بنام خدا

جزوه حسابان ۱

(یازدهم ریاضی)

تهیه و تنظیم از :

امیر حسین مطلّبی دبیر ریاضی دبیرستان نمونه دولتی استاد شهریار ناحیه ۳ تبریز

*** هزینه استفاده از این جزوه صلواتی بر محمّد و آل محمّد است ***

التماس دعا

دنباله حسابی :

دنباله‌ای که به هر جمله آن مقدار ثابتی افزوده شود تا جمله بعدی بدست آید را دنباله حسابی می‌گویند. جمله عمومی دنباله حسابی بصورت زیر است :

$$\underbrace{a_n}_{\text{جمله nام}} = \underbrace{a_1}_{\text{جمله اول}} + (\underbrace{n}_{\text{تعداد جملات}}-1)\underbrace{d}_{\text{قدر نسبت}}$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

مثال) جمله اول یک دنباله حسابی ۱۱ و قدر نسبت آن ۵ است جمله هشتم این دنباله چند است؟

$a_1 = 11$

$d = 5$

$n = 8$

$$a_8 = a_1 + (8-1)d = 11 + 7 \times 5 = 11 + 35 = 46$$

* * *

فرمول قدر نسبت در دنباله حسابی :

اگر در یک دنباله حسابی جمله nام (a_n) و جمله mام (a_m) مشخص باشد قدر نسبت (d) از فرمول زیر بدست می‌آید :

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

مثال) در یک دنباله حسابی جملات هفتم و نوزدهم به ترتیب ۵- و ۴۳ می‌باشند

الف) قدر نسبت دنباله را بدست آورید ب) جمله سی و پنجم دنباله را بنویسید

$a_7 = -5$

$a_{19} = 43$

$$d = \frac{a_{19} - a_7}{19 - 7} = \frac{43 - (-5)}{12} = \frac{48}{12} = 4$$

$$a_7 = a_1 + 6d \Rightarrow -5 = a_1 + 6(4) \Rightarrow a_1 = -29$$

$$a_{35} = a_1 + 34d = -29 + 34(4) = -29 + 136 = 107$$

* * *

مجموع جملات دنباله حسابی :

به دو روش می‌توان مجموع جملات دنباله حسابی را بدست آورد :

روش اول : اگر جمله اول و جمله آخر و تعداد جملات مشخص باشد مجموع جملات از فرمول زیر محاسبه می‌شود :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Scanned with CamScanner

حسابان ۲

مثال ۱: مجموع اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷ را بدست آورید:

$a_1=۱۴$

$a_n=۹۸$

$d=۷$

$n=?$

$۱۴, ۲۱, ۲۸, \dots\dots, ۹۸$

$a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow ۹۸=۱۴+(n-1)\times ۷ \Rightarrow ۹۸=۱۴+۷n-۷$

$\Rightarrow ۷n=۹۱ \Rightarrow \boxed{n=۱۳}$ $\quad S_{۱۳}=\frac{۱۳}{۲}(۱۴+۹۸)=۷۲۸$

مثال ۲: در یک دنباله حسابی تعداد جملات ۱۰ و مجموع جملات ۲۴۵ و تفاضل جمله اول از جمله آخر ۴۵ است، دنباله را مشخص کنید:

$n=۱۰$

$S_{۱۰}=۲۴۵$

$a_{۱۰}-a_1=۴۵$

$S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(a_1+a_{۱۰}) \Rightarrow ۲۴۵=\frac{۱۰}{۲}(a_1+a_{۱۰}) \Rightarrow a_1+a_{۱۰}=۴۹$

$$\begin{cases} a_{۱۰}+a_1=۴۹ \\ a_{۱۰}-a_1=۴۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_{۱۰}=۴۷ \\ a_1=۲ \end{matrix}$$

$a_{۱۰}=a_1+۹d \Rightarrow ۴۷=۲+۹d \Rightarrow \boxed{d=۵}$ $\quad$ دنباله: $۲, ۷, ۱۲, \dots$

مثال ۳: در یک دنباله حسابی مجموع ۳۰ جمله اول با مجموع ۵۰ جمله اول برابر است. مجموع ۸۰ جمله اول برابر چه عددی است؟

$S_{۳۰}=S_{۵۰} \Rightarrow \frac{۳۰}{۲}(a_1+a_{۳۰})=\frac{۵۰}{۲}(a_1+a_{۵۰}) \Rightarrow ۱۵(a_1+a_1+۲۹d)=۲۵(a_1+a_1+۴۹d$

$\Rightarrow ۳(۲a_1+۲۹d)=۵(۲a_1+۴۹d) \Rightarrow ۶a_1+۸۷d=۱۰a_1+۲۴۵d \Rightarrow \boxed{۲a_1+۷۹d=۰}$

$S_{۸۰}=\frac{۸۰}{۲}(a_1+a_{۸۰})=۴۰(a_1+a_1+۷۹d)=۴۰(۲a_1+۷۹d)=۴۰(۰)=۰$

نتیجه: در یک دنباله حسابی اگر $S_n=S_m$ باشد آنگاه $S_{n+m}=۰$

مثال ۴: ثابت کنید:

$$۱+۲+۳+\dots+n=\frac{n(n+1)}{۲}$$

$$\begin{array}{rl} & S=۱+۲+۳+\dots\dots+(n-1)+n \\ + & S=n+(n-1)+(n-۲)+\dots+۲+۱ \\ \hline & ۲S=(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)+(n+1) \end{array}$$

$$\Rightarrow ۲S=n(n+1) \Rightarrow \boxed{S=\frac{n(n+1)}{۲}}$$

Scanned with CamScanner

روش دوم: اگر جمله اول و قدر نسبت و تعداد جملات مشخص باشد مجموع جملات دنباله حسابی از فرمول زیر بدست می آید:

$$S_n = \frac{n}{۲}[۲a_1 + (n-1)d]$$

مثال 1: در دنباله حسابی ۵ و ۹ ,۱۳ ,... حداقل چند جمله را باهم جمع کنیم تا مجموع از ۸۶۰ بیشتر باشد؟

$a_1 = ۵$

$d = ۴$

$$S_n > ۸۶۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}[۲a_1 + (n-1)d] > ۸۶۰$$

$$\Rightarrow \frac{n}{۲}[۲(۵) + (n-1)۴] > ۸۶۰$$

$$\Rightarrow \frac{n}{۲}[۶ + ۴n] > ۸۶۰ \Rightarrow n(۳ + ۲n) > ۸۶۰$$

$$\Rightarrow ۲n^۲ + ۳n - ۸۶۰ > 0$$

$$\Delta = ۳^۲ - ۴(۲)(-۸۶۰) = ۹ + ۶۸۸۰ = ۶۸۸۹$$

$$n = \frac{-۳ \pm \sqrt{۶۸۸۹}}{۲(۲)} = \frac{-۳ \pm ۸۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} n = ۲۰ \\ n = -۲۱,۵ \end{cases}$$

⇒ حداقل ۲۱ جمله باید جمع شود

غ ق ق

مثال 2: در یک دنباله حسابی $a_۷ + a_{۲۴} = ۱۰۰$ است. مجموع سی جمله اول این دنباله را بدست آورید:

$$S_{۳۰} = \frac{۳۰}{۲}[۲a_1 + (۳۰-1)d] = ۱۵[۲a_1 + ۲۹d]$$

$$a_۷ + a_{۲۴} = ۱۰۰ \Rightarrow a_1 + ۶d + a_1 + ۲۳d = ۱۰۰ \Rightarrow ۲a_1 + ۲۹d = ۱۰۰$$

$$S_{۳۰} = ۱۵[۱۰۰] = ۱۵۰۰$$

مثال 3: در یک دنباله حسابی $S_{۱۵} = ۵۷۰$ و $a_۵ = ۲۳$ است جمله عمومی این دنباله را مشخص کنید

$$a_۵ = ۲۳ \Rightarrow \boxed{a_1 + ۴d = ۲۳}$$

$$S_{۱۵} = \frac{۱۵}{۲}[۲a_1 + (۱۵-1)d] \Rightarrow ۵۷۰ = \frac{۱۵}{۲}[۲a_1 + ۱۴d] \Rightarrow ۵۷۰ = ۱۵[a_1 + ۷d]$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 + ۷d = ۳۸} \quad \Rightarrow \begin{cases} a_1 + ۴d = ۲۳ \\ a_1 + ۷d = ۳۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = ۳ \\ d = ۵ \end{matrix}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\Rightarrow a_n = ۳ + (n-1)۵ = ۵n - ۲$$

مثال ۴ : جمله پانزدهم یک دنباله حسابی ۳۴ و مجموع هشت جمله اول آن ۲۰ است. مجموع چهل جمله اول آن را بیابید.

$a_{۱۵}=a_1+۱۴d \Rightarrow a_1+۱۴d=۳۴$

$S_۸=\frac{۸}{۲}[۲a_1+۷d] \Rightarrow ۴(۲a_1+۷d)=۲۰ \Rightarrow ۲a_1+۷d=۵$

$\begin{cases} a_1+۱۴d=۳۴ \\ ۲a_1+۷d=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} d=۳ \\ a_1=-۸ \end{matrix}$ $S_{۴۰}=\frac{۴۰}{۲}[۲a_1+۳۹d]=۲۰(-۱۶+۱۱۷)$

$\Rightarrow S_{۴۰}=۲۰۲۰$

نکته کنکوری :

قانون اندیس ها : در هر دنباله حسابی روابط زیر بین اندیس ها و جملات برقرار است :

۱) $m+n=p+q \Rightarrow a_m+a_n=a_p+a_q$

(مثال) $a_{۱۰}+a_۸=a_۵+a_{۱۳}=a_۷+a_{۱۱}=\dots$

۲) $m+n=۲p \Rightarrow a_m+a_n=۲a_p$

مثال) $a_۸+a_{۱۲}=۲a_{۱۰}$

$a_{۱۰}+a_{۲۰}=۲a_{۱۵}$

۳) $a_n-a_m=(n-m)d$

مثال) $a_{۳۰}-a_{۲۰}=۱۰d$

$a_{۱۸}-a_{۱۱}=۷d$

تست : در یک دنباله حسابی، مجموع جملات هفتم و نوزدهم برابر ۳۰ است جمله سیزدهم برابر چه عددی است؟

۱) ۱۳
۲) ۱۴
۳) ۱۵
۴) ۱۶

حل : گزینه (۳)

روش I) $a_۷+a_{۱۹}=۳۰ \xrightarrow{۷+۱۹=۲۶} ۲a_{۱۳}=۳۰ \Rightarrow a_{۱۳}=۱۵$

روش II) $a_۷+a_{۱۹}=۳۰ \Rightarrow a_1+۶d+a_1+۱۸d=۳۰ \Rightarrow ۲a_1+۲۴d=۳۰$

$\Rightarrow a_1+۱۲d=۱۵ \Rightarrow a_{۱۳}=۱۵$

تست : در یک دنباله حسابی با قدر نسبت ۵، اگر $t_{۱۷}^۲-t_{۱۱}^۲=۹۰۰$ باشد جمله چهاردهم کدام است؟

حل : گزینه (۳)

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۵
۴) ۳۰

$t_{۱۷}^۲-t_{۱۱}^۲=۹۰۰ \Rightarrow (t_{۱۲}-t_{۱۱})(t_{۱۷}+t_{۱۱})=۹۰۰ \Rightarrow$

$\Rightarrow ۶d(۲t_{۱۴})=۹۰۰ \Rightarrow ۱۲(۵)t_{۱۴}=۹۰۰ \Rightarrow t_{۱۴}=\frac{۹۰۰}{۶۰}=۱۵$

Scanned with CamScanner

دنباله هندسی:

دنباله‌ای که هر جمله آن در مقدار ثابتی ضرب شود تا جمله بعدی بدست آید را دنباله هندسی می‌نامند. جمله عمومی دنباله هندسی بصورت زیر است:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

تعداد جملات

جمله nام

جمله اول

قدر نسبت

مثال: جمله اول یک دنباله هندسی برابر ۳ و قدر نسبت آن برابر ۲ می‌باشد. جمله یازدهم دنباله را مشخص کنید

$a_1 = ۳$

$q = ۲$

$a_{11} = ?$

$$a_{11} = a_1 \cdot q^{11-1} = a_1 \cdot q^{10} = ۳ \times (۲)^{10} = ۳ \times ۱۰۲۴ = ۳۰۷۲$$

* * *

فرمول مجموع جملات دنباله هندسی:

اگر جمله اول یک دنباله هندسی برابر a_1 و قدر نسبت آن برابر q باشد مجموع n جمله اول این دنباله هندسی از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}$$

مثال ۱: مجموع ۸ جمله اول دنباله هندسی زیر را مشخص کنید

۱، ۲، ۴، ۸، .... $a_1 = ۱$ و $q = ۲$

$$S_۸ = \frac{a_1(1-q^۸)}{1-q} = \frac{۱(۱-۲^۸)}{۱-۲} = \frac{۱(۱-۲۵۶)}{-۱} = \frac{۱(-۲۵۵)}{-۱} = ۲۵۵$$

* * *

مثال ۲: مجموع ۶ جمله اول یک دنباله هندسی، ۲۸ برابر مجموع ۳ جمله‌ی اول آن است. اگر جمله اول آن ۲ باشد قدر نسبت و جمله پنجم این دنباله را بدست آورید

$$S_۶ = ۲۸ \times S_۳ \Rightarrow \frac{a_1(1-q^۶)}{1-q} = ۲۸ \times \frac{a_1(1-q^۳)}{1-q} \Rightarrow 1-q^۶ = ۲۸(1-q^۳)$$

$$\Rightarrow (1-q^۳)(1+q^۳) = ۲۸(1-q^۳) \Rightarrow 1+q^۳ = ۲۸ \Rightarrow q^۳ = ۲۷ \Rightarrow \boxed{q = ۳}$$

$$a_۵ = a_1 \cdot q^۴ = ۲(۳)^۴ = ۲(۸۱) = ۱۶۲$$

مثال ۴: در یک دنباله هندسی، مجموع دوازده جمله اول، ۶۵ برابر مجموع ۶ جمله اول است. مقدار نسبت دنباله را مشخص کنید

$$S_{۱۲} = ۶۵ \times S_۶ \Rightarrow \frac{a_1(1-q^{۱۲})}{1-q} = ۶۵ \times \frac{a_1(1-q^۶)}{1-q} \Rightarrow 1-q^{۱۲} = ۶۵(1-q^۶)$$

$$\Rightarrow (1-q^۶)(1+q^۶) = ۶۵(1-q^۶) \Rightarrow 1+q^۶ = ۶۵ \Rightarrow q^۶ = ۶۴ \Rightarrow \boxed{q = \pm ۲}$$

مثال ۵: مجموع n جمله اول دنباله ... و ۱۲، ۶، ۳ برابر ۷۶۵ شده است n را بدست آورید.

