدد ۳ رقمی داریم؟

صدگان	دهگان	یکان
۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
۹ تا	۱۰ تا	۱۰ تا

۹×۱۰×۱۰=۹۰۰

مثال ۳ : چند عدد ۳ رقمی داریم :

الف) که رقم‌هایش تکراری نباشد؟

ب) که رقم هایش تکراری باشد؟

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹		
۹ تا	۹ تا	۸ تا

۹×۹×۸=۶۴۸

۹۰۰−۶۴۸=۲۵۲

مثال ۴ : مطلوبست تعداد اعداد سه رقمی با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ بطوریکه :

الف) تکرار مجاز باشد.

۴×۵×۵=۱۰۰

ب) تکرار مجاز نباشد.

۴×۴×۳=۴۸

مثال ۵: تعداد اعداد چهار رقمی را بیابید:

۹×۱۰×۱۰×۱۰=۹۰۰۰

مثال ۶ : به چند طریق می توان به ۱۰ سوال تستی چهارگزینه‌ای پاسخ داد درصورتی که :

الف) به هر سوال حتماً باید پاسخ داده شود.

$$\underbrace{4\times 4\times \cdots\times 4}_{\text{۱۰ بار}} = 4^{10}$$

ب) می توان به سوالها پاسخ نداد.

$$5\times 5\times \cdots\times 5 = 5^{10}$$

مثال ۷ : با حروف کلمه STOP چند کلمه چهار حرفی با تکرار می‌توان نوشت درصورتی که :

الف) با حرف T شروع شود.

$$1\times 4\times 4\times 4 = 64$$

ب) با حرف P شروع شود و به حرف O ختم شود.

$$1\times 4\times 4\times 1 = 16$$

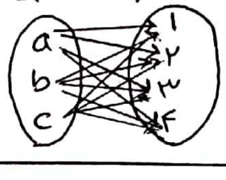
مثال ۸ : ثابت کنید تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر است با: 2^n

اثبات : فرض کنید $A=\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ یک مجموعه n عضوی باشد و B زیرمجموعه‌ای دلخواه از آن باشد. a_1 به B تعلق دارد یا ندارد پس دو حالت وجود دارد a_2 یا به B تعلق دارد یا ندارد پس برای a_2 نیز دو حالت وجود دارد به همین ترتیب طبق اصل ضرب

$$\underbrace{2\times 2\times 2\times \cdots \times 2}_{\text{n بار}} = 2^n$$

حالت خواهیم داشت که تعداد کل زیرمجموعه‌هاست.

مثال ۹ : از مجموعه $A=\{a, b, c\}$ به مجموعه $B=\{1, 2, 3, 4\}$ چند تابع می توان ساخت؟



حل : برای هر عضو دامنه یعنی A چهار حالت وجود دارد که به عضوی از برد یعنی B برده شود.

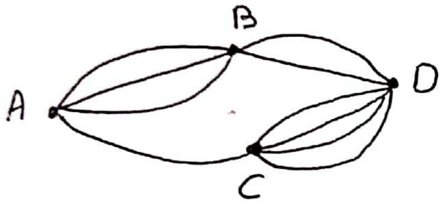
$4\times 4\times 4 = 4^3$ تابع از A به B وجود دارد.

نکته ریاضی: تعداد تابع‌هایی که از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه m عضوی می‌توان نوشت برابر است با: m^n

اصل جمع:

اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد بطوریکه در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد برای انجام کار مورد نظر $m+n$ روش وجود دارد (اصل جمع معادل کلمه «یا» است).

مثال ۱: در شکل زیر که جاده‌ها یک طرفه هستند به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت؟



مسیر A و B و D ⇐ ۶ حالت ۳×۲=۶

مسیر A و C و D ⇐ ۴ حالت ۱×۴=۴

کل حالت‌ها = ۶+۴=۱۰

مثال ۲: با ارقام {۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷} چند عدد کوچکتر از ۱۰۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

عدد یک رقمی = ۷ تا

عدد ۲ رقمی = ۷×۶ = ۴۲ تا

عدد ۳ رقمی = ۷×۶×۵ = ۲۱۰ تا

کل حالتها = ۷+۴۲+۲۱۰ = ۲۵۹ حالت

مثال ۳: با ارقام {۱، ۲، ۴، ۵، ۶} و بدون تکرار ارقام چند عدد سه رقمی فرد بزرگتر از ۴۰۰ می‌توان ساخت؟

صدگان	دهگان	یکان
۴ یا ۶		۵
۲ حالت	۳ حالت	۱ حالت

۲×۳×۱ = ۶

صدگان	دهگان	یکان
۴، ۵، ۶		۱
۳ حالت	۳ حالت	۱ حالت

۳×۳×۱ = ۹

کل حالتها = ۶+۹=۱۵

فاکتوریل:

علامتی است برای نشان دادن حاصلضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n که با نماد $n!$ (n فاکتوریل) نشان می دهیم:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

تذکر مهم: $\boxed{1!=1}$ $\boxed{0!=1}$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ $\quad$ $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ $\quad$ $6! = 720$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3! = 5 \times 4 \times 3 \times 2!$$

پس:

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \dots$$

مثال ۱: حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف) $$\frac{12!}{7! \times 5!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!} \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 792$$

ب) $$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

ت) $$1! + 2! + 3! = 1 + 2 \times 1 + 3 \times 2 \times 1 = 1 + 2 + 6 = 9$$

مثال ۲: از معادله $\frac{n!}{(n-3)!} = 24$ مقدار n را بیابید.

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 24 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 24 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 24 \Rightarrow \boxed{n=4}$$

مثال ۳: معادله $(2x - x^2)! = 1$ چند جواب دارد؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

$$(2x - x^2)! = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = 2 \\ \text{یا} \\ 2x - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

جایگشت:

تعداد حالتهای کنار هم قرار گرفتن n شی متمایز را جایگشت آن n شی متمایز نامیده و برابر است با: $n!$

مثال ۱: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۷ و ۹ چند عدد ۵ رقمی با ارقام غیر تکراری می توان ساخت؟

$$۵! = ۵×۴×۳×۲×۱ = ۱۲۰$$

مثال ۲: ۷ دانش آموز به چند طریق می توانند در یک صف بایستند؟

$$۷! = ۷×۶×۵×۴×۳×۲×۱ = ۵۰۴۰$$

مثال ۳: ۶ مداد رنگی را به چند طریق می توان در جعبه کنار هم قرار داد؟

$$۶! = ۶×۵×۴×۳×۲×۱ = ۷۲۰$$

مثال ۴: ۵ نفر به چند طریق می توانند در یک صف بایستند بطوریکه یک نفر معین همواره در وسط صف قرار بگیرد؟