$a_1 = ۳$

$q = ۲$

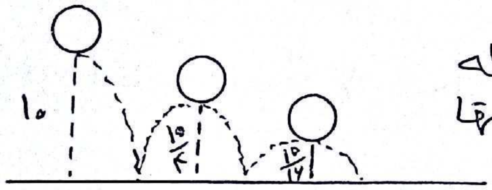
$S_n = ۷۶۵$

$n = ?$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow \frac{۳(۱-۲^n)}{۱-۲} = ۷۶۵$$

$$\Rightarrow ۱-۲^n = -۲۵۵ \Rightarrow ۲^n = ۲۵۶ \Rightarrow \boxed{n = ۸}$$

مثال ۶: توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود پس از زمین خوردن به اندازه $\frac{۱}{۴}$ ارتفاع قبلی خود بالا می رود. اگر این توپ از ارتفاع ۱۰ متری رها شود در لحظه ای که توپ برای ششمین بار به زمین می خورد، توپ تقریباً چه مسافتی را پیموده است؟



دنباله مسافتها: $۱۰ ، ۲\times\frac{۱۰}{۴} ، ۲\times\frac{۱۰}{۱۶} ، \dots$

لحظه زمین خوردن توپ برای ششمین بار یعنی پایان مرحله پنجم:

$$S = ۱۰ + ۲\left(\frac{۱۰}{۴} + \frac{۱۰}{۱۶} + \dots + \frac{۱۰}{۴^۵}\right) = ۱۰ + ۲\left(\frac{\frac{۱۰}{۴}\left(۱-\left(\frac{۱}{۴}\right)^۵\right)}{۱-\frac{۱}{۴}}\right)$$

$$= ۱۰ + \frac{۱۷۰۵}{۲۵۶} = ۱۰ + ۶٫۶ \simeq ۱۶٫۶$$

مثال ۷: مطلوبست مجموع مقابل:

$$S = ۹ + ۹۹ + \dots + \overbrace{۹۹۹\dots۹}^{۱۰ \text{ تا}} = (۱۰^۱-۱)+(۱۰^۲-۱)+\dots+(۱۰^{۱۰}-۱) = (۱۰^۱+۱۰^۲+\dots+۱۰^{۱۰})-۱۰$$

$$= \frac{۱۰(۱-۱۰^{۱۰})}{۱-۱۰} - ۱۰ = \frac{۱۰}{۹}(۱۰^{۱۰}-۱) - ۱۰ = ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰ - ۱۰ = ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۰$$

مثال ۸ : برای محافظت از تابش خطرناک مواد رادیو اکتیویته، لایه‌های محافظی وجود دارد که شدت تابش پرتوها پس از عبور از هر یک از آنها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد خطرناک دست کم (حداقل) تا ۹۷ درصد کاهش یابد؟

حل : اولین لایه، شدت تابش را نصف می‌کند

دنباله: $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ و ....

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}\geqslant\frac{97}{100}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}\geqslant\frac{97}{100}\Rightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\geqslant\frac{97}{100}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{97}{100}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow\frac{3}{100}\geqslant\frac{1}{2^n}\Rightarrow 2^n\geqslant\frac{100}{3}\Rightarrow 2^n\geqslant 33.3\Rightarrow n\geqslant 6$$

پس حداقل باید ۶ لایه برداریم

مثال ۹ : یک روز حاکم شهری خواست به مخترع شطرنج جایزه‌ای بدهد و از او خواست خودش جایزه‌ای برای خودش تعیین کند. مخترع شطرنج گفت: در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم ۲ گندم و در خانه سوم ۴ گندم و ... و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم بگذارید و نهایتاً کل گندم‌ها را به من بدهید. اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم:

الف) این جایزه چند گرم می‌شود؟

ب) نشان دهید جایزه او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن خواهد شد؟

حل : می‌دانیم شطرنج ۶۴ خانه دارد

خانه اول $= 1 = 2^0$

خانه دوم $= 2 = 2^1$

و ....

تعداد دانه‌های گندم $= 1+2^1+2^2+\dots+2^{63}=\frac{1(1-2^{64})}{1-2}=-(1-2^{64})$

$= 2^{64}-1 \simeq 2^{64}$ دانه گندم

$2^{64}=(2^{10})^{6.4}=(1024)^{6.4}\simeq(10^3)^{6.4}\simeq 10^{19.2}\simeq 10^{19}$ گرم $= 10^{16}$ کیلوگرم $= 10^{13}$ تن $= 10000\times 10^9$ تن

یعنی ده هزار میلیارد تن جایزه مخترع شطرنج است.

(مصرف سالانه گندم ایران حدود ۱۲ میلیون تن است)

نکته ریاضی :

۱) $۱+۲+۳+\dots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

مثال) $۱+۲+۳+\dots+۱۰۰=\frac{۱۰۰(۱۰۰+۱)}{۲}=\frac{۱۰۰\times ۱۰۱}{۲}=۵۰۵۰$

۲) $۲+۴+۶+\dots+۲n=n(n+۱)$

مثال) $۲+۴+۶+\dots+۸۴=۴۲(۴۲+۱)=۴۲\times ۴۳=۱۸۰۶$

۳) $۱+۳+۵+\dots+(۲n-۱)=n^۲$

مثال) $۱+۳+۵+\dots+۹۹=۵۰^۲=۲۵۰۰$

«تمرینات تکمیلی»

۱) مجموع ۴ جمله اول یک دنباله حسابی ۸۷ و مجموع ۱۰ جمله اول آن ۲۴۵ است. جمله اول و قدرنسبت این دنباله را بیابید.

$$S_۴=\frac{۴}{۲}[۲a_۱+(۴-۱)d] \Rightarrow ۳[۲a_۱+۵d]=۸۷ \Rightarrow \boxed{۲a_۱+۵d=۲۹}$$

$$S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}[۲a_۱+(۱۰-۱)d] \Rightarrow ۵[۲a_۱+۹d]=۲۴۵ \Rightarrow \boxed{۲a_۱+۹d=۴۹}$$

$$\begin{cases} ۲a_۱+۵d=۲۹ \\ ۲a_۱+۹d=۴۹ \end{cases} \Rightarrow \boxed{a_۱=۲} \text{ و } \boxed{d=۵}$$

---

۲) مجموع جمله های اول و سوم در یک دنباله هندسی برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن برابر ۳ است. مجموع شش جمله اول را بیابید.

$$a_۱+a_۳=۱ \Rightarrow a_۱+a_۱q^۲=۱ \Rightarrow a_۱(۱+q^۲)=۱ \quad ①$$

$$S_۴=۳ \Rightarrow \frac{a_۱(۱-q^۴)}{۱-q}=۳ \Rightarrow \frac{a_۱(۱-q^۲)(۱+q^۲)}{۱-q}=۳ \Rightarrow \frac{a_۱\cancel{(۱-q)}(۱+q)(۱+q^۲)}{\cancel{۱-q}}=۳$$

$$\Rightarrow a_۱(۱+q)(۱+q^۲)=۳ \quad ②$$

$$\frac{②}{①} \Rightarrow \frac{a_۱(۱+q)(۱+q^۲)}{a_۱(۱+q^۲)}=\frac{۳}{۱} \Rightarrow ۱+q=۳ \Rightarrow \boxed{q=۲}$$

$$a_۱(۱+۲^۲)=۱ \Rightarrow \boxed{a_۱=\frac{۱}{۵}}$$

$$S_۶=\frac{\frac{۱}{۵}(۱-۲^۶)}{۱-۲} \Rightarrow \boxed{S_۶=\frac{۶۳}{۵}}$$

« حل تمرینات ص ۶ کتاب درسی »

۱) در دنباله حسابی ۵ ، ۸ ، ۱۱ ، ... حداقل چند جمله آن را باهم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

$۵, ۸, ۱۱, \ldots$

$a_1 = ۵$

$d = ۳$

$$S_n > ۴۹۳ \Rightarrow \frac{n}{۲}[۲a_1+(n-1)d] > ۴۹۳$$

$$\Rightarrow \frac{n}{۲}[۲\times ۵+(n-۱)\times ۳] > ۴۹۳ \Rightarrow \frac{n}{۲}[۳n+۷] > ۴۹۳$$

$$\Rightarrow ۳n^۲+۷n > ۹۸۶ \Rightarrow ۳n^۲+۷n-۹۸۶ > ۰$$

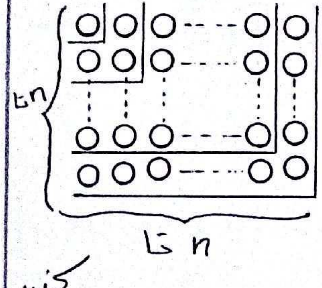
$$۳n^۲+۷n-۹۸۶ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۱۸۸۱ \Rightarrow n = \frac{-۷ \pm \sqrt{۱۱۸۸۱}}{۶} = \frac{-۷\pm ۱۰۹}{۶} = \begin{cases} n_1 = ۱۷ \\ n_۲ \simeq -۱۹٫۳ \end{cases}$$

n		$-۱۹٫۳$		۱۷	
$۳n^۲+۷n-۹۸۶$	+	۰	−	۰	+

$n > ۱۷$ یا $n < -۱۹٫۳$ $\xrightarrow[\text{مثبت و صحیح}]{n\ \text{عددی}}$ $n \geq ۱۸ \Rightarrow$ حداقل ۱۸ جمله را باید جمع کنیم

* * *

۲) الف) به کمک شکل روبه رو حاصل عبارت زیر را بدست آورید.



تعداد کل دایره ها $= ۱+۳+۵+\ldots+(۲n-۱)$

تعداد کل دایره ها $= n^۲$

$\Rightarrow ۱+۳+۵+\ldots+(۲n-۱) = n^۲$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید

$$۱, ۳, ۵, \ldots, (۲n-۱)$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_1+a_n) = \frac{n}{۲}(۱+۲n-۱) = \frac{n}{۲}(۲n) = n^۲$$

* * *

۳) مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می شود؟

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۰ & ۶ \\ \cline{2-2} -۹۶ & ۱۶ \\ \hline ۴ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۹۹۹ & ۶ \\ \cline{2-2} ۹۹۶ & ۱۶۶ \\ \hline ۳ & \end{array}$$

کوچکترین $= ۱۰۰+۲ = ۱۰۲$

بزرگترین $= ۹۹۹-۳ = ۹۹۶$

دنباله: $۱۰۲, ۱۰۸, \ldots, ۹۹۶$

تعداد $= n = \frac{۹۹۶-۱۰۲}{۶}+۱ = ۱۵۰$

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_1+a_n) = \frac{۱۵۰}{۲}(۱۰۲+۹۹۶) = ۷۵(۱۰۹۸) = ۸۲۳۵۰$$

۴) در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره های زوج ۱۵۰ می باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی : $a_۱ , a_۱+d , a_۱+۲d , \dots\dots , a_۱+۱۹d$

تعداد جملات شماره های فرد = تعداد جملات شماره زوج = ۱۰

دنباله جملات شماره فرد : $a_۱ , a_۱+۲d , \dots\dots , a_۱+۱۹d$

$$S=\frac{۱۰}{۲}[۲a_۱+(۱۰-۱)(۲d)] \Rightarrow ۵[۲a_۱+۱۸d]=۱۳۵ \Rightarrow \boxed{۲a_۱+۱۸d=۲۷}$$

دنباله جملات شماره زوج : $a_۱+d , a_۱+۳d , \dots\dots , a_۱+۱۸d$

$$S=\frac{۱۰}{۲}[۲(a_۱+d)+(۱۰-۱)(۲d)] \Rightarrow ۵[۲a_۱+۲۰d]=۱۵۰ \Rightarrow \boxed{۲a_۱+۲۰d=۳۰}$$

$$\begin{cases} ۲a_۱+۱۸d=۲۷ \\ ۲a_۱+۲۰d=۳۰ \end{cases} \Rightarrow a_۱=۰ , \ d=\frac{۳}{۲}$$

* * *

۵) جمله عمومی یک دنباله بصورت $a_n=۲^{n-۱}$ می باشد. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

$n=۱ \Rightarrow a_۱=۲^{۱-۱}=۲^{۰}=۱$

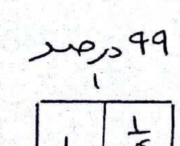
$n=۲ \Rightarrow a_۲=۲^{۲-۱}=۲$

دنباله : $۱ , ۲ , ۴ , ۸ , \dots\dots \qquad q=۲$

$$S_n=۲۵۵ \Rightarrow \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}=۲۵۵ \Rightarrow \frac{۱(۱-۲^n)}{۱-۲}=۲۵۵ \Rightarrow ۲^n=۲۵۶ \Rightarrow \boxed{n=۸}$$

* * *

۶) طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می کنیم سپس نیمی از مساحت باقیمانده را و بهمین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقیمانده از قبل را رنگ می کنیم پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟



دنباله مساحتهای رنگی : $\frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۴} , \frac{۱}{۸} , \dots\dots , (\frac{۱}{۲})^n$

$$\frac{۱}{۲}+(\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{۱}{۲})^۳+\dots+(\frac{۱}{۲})^n > \frac{۹۹}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}(۱-(\frac{۱}{۲})^n)}{۱-\frac{۱}{۲}} > \frac{۹۹}{۱۰۰} \Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲^n} > \frac{۹۹}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲^n} < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow ۲^n > ۱۰۰ \Rightarrow n \geqslant ۷$$

* * *

۷) برای عدد حقیقی a ($a \neq ۱$) و عدد طبیعی n : الف) حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$۱+a+a^۲+\dots+a^{n-۱}$

$$S_n=\frac{۱(۱-a^n)}{۱-a}=\frac{a^n-۱}{a-۱}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که: $a^n-۱=(a-۱)(a^{n-۱}+\dots+a^۲+a+۱)$

$$۱+a+a^۲+\dots+a^{n-۱}=\frac{a^n-۱}{a-۱} \Rightarrow a^n-۱=(a-۱)(a^{n-۱}+\dots+a^۲+a+۱)$$

معادله درجه دوم :

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac \Rightarrow \begin{cases} \Delta>0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشه متمایز} \Rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta=0 \Rightarrow \text{معادله ریشه مضاعف} \Rightarrow x=-\dfrac{b}{2a} \\ \Delta<0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \end{cases}$$

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \Rightarrow x_1=1 \,,\, x_2=\dfrac{c}{a} \\ a+c=b \Rightarrow x_1=-1 \,,\, x_2=-\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

مثال) $2x^2-3x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$

مثال) $5x^2+6x+1 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-\frac{1}{5} \end{cases}$

مثال) حاصل جمع کدام عدد طبیعی با مربع اش برابر ۱۲ می باشد.

$$x+x^2=12 \Rightarrow x^2+x-12=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2(1)}=\begin{cases} x_1=-4 & \text{غ ق} \\ x_2=3 & \text{ق ق} \end{cases}$$

مثال) اگر $x=-1$ یک ریشه معادله $4x^2-mx-7=0$ باشد ریشه دیگر کدام است؟

$$4x^2-mx-7=0 \xrightarrow{x=-1} 4(-1)^2-m(-1)-7=0 \Rightarrow \boxed{m=3}$$

$$m=3 \Rightarrow 4x^2-3x-7=0 \qquad \Delta=(-3)^2-4(4)(-7)=9+112=121$$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{121}}{2(4)}=\frac{3\pm 11}{8} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{7}{4} \\ x_2=-1 \end{cases}$$

تعیین علامت عبارت درجه دوم $P=ax^2+bx+c$:

الف) $\Delta>0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

ب) $\Delta=0$

x	$-\infty$		$x_1=x_2$		$+\infty$
ax^2+bx+c		موافق علامت a	0	موافق علامت a	

ج) $\Delta<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		موافق علامت a	

نکته ریاضی: شرط اینکه عبارت درجه دوم $P=ax^2+bx+c$ همواره مثبت باشد آن است که: $a>0$ و $\Delta<0$

نکته ریاضی: شرط اینکه عبارت درجه دوم $P=ax^2+bx+c$ همواره منفی باشد آن است که: $a<0$ و $\Delta<0$

مثال ۱: به ازای چه مقادیری از k عبارت $P=(2k-1)x^2-4x-3$ همواره منفی است

$\Delta<0 \Rightarrow (-4)^2-4(2k-1)(-3)<0 \Rightarrow 24k+4<0 \Rightarrow 24k<-4 \Rightarrow k<-\frac{1}{6}$

$a<0 \Rightarrow 2k-1<0 \Rightarrow k<\frac{1}{2}$ جواب مشترک $\Rightarrow \boxed{k<-\frac{1}{6}}$

مثال ۲: به ازای چه مقادیری از m عبارت $P=2mx^2+x+3$ همواره مثبت است.

$\Delta<0 \Rightarrow 1-4(2m)(3)<0 \Rightarrow 1-24m<0 \Rightarrow -24m<-1 \Rightarrow m>\frac{1}{24}$

$a>0 \Rightarrow 2m>0 \Rightarrow m>0$ جواب مشترک $\Rightarrow \boxed{m>\frac{1}{24}}$

حل معادلات به روش تغییر متغیر

در برخی از معادلات با در نظر گرفتن یک متغیر جدید، می‌توان آن را به یک معادله ساده‌تر تبدیل و حل کرد که به آن روش تغییر متغیر می‌گویند.

مثال) معادلات زیر را حل کنید

الف) $x^4-7x^2+12=0$

$x^2=u \Rightarrow u^2-7u+12=0 \Rightarrow (u-3)(u-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} u=3 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{3}} \\ u=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \boxed{x=\pm 2} \end{cases}$

ب) $(x^2-1)^4+(x^2-1)^2-2=0$

$(x^2-1)^2=u \Rightarrow u^2+u-2=0 \Rightarrow (u+2)(u-1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} u=-2 \Rightarrow (x^2-1)^2=-2 \quad \text{غ ق ق} \\ u=1 \Rightarrow (x^2-1)^2=1 \Rightarrow x^2-1=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=1 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{2}} \\ x^2-1=-1 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \end{cases} \end{cases}$

ج) $۲(\frac{۳x}{x+۱})^۲-۳(\frac{۳x}{x+۱})+۱=۰$ $\frac{۳x}{x+۱}=u$ $x+۱=۰ \Rightarrow x\neq-۱$

$$۲u^۲-۳u+۱=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} u=۱ \Rightarrow \frac{۳x}{x+۱}=۱ \Rightarrow ۳x=x+۱ \Rightarrow \boxed{x=\frac{۱}{۲}} \text{ ق ق} \\ u=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۳x}{x+۱}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۶x=x+۱ \Rightarrow \boxed{x=\frac{۱}{۵}} \text{ ق ق} \end{cases}$$

* * *

د) $x-۶\sqrt{x}+۵=۰$ $\sqrt{x}=u \Rightarrow x=u^۲ \;, x\geq ۰$

$$u^۲-۶u+۵=۰ \Rightarrow (u-۱)(u-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} u=۱ \Rightarrow \sqrt{x}=۱ \Rightarrow \boxed{x=۱} \\ u=۵ \Rightarrow \sqrt{x}=۵ \Rightarrow \boxed{x=۲۵} \end{cases}$$

* * *

ه) $x-۲\sqrt{x-۱}-۴=۰$ $\sqrt{x-۱}=u \Rightarrow x-۱=u^۲ \Rightarrow x=u^۲+۱$ $x-۱\geq۰ \Rightarrow x\geq۱$

$$u^۲+۱-۲u-۴=۰ \Rightarrow u^۲-۲u-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} u=-۱ \Rightarrow \sqrt{x-۱}=-۱ \text{ غ ق} \\ u=۳ \Rightarrow \sqrt{x-۱}=۳ \Rightarrow x-۱=۹ \Rightarrow \boxed{x=۱۰} \end{cases}$$

* * *

و) $(\frac{۱-x}{۱+x})^۲-(\frac{۱-x}{۱+x})-۲۰=۰$ $\frac{۱-x}{۱+x}=u$ $۱+x\neq۰ \Rightarrow x\neq-۱$

$$u^۲-u-۲۰=۰ \Rightarrow (u-۵)(u+۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} u=۵ \Rightarrow \frac{۱-x}{۱+x}=۵ \Rightarrow ۱-x=۵+۵x \Rightarrow \boxed{x=-\frac{۲}{۳}} \text{ ق ق} \\ u=-۴ \Rightarrow \frac{۱-x}{۱+x}=-۴ \Rightarrow ۱-x=-۴-۴x \Rightarrow \boxed{x=-\frac{۵}{۳}} \text{ ق ق} \end{cases}$$

* * *

ز) $(\frac{۲x+۱}{x+۱})^۲-(\frac{۶x+۵}{x+۱})-۸=۰$

$$\frac{۶x+۵}{x+۱}=\frac{۲x+۱+۴x+۴}{x+۱}=\frac{۲x+۱}{x+۱}+\frac{۴(x+۱)}{x+۱}=\frac{۲x+۱}{x+۱}+۴$$

معادله: $(\frac{۲x+۱}{x+۱})^۲-(\frac{۲x+۱}{x+۱})-۴-۸=۰ \Rightarrow (\frac{۲x+۱}{x+۱})^۲-(\frac{۲x+۱}{x+۱})-۱۲=۰$

$\frac{۲x+۱}{x+۱}=u$, $x+۱\neq۰ \Rightarrow x\neq-۱$

$$u^۲-u-۱۲=۰ \Rightarrow (u-۴)(u+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} u=۴ \Rightarrow \frac{۲x+۱}{x+۱}=۴ \Rightarrow ۲x+۱=۴x+۴ \Rightarrow \boxed{x=-\frac{۳}{۲}} \text{ ق ق} \\ u=-۳ \Rightarrow \frac{۲x+۱}{x+۱}=-۳ \Rightarrow ۲x+۱=-۳x-۳ \Rightarrow \boxed{x=-\frac{۴}{۵}} \text{ ق ق} \end{cases}$$

مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها در معادله درجه دوم:

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشد درانصورت مجموع ریشه‌ها را با S و حاصلضرب ریشه‌ها را با P نشان داده و از فرمولهای زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\boxed{S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}} \qquad \boxed{P=x_1x_2=\frac{c}{a}}$$

اثبات: می‌دانیم فرمول محاسبه ریشه‌ها در معادله درجه دوم $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ است.

$$S=x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b+0}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$P=x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

مثال: بدون حل معادله $4x^2-7x+3=0$ مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله را بدست آورید.

$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-7}{4}=\frac{7}{4}$$

$$P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$$

روابط بین ریشه‌ها با S و P:

۱) مجموع مربعات ریشه‌ها: $\boxed{x_1^2+x_2^2=S^2-2P}$

اثبات: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P$

۲) مجموع مکعبات ریشه‌ها: $\boxed{x_1^3+x_2^3=S^3-3PS}$

اثبات: $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=S^3-3PS$

۳) مجموع جذر ریشه‌ها:

$$\boxed{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}}$$

اثبات: $(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2} \xRightarrow{\text{جذر}} \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{(x_1+x_2)+2\sqrt{x_1x_2}}$

$\Rightarrow \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$

۴) مجموع معکوس ریشه‌ها:

$$\boxed{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{S}{P}}$$

اثبات: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{S}{P}$

۵) قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها:

$$\boxed{|x_1-x_2|=\sqrt{S^2-4P}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}$$

اثبات: $|x_1-x_2|=\left|\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right|=\left|\frac{-2\sqrt{\Delta}}{2a}\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4ac}{a^2}}=\sqrt{(-\frac{b}{a})^2-\frac{4c}{a}}=\sqrt{S^2-4P}$

نکته ریاضی ۱: یادآوری فرمول رادیکال‌های مرکب:

$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}$, $C^2=A^2-B$ یا $C=\sqrt{A^2-B}$

نکته ریاضی ۲: شرط اینکه یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه قرینه باشد آنستکه: $b=0$

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=0 \Rightarrow b=0$

نکته ریاضی ۳: شرط اینکه یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه معکوس باشد آنستکه: $a=c$

$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=1 \Rightarrow a=c$

مثال ۱: در معادله $x^2-8x+12=0$ مطلوبست محاسبه:

1) $x_1+x_2=?$ 2) $x_1x_2=?$ 3) $x_1^2+x_2^2=?$ 4) $x_1^3+x_2^3=?$

$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=?$ 6) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=?$ 7) $|x_1-x_2|=?$ 8) $x_1\sqrt{x_1}+x_2\sqrt{x_2}=?$

حل ۱) $x_1+x_2=S=-\frac{b}{a}=8$

حل ۲) $x_1 . x_2=P=\frac{c}{a}=12$

حل ۳) $x_1^2+x_2^2=S^2-2P=(8)^2-2(12)=64-24=40$

حل ۴) $x_1^3+x_2^3=S^3-3PS=(8)^3-3(12)(8)=224$

حل ۵) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{8+\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{8+4}{2}}+\sqrt{\frac{8-4}{2}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

حل ۶) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{S}{P}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

حل ۷) $|x_1-x_2|=\sqrt{S^2-4P}=\sqrt{64-48}=\sqrt{16}=4$

حل ۸) $x_1\sqrt{x_1}+x_2\sqrt{x_2}=m \Rightarrow m^2=x_1^3+x_2^3+2x_1x_2\sqrt{x_1x_2} \Rightarrow m^2=S^3-3PS+2P\sqrt{P}$

$\Rightarrow m=\sqrt{S^3-3PS+2P\sqrt{P}}=\sqrt{224+2(12)\sqrt{12}}=\sqrt{224+24\sqrt{12}}$

* * *

مثال ۲: در معادله $3x^2-(3m+1)x+m=0$ مجموع عکس ریشه‌ها برابر ۴ می باشد m کدام است؟

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4 \Rightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=4 \Rightarrow \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=4 \Rightarrow -\frac{b}{c}=4 \Rightarrow \frac{3m+1}{m}=4 \Rightarrow \boxed{m=1}$

* * *

مثال ۳: در معادله $x^2+(2-m)x-2m=0$ فاصله دو ریشه ۳ واحد است m را بیابید

حل: $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=3 \xrightarrow{a=1} \sqrt{\Delta}=3 \Rightarrow \Delta=9 \Rightarrow b^2-4ac=9 \Rightarrow (2-m)^2-4(-2m)=9$

$\Rightarrow m^2+4m-5=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} m=1 \\ m=-5 \end{cases}$

مثال ۴) اگر α و β ریشه های معادله $x^۲-۴x+۱=۰$ باشد مطلوبست:

$S=-\frac{b}{a}=-\frac{-۴}{۱}=۴$ $\qquad$ $P=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۱}=۱$

الف) $\alpha\beta^۳+\beta\alpha^۳=(\alpha\beta)(\beta^۲+\alpha^۲)=P(S^۲-۲P)=۱(۴^۲-۲(۱))=۱۴$

ب) $\frac{\alpha+۱}{\beta^۲}+\frac{\beta+۱}{\alpha^۲}=\frac{\alpha^۳+\alpha^۲+\beta^۳+\beta^۲}{\beta^۲\alpha^۲}=\frac{(\alpha^۳+\beta^۳)+(\alpha^۲+\beta^۲)}{(\alpha\beta)^۲}=$

$\frac{(S^۳-۳PS)+(S^۲-۲P)}{P^۲}=\frac{(۴^۳-۳\times۱\times۴)+(۴^۲-۲\times۱)}{۱^۲}=\frac{۵۲+۱۴}{۱}=۶۶$

مثال ۵) اگر بین ریشه های معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ رابطه $x_۱-x_۲+x_۱x_۲=۰$ ($x_۱$ و $x_۲$ ریشه اند) برقرار باشد یکی از ریشه های این معادله برابر است با:

الف) $\frac{c-b}{۲a}$ $\qquad$ ب) $\frac{c+b}{a}$ $\qquad$ ج) $\frac{b-c}{۲a}$ $\qquad$ د) $\frac{-b-c}{a}$

حل: به دو طرف رابطه مقدار $۲x_۲$ را اضافه می کنیم:

$x_۱-x_۲+x_۱x_۲+۲x_۲=۲x_۲ \Rightarrow x_۱+x_۲+x_۱x_۲=۲x_۲ \Rightarrow -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=۲x_۲$

$\Rightarrow ۲x_۲=\frac{-b+c}{a} \Rightarrow x_۲=\frac{c-b}{۲a}$ (گزینه الف)

مثال ۶) اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $x^۲+x-۱=۰$ باشند و $\beta>\alpha$ ، مقدار $۵\alpha^۲+۳\beta^۲$ کدام است؟

$S=-۱ \quad , P=-۱$

الف) $۱۲-\sqrt{۵}$

ب) $۵-\sqrt{۱۲}$

ج) $-۵-\sqrt{۱۲}$

د) $۱۲+\sqrt{۵}$

$۵\alpha^۲+۳\beta^۲=(۴\alpha^۲+\alpha^۲)+(۴\beta^۲-\beta^۲)$

$=۴(\alpha^۲+\beta^۲)+(\alpha^۲-\beta^۲)=۴(\alpha^۲+\beta^۲)+\underbrace{(\alpha-\beta)}_{\text{منفی}}(\alpha+\beta)$

$=۴(S^۲-۲P)-\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\times S=۴((-۱)^۲-۲(-۱))-\frac{\sqrt{۵}}{۱}(-۱)$

$=۱۲+\sqrt{۵}$ $\qquad$ گزینه (د)

مثال ۷) m را طوری بیابید که یکی از ریشه های معادله $mx^2-4x+1=0$ سه برابر ریشه دیگر باشد ($m\neq 0$)