حل: چون جای آن یک نفر کاملاً مشخص است پس جایگشت ۴ نفر دیگر را در نظر می گیریم:

$$۴! = ۴×۳×۲×۱ = ۲۴$$

مثال ۵: ۶ نفر به چند طریق می توانند در یک صف بایستند بطوریکه یک نفر معین همواره اول صف باشد؟

$$۵! = ۱۲۰$$

مثال ۶: ۵ نفر به چند طریق می توانند در یک صف بایستند طوری که دو نفر معین همواره در کنار هم باشند؟

$$۴! × ۲! = ۲۴×۲ = ۴۸$$

فرمول:

n نفر به چند طریق می توانند در یک صف بایستند بطوریکه k نفر معین از آنها همواره در کنار هم باشند؟

$$(n-k+1)!\,k! = \text{جواب}$$

مثال ۱: به چند طریق هفت نفر می توانند در یک ردیف بایستند درصورتی که دو نفرشان که برادرند کنار هم باشند؟

$$(7-2+1)! \times 2! = 6! \times 2! = 720 \times 2 = 1440$$

مثال ۲: ۴ دانش آموز کلاس اول و ۵ دانش آموز کلاس دوم به چند طریق می توانند در یک ردیف بایستند به طوری که دانش آموزان کلاس اول حتماً کنار هم باشند؟

$$(9-4+1)! \times 4! = 6! \times 4! = 720 \times 24 =$$

جایگشت n شی غیرمتمایز:

هرگاه n شی داشته باشیم که p تای آنها از نوع اول، q تای آنها از نوع دوم و r تای آنها از نوع سوم و .... باشد دراینصورت جایگشت یا تعداد حالتهای کنارهم قرار گرفتن این n شی از فرمول زیر بدست می آید:

$$\text{جواب} = \frac{n!}{p! \times q! \times r! \times \cdots}$$

مثال ۱: با حروف کلمه دامداران چند کلمه ۸ حرفی می توان ساخت؟

$n = 8$

الف = ۳ تا

د = ۲ تا

$$\text{جواب} = \frac{8!}{3! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 3360$$

مثال ۲: با اعداد ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ چند عدد هفت رقمی می توان ساخت؟

$$\text{جواب} = \frac{7!}{2! \times 3! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 4} = 210$$

مثال ۳: با حروف کلمه "ABADAN" چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟

$$\text{جواب} = \frac{6!}{3!} = 120$$

فرمول:

تعداد جایگشتهای n شی متمایز که در آن k شی مشخص کنار هم قرار نداشته باشند از فرمول زیر بدست می آید:

جواب $= n! - (n-k+1)! \times k!$

مثال۱) با حروف a و b و c و d و e و f چند کلمه شش حرفی می توان نوشت بطوریکه a، f کنار هم نباشند.

جواب $= 6! - (6-2+1)! \times 2! = 720 - 120 \times 2 = 720 - 240 = 480$

مثال۲) به چند طریق می توان ۷ دانش آموز را در یک صف قرار داد بطوریکه دو نفر از آنها که برادر هستند کنار هم نباشند.

جواب $= 7! - (7-2+1)! \times 2! = 7! - 6! \times 2! = 3600$

جایگشت k شی از n شی متمایز:

اگر n شی متمایز داشته باشیم، تعداد حالتهای کنار هم قرار گرفتن k شی از n شی متمایز را با علامت $P(n,k)$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می کنیم:

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\overset{\text{مکان اول}}{n} \times \overset{\text{مکان دوم}}{(n-1)} \times \overset{\text{مکان سوم}}{(n-2)} \times \cdots \times \overset{\text{مکان } k\text{ام}}{(n-(k-1))} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال۱: ۶ نفر به سینما می روند و در یک ردیف ۱۰ صندلی خالی وجود دارد. به چند طریق این افراد می توانند روی صندلی ها بنشینند؟

$$P(10,6) = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = 151200$$

مثال ۲ : با حروف کلمه « FlOWER » و بدون تکرار حروف چند کلمه‌ی:

الف) سه حرفی می توان نوشت؟

$$P(۶,۳) = \frac{۶!}{(۶-۳)!} = \frac{۶!}{۳!} = ۱۲۰$$

ب) چهار حرفی می توان نوشت؟

$$P(۶,۴) = \frac{۶!}{(۶-۴)!} = \frac{۶!}{۲!} = ۳۶۰$$

مثال ۳ : با ۵ رقم غیر صفر چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان ساخت؟

$$P(۵,۳) = \frac{۵!}{(۵-۳)!} = \frac{۵!}{۲!} = ۶۰$$

مثال ۴ : چند کلمه سه حرفی با حروف متفاوت انگلیسی می توان نوشت؟

$$P(۲۶,۳) = \frac{۲۶!}{(۲۶-۳)!} = \frac{۲۶!}{۲۳!} = ۱۵۶۰۰$$

مثال ۵ : درون بشقابی یک سیب ، یک پرتقال و یک انار گذاشته شده است ، اگر از بین ۶ نفر ۳ نفر به طرف بشقاب رفته و هر کدام یک میوه بردارند به چند روش ممکن است ۳ میوه توزیع شده باشند؟

$$P(۶,۳) = \frac{۶!}{(۶-۳)!} = \frac{۶!}{۳!} = ۱۲۰$$

مثال ۶ : با حروف کلمه FAMILY و بدون تکرار حروف چند کلمه ۴ حرفی شامل حرف M می توان ساخت؟

قراردادن M در یکی از چهار مکان به ۴ طریق

پر کردن سه مکان باقیمانده توسط ۵ حرف باقیمانده : $P(۵,۳) = \frac{۵!}{(۵-۳)!} = ۶۰$

طبق اصل ضرب : $۴ \times ۶۰ = ۲۴۰ =$ کل حالتها

مثال ۷ : در یک مسابقه با ۱۴ شرکت کننده به چند طریق امکان دارد سه مدال طلا ، نقره و برنز به شرکت کننده‌ها برسد؟

$$P(۱۴,۳) = \frac{۱۴!}{(۱۴-۳)!} = \frac{۱۴!}{۱۱!} = ۲۱۸۴$$

ترکیب:
اگر از بین n شی متمایز بخواهیم k شی ($k \leq n$) را انتخاب کنیم و حالتهای کنار هم قرار گرفتن آنها اهمیتی نداشته باشد آنرا یک ترکیب k شی از n شی می‌گوئیم و با علامت $C(n,k)$ یا $\binom{n}{k}$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

تذکر مهم: هر زیر مجموعه k عضوی از عناصر یک مجموعه n عضوی یک ترکیب k تایی از این n عضو است.