حل: فرض کنیم α و β ریشه های معادله $mx^2-4x+1=0$ باشند

$$\begin{cases}\alpha=3\beta\\ S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\Rightarrow 3\beta+\beta=-\frac{-4}{m}\Rightarrow 4\beta=\frac{4}{m}\Rightarrow\beta=\frac{1}{m}\Rightarrow\alpha=\frac{3}{m}\\ P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{3}{m}\times\cancel{\frac{1}{m}}=\cancel{\frac{1}{m}}\Rightarrow\frac{3}{m}=1\Rightarrow\boxed{m=3}\end{cases}$$

مثال ۸) m را چنان بیابید که بین ریشه های معادله $x^2-(m+2)x+(m+1)=0$ رابطه $\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{5}{6}$ برقرار باشد. (α و β ریشه های معادله‌اند)

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{m+2}{1}=m+2\quad,\quad P=\frac{c}{a}=\frac{m+1}{1}=m+1$$

$$\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{5}{6}\Rightarrow\frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)}=\frac{5}{6}\Rightarrow\frac{(\alpha+\beta)+2}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}=\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{S+2}{P+S+1}=\frac{5}{6}\Rightarrow\frac{m+2+2}{m+1+m+2+1}=\frac{5}{6}\Rightarrow\frac{m+4}{2m+4}=\frac{5}{6}\Rightarrow\boxed{m=1}$$

مثال ۹) به ازای کدام مقدار m یکی از ریشه های معادله $x^2-6x+5+m=0$ مجذور دیگری است؟

$$\begin{cases}x_1=x_2^2\\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}=6\end{cases}$$

$$x_1+x_2=6\Rightarrow x_2^2+x_2-6=0\Rightarrow(x_2+3)(x_2-2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_2=-3\Rightarrow(-3)^2-6(-3)+5+m=0\Rightarrow\boxed{m=-32}\\ x_2=2\Rightarrow 2^2-6(2)+5+m=0\Rightarrow\boxed{m=3}\end{cases}$$

مثال ۱۰) اگر α و β ریشه های معادله $2x^2-5x-1=0$ باشد مقدار $2\alpha^2+5\beta$ کدام است؟

الف) ۱۱٫۵

ب) ۱۲٫۵

ج) ۱۳٫۵

د) ۱۴٫۵

α ریشه است $\Rightarrow 2\alpha^2-5\alpha-1=0\Rightarrow 2\alpha^2=5\alpha+1$

$$2\alpha^2+5\beta=5\alpha+1+5\beta=5(\alpha+\beta)+1=5(-\frac{-5}{2})+1$$

$=\frac{25}{2}+1=\frac{27}{2}=$ ۱۳٫۵ گزینه (ج)

مثال ۱۱) اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^۲-۷x+۱۲=۰$ باشند مطلوبست محاسبه:

الف) $\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}=?$ $S=-\frac{b}{a}=۷\ ,\ P=\frac{c}{a}=۴$

حل: $(\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha})^۲=\alpha^۲\beta+\beta^۲\alpha+۲\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}=\alpha\beta(\alpha+\beta)+۲\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}$

$=PS+۲P\sqrt{P}=(۴)(۷)+۲(۴)(\sqrt{۴})=۲۸+۱۶=۴۴\Rightarrow\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}=\sqrt{۴۴}$

ب) $\alpha^۲+\frac{۱}{\alpha}+\beta^۲+\frac{۱}{\beta}=?$

$$\alpha^۲+\frac{۱}{\alpha}+\beta^۲+\frac{۱}{\beta}=\alpha^۲+\beta^۲+\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=S^۲-۲P+\frac{S}{P}=۷^۲-۲(۴)+\frac{۷}{۴}=\frac{۱۷۱}{۴}$$

* * *

مثال ۱۲) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^۲-۴x+۱=۰$ باشند مطلوبست محاسبه:

$$\frac{\beta}{\beta^۲+۱}+\frac{\alpha-۱}{\alpha^۲-۶\alpha+۳}=?$$

ریشه α $\Rightarrow\alpha^۲-۴\alpha+۱=۰\Rightarrow\alpha^۲=۴\alpha-۱$

ریشه β $\Rightarrow\beta^۲-۴\beta+۱=۰\Rightarrow\beta^۲+۱=۴\beta$

$$\frac{\beta}{\beta^۲+۱}+\frac{\alpha-۱}{\alpha^۲-۶\alpha+۳}=\frac{\beta}{۴\beta}+\frac{\alpha-۱}{۴\alpha-۱-۶\alpha+۳}=\frac{۱}{۴}+\frac{\alpha-۱}{-۲(\alpha-۱)}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}$$

* * *

تشکیل معادله درجه دوم:

اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند بطوریکه: $S=x_۱+x_۲$ و $P=x_۱.x_۲$ دراینصورت معادله درجه دوم موردنظر از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$x^۲-Sx+P=۰$$

اثبات: $x_۱$ و $x_۲$ ریشه $\Rightarrow(x-x_۱)(x-x_۲)=۰\Rightarrow x^۲-(x_۱+x_۲)x+x_۱x_۲=۰$

$$\Rightarrow x^۲-Sx+P=۰$$

مثال ۱: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن ۳ و ۵ باشند.

$S=x_۱+x_۲=۳+۵=۸$ $x^۲-Sx+P=۰$

$P=x_۱x_۲=۳\times۵=۱۵$ $\Rightarrow x^۲-۸x+۱۵=۰$

مثال ۲: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $۲-\sqrt{۳}$ و $۲+\sqrt{۳}$ باشند.

$S=۲-\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳}=۴$ $\qquad x^۲-Sx+P=۰$

$P=(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})=۴-۳=۱$ $\qquad \Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰$

مثال ۳: معادله درجه دومی بنویسید که یکی از ریشه‌های آن $x=\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}$ باشد.

$x=\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt{۴-۴\sqrt{۳}+۳}=\sqrt{(۲-\sqrt{۳})^۲}=۲-\sqrt{۳}$

$x=۲-\sqrt{۳}\Rightarrow x-۲=-\sqrt{۳}\Rightarrow (x-۲)^۲=(-\sqrt{۳})^۲\Rightarrow x^۲-۴x+۴=۳\Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰$

مثال ۴: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۳ واحد کمتر از ریشه‌های معادله $۲x^۲-۳x-۲=۰$ باشد.

حل: فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله $۲x^۲-۳x-۲=۰$ باشد در اینصورت:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{۳}{۲} \qquad \alpha.\beta=\frac{c}{a}=-۱$$

در نتیجه ریشه‌های معادله جدید باید $(\alpha-۳)$ و $(\beta-۳)$ باشند پس:

$S=(\alpha-۳)+(\beta-۳)=\alpha+\beta-۶=\frac{۳}{۲}-۶=-\frac{۹}{۲}$

$P=(\alpha-۳)(\beta-۳)=\alpha\beta-۳(\alpha+\beta)+۹=-۱-۳(\frac{۳}{۲})+۹=\frac{۷}{۲}$

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲+\frac{۹}{۲}x+\frac{۷}{۲}=۰\xrightarrow{\times ۲}\boxed{۲x^۲+۹x+۷=۰}$$

نکته کنکوری:

برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌های آن k واحد کمتر از ریشه‌های معادله $ax^۲+bx+c=۰$ باشد کافی است در معادله x را به $(x+k)$ تبدیل کنیم

تست: معادله درجه دومی که ریشه‌های آن ۵ واحد کمتر از ریشه‌های معادله $x^۲+۵x+۶=۰$ باشد کدام است؟

الف) $۶x^۲+x+۵=۰$ $\quad$ ب) $x^۲+۱۵x+۱۰=۰$ $\quad$ ج) $x^۲+۱۵x+۵۶=۰$ $\quad$ د) $x^۲+۶x+۵۶=۰$

$x\to x+۵\Rightarrow (x+۵)^۲+۵(x+۵)+۶=۰\Rightarrow x^۲+۱۰x+۲۵+۵x+۲۵+۶=۰$

$\Rightarrow x^۲+۱۵x+۵۶=۰$ $\qquad$ گزینه (ج)

مثال ۵) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۴ واحد بیشتر از ریشه‌های معادله $۲x^۲-۳x+۷=۰$ باشد.

حل: فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله $۲x^۲-۳x+۷=۰$ باشند در اینصورت:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۳}{۲}=\frac{۳}{۲} \qquad \alpha.\beta=\frac{c}{a}=\frac{۷}{۲}$$

پس ریشه‌های معادله جدید باید $(\alpha+۴)$ و $(\beta+۴)$ باشند در اینصورت:

$$S=(\alpha+۴)+(\beta+۴)=\alpha+\beta+۸=\frac{۳}{۲}+۸=\frac{۱۹}{۲}$$

$$P=(\alpha+۴)(\beta+۴)=\alpha\beta+۴(\alpha+\beta)+۱۶=\frac{۷}{۲}+۴(\frac{۳}{۲})+۱۶=\frac{۵۱}{۲}$$

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۱۹}{۲}x+\frac{۵۱}{۲}=۰ \xRightarrow{\times ۲} \boxed{۲x^۲-۱۹x+۵۱=۰}$$

نکته کنکوری:

برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌های آن k واحد بیشتر از ریشه‌های معادله $ax^۲+bx+c=۰$ است کافی است در معادله x را به $(x-k)$ تبدیل کنیم

تست: معادله درجه دومی که ریشه‌های آن ۳ واحد بیشتر از ریشه‌های معادله $۲x^۲-۵x-۱=۰$ باشد کدام است؟

الف) $۲x^۲-۱۰x+۳۰=۰$ ب) $۲x^۲-۱۷x+۳۲=۰$ ج) $۲x^۲+۳۲x+۱۷=۰$ د) $۲x^۲+۱۷x-۳۲=۰$

حل: گزینه (ب)

$$x \rightarrow x-۳ \Rightarrow ۲(x-۳)^۲-۵(x-۳)-۱=۰ \Rightarrow ۲x^۲-۱۷x+۳۲=۰$$

* * *

مثال ۶: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن عکس ریشه‌های معادله $x^۲-۴x+۳=۰$ باشد.

حل: فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله $x^۲-۴x+۳=۰$ باشند در اینصورت:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۴}{۱}=۴ \qquad \alpha.\beta=\frac{c}{a}=۳$$

پس ریشه‌های معادله جدید باید $\frac{۱}{\alpha}$ و $\frac{۱}{\beta}$ باشند در اینصورت:

$$S=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{۴}{۳} \qquad P=\frac{۱}{\alpha}.\frac{۱}{\beta}=\frac{۱}{\alpha\beta}=\frac{۱}{۳}$$

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۴}{۳}x+\frac{۱}{۳}=۰ \Rightarrow ۳x^۲-۴x+۱=۰$$

نکته کنکوری:

برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه های آن عکس ریشه های معادله $ax^۲+bx+c=۰$ باشد کافی است:

روش اول: جای a و c را باهم عوض کنیم

روش دوم: x را به $\frac{۱}{x}$ تبدیل کنیم

تست: معادله درجه دومی که ریشه هایش عکس ریشه های معادله $۲x^۲+۷x-۹=۰$ باشد کدام است؟

الف) $۷x^۲+۲x+۹=۰$ ب) $۹x^۲+۷x+۲=۰$ ج) $۷x^۲+۹x-۲=۰$ د) $-۹x^۲+۷x+۲=۰$

حل: گزینه (د) $a \leftrightarrow c \Rightarrow -۹x^۲+۷x+۲=۰$

$$x \rightarrow \frac{۱}{x} \Rightarrow ۲(\frac{۱}{x})^۲+۷(\frac{۱}{x})-۹=۰ \Rightarrow \frac{۲}{x^۲}+\frac{۷}{x}-۹=۰ \xRightarrow{\times x^۲} ۲+۷x-۹x^۲=۰$$

* * *

نکته کنکوری:

برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه هایش قرینه ریشه های معادله $ax^۲+bx+c=۰$ باشد کافی است:

روش اول: علامت b را در معادله قرینه می کنیم

روش دوم: x را به $(-x)$ تبدیل کنیم.

تست: معادله درجه دوی که ریشه هایش قرینه ریشه های معادله $۳x^۲-۴x-۱۰=۰$ باشد کدام است؟

الف) $۳x^۲+۴x-۱۰=۰$ ب) $۳x^۲+۴x+۱۰=۰$ ج) $۳x^۲+۱۰x-۴=۰$ د) $۳x^۲+۴x+۱۰=۰$

حل: گزینه (الف) $b \rightarrow -b \Rightarrow ۳x^۲+۴x-۱۰=۰$

$$x \rightarrow -x \Rightarrow ۳(-x)^۲-۴(-x)-۱۰=۰ \Rightarrow ۳x^۲+۴x-۱۰=۰$$

* * *

نکته کنکوری:

برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه هایش قرینه و معکوس (عکس قرینه) ریشه های معادله $ax^۲+bx+c=۰$ باشد کافی است:

روش اول: علامت b را تغییر داده و جای a و c را عوض کنیم

روش دوم: در معادله x را به $(-\frac{۱}{x})$ تبدیل کنیم

مثال) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش عکس قرینه ریشه‌های معادله $۳x^۲-۷x+۲=۰$ باشد.

$b \to -b$

$a \leftrightarrow c$

$$۲x^۲+۷x+۳=۰$$

نکته کنکوری: برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌هایش K برابر ریشه‌های معادله $ax^۲+bx+c=۰$ باشد کافی است:

۱) درمعادله x را به $\frac{x}{K}$ تبدیل کنیم.

۲) از فرمول $ax^۲+Kbx+K^۲c=۰$ استفاده کنیم.

مثال ۱: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش نصف ریشه‌های معادله $x^۲-۳x-۱۰=۰$ باشد.

$$x \to \frac{x}{\frac{۱}{۲}}=۲x \Rightarrow (۲x)^۲-۳(۲x)-۱۰=۰ \Rightarrow ۴x^۲-۶x-۱۰=۰ \overset{\div ۲}{\Rightarrow} ۲x^۲-۳x-۵=۰$$

یا

$$x^۲-\frac{۱}{۲}\times ۳x-(\frac{۱}{۲})^۲\times ۱۰=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۳}{۲}x-\frac{۱۰}{۴}=۰ \overset{\times ۴}{\Rightarrow} ۲x^۲-۳x-۵=۰$$

مثال ۲: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش ۳ برابر ریشه‌های معادله $۲x^۲-۵x-۱=۰$ باشد.

$$x \to \frac{x}{۳} \Rightarrow ۲(\frac{x}{۳})^۲-۵(\frac{x}{۳})-۱=۰ \Rightarrow ۲x^۲-۱۵x-۹=۰$$

یا

$$۲x^۲-۳\times ۵x-۳^۲\times ۱=۰ \Rightarrow ۲x^۲-۱۵x-۹=۰$$

تمرین: محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ و مساحت آن ۱۴ متر مربع است ابعاد این زمین را تعیین کنید.

طول $=a$

عرض $=b$

$$۲(a+b)=۱۸ \Rightarrow a+b=۹ \qquad a.b=۱۴$$

معادله درجه دومی تشکیل می‌دهیم که در آن $S=۹$ و $P=۱۴$ باشد و آن را حل می‌کنیم:

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۹x+۱۴=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۲\\x=۷\end{cases}$$

طول $=a=۷$ عرض $=b=۲$

صفرهای تابع :

اگر $y=f(x)$ یک تابع باشد ریشه های معادله $f(x)=۰$ را در صورت وجود صفرهای تابع می نامند. از نظر هندسی صفرهای تابع همان طول نقاط برخورد منحنی تابع با محور xها است.

مثال) صفرهای تابع های زیر را بدست آورید.

الف) $f(x)=x^۲+۷x+۶$

$$f(x)=۰ \Rightarrow x^۲+۷x+۶=۰ \Rightarrow (x+۱)(x+۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=-۶ \end{cases}$$

ب) $g(x)=x^۳-x$

$$g(x)=۰ \Rightarrow x^۳-x=۰ \Rightarrow x(x^۲-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=\pm۱ \end{cases}$$

* * *

مثال) مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^۳+kx^۲-x-۲$ برابر (۲-) باشد. سپس صفرهای دیگر تابع را بدست آورید.

$$f(-۲)=۰ \Rightarrow (-۲)^۳+k(-۲)^۲-(-۲)-۲=۰ \Rightarrow -۸+۴k+۲-۲=۰ \Rightarrow \boxed{k=۲}$$

$$x=-۲ \Rightarrow x+۲=۰$$

$$x^۳+۲x^۲-x-۲ \;\big|\; \frac{x+۲}{x^۲-۱}$$

$$f(x)=x^۳+۲x^۲-x-۲$$

$$x^۲-۱=۰ \Rightarrow \boxed{x=\pm۱}$$

* * *

تابع درجه دوم :

هر تابع بصورت $y=f(x)=ax^۲+bx+c$ را که در آن $a\neq۰$ باشد تابع درجه دوم و نمودار آن را سهمی می نامند که دارای ویژگی های زیر است:

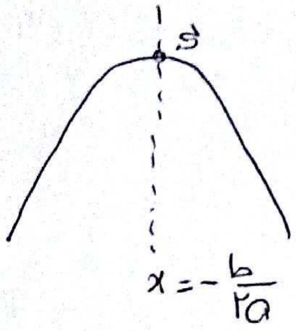
۱) اگر $a>۰$ باشد در اینصورت نمودار سهمی بصورت 

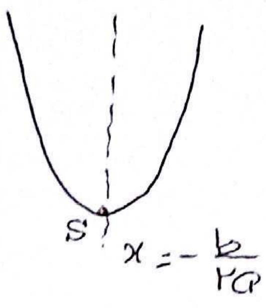
بوده و سهمی دارای کمترین مقدار (مینیمم) بوده و طول نقطه مینیمم آن از رابطه $x=-\frac{b}{۲a}$ بدست می آید که اگر در معادله سهمی قرار دهیم عرض نقطه مینیمم بدست می آید. نقطه مینیمم را راس سهمی نامیده و آنرا با $S(-\frac{b}{۲a} \text{ و } \frac{-\Delta}{۴a})$ نشان می دهیم

۲ اگر $a<0$ باشد در اینصورت نمودار سهمی بصورت 

بوده و سهمی دارای بیشترین مقدار (ماکزیمم) بوده که طول نقطه ماکزیمم آن از رابطه $x=-\frac{b}{2a}$ بدست می آید که اگر در معادله سهمی قرار دهیم عرض نقطه ماکزیمم بدست می آید نقطه ماکزیمم را راس سهمی نامیده و آنرا بصورت $S(-\frac{b}{2a} , \frac{-\Delta}{4a})$ نشان می دهیم.

تذکر مهم: در هر دو حالت خط $x=-\frac{b}{2a}$ را خط تقارن سهمی می گویند که از راس سهمی می گذرد.





مثال ۱) کمترین مقدار تابع $f(x)=2x^2-8x+6$ را تعیین کنید.

$a=2>0 \Rightarrow$ دارای مینیمم $\quad x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-8}{4}=2 \Rightarrow y=f(2)=2(2)^2-8(2)+6=-2$

مثال ۲) حاصل جمع دو عدد برابر ۱۱۰ می باشد این دو عدد را چنان بیابید که حاصلضرب آنها ماکزیمم شود؟

عدد اول $=x$

عدد دوم $=110-x$

$$P=x(110-x)=-x^2+110x$$

$a=-1<0 \Rightarrow$ دارای ماکزیمم

$x_{max}=-\frac{b}{2a}=-\frac{110}{2(-1)}=55 \Rightarrow$
عدد اول $=55$
عدد دوم $=110-55=55$

نکته ریاضی: اگر مجموع دو عدد مقداری ثابت باشد حاصلضرب آنها زمانی ماکزیمم می شود که آن دو عدد باهم برابر باشند.

مثال ۳) محیط مستطیلی ۱۰۰ متر است. طول و عرض آن را چنان تعیین کنید که مساحت مستطیل ماکزیمم شود؟

طول + عرض = نصف محیط = ۱۰۰ ÷ ۲ = ۵۰

طول $= x$

عرض $= ۵۰ - x$

$$P = x(۵۰ - x) = -x^۲ + ۵۰x$$

$$x_{max} = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۵۰}{۲(-۱)} = ۲۵ \Rightarrow \begin{cases} \text{طول} = x = ۲۵ \\ \text{عرض} = ۵۰ - x = ۲۵ \end{cases}$$

مثال ۴) کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{۴}{x}$ را به ازای مقادیر مثبت x تعیین کنید.

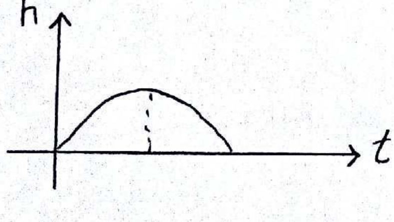
تذکر مهم: $a^۲ + b^۲ = (a-b)^۲ + ۲ab$

$$f(x) = x + \frac{۴}{x} = (\sqrt{x})^۲ + \left(\sqrt{\frac{۴}{x}}\right)^۲ = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{۴}{x}}\right)^۲ + ۲(\sqrt{x})\left(\sqrt{\frac{۴}{x}}\right)$$

$$= \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{۴}{x}}\right)^۲ + ۴$$

کمترین مقدار عبارت فوق وقتی است که عبارت داخل پرانتز صفر شود یعنی کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{۴}{x}$ به ازای $x > ۰$ برابر ۴ می شود.

مثال ۵) هر شئی به آسمان پرتاب می شود. اگر فاصله آن از زمین t ثانیه پس از پرتاب برابر $h(t) = -۵t^۲ + ۱۰۰t$ متر باشد؛



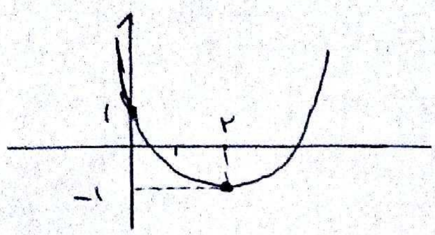
الف) پس از چند ثانیه به نقطه اوج می رسد.

ب) ارتفاع نقطه اوج را بدست آورید.

الف) $h(t) = -۵t^۲ + ۱۰۰t \Rightarrow t_{max} = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۱۰۰}{۲(-۵)} = ۱۰\,s$

ب) $t = ۱۰ \Rightarrow h_{max} = h(۱۰) = -۵(۱۰)^۲ + ۱۰۰(۱۰) = -۵۰۰ + ۱۰۰۰ = ۵۰۰\,m$

مثال ۷: معادله سهمی مقابل را بنویسید



$A\begin{vmatrix}۲\\-۱\end{vmatrix}$ $B\begin{vmatrix}۰\\۱\end{vmatrix}$ $f(x)=ax^۲+bx+c$

$$A\in f \Rightarrow -۱ = a(۲)^۲+b(۲)+c \Rightarrow ۴a+۲b+c=-۱$$

$$B\in f \Rightarrow ۱ = a(۰)^۲+b(۰)+c \Rightarrow \boxed{c=۱}$$

$$x_{min}=-\frac{b}{۲a} \Rightarrow ۲=\frac{-b}{۲a} \Rightarrow ۴a+b=۰$$

$$\begin{cases} ۴a+۲b+۱=-۱ \\ ۴a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=\frac{۱}{۲}},\ \boxed{b=-۲} \Rightarrow y=f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲-۲x+۱$$

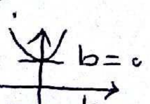
تعیین علامت ضرایب تابع درجه دوم:

برای تعیین علامت ضرایب تابع درجه دوم $y=f(x)=ax^۲+bx+c$ بصورت زیر عمل می کنیم:

۱) معادله $f(x)=ax^۲+bx+c=۰$ را حل می کنیم جوابهای آن صفرهای تابع یا همان طول نقاط برخورد نمودار با محور xها است.

۲) اگر نمودار بصورت ∪ باشد $a>۰$ و اگر نمودار بصورت ∩ باشد $a<۰$ است

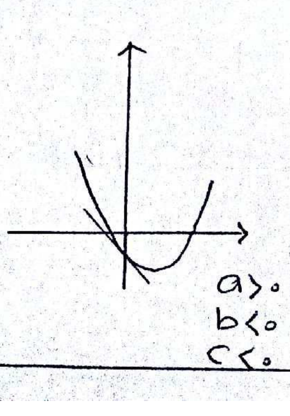
۳) برای تشخیص علامت b، خط مماس بر منحنی را در نقطه برخورد منحنی با محور yها رسم می کنیم b همان شیب خط مماس است.

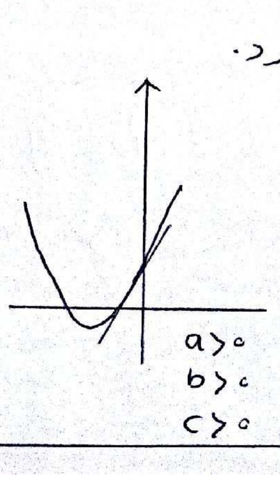


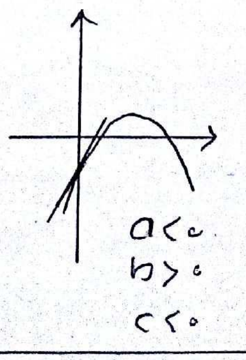
۴) c محل برخورد نمودار با محور yها است.

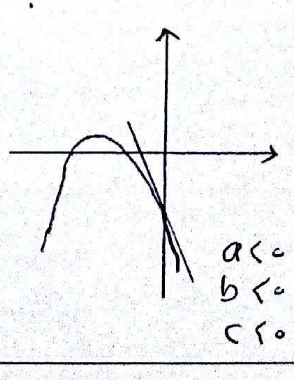
سه حالت زیر را در نظر می گیریم:

الف) $\Delta>۰$ باشد سهمی دو ریشه دارد.

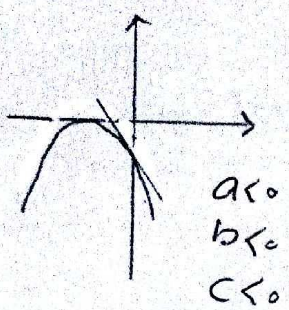


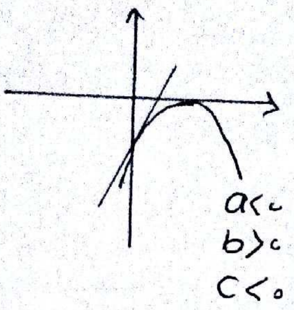


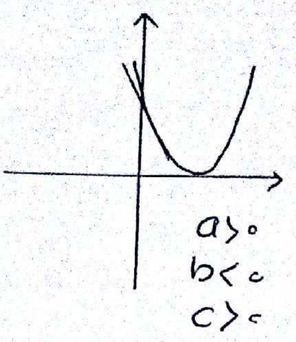


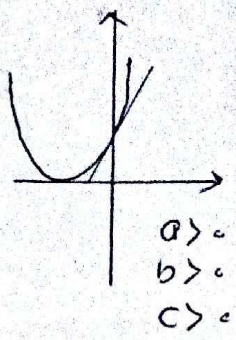


ب) $\Delta=0$ سهمی بر محور xها مماس است.

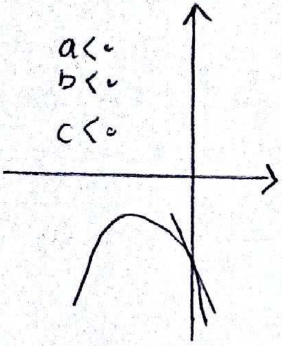


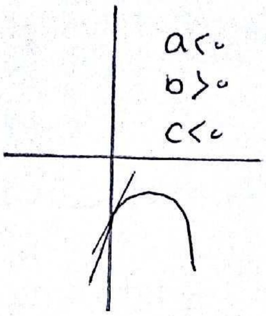


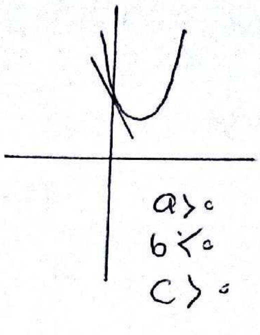


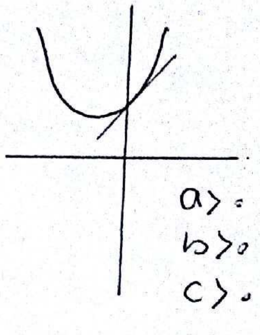


ج) $\Delta<0$ منحنی همیشه در یک طرف محور xها است.



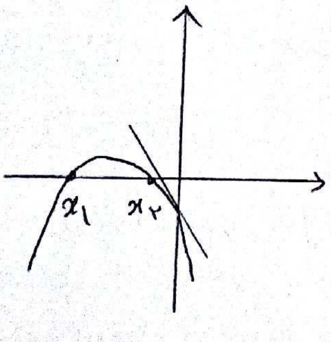






مثال) در شکل زیر سهمی به معادله $f(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است علامت ضرایب a و b و c و S و P و تعداد صفرهای تابع را تعیین کنید.

حل: تابع دارای دو ریشه است.



$x_1<x_2<0$

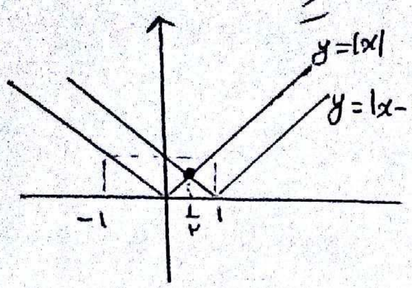
$x_1+x_2=S<0$ $x_1.x_2=P>0$

$a<0$ و $b<0$ و $c<0$

حل معادلات به روش هندسی:

برای حل معادله $f(x)=g(x)$ به روش هندسی ابتدا نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ را رسم می‌کنیم. طول‌های نقاط برخورد دو نمودار جواب‌های معادله هستند.