مثال ۱: به چند طریق می‌توان از بین ۸ نفر، یک تیم سه نفری انتخاب کرد؟

$$C(8,3) = \frac{8!}{3! \times 5!} = 56$$

مثال ۲: هفت نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند:

الف) از وصل کردن هر دو نقطه به هم چند وتر ایجاد می‌شود؟

$$C(7,2) = \frac{7!}{2! \times 5!} = 21$$

ب) چند بردار غیر صفر می‌توان ساخت؟

$$2 \times C(7,2) = 2 \times \frac{7!}{2! \times 5!} = 2 \times 21 = 42$$

ابتدا و انتهای بردارها مهم است.

ج) چند مثلث می‌توان ساخت؟

$$C(7,3) = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35$$

مثال ۳: از رابطه $C(n,n-2)=6$ مقدار n را بدست آورید.

$$\frac{n!}{(n-2)! \times (n-(n-2))!} = 6 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 6 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 12$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 12 = 4 \times 3 \Rightarrow \boxed{n=4}$$

مثال ۴): نشان دهید:

$c(8,5) = c(7,5) + c(7,4)$

$c(7,5) + c(7,4) = \frac{7!}{5! \times 2!} + \frac{7!}{4! \times 3!} = 21 + 35 = 56$

$c(8,5) = \frac{8!}{5! \times 3!} = 56$

مثال ۵): از بین ۸ ایرانی، ۶ عراقی و ۵ پاکستانی به چند طریق می‌توان یک کمیته ۹ نفری شامل ۴ ایرانی، ۳ عراقی، ۲ پاکستانی تشکیل داد؟

$C(8,4) \times C(6,3) \times C(5,2) = \frac{8!}{4! \times 4!} \times \frac{6!}{3! \times 3!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 70 \times 20 \times 10 = 14000$

مثال ۶): به چند طریق می‌توان یک کمیته ۵ نفری از بین ۴ مرد و ۴ زن تشکیل داد به طوری که:

الف) محدودیتی نباشد.

$c(8,5) = \frac{8!}{5! \times 3!} = 56$

ب) کمیته شامل ۳ مرد و ۲ زن باشد.

$c(4,3) \times c(4,2) = \frac{4!}{3! \times 1!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 4 \times 6 = 24$

مثال ۷): در کیسه‌ای ۷ مهره قرمز و ۶ مهره آبی و ۵ مهره سبز وجود دارد. از این کیسه سه مهره با هم و به تصادف خارج می‌کنیم مطلوبست تعداد حالاتی که:

الف) هر سه مهره همرنگ باشند.

$c(7,3) + c(6,3) + c(5,3) = 35 + 20 + 10 = 65$

ب) هر سه مهره از رنگ‌های مختلف باشند.

$c(7,1) \times c(6,1) \times c(5,1) = 7 \times 6 \times 5 = 210$

مثال ۸): مقادیر n و r را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\begin{cases} P(n,r) = 60 \\ c(n,r) = 10 \end{cases}$$

$\frac{n!}{(n-r)!} = 60 \quad (1)$

$\frac{n!}{r! \times (n-r)!} = 10 \quad (2)$

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow r! = 6 \Rightarrow \boxed{r=3}$

$\frac{n!}{(n-r)!} = 60 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 60 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 60 = 5 \times 4 \times 3$

$\Rightarrow \boxed{n=5}$

مثال ۹) از هر یک از روابط زیر عدد طبیعی n را بدست آورید.

الف) $C(n,2)+P(n,1)=15$

$$\frac{n!}{2!\times(n-2)!}+\frac{n!}{(n-1)!}=15 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}+\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}=15$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}+n=15 \Rightarrow \frac{n^2-n+2n}{2}=15 \Rightarrow n^2+n-30=0 \Rightarrow (n+6)(n-5)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=5 & \text{ق ق} \\ n=-6 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

ب) $C(n+1,3)=3P(n,2)$

$$\frac{(n+1)!}{3!\,(n-2)!}=3\times\frac{n!}{(n-2)!} \Rightarrow \frac{(n+1)\times \cancel{n!}}{6\times\cancel{(n-2)!}}=3\times\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-2)!}} \Rightarrow \frac{n+1}{6}=3$$

$$\Rightarrow n+1=18 \Rightarrow \boxed{n=17}$$

مثال ۱۰) تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی از یک مجموعه ۱۰ عضوی را بدست آورید.

$$C(10,3)=\frac{10!}{3!\times(10-3)!}=\frac{10!}{3!\times 7!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{6\times7!}=120$$

مثال ۱۱) به چند طریق می‌توان ۳ تا از حروف کلمه DELAVARAN را انتخاب کرد؟ (سراسری - ۸۶)

الف) ۳۵ ب) ۴۲ ج) ۵۶ د) ۸۴

A, A, A, D, E, L, V, R, N

برای انتخاب ۳ حرف از این حروف، ۳ حالت وجود دارد:

حالت اول: ۳ حرف یکسان باشند $\rightarrow$ AAA $\Rightarrow$ ۱ حالت

حالت دوم: ۲ حرف یکسان باشند $\rightarrow$ AA□ $\Rightarrow$ ۶ حالت

حالت سوم: ۳ حرف متمایز باشند $\rightarrow \binom{7}{3}=$ ۳۵ حالت

$$\Rightarrow 1+6+35=42$$

مثال ۱۲: در یک آزمون که ۱۲ سوال دارد، شخصی می‌خواهد به ۶ سوال پاسخ دهد. این کار به چند طریق می‌تواند انجام شود درصورتیکه:

الف) هیچ شرطی وجود نداشته باشد. $C(12,6)=\frac{12!}{6!\times(12-6)!}=924$

ب) حداقل به ۳ سوال از ۵ سوال اول پاسخ دهد.

$$\binom{5}{3}\binom{7}{3}+\binom{5}{4}\binom{7}{2}+\binom{5}{5}\binom{7}{1}=350+105+7=462$$

مثال ۱۳: با حروف کلمه «computer»، چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آن o و m حتماً موجود باشند؟

حل: ابتدا ۳ حرف دیگر را که لازم داریم انتخاب کرده و سپس همه را در یک ردیف قرار می‌دهیم:

$$\text{جواب}=\binom{6}{3}\times 5!=\frac{6!}{3!\times 3!}\times 5!=20\times 120=2400$$

مثال ۱۴: با حروف کلمه «History»، چند کلمه چهار حرفی می‌توان ساخت بطوریکه:

الف) حروف صدادار نداشته باشد؟

حل: حروف صدادار a و e و i و o و u می‌باشند فقط از ۵ حرف باقیمانده باید ۴ حرف انتخاب کنیم:

$$\binom{5}{4}\times 4!=5\times 4!=5\times 24=120$$

ب) با حروف صدادار شروع و با حروف بی صدا ختم شوند؟

i o			h t s r y
۲	۵	۴	۵

$$\text{کل حالتها}=2\times 5\times 4\times 5=20$$

تذکر مهم:

$$\binom{n}{1}=n\ ,\quad \binom{n}{0}=1\ ,\quad \binom{n}{n}=1\ ,\quad \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}\ ,\quad \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