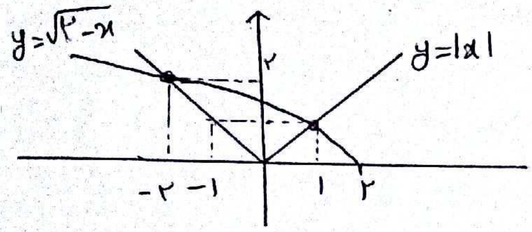
مثال) معادله $|x|=|x-۱|$ را به روش هندسی حل کنید.



محل برخورد دو نمودار نقطه‌ای به طول $x=\frac{۱}{۲}$ است که تنها جواب معادله است.

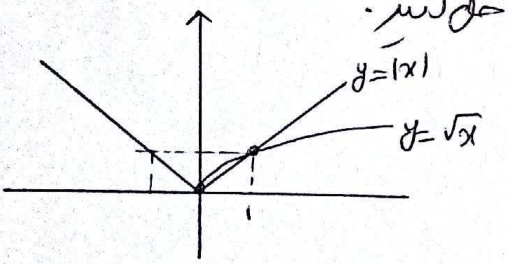
مثال) معادله $\sqrt{x^۲}=\sqrt{۲-x}$ را به روش هندسی حل کنید.

می‌دانیم: $\sqrt{x^۲}=|x|$



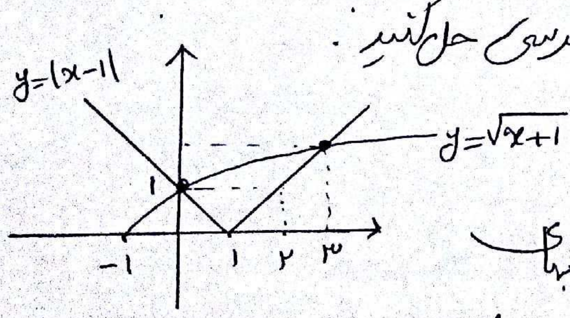
محل برخورد دو نمودار دو نقطه به طول‌های $x=۱$ و $x=-۲$ هستند که جواب‌های معادله هستند.

مثال) معادله $\sqrt{x}=|x|$ را به روش هندسی حل کنید.



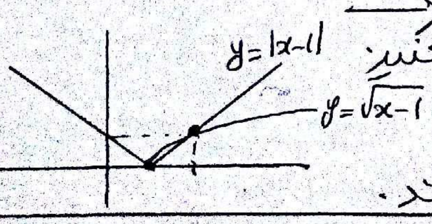
محل برخورد دو نمودار، دو نقطه به طول‌های $x=۰$ و $x=۱$ هستند که جواب‌های معادله می‌باشند.

مثال) معادله $|x-۱|=\sqrt{x+۱}$ را به روش هندسی حل کنید.



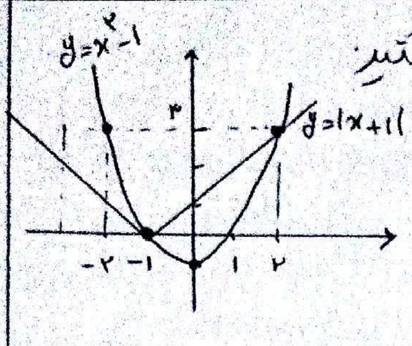
محل برخورد دو نمودار، دو نقطه به طول‌های $x=۰$ و $x=۳$ هستند که جواب‌های معادله می‌باشند.

مثال) معادله $\sqrt{x-۱}=|x-۱|$ را به روش هندسی حل کنید.



محل برخورد دو نمودار دو نقطه به طول‌های $x=۱$ و $x=۲$ هستند که جواب‌های معادله می‌باشند.

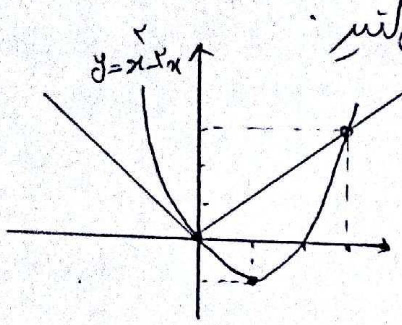
مثال) معادله $|x+۱| = x^{۲}-۱$ را به روش هندسی حل کنید.



دو نمودار همدیگر را در دو نقطه به طول‌های $x=۲$ و $x=-۱$ قطع می‌کنند که جواب‌های معادله هستند.

* * *

مثال) معادله $|x| = x^{۲}-۲x$ را به روش هندسی حل کنید.

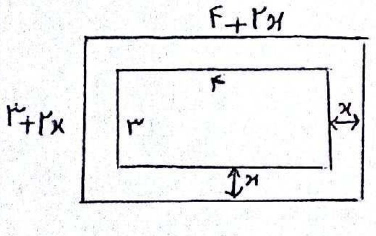


$$y = x^{۲}-۲x = x^{۲}-۲x+۱-۱ = (x-۱)^{۲}-۱$$

دو نمودار همدیگر را در دو نقطه به طول‌های $x=۰$ و $x=۳$ قطع می‌کنند که جواب‌های معادله‌اند.

* * *

تمرین: فرشی به ابعاد ۳ متر در ۴ متر درون اتاقی مستطیل شکل پهن شده است. اگر فاصله لبه فرش تا هر دیوار یکسان و مساحت اتاق برابر ۴۲ متر مربع باشد. فاصله لبه فرش تا دیوار را بدست آورید.



$x =$ فاصله لبه فرش تا دیوار

$$\text{مساحت اتاق} = (۳+۲x)(۴+۲x) = ۴۲ \Rightarrow ۲x^{۲}+۷x-۱۵=۰$$

$$\Delta = ۷^{۲}-۴(۲)(-۱۵) = ۴۹+۱۲۰ = ۱۶۹$$

$$x = \frac{-۷ \pm \sqrt{۱۶۹}}{۲(۲)} = \frac{-۷ \pm ۱۳}{۴} = \begin{cases} x_{۱} = -۵ & \text{غ ق ق} \\ x_{۲} = \frac{۳}{۲} & \text{ق ق} \end{cases}$$

* * *

تمرین: طول یک نوع کاشی از ۳ برابر عرض آن، یک سانتیمتر کوتاه‌تر است. برای کاشی کردن دیواری به مساحت ۶۳ متر مربع تعداد ۱۵۰۰ کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چقدر است؟

عرض کاشی $= x$

طول کاشی $= ۳x-۱$

مساحت دیوار $= ۶۳۰۰۰۰ \ cm^{۲}$

$$\text{مساحت دیوار} = ۱۵۰۰\, x(۳x-۱) = ۶۳۰۰۰۰$$

$$\Rightarrow x(۳x-۱) = ۴۲۰ \Rightarrow ۳x^{۲}-x-۴۲۰ = ۰$$

$$x = \frac{۱ \pm \sqrt{۵۰۴۱}}{۲(۳)} = \frac{۱ \pm ۷۱}{۶} = \begin{cases} x_{۱} = ۱۲\,cm \ (\text{عرض}) \Rightarrow \text{طول} = ۳۵\,cm \\ x_{۲} = -\frac{۷۰}{۶} = -\frac{۳۵}{۳} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

معادلات گویا:

معادلاتی که شامل کسر با صورت و مخرج چند جمله‌ای باشند معادلات گویا نامیده می‌شوند که برای حل آنها مخرج‌ها را تجزیه کرده سپس دو طرف معادله را در ک م م مخرج‌ها که شامل حاصلضرب همه عامل‌ها با بیشترین تعداد است ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها ساده شوند پس معادله را حل می‌کنیم. جواب‌هایی قابل قبولند که مخرج کسرها را صفر نکنند.

مثال) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{x-۱}{x-۲} - \frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x} = \frac{x+۱}{x}$

$x^۲-۲x = x(x-۲)$ ک م م $= x(x-۲)$

$$x(x-۲)\left[\frac{x-۱}{x-۲} - \frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}\right] = x(x-۲)\left(\frac{x+۱}{x}\right)$$

$$\Rightarrow x^۲-x-x^۲+۲x-۲ = x^۲-x-۲ \Rightarrow x-۲ = x^۲-x-۲ \Rightarrow x^۲-۲x=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{غ ق ق} \\ x=۲ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

معادله جواب ندارد

ب) $\frac{x-۱}{x} - \frac{۱}{x+۱} = \frac{۲x-۱}{x^۲+x}$ $\qquad x^۲+x = x(x+۱)$

$$x(x+۱)\left[\frac{x-۱}{x} - \frac{۱}{x+۱}\right] = x(x+۱)\left[\frac{۲x-۱}{x^۲+x}\right] \Rightarrow x^۲-۱-x = ۲x-۱$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{غ ق ق} \\ x=۳ & \text{ق ق} \end{cases}$$

معادله یک جواب دارد.

ج) $\frac{x-۲}{x+۲} + \frac{x}{x-۲} = \frac{۸}{x^۲-۴}$

$$(x^۲-۴)\left[\frac{x-۲}{x+۲} + \frac{x}{x-۲}\right] = (x^۲-۴)\left[\frac{۸}{x^۲-۴}\right]$$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲ + x(x+۲) = ۸ \Rightarrow x^۲-۴x+۴+x^۲+۲x = ۸$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۲x-۴=۰ \Rightarrow x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ & \text{غ ق ق} \\ x=-۱ & \text{ق ق} \end{cases}$$

د) $\frac{x-۲}{x^۲-x-۶} - \frac{۱}{x^۲-۴} = \frac{۳}{۲x+۴}$

کمم $= ۲(x+۲)(x-۲)(x-۳)$

$$۲(x+۲)(x-۲)(x-۳)\left[\frac{x-۲}{x^۲-x-۶} - \frac{۱}{x^۲-۴}\right] = ۲(x+۲)(x-۲)(x-۳)\left[\frac{۳}{۲x+۴}\right]$$

$$\Rightarrow ۲(x-۲)^۲ - ۲(x-۳) = ۳(x-۲)(x-۳) \Rightarrow x^۲-۵x+۴=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ & \text{ق ق} \\ x=۴ & \text{ق ق} \end{cases}$$

مثال) اگر یکی از جوابهای معادله $\frac{۵-a}{۲x} + \frac{a-۳}{x^۲+۴x} = \frac{x}{x^۲+۳x-۴}$ برابر $x=۲$ باشد:

الف) مقدار a را بیابید.

ب) جواب دیگر معادله را بیابید

$$x=۲ \Rightarrow \frac{۵-a}{۴} + \frac{a-۳}{۴+۸} = \frac{۲}{۴+۶-۴} \Rightarrow \frac{۵-a}{۴} + \frac{a-۳}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۵-۳a+a-۳}{۱۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۱۲-۲a=۴ \Rightarrow ۲a=۸ \Rightarrow \boxed{a=۴}$$

$$a=۴ \Rightarrow \frac{۱}{۲x} + \frac{۱}{x^۲+۴x} = \frac{x}{x^۲+۳x-۴}$$

کمم $= ۲x(x+۴)(x-۱)$

$$۲x(x+۴)(x-۱)\cdot\left[\frac{۱}{۲x} + \frac{۱}{x^۲+۴x}\right] = ۲x(x+۴)(x-۱)\left(\frac{x}{x^۲+۳x-۴}\right)$$

$$\Rightarrow x^۲-۵x+۶=۰ \Rightarrow (x-۳)(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ & \text{ق ق} \\ x=۳ & \text{ق ق} \end{cases}$$

مثال) ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد اگر هردو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند چه زمانی برای هرکدام از ماشین ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

زمان انجام کار توسط ماشین A $= t \Rightarrow$ کار ماشین A در یک ساعت $= \frac{۱}{t}$

$$\frac{۱}{t} + \frac{۱}{t+۱۵} = \frac{۱}{۱۸}$$

زمان انجام کار توسط ماشین B $= t+۱۵ \Rightarrow$ کار ماشین B در یک ساعت $= \frac{۱}{t+۱۵}$

$$\Rightarrow -t^۲+۲۱t+۲۷۰=۰$$

$$\Delta = ۱۵۲۱ \Rightarrow \sqrt{۱۵۲۱} = ۳۹$$

$t_۱ = -۹$ غ ق ق $\quad t_۲ = ۳۰$ ق ق

تست: در یک آکواریوم با آب شور، قرار است محلول آب نمک با غلظت ۱۰ درصدی داشته باشیم. اگر در حال حاضر ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۶ درصدی داشته باشیم چقدر از آب آن باید تبخیر شود تا به حد مجاز برسیم؟

الف) ۷۵
ب) ۸۰ ✓
ج) ۳۰
د) ۶۰

حل: ابتدا نمک موجود در آب را محاسبه می‌کنیم: $\frac{۶}{۱۰۰}=\frac{⑫}{۲۰۰}$

$$\frac{۱۲}{۲۰۰-x}=\frac{۱۰}{۱۰۰}\Rightarrow ۲۰۰-x=۱۲۰\Rightarrow x=۸۰$$

تست: ۲۰۰ کیلوگرم رنگ با غلظت ۲۰ درصد را با n کیلوگرم رنگ با غلظت ۸ درصدی مخلوط کرده‌ایم. حاصل، رنگ با غلظت ۱۰ درصد شده است. مقدار n کدام است؟

۱) ۱۰۰۰ ✓
۲) ۱۵۰۰
۳) ۲۰۰۰
۴) ۲۵۰۰

حل: ابتدا مقدار رنگ خالص را پیدا می‌کنیم:

$$۲۰۰\times\frac{۲۰}{۱۰۰}+n\times\frac{۸}{۱۰۰}=۴۰+\frac{۲n}{۲۵}$$

سپس غلظت رنگ مخلوط شده را برابر ۱۰ درصد قرار می‌دهیم:

$$\frac{۴۰+\frac{۲n}{۲۵}}{۲۰۰+n}=\frac{۱۰}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۴۰+\frac{۲n}{۲۵}}{۲۰۰+n}=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow ۴۰۰+\frac{۲۰n}{۲۵}=n+۲۰۰\Rightarrow n=۱۰۰۰$$

معادلات گنگ:

برخی معادلات دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند که آنها را معادلات گنگ می‌نامند که برای حل آنها طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم تا معادله بدون عبارت گنگ بدست آید. جوابهایی قابل قبول است که داخل رادیکال را منفی نکند یا در معادله صدق کند.