تمرین ص ۱۳۱ کتاب درسی :

۱) در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم های اول تا سوم به چند حالت مختلف می توانند مشخص شوند؟

$$P(18,3)=\frac{18!}{(18-3)!}=\frac{18!}{15!}=\frac{18\times17\times16\times15!}{15!}=4896$$

۲) از بین تعدادی کتاب مختلف می خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه ای بچینیم. اگر تعداد حالتهای مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتابها چند تا است؟

$$P(n,3)=210 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!}=210 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}=210 \Rightarrow$$

$$n(n-1)(n-2)=210=7\times6\times5 \Rightarrow \boxed{n=7}$$

۳) کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$6!=3!+3!$ $\times$ $\quad$ $8!=4!\times2!$ $\times$ $\quad$ $(3!)^2=9!$ $\times$

$6!=6\times5!$ $\checkmark$ $\quad$ $2\times3!=6!$ $\times$ $\quad$ $4!=\frac{8!}{2!}$ $\times$

۴) یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

$$P(20,3)=\frac{20!}{(20-3)!}=\frac{20!}{17!}=\frac{20\times19\times18\times17!}{17!}=6840$$

$6840\times2=13680$ ثانیه $=\underset{\text{دقیقه}}{228}$

۵) با حروف کلمه « گل پیرا » و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ $۶! = ۷۲۰$ چندتا از آنها با «گل» شروع می‌شود؟ $۴! = ۲۴$

ب) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت؟ $P(۶, ۴) = \frac{۶!}{۲!} = ۳۶۰$

پ) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

$$\text{پ ر} \times ۴ \times ۳ = ۱۲ \xrightarrow[\text{به ۲ طریق}]{\text{خود پ ر}} ۲۴$$

$$۴ \times \text{پ ر} \times ۳ = ۱۲ \longrightarrow ۲۴$$

$$۴ \times ۳ \times \text{پ ر} = ۱۲ \longrightarrow ۲۴$$

$$\xrightarrow[\text{جمع}]{\text{اصل}} ۲۴ + ۲۴ + ۲۴ = ۷۲$$

ت) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

گ ل	پیرا

$۴! \times ۲! = ۴۸$

پیرا	گ ل

$۲! \times ۴! = ۴۸$

$$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۴۸ + ۴۸ = ۹۶$$

« تمرینات ص ۱۳۹ کتاب درسی »

۱) یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه کدو، تخمه ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد، او با تنقلات موجود در فروشگاه چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟

$$\binom{۷}{۵} + \binom{۷}{۶} + \binom{۷}{۷} = \frac{۷!}{۵! \times ۲!} + \frac{۷!}{۶! \times ۱!} + \frac{۷!}{۷! \times ۰!} = ۲۱ + ۷ + ۱ = ۲۹$$

---

۲) یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود هرگاه؟

الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

$$\binom{1}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{3+2+6+3}{3}=\binom{1}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{14}{3}=1\times3\times364=1092$$

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

$$\binom{1}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{2+6+3}{2}=\binom{1}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{11}{2}=1\times3\times3\times55=495$$

پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

$$\binom{1}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{2}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{6+3}{1}=1\times3\times2\times3\times9=162$$

---

۳) در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی اند داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

$$\binom{n}{2}=28\Rightarrow\frac{n!}{2!\times(n-2)!}=28\Rightarrow\frac{n(n-1)(n-2)!}{2\times(n-2)!}=28\Rightarrow n(n-1)=56=8\times7$$

$$\Rightarrow\boxed{n=8}$$

---

۴) گل‌فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل متفاوت دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

$$\binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5}=\frac{10!}{3!\times7!}+\frac{10!}{4!\times6!}+\frac{10!}{5!\times5!}=120+210+252=582$$

---

۵) یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

$$\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=6+4+1=11$$

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟ چون دو رنگ انتخاب شده را می‌توانیم با نسبت‌های متفاوتی با هم مخلوط کنیم.

۶) هفت نقطه A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35$$

۷) یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه:

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120$$

ب) دو نوع ادویه هستند که باهم نمی‌توانند استفاده شوند؟

از ۳ نوع ادویه، اگر دو نوع ادویه A و B انتخاب شوند یک نوع ادویه از بین ۸ نوع ادویه باقیمانده انتخاب می‌شود که برابر است با: $\binom{8}{1} = 8$

تعداد حالت‌هایی که A و B باهم استفاده نشوند = کل حالت‌ها − تعداد حالت‌هایی که A و B باهم استفاده شوند

$$= \binom{10}{3} - \binom{8}{1} = 120 - 8 = 112$$

پ) سه نوع ادویه هستند که نباید هر سه باهم استفاده شوند؟

تعداد حالت‌هایی که سه نوع ادویه A و B و C باهم استفاده نشوند = کل حالت‌ها − تعداد حالت‌هایی که A و B و C باهم استفاده شوند.

$$= \binom{10}{3} - \binom{3}{3} = 120 - 1 = 119$$

ت) ادویه‌ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ یک از ادویه‌های دسته اول با هیچ یک از ادویه‌های دسته دوم سازگاری ندارند؟

(۳ تا یا از دسته اول یا از دسته دوم) $\binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$

۸) مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با:

الف) $\binom{6}{2} \times \binom{5}{3}$ به چند طریق می‌توان از بین ۵ دانش‌آموز ریاضی و ۶ دانش‌آموز تجربی یک تیم فوتبال ۵ نفره تشکیل داد بطوریکه ۳ نفر دانش‌آموز ریاضی و ۲ نفر دانش‌آموز تجربی باشند.

ب) $\binom{6}{2} + \binom{5}{3}$ به چند طریق می‌توان از بین ۵ فوتبالیست یا ۶ شطرنج باز یک تیم ۳ نفره فوتبال یا یک تیم ۲ نفره شطرنج باز تشکیل داد.

فصل ۷ : آمار و احتمال

پدیده‌های تصادفی :

پدیده‌هایی که نتیجه آزمایش یا مشاهده را در آنها قبل از وقوع، بطور قطع نتوان مشخص کرد پدیده‌های تصادفی می نامند.

پرتاب سکه یا انداختن تاس نمونه‌هایی از پدیده‌های تصادفی هستند.

فضای نمونه :

مجموعه همه‌ی نتیجه‌های ممکن هر آزمایش را فضای نمونه‌ای آن آزمایش نامیده و با S نشان می‌دهیم همچنین تعداد اعضای فضای نمونه‌ای S را با $n(S)$ نشان می دهند.

فضای نمونه‌ای در انداختن یک سکه $= S = \{\text{ر}, \text{پ}\} \Rightarrow n(S) = 2 = 2^1$

فضای نمونه‌ای در انداختن دو سکه $= S = \{(\text{ر},\text{ر}), (\text{پ},\text{ر}), (\text{ر},\text{پ}), (\text{پ},\text{پ})\}$

$\Rightarrow n(S) = 4 = 2^2$

فضای نمونه‌ای در انداختن سه سکه $= S = \{ \quad \}$

$\Rightarrow n(S) = 8 = 2^3$

فرمول: فضای نمونه‌ای در انداختن n سکه را با S نشان می دهیم تعداد اعضای این فضای نمونه‌ای برابر است با: $n(S) = 2^n$

فضای نمونه‌ای در انداختن تاس $= S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6 = 6^1$

فضای نمونه‌ای در انداختن ۲ تاس $= S = \{(1,1), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (2,6), (3,1), \dots, (3,6), (4,1), \dots, (4,6), (5,1), \dots, (5,6), (6,1), \dots, (6,6)\}$

$\Rightarrow n(S) = 36 = 6^2$

فرمول: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در انداختن n تاس برابر است با: $n(S) = 6^n$

فرمول ۵: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در انداختن n سکه و m مکعب برابر است با:

$$n(S)=2^n \times 6^m$$

مثال) فضای نمونه‌ای در انداختن یک سکه و یک مکعب را بنویسید.

$$n(S)=2^1 \times 6^1=12$$

S={(ر،۱) ، (ر،۲) ، (ر،۳) ، (ر،۴) ، (ر،۵) ، (ر،۶) ، (پ،۱) ، (پ،۲) ، (پ،۳) ، (پ،۴) ، (پ،۵) ، (پ،۶)}

پیشامد تصادفی:

هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای S مانند A را یک پیشامد تصادفی در S می‌نامیم. تعداد اعضای پیشامد تصادفی A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱: فضای نمونه‌ای پرتاب تاس را نوشته و پیشامد آن را مشخص کنید که تاس زوج ظاهر شود.

فضای نمونه = $S=\{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow n(S)=6$

پیشامد ظاهر شدن زوج = $A=\{2,4,6\} \Rightarrow n(A)=3$

مثال ۲) یک سکه را ۲ بار پرتاب می‌کنیم فضای نمونه‌ای این تجربه تصادفی را نوشته و پیشامد آن را مشخص کنید که فقط یک بار «رو» ظاهر شود؟

فضای نمونه‌ای = S={(ر،ر) ، (پ،ر) ، (ر،پ) ، (پ،پ)} ⇒ $n(S)=4$

پیشامد یک بار «رو» = A={(ر،پ) ، (پ،ر)} ⇒ $n(A)=2$

تذکر مهم: اگر یک سکه را n بار پرتاب کنیم یا n سکه را یک بار پرتاب کنیم فضای نمونه‌ای هر دو آزمایش با هم برابر است و $n(S)=2^n$

مثال ۳: خانواده‌ای صاحب ۴ فرزند است مطلوب است:

الف) پیشامد A که در آن دقیقاً یک دختر در این خانواده متولد شده باشد.

A={(د،پ،پ،پ) ، (پ،د،پ،پ) ، (پ،پ،د،پ) ، (پ،پ،پ،د)} ⇒ $n(S)=4$

ب) پیشامد B که در آن حداکثر یک دختر در خانواده متولد شده باشد.

B = {(د، پ، پ، پ)، (پ، د، پ، پ)، (پ، پ، د، پ)، (پ، پ، پ، د)، (پ، پ، پ، پ)} $\Rightarrow n(B)=5$

ج) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند.

C = {(پ، پ، د، د)، (پ، د، پ، د)، (پ، د، د، پ)، (د، پ، پ، د)، (د، پ، د، پ)، (د، د، پ، پ)} $\Rightarrow n(C)=6$

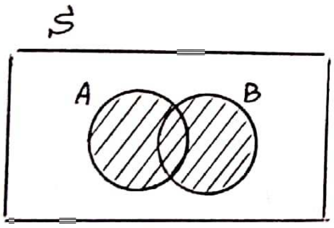
د) پیشامد D که در آن تعداد فرزندان پسر بیشتر از دختر باشد.

D = {(د، پ، پ، پ)، (پ، د، پ، پ)، (پ، پ، د، پ)، (پ، پ، پ، د)، (پ، پ، پ، پ)} $\Rightarrow n(D)=5$

پیشامدها و برخی اعمال روی آنها:

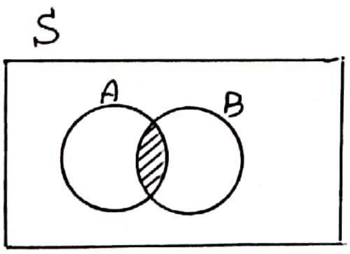
اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند آنگاه:

الف) اجتماع دو پیشامد:



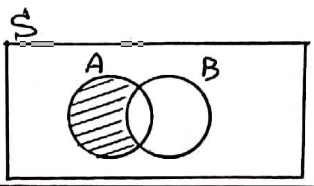
پیشامد $(A \cup B)$ زمانی رخ می‌دهد که حداقل یکی از دو پیشامد رخ دهد (یا A رخ دهد یا B رخ دهد یا هر دو رخ دهد)

ب) اشتراک دو پیشامد:



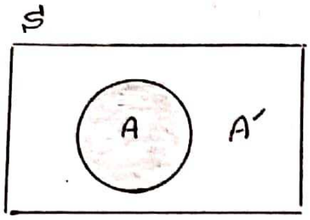
پیشامد $(A \cap B)$ زمانی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد با هم رخ دهند (هم پیشامد A رخ دهد و هم پیشامد B رخ دهد)

پ) تفاضل دو پیشامد:



پیشامد $(A-B)$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد:

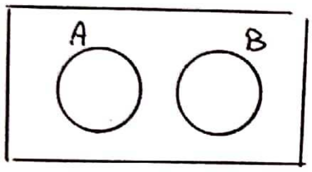


اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد متمم پیشامد A را با علامت A' نشان داده و زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد:

1) $A\cup A'=S$ 2) $A\cap A'=\emptyset$ 3) $S-A=A'$ 4) $S-A'=A$

تعریف دو پیشامد ناسازگار:

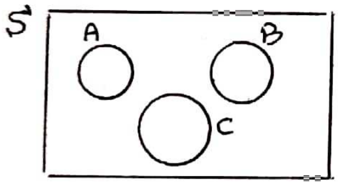
اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند آنها را ناسازگار می‌گویند



هرگاه $A\cap B=\emptyset$ در واقع دو پیشامد ناسازگار باهم رخ نمی‌دهند واضح است که A و A' ناسازگارند.