مثال) معادلات گنگ زیر را حل کنید:

الف) $\sqrt{۱۵+\sqrt{۲x+۸۰}}=۵$

$\Rightarrow ۱۵+\sqrt{۲x+۸۰}=۲۵\Rightarrow\sqrt{۲x+۸۰}=۱۰\Rightarrow ۲x+۸۰=۱۰۰\Rightarrow\boxed{x=۱۰}$ ق ق

آزمایش جواب: $\sqrt{۱۵+\sqrt{۲۰+۸۰}}=\sqrt{۱۵+۱۰}=\sqrt{۲۵}=۵$

ب) $x+\sqrt{۵x+۱۰}=۸$

$\sqrt{۵x+۱۰}=۸-x \Rightarrow (\sqrt{۵x+۱۰})^۲=(۸-x)^۲ \Rightarrow ۵x+۱۰=۶۴-۱۶x+x^۲$

$\Rightarrow x^۲-۲۱x+۵۴=۰ \Rightarrow (x-۳)(x-۱۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۳\\ x=۱۸\end{cases}$

$x=۳ \Rightarrow ۳+\sqrt{۱۵+۱۰}=۳+۵=۸$ ق ق

$x=۱۸ \Rightarrow ۱۸+\sqrt{۹۰+۱۰}=۱۸+۱۰=۲۸\neq ۸$ غ ق ق

ج) $\sqrt{x+۱}+\sqrt{۳x+۱}=۸$

$(\sqrt{x+۱}+\sqrt{۳x+۱})^۲=۸^۲ \Rightarrow x+۱+۳x+۱+۲\sqrt{(x+۱)(۳x+۱)}=۶۴$

$\Rightarrow ۲\sqrt{(x+۱)(۳x+۱)}=-۴x+۶۲ \Rightarrow \sqrt{۳x^۲+۴x+۱}=-۲x+۳۱$

$\Rightarrow ۳x^۲+۴x+۱=(-۲x+۳۱)^۲ \Rightarrow ۳x^۲+۴x+۱=۴x^۲-۱۲۴x+۹۶۱$

$\Rightarrow x^۲-۱۲۸x+۹۶۰=۰ \Rightarrow (x-۱۲۰)(x-۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۱۲۰\\ x=۸\end{cases}$

$x=۱۲۰ \Rightarrow \sqrt{۱۲۰+۱}+\sqrt{۳\times۱۲۰+۱}=۱۱+\sqrt{۳۶۱}\neq ۸$ غ ق ق

$x=۸ \Rightarrow \sqrt{۸+۱}+\sqrt{۳\times۸+۱}=۳+۵=۸$ ق ق

د) $\sqrt{x+۱۷}-\sqrt{x+۱}=۲\sqrt{x-۷}$

$\Rightarrow (\sqrt{x+۱۷}-\sqrt{x+۱})^۲=(۲\sqrt{x-۷})^۲ \Rightarrow x+۱۷+x+۱-۲\sqrt{(x+۱۷)(x+۱)}=۴(x-۷)$

$\Rightarrow -۲x+۴۶=۲\sqrt{(x+۱۷)(x+۱)} \Rightarrow ۲۳-x=\sqrt{x^۲+۱۸x+۱۷} \Rightarrow$

$(۲۳-x)^۲=x^۲+۱۸x+۱۷ \Rightarrow ۵۲۹-۴۶x+x^۲=x^۲+۱۸x+۱۷ \Rightarrow ۶۴x=۵۱۲$

$\Rightarrow \boxed{x=۸}$

$x=۸ \Rightarrow \begin{cases}\text{سمت چپ}=\sqrt{۸+۱۷}-\sqrt{۸+۱}=۵-۳=۲\\ \text{سمت راست}=۲\sqrt{۸-۷}=۲\times۱=۲\end{cases}$ ق ق

ه) $\sqrt{x+\sqrt{x-۲}}-\sqrt{۲x-۲}=۰$

$\Longrightarrow \sqrt{x+\sqrt{x-۲}}=\sqrt{۲x-۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+\sqrt{x-۲}=۲x-۲ \Rightarrow$

$\sqrt{x-۲}=x-۲ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x-۲=(x-۲)^۲ \Rightarrow x-۲=x^۲-۴x+۴ \Rightarrow x^۲-۵x+۶=۰$

$\Rightarrow (x-۲)(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ & \text{آزمایش}: \sqrt{۲}-\sqrt{۲}=۰ \ \checkmark \\ x=۳ & \text{آزمایش}: \sqrt{۴}-\sqrt{۴}=۰ \ \checkmark \end{cases} \Rightarrow$ هر دو جواب قابل قبول

و) $\sqrt{x+۱}-\dfrac{۲}{\sqrt{x+۱}}=۱$

$\dfrac{\sqrt{x+۱}}{۱}-\dfrac{۲}{\sqrt{x+۱}}=۱ \Rightarrow \dfrac{x+۱-۲}{\sqrt{x+۱}}=۱ \Rightarrow \dfrac{x-۱}{\sqrt{x+۱}}=۱ \Rightarrow x-۱=\sqrt{x+۱}$

$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^۲-۲x+۱=x+۱ \Rightarrow x^۲-۳x=۰ \Rightarrow x(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow ۱-۲\neq ۱ \ \times \\ x=۳ \Rightarrow ۲-۱=۱ \ \checkmark \end{cases}$

پس $x=۰$ غیرقابل قبول و $\boxed{x=۳}$ قابل قبول است.

ر) $\sqrt{۲x-\sqrt{۱+۴x-x^۲}}=۲$

$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۲x-\sqrt{۱+۴x-x^۲}=۴ \Rightarrow \sqrt{۱+۴x-x^۲}=۲x-۴ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱+۴x-x^۲=۴x^۲-۱۶x+۱۶$

$\Rightarrow ۵x^۲-۲۰x+۱۵=۰ \xrightarrow{\div ۵} x^۲-۴x+۳=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۳)=۰$

$\Rightarrow \begin{cases} x=۱ & \Rightarrow ۰\neq ۲ \ \times \\ x=۳ & \Rightarrow \sqrt{۶-۲}=\sqrt{۴}=۲ \ \checkmark \end{cases} \Rightarrow$ قابل قبول $\boxed{x=۳}$

ز) $\dfrac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=۱-x$

$\dfrac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=۱-x \Rightarrow \dfrac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})$

عبارت $(۱-\sqrt{x})$ در هردو طرف معادله هست با محاسبه ریشه این عبارت می‌توانیم آنرا از طرفین حذف کنیم

$\xRightarrow{۱-\sqrt{x}=۰ \Rightarrow \boxed{x=۱}} \dfrac{۱}{۱+\sqrt{x}}=۱+\sqrt{x} \Rightarrow (۱+\sqrt{x})^۲=۱ \Rightarrow ۱+\sqrt{x}=\pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۱+\sqrt{x}=۱ \Rightarrow \sqrt{x}=۰ \Rightarrow \boxed{x=۰} \\ ۱+\sqrt{x}=-۱ \Rightarrow \sqrt{x}=-۲ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$

پس معادله دو جواب $\boxed{x=۱}$ و $\boxed{x=۰}$ دارد.

قدر مطلق و ویژگی های آن :

اگر x یک عدد حقیقی باشد قدر مطلق x را با علامت $|x|$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

نکته ریاضی :

قدر مطلق هر عدد برابر است با فاصله آن عدد از مبدا

$$|-2-(-3)|=|-2+3|=|+1|=1 \quad ، \quad |1-\sqrt{2}|=-(1-\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}$$

$$|\sqrt{3}-\sqrt{5}|=-(\sqrt{3}-\sqrt{5})=\sqrt{5}-\sqrt{3} \quad ، \quad \sqrt{x^4+2x^2+1}=\sqrt{(x^2+1)^2}=|x^2+1|=x^2+1$$

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{1-2\sqrt{3}+3}=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}=|1-\sqrt{3}|=-(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1$$

ویژگی های قدر مطلق :

۱) $\sqrt{x^2}=|x|$

۲) $|xy|=|x|.|y|$

۳) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|} \quad y\neq 0$

۴) $|x|=a \Rightarrow x=\pm a$

۵) $|x|\leq a \Rightarrow -a\leq x\leq a$

۶) $|x|=|-x|$

۷) $|x^2|=|x|^2=x^2$

۸) $|x-y|=|y-x|$

۹) $|x|\geq a \Rightarrow \begin{cases}x\geq a\\ \text{یا}\\ x\leq -a\end{cases}$

اثبات های مربوط به قدر مطلق :

۱) ثابت کنید اگر $|x|\leq c$ باشد ($c\geq 0$) آنگاه : $-c\leq x\leq c$

$$|x|\leq c \Rightarrow |x|^2\leq c^2 \Rightarrow x^2\leq c^2 \Rightarrow x^2-c^2\leq 0 \Rightarrow (x-c)(x+c)\leq 0$$

x		$-c$		c	
x^2-c^2	$+$	0	$-$ ج	0	$+$

$-c\leq x\leq c$

---

۲) ثابت کنید اگر $-c\leq x\leq c$ و $c\geq 0$ آنگاه : $|x|\leq c$

$$-c\leq x\leq c \Rightarrow \begin{cases}-c\leq x \Rightarrow 0\leq \overbrace{x+c}^{\text{مثبت}}\\ x\leq c \Rightarrow \underbrace{x-c}_{\text{منفی}}\leq 0\end{cases} \Rightarrow (x+c)(x-c)\leq 0 \Rightarrow x^2-c^2\leq 0$$

$$\Rightarrow x^2\leq c^2 \Rightarrow \sqrt{x^2}\leq\sqrt{c^2} \Rightarrow |x|\leq |c| \xRightarrow{c\geq 0} |x|\leq c$$

۳) ثابت کنید اگر $|x|>c$ و $c>0$ آنگاه: $x>c$ یا $x<-c$

$$|x|>c \Rightarrow |x|^2>c^2 \Rightarrow x^2>c^2 \Rightarrow x^2-c^2>0 \Rightarrow (x-c)(x+c)>0$$

x		$-c$		c	
x^2-c^2	+	0	−	0	+
	ج				ج

$x>c$ یا $x<-c$

۴) برای هر عدد حقیقی a ثابت کنید: $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$

$$\left.\begin{aligned} a>0 &\Rightarrow -|a|<a=|a| \\ a=0 &\Rightarrow -|a|=a=|a| \\ a<0 &\Rightarrow -|a|=a<|a| \end{aligned}\right\} \Rightarrow -|a|\leqslant a\leqslant |a|$$

۵) برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ (نامساوی مثلثی)

$$\begin{aligned} -|a| &\leqslant a \leqslant |a| \\ -|b| &\leqslant b \leqslant |b| \end{aligned} \quad +$$

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b| \Longrightarrow |a+b|\leqslant |a|+|b|$$

۶) برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $|a|-|b|\leqslant|a-b|$

$$|a|=|a-b+b|\leqslant|a-b|+|b| \Rightarrow |a|-|b|\leqslant|a-b|$$

حل معادلات قدر مطلق:

برای حل معادله قدرمطلق $|f(x)|=|g(x)|$ از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$|f(x)|=|g(x)| \Rightarrow f(x)=\pm g(x)$$

مثال ۱: معادله $|x-3|=7$ را حل کنید:

$$|x-3|=7 \Rightarrow \begin{cases} x-3=7 \Rightarrow x=10 \\ \text{یا} \\ x-3=-7 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

معادلات زیر را حل کنید:

الف) $||x|-۲| = ۶$

$$||x|-۲| = ۶ \Rightarrow \begin{cases} |x|-۲ = ۶ \Rightarrow |x| = ۸ \Rightarrow \boxed{x = \pm ۸} \quad \text{ق ق} \\ |x|-۲ = -۶ \Rightarrow |x| = -۴ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

ب) $|x| = |۱-x|$

$$|x| = |۱-x| \Rightarrow \begin{cases} x = ۱-x \Rightarrow ۲x = ۱ \Rightarrow \boxed{x = \frac{۱}{۲}} \quad \text{ق ق} \\ x = -(۱-x) \Rightarrow x = -۱+x \Rightarrow ۰ = -۱ \quad \text{غیر ممکن} \end{cases}$$

ج) $|۳x-۲| = |x-۴|$

$$\Rightarrow ۳x-۲ = \pm(x-۴) \Rightarrow \begin{cases} ۳x-۲ = x-۴ \Rightarrow ۲x = -۲ \Rightarrow \boxed{x = -۱} \quad \text{ق ق} \\ ۳x-۲ = -x+۴ \Rightarrow ۴x = ۶ \Rightarrow \boxed{x = \frac{۳}{۲}} \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

د) $\sqrt{x^۲-۲x+۱} = x+۱$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-۱)^۲} = x+۱ \Rightarrow |x-۱| = x+۱ \Rightarrow \begin{cases} x-۱ = x+۱ \Rightarrow -۱ = +۱ \quad \text{غیر ممکن} \\ x-۱ = -x-۱ \Rightarrow ۲x = ۰ \Rightarrow \boxed{x = ۰} \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

هـ) $\left|\frac{x+۱}{x-۱}\right| = ۳$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+۱}{x-۱} = ۳ \Rightarrow x+۱ = ۳x-۳ \Rightarrow ۴ = ۲x \Rightarrow \boxed{x = ۲} \quad \text{ق ق} \\ \frac{x+۱}{x-۱} = -۳ \Rightarrow x+۱ = -۳x+۳ \Rightarrow ۴x = ۲ \Rightarrow \boxed{x = \frac{۱}{۲}} \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

و) $|x|=\sqrt{۲-x}$

$|x|=\sqrt{۲-x} \Rightarrow |x|^{۲}=(\sqrt{۲-x})^{۲} \Rightarrow x^{۲}=۲-x \Rightarrow x^{۲}+x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۲ & \text{ق ق} \\ x=۱ & \text{ق ق} \end{cases}$

ز) $|x-۱|+۳-۲x=۱۰$

$|x-۱|=۲x+۷ \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۲x+۷ \Rightarrow x=-۸ & \text{غ ق ق} \\ x-۱=-۲x-۷ \Rightarrow x=-۲ & \text{ق ق} \end{cases}$

ح) $|x^{۲}-۱|=x+۱$

$\begin{cases} x^{۲}-۱=x+۱ \Rightarrow x^{۲}-x-۲=۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ & \text{ق ق} \\ x=-۱ & \text{ق ق} \end{cases} \\ x^{۲}-۱=-x-۱ \Rightarrow x^{۲}+x=۰ \Rightarrow x(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{ق ق} \\ x=-۱ & \text{ق ق} \end{cases} \end{cases}$

ط) $|۲x-۱|+|۱-x|=۷$

$|۲x-۱|=۷-|۱-x| \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۱=۷-|۱-x| \Rightarrow |۱-x|=-۲x+۸ \Rightarrow \begin{cases} ۱-x=-۲x+۸ \Rightarrow x=۷ & \text{غ ق ق} \\ ۱-x=۲x-۸ \Rightarrow x=۳ & \text{ق ق} \end{cases} \\ ۲x-۱=-۷+|۱-x| \Rightarrow |۱-x|=۲x+۶ \Rightarrow \begin{cases} ۱-x=۲x+۶ \Rightarrow x=-\frac{۵}{۳} & \text{ق ق} \\ ۱-x=-۲x-۶ \Rightarrow x=-۷ & \text{غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$

نکته ریاضی: $\boxed{|a|+|b|=|a+b| \Leftrightarrow ab\geq ۰}$

$|۱-x|=|x-۱|$

معادله $|x-۱|+|۲x+۳|=|x+۴|$ را حل کنید.

$|\underbrace{۱-x}_{a}|+|\underbrace{۲x+۳}_{b}|=|\underbrace{x+۴}_{a+b}| \Rightarrow ab\geq ۰ \Rightarrow (-x+۱)(۲x+۳)\geq ۰$

x		$-\frac{۳}{۲}$		۱	
$-۲x^{۲}-x+۳$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

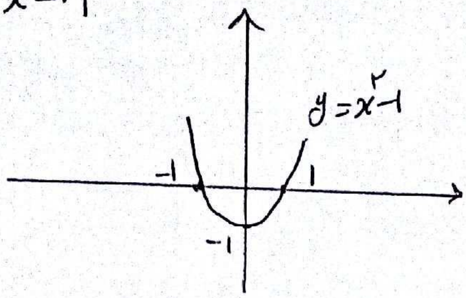
$-\frac{۳}{۲}\leq x\leq ۱$

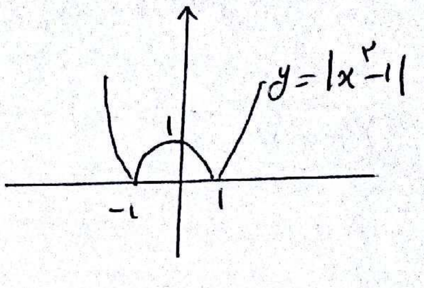
رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$:

ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس قسمتهایی از نمودار را که زیر محور xها است نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:

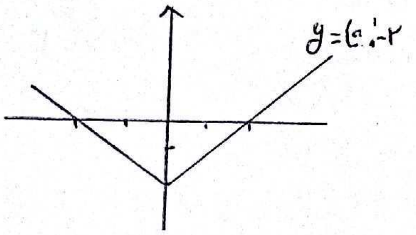
مثال) نمودار توابع زیر را رسم کنید:

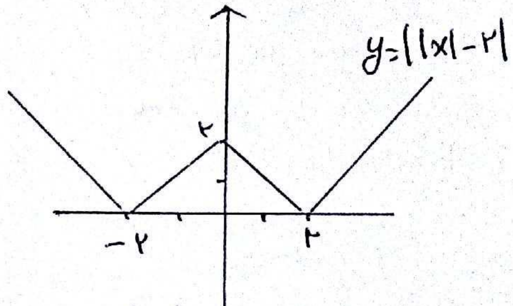
الف) $y=|x^۲-۱|$





ب) $y=||x|-۲|$





تمرین: مطلوب است رسم نمودار: الف) $y=x+\frac{|x|}{x}$ ب) $y=۲x+\frac{x}{|x|}$

رسم تابع قدر مطلق با برداشتن قدر مطلق :

ریشه عبارتهای داخل قدر مطلق را بدست آورده و از روی آنها ناحیه‌های مختلفی را برای x در نظر می‌گیریم :

مثال) نمودار توابع زیر را رسم کنید:

الف) $y=|x-۱|+|x+۲|$

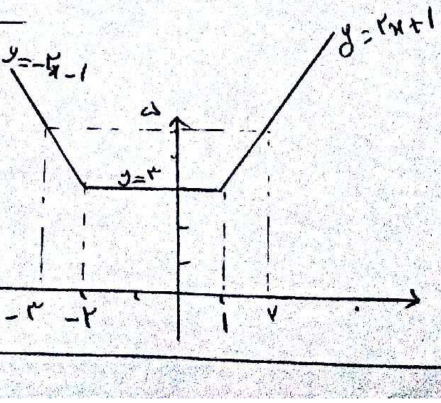
$x-۱=۰ \Rightarrow \boxed{x=۱}$ $x+۲=۰ \Rightarrow \boxed{x=-۲}$

x	ناحیه اول	-۲	ناحیه دوم	۱	ناحیه سوم
$x-۱$	$-$		$-$	۰	$+$
$x+۲$	$-$	۰	$+$		$+$

$x<-۲ \Rightarrow y=-(x-۱)-(x+۲) \Rightarrow y=-۲x-۱$

$-۲<x<۱ \Rightarrow y=-(x-۱)+(x+۲) \Rightarrow y=۳$

$۱\leq x \Rightarrow y=x-۱+x+۲ \Rightarrow y=۲x+۱$



ب) $y=|x-1|+|x-2|$

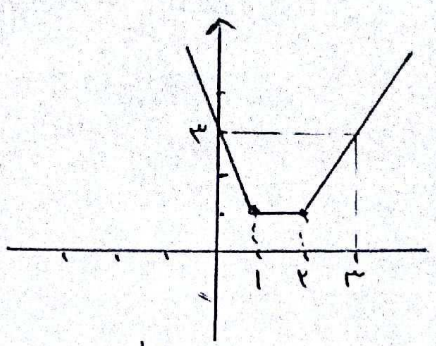
x	ناحیه اول	1	ناحیه دوم	2	ناحیه سوم
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$

$x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$ $\qquad$ $x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$x\leqslant 1 \Rightarrow y=-(x-1)-(x-2) \Rightarrow y=-2x+3$

$1<x<2 \Rightarrow y=(x-1)-(x-2) \Rightarrow y=1$

$2\leqslant x \Rightarrow y=x-1+x-2 \Rightarrow y=2x-3$



* * *

ج) $y=|x-1|-|x-2|$

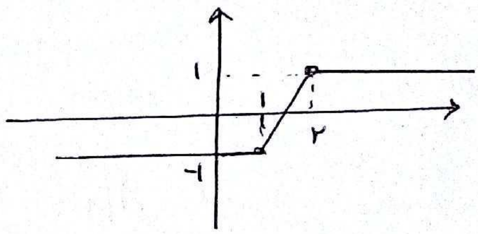
x		1		2	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$

$x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$ $\qquad$ $x-2=0 \Rightarrow x=2$

$x\leqslant 1 \Rightarrow y=-(x-1)+(x-2) \Rightarrow y=-1$

$1<x<2 \Rightarrow y=(x-1)+(x-2) \Rightarrow y=2x-3$

$2\leqslant x \Rightarrow \Rightarrow y=(x-1)-(x-2) \Rightarrow y=1$



* * *

حل نامعادلات شامل قدر مطلق :
از فرمولهای زیر استفاده می کنیم.

۱) $|x|\leqslant a \Rightarrow -a\leqslant x\leqslant a$

۲) $|x|\geqslant a \Rightarrow \begin{cases} x\geqslant a \\ \text{یا} \\ x\leqslant -a \end{cases}$

مثال) نامعادلات زیر را حل کنید:

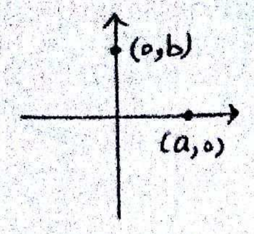
الف) $\left|\frac{x}{2}+3\right|\geqslant 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}+3\geqslant 2 \Rightarrow \frac{x}{2}\geqslant -1 \Rightarrow x\geqslant -2 \\ \text{یا} \\ \frac{x}{2}+3\leqslant -2 \Rightarrow \frac{x}{2}\leqslant -5 \Rightarrow x\leqslant -10 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty,-10]\cup[-2,+\infty)$$

ب) $|2x-1|<5$

$$\Rightarrow -5<2x-1<5 \Rightarrow -4<2x<6 \Rightarrow -2<x<3 \Rightarrow x\in(-2,3)$$

هندسه تحلیلی :



نکته ریاضی : هر نقطه روی محور طولها باشد عرض آن صفر است و هر نقطه روی محور عرضها باشد طول آن صفر است .

مثال : نقطه $A\left|\begin{matrix}۲\alpha-۱\\ ۳\alpha-۱\end{matrix}\right.$ بر روی محور yها و نقطه $B\left|\begin{matrix}۲\beta-۱\\ \beta+۲\end{matrix}\right.$ بر روی محور xها است نقطه $M(\alpha,\beta)$ در کدام ناحیه قرار دارد ؟

$x_A=۰\Rightarrow ۲\alpha-۱=۰\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{۲}$ $y_B=۰\Rightarrow\beta+۲=۰\Rightarrow\beta=-۲$ $M\left|\begin{matrix}\frac{۱}{۲}\\ -۲\end{matrix}\right.$ ربع چهارم

* * *

نکته ریاضی :

معادله خطی که از نقطه $A\left|\begin{matrix}x_1\\ y_1\end{matrix}\right.$ گذشته و شیب آن برابر m باشد از فرمول زیر بدست می آید :

$$\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$$

مثال) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A\left|\begin{matrix}۱\\ ۲\end{matrix}\right.$ بگذرد و شیب آن (۳-) باشد .

$m=-۳$ $y-y_1=m(x-x_1)$

$A\left|\begin{matrix}۱\rightsquigarrow x_1\\ ۲\rightsquigarrow y_1\end{matrix}\right.$ $y-۲=-۳(x-۱)\Rightarrow y=-۳x+۵$

* * *

نکته ریاضی :

معادله خطی که از دو نقطه $A\left|\begin{matrix}x_1\\ y_1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_2\\ y_2\end{matrix}\right.$ می گذرد از فرمول زیر بدست می آید :

$$\boxed{y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$$

شیب $=m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

مثال) معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(۱,۴)$ و $B(۲,-۱)$ را بنویسید .

$A\left|\begin{matrix}۱\rightsquigarrow x_1\\ ۴\rightsquigarrow y_1\end{matrix}\right.$ $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

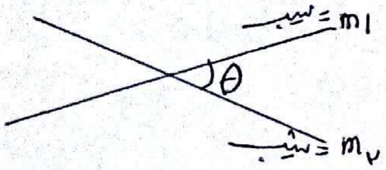
$B\left|\begin{matrix}۲\rightsquigarrow x_2\\ -۱\rightsquigarrow y_2\end{matrix}\right.$ $y-۴=\frac{-۱-۴}{۲-۱}(x-۱)\Rightarrow y-۴=-۵(x-۱)$

$\Rightarrow y=-۵x+۹$

نکته ریاضی :

فرمول زاویه بین دو خط :

اگر شیب دو خط برابر m_1 و $m_۲$ باشد تانژانت زاویه بین آنها از فرمول زیر بدست می آید:



$$tg\theta = \left| \frac{m_1 - m_۲}{1 + m_1 m_۲} \right|$$

مثال) دو خط $y = 1 - ۲x$ و $۹x - ۳y = ۱۴$ چه زاویه‌ای باهم می سازند؟

$y = -۲x + 1 \Rightarrow m_1 = -۲$

$tg\theta = \left|\frac{-۲-۳}{1+(-۲)(۳)}\right| = \left|\frac{-۵}{-۵}\right| = 1$

$۹x - ۳y = ۱۴ \Rightarrow -۳y = -۹x + ۱۴ \Rightarrow y = ۳x - \frac{۱۴}{۳} \Rightarrow \boxed{m_۲ = ۳}$

$\Rightarrow tg\theta = 1 \Rightarrow \boxed{\theta = ۴۵^\circ}$

تذکر مهم:

$ax + by = c$

شیب $= -\frac{a}{b}$

نکته ریاضی :

وضعیت دو خط نسبت به هم :

دو خط نسبت به هم سه حالت دارند :

۱) موازیند $\Leftrightarrow m_1 = m_۲$

۲) عمودند $\Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_۲}$ یا $m_1 \cdot m_۲ = -1$

۳) متقاطع اند $\Leftrightarrow m_1 \neq m_۲$

مثال ۱: به ازای چه مقداری از a دو خط زیر برهم عمودند:

$D_1: ax + (a-1)y - ۲(a+۲) = ۰$

$D_۲: ۳ax - (۳a+1)y - (۵a+۴) = ۰$

$m_1 = -\frac{a}{a-1} = \frac{-a}{a-1}$

$m_1 \cdot m_۲ = -1 \Rightarrow \frac{-a}{a-1} \times \frac{۳a}{۳a+1} = -1$

$m_۲ = -\frac{۳a}{-(۳a+1)} = \frac{۳a}{۳a+1}$

$\Rightarrow \frac{-۳a^۲}{۳a^۲-۲a-1} = -1 \Rightarrow -۲a - 1 = ۰ \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{۲}}$

مثال) مقدار a را چنان تعیین کنید که دو خط زیر باهم موازی باشند؟

$D_1: (a-1)x + ay - 1 = ۰$

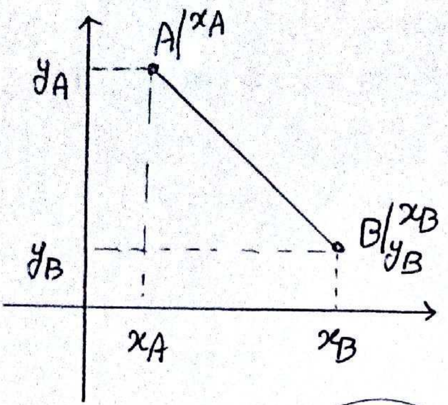
$D_۲: ۴ax + (a-1)y + ۲ = ۰$

$m_1 = -\frac{a-1}{a} = \frac{-a+1}{a}$

$m_1 = m_۲ \Rightarrow \frac{-a+1}{a} = \frac{-۴a}{a-1}$

$m_۲ = -\frac{۴a}{a-1} = \frac{-۴a}{a-1}$

$\Rightarrow (a-1)^۲ = ۴a^۲ \Rightarrow a-1 = \pm ۲a \Rightarrow \begin{cases} a-1 = ۲a \Rightarrow a = -1 \\ a-1 = -۲a \Rightarrow a = \frac{1}{۳} \end{cases}$



فرمول طول پاره خط (فاصله بین دو نقطه):

اگر $A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}\right.$ دو نقطه در صفحه محورهای مختصات باشند فاصله آنها از هم یعنی طول پاره خط AB از فرمول زیر بدست می آید:

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(\text{اختلاف طولها})^۲+(\text{اختلاف عرضها})^۲}$$

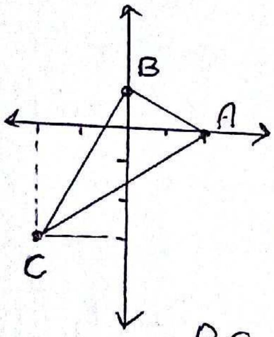
مثال ۱: نقاط $A\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}-۲\\-۳\end{matrix}\right.$ سه راس مثلث $A\hat{B}C$ هستند:

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) محیط مثلث را بدست آورید.

ج) نوع مثلث را مشخص کنید

د) مساحت مثلث را بیابید.



$AB