اگر A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، این سه پیشامد را دو به دو ناسازگار می‌نامند هرگاه:

$A\cap B=\emptyset$, $A\cap C=\emptyset$, $B\cap C=\emptyset$



به عبارت دیگر اشتراک دو به دوی آنها تهی باشند.

مثال) یک تاس را پرتاب می‌کنیم مطلوبست:

الف) پیشامد A که در آن عدد ظاهر شده تاس زوج باشد $A=\{2,4,6\}$

ب) پیشامد B که در آن عدد ظاهر شده تاس فرد باشد. $B=\{1,3,5\}$

ج) آیا این دو پیشامد ناسازگارند؟ چرا؟ بلی زیرا $A\cap B=\emptyset$

تمرین ۱: چهار سکه را باهم پرتاب می‌کنیم مطلوبست:

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این تجربه تصادفی

$n(S)=2^4=16$

ب) پیشامد A که در آن حداقل سه بار «رو» بیاید.

A={(پ,ر,ر,ر),(ر,پ,ر,ر),(ر,ر,پ,ر),(ر,ر,ر,پ),(ر,ر,ر,ر)} $\Rightarrow n(A)=5$

ج) پیشامد B که در آن فقط یک بار پشت بیاید.

B = {(پ، ر، ر، ر) ، (ر، پ، ر، ر) ، (ر، ر، پ، ر) ، (ر، ر، ر، پ)} ⇒ n(B) = ۴

د) پیشامد A − B را بیابید.

A − B = {(ر، ر، ر، ر)} ⇒ n(A − B) = ۱

تمرین ۲: تاس سالمی را دو بار می‌اندازیم، مطلوبست:

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای آن

$n(S) = 6^2 = 36$

ب) پیشامد A که عدد ظاهر شده در هر دو پرتاب مساوی باشند.

$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \Rightarrow n(A) = 6$

ج) پیشامد B که عدد ظاهر شده در هر دو پرتاب عددی اول باشد.

$B = \{(2,3), (3,2), (2,5), (5,2), (3,5), (5,3), (2,2), (3,3), (5,5)\} \Rightarrow n(B) = 9$

د) پیشامد C که A رخ دهد ولی B رخ ندهد.

$C = A - B = \{(1,1), (4,4), (6,6)\} \Rightarrow n(C) = n(A - B) = 3$

تمرین:

یک سکه را ۳ بار می‌اندازیم. مطلوبست:

الف) فضای نمونه‌ای آن.

S = {(پ، پ، پ) ، (ر، پ، پ) ، (پ، ر، پ) ، (پ، پ، ر) ، (ر، ر، پ) ، (ر، پ، ر) ، (پ، ر، ر) ، (ر، ر، ر)} ⇒ n(S) = ۸

ب) پیشامد A که در آن لااقل ۲ بار «رو» بیاید.

A = {(ر، ر، پ) ، (ر، پ، ر) ، (پ، ر، ر) ، (ر، ر، ر)}

ج) پیشامد A′

A′ = S − A = {(پ، پ، پ) ، (ر، پ، پ) ، (پ، ر، پ) ، (پ، پ، ر)} ⇒ n(A′) = ۴

د) پیشامد C که در آن هر سه بار سکه به یک طرف ظاهر شود.

C = {(پ، پ، پ) ، (ر، ر، ر)} ⇒ n(C) = ۲

احتمال وقوع یک پیشامد:

اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و $A \subseteq S$ یک پیشامد در فضای S باشد. احتمال وقوع پیشامد A را با علامت $P(A)$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \qquad 0 \leq P(A) \leq 1$$

مثال ۱: در پرتاب یک تاس سالم، احتمال آمدن عدد زوج چقدر است؟

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$

$A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(A) = 3$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال ۲: سه سکه را باهم پرتاب می‌کنیم احتمال وقوع پیشامدهای زیر را محاسبه کنید:

الف) احتمال آنکه هر سه سکه رو بیایند.

ب) احتمال آنکه فقط یکی از سکه‌ها رو بیاید.

ج) احتمال آنکه حداقل یکی از سکه‌ها رو بیاید.

S = {(ر، ر، ر)، (پ، ر، ر)، (ر، پ، ر)، (ر، ر، پ)، (پ، پ، ر)، (پ، ر، پ)، (ر، پ، پ)، (پ، پ، پ)} $\Rightarrow n(S) = 8$

الف) A = {(ر، ر، ر)} $\Rightarrow n(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{8}$

ب) B = {(ر، پ، پ)، (پ، ر، پ)، (پ، پ، ر)} $\Rightarrow n(B) = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

ج) C = {(ر، پ، پ)، (پ، ر، پ)، (پ، پ، ر)، (ر، ر، پ)، (ر، پ، ر)، (پ، ر، ر)، (ر، ر، ر)} $\Rightarrow n(C) = 7 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{7}{8}$

مثال ۳: فرض کنیم هر یک از اعداد ۲ رقمی را که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می توانیم بسازیم، روی یک کارت می نویسیم و آنها را در کیسه ای قرار می دهیم. سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می کنیم.

مطلوب است:

الف) احتمال آنکه عدد خارج شده زوج باشد.

ب) احتمال آنکه عدد خارج شده فرد باشد.

$$S=\{۲۳, ۲۴, ۳۲, ۳۴, ۴۲, ۴۳\} \Rightarrow n(S)=۶$$

الف) $A=\{۲۴, ۳۲, ۳۴, ۴۲\} \Rightarrow n(A)=۴ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$

ب) $B=\{۲۳, ۴۳\} \Rightarrow n(B)=۲ \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

مثال ۴: در کیسه ای سه مهره سفید و دو مهره سیاه وجود دارد. دو مهره به تصادف از کیسه بیرون آورده می شود مطلوب است احتمال آنکه هر دو مهره سفید باشد.

$$n(S)=\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{۲!\times ۳!}=۱۰$$

$$n(A)=\binom{۳}{۲}=\frac{۳!}{۲!\times ۱!}=۳ \qquad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۱۰}$$

مثال ۵: می خواهیم یک تیم سه نفری از ۱۰ دانش آموز رشته تجربی و ۶ دانش آموز رشته ریاضی انتخاب کنیم مطلوب است:

الف) احتمال آنکه هر سه نفر رشته ریاضی باشند.

ب) احتمال آنکه دو نفر رشته تجربی و یک نفر رشته ریاضی باشند.

$$n(S)=\binom{۱۶}{۳}=\frac{۱۶!}{۳!\times ۱۳!}=۵۶۰$$

الف) $n(A)=\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!\times ۳!}=۲۰ \Rightarrow P(A)=\frac{۲۰}{۵۶۰}$

ب) $n(B)=\binom{۱۰}{۲}\times\binom{۶}{۱}=۴۵\times ۶=۲۷۰$

$P(B)=\frac{۲۷۰}{۵۶۰}=\frac{۲۷}{۵۶}$

مثال ۶) : در جعبه ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. از این جعبه ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم. مطلوبست :

الف) احتمال آنکه هر سه مهره آبی باشند.

ب) احتمال آنکه هر سه مهره همرنگ باشند.

ج) احتمال آنکه دقیقاً ۲ مهره همرنگ باشند.

$$n(S)=\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۳!\times ۴!}=۳۵$$

الف) $n(A)=\binom{۴}{۳}=\frac{۴!}{۳!\times ۱!}=۴ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۵}$

ب) $n(B)=$ یا هر ۳ مهره آبی ، یا هر سه مهره قرمز $=\binom{۴}{۳}+\binom{۳}{۳}=۴+۱=۵ \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۵}{۳۵}=\frac{۱}{۷}$

ج) $n(C)=$ (دو مهره آبی و دیگری مهره قرمز) یا (دو مهره قرمز و دیگری مهره آبی) $=\binom{۳}{۲}\times\binom{۴}{۱}+\binom{۴}{۲}\times\binom{۳}{۱}=۱۸+۱۲=۳۰$

$$\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۳۰}{۳۵}=\frac{۶}{۷}$$

مثال ۷) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای متناهی و ناتهی S باشند ثابت کنید :

الف) $۰\leq P(A)\leq ۱$ ب) $P(\emptyset)=۰$ ج) $P(S)=۱$

اثبات الف) $A\subseteq S \Rightarrow ۰\leq n(A)\leq n(S) \Rightarrow \frac{۰}{n(S)}\leq\frac{n(A)}{n(S)}\leq\frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow ۰\leq P(A)\leq ۱$

اثبات ب) $P(A)=\frac{n(\emptyset)}{n(S)}=\frac{۰}{n(S)}=۰$

اثبات ج) $P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=۱$

قانون جمع احتمالات:
اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند در اینصورت رابطه زیر که به قانون جمع احتمالات معروف است بین آنها برقرار است:

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

اثبات: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \Rightarrow \frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند رابطه فوق بصورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$$

مثال ۱: احتمال اینکه دانش آموزی در درس ریاضی قبول شود ۰/۳۴ و در درس هندسه قبول شود ۰/۲۳ است. احتمال اینکه حداقل در یکی از این دو درس قبول شود ۰/۳۸ است. احتمال اینکه دانش آموز در هر دو درس قبول شود چقدر است؟

احتمال قبولی در ریاضی $=P(A)=0/34$

" " " هندسه $=P(B)=0/23$

احتمال قبولی در حداقل یکی $=P(A\cup B)=0/38$

" " " در هر دو $=P(A\cap B)=?$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow 0/38=0/34+0/23-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=0/19$$

مثال ۲: احتمال اینکه فردی دارای بیماری قلبی باشد ۰/۴۱ و احتمال اینکه مشکل بینایی داشته باشد ۰/۸۵ و احتمال اینکه هر دو بیماری را داشته باشد ۰/۳۲ است. احتمال آنرا حساب کنید که حداقل یکی از دو نوع بیماری را داشته باشد؟

احتمال بیماری قلبی $=P(A)=0/41$

" " بینایی $=P(B)=0/85$

" " هر دو بیماری $=P(A\cap B)=0/32$

احتمال داشتن حداقل یک بیماری $=P(A\cup B)=?$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=0/41+0/85-0/32=0/94$$

مثال ۳): اگر A' متمم پیشامد A در فضای نمونه‌ای S باشد ثابت کنید:

$$P(A) = 1 - P(A')$$

اثبات: چون A و A' ناسازگارند پس:

$$\left.\begin{aligned} P(A\cup A') &= P(A)+P(A') \\ P(A\cup A') &= P(S)=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A)+P(A')=1 \Rightarrow \begin{cases} P(A)=1-P(A') \\ P(A')=1-P(A) \end{cases}$$

مثال ۴): دو تاس را باهم می‌اندازیم. مطلوبست احتمال آنکه:

الف) هر دو تاس زوج بیایند. $n(S)=6^2=36$

پیشامد زوج آمدن هر دو تاس $= A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$

$$\Rightarrow n(A)=9 \qquad \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

ب) مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد بیایند.

پیشامد مجموع دو تاس $= B = \{(3,5),(5,3),(2,6),(6,2),(4,4)\} \Rightarrow n(B)=5$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{5}{36}$$

پیشامد هر دو تاس فرد $= C = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$

$$\Rightarrow n(C)=9 \qquad \Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{9}{36}$$

$$B\cap C=\{(3,5),(5,3)\} \Rightarrow n(B\cap C)=2 \Rightarrow P(B\cap C)=\frac{n(B\cap C)}{n(S)}=\frac{2}{36}$$

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=\frac{5}{36}+\frac{9}{36}-\frac{2}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

ج) مجموع دو تاس ۷ یا هر دو زوج باشد؟

هر دو زوج $= A \Rightarrow P(A)=\frac{1}{4}$ (طبق الف)

مجموع دو تاس ۷ $= D = \{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\} \Rightarrow P(D)=\frac{6}{36}$

$A\cap D=\varnothing \Rightarrow$ ناسازگار $\qquad P(A\cup D)=P(A)+P(D)=\frac{1}{4}+\frac{6}{36}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

د) مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ باشد؟

از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم

$A =$ پیشامد مجموع دو تاس کمتر از ۱۱

$A' = \{(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\} \Rightarrow P(A') = \frac{۳}{۳۶}$ = پیشامد مجموع مجموع دو تاس بزرگتر یا مساوی ۱۱

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۳}{۳۶} = \frac{۳۳}{۳۶} = \frac{۱۱}{۱۲}$$

هـ) حاصلضرب دو عدد رو شده ۱۲ باشد؟

$A = \{(۲,۶),(۶,۲),(۳,۴),(۴,۳)\} \Rightarrow n(A) = ۴ \Rightarrow P(A) = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$

مثال ۵) می‌خواهیم از بین ۴ مهندس و ۵ حقوقدان، ۳ نفر را بصورت تصادفی انتخاب کنیم:

الف) احتمال آنکه فقط یک حقوقدان انتخاب شود چقدر است؟

$n(S) = \binom{۹}{۳} = ۸۴$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۵}{۱}\times\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۵\times۶}{۸۴} = \frac{۵}{۱۴}$$

ب) احتمال آنکه حداقل یک مهندس انتخاب شود چقدر است؟

$$P(B) = \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱} + \binom{۴}{۳}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۴۰+۳۰+۴}{۸۴} = \frac{۷۴}{۸۴} = \frac{۳۷}{۴۲}$$

ج) احتمال آنکه تعداد حقوقدان‌ها بیشتر باشد چقدر است؟

$$P(C) = \frac{\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱} + \binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۴۰+۱۰}{۸۴} = \frac{۵۰}{۸۴} = \frac{۲۵}{۴۲}$$

د) احتمال آنکه از هر دو شغل انتخاب شده باشد، چقدر است؟

$$P(D) = \frac{\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱} + \binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۴۰+۳۰}{۸۴} = \frac{۷۰}{۸۴} = \frac{۵}{۶}$$

مثال ۶) اگر $P(A) = ۰/۳$ و $P(B') = ۰/۶$ و A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، $P(A\cup B)$ را بدست آورید.

$P(B) = ۱ - P(B') = ۱ - ۰/۶ = ۰/۴$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) = ۰/۳ + ۰/۴ = ۰/۷$

★ فرمول ★ $\boxed{P(A\cap B') = P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)}$

مثال ۷: اگر $P(A) = 2P(B') = 0{,}4$ و $P(A \cap B) = 0{,}3$ باشد $P(A \cup B)$ و $P(A' \cap B')$ و $P(A' \cup B)$ را بدست آورید.

$$2P(B') = 0{,}4 \Rightarrow P(B') = 0{,}2 \Rightarrow P(B) = 1 - P(B') = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}8 - 0{,}3 = 0{,}9$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - [P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= 1 - 0{,}4 + 0{,}8 - [0{,}8 - 0{,}3] = 0{,}9$$

فصل ۷ : درس دوم : علم آمار و جامعه و نمونه

تعریف آمار : مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات را آمار می گویند.

علم آمار : مجموعه روش هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده و در نهایت نتیجه گیری، قضاوت و پیش بینی مناسب در مورد پدیده ها و آزمایش های تصادفی می شود.

تمرین : کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :

الف) اولین قدم در استفاده از «علم آمار» جمع آوری داده هاست (درست)

ب) پیش بینی و تصمیم گیری برای آینده، نتیجه استفاده از علم آمار است (درست)

ج) «علم آمار» همان اعداد و ارقام است (نادرست)

سرشماری :

اگر تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم می گوئیم سرشماری کرده ایم.

تعریف جامعه یا جمعیت :

مجموعه ی تمام افراد یا اشیائی که درباره ی یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد جامعه یا جمعیت نامیده می شوند و هر یک از افراد یا اشیاء، را عضو جامعه می نامند.

تعریف اندازه یا حجم جامعه :

تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه یا حجم جامعه می گویند.

به عنوان مثال، دانش آموزان یک مدرسه می توانند یک جامعه باشند و هر یک از دانش آموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.

تعریف نمونه :

بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود نمونه می گویند و هر یک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه می گویند

تعریف اندازه یا حجم نمونه :

تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه یا حجم نمونه می گویند.

به عنوان مثال دانش آموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانش آموزان مدرسه هستند و هر یک از دانش آموزان کلاس، عضو نمونه محسوب می شوند.

تمرین: کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اندازه جامعه کمتر از اندازه نمونه است. (نادرست)

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه‌اند. (نادرست)

پ) نمونه زیرمجموعه‌ای از جامعه است. (درست)

تعریف متغیر و مقدار متغیر:

متغیر، ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند، عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود مقدار متغیر می‌گویند.

متغیر	مقدار متغیر
وزن هلو	۲۰۰ گرم
کیفیت هلو	درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳
حداکثر سرعت مجاز خودرو در جاده	۱۲۰ کیلومتر
میزان بنزین مصرفی یک خودرو برای هر ۱۰۰ کیلومتر	۸ لیتر
رنگ خودرو	سفید
سن دانش آموز	۱۵ سال
نمره ریاضی	۲۰
گروه خونی	O

انواع متغیرها:

۱) متغیرهای کمّی ۲) متغیرهای کیفی

تعریف متغیرهای کمّی:

متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری و شمارش هستند، متغیرهای کمی نامیده می‌شوند.

مثال) قد، وزن، طول، جمعیت، تعداد تصادفات رانندگی در یک روز، درجه حرارت، شدت زلزله، درآمد، تعداد کلمات به کار رفته در هر بیت یک غزل، تعداد افراد خانواده، تعداد زنبورهای یک کندو و ....

متغیرهای کیفی:
متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری و شمارش نباشند را متغیرهای کیفی می‌نامند
مثال) رنگ چشم، گروه خونی، مراحل زندگی یک فرد، مراحل تحصیل

متغیرهای کمی به دو دسته تقسیم می‌شوند:
۱) متغیر کمّی پیوسته　　　　　　۲) متغیر کمّی گسسته

تعریف متغیر کمی پیوسته:
متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار کند　مثل: وزن، قد

تعریف متغیر کمی گسسته:
متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند آنگاه مقداری بین آنها وجود دارد که نمی‌تواند اختیار کند. مثال) تعداد غائبین کلاس

متغیرهای کیفی به دو دسته تقسیم می‌شوند:
۱) متغیرهای کیفی ترتیبی　　　　　۲) متغیرهای کیفی اسمی

تعریف متغیرهای کیفی ترتیبی:
متغیرهایی هستند که در آنها نوعی ترتیب طبیعی وجود دارد.
مثال) مراحل زندگی فرد　، مراحل تحصیل، ...

تعریف متغیرهای کیفی اسمی:
متغیرهای کیفی که بدون ترتیب طبیعی باشند.
مثال) گروه خونی، RH خون، جنسیت (زن، مرد)، ...

تمرین: نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید:
۱) وزن کشتی‌گیران استان تهران　(کمی پیوسته)
۲) قد بانوان شرکت کننده در المپیک　(کمی پیوسته)
۳) تعداد مسافران هواپیما　(کمی گسسته)
۴) گروه خونی　(کیفی اسمی)
۵) درجه قطارها (درجه ۱، درجه ۲، ...)　(کیفی ترتیبی)
۶) انواع هواپیما (جنگی، مسافری، ...)　(کیفی اسمی)

۷) کارخانه سازنده خودرو (کیفی اسمی)

۸) مراحل تحصیلی (کیفی ترتیبی)

۹) زمان کارکرد یک باتری (کمی پیوسته)

۱۰) کیفیت میوه‌های تولیدی (خوب، متوسط، ....) (کیفی ترتیبی)

۱۱) میزان علاقه مندی به فوتبال (کم، متوسط، زیاد) (کیفی ترتیبی)

۱۲) شاخص توده بدنی (کمی پیوسته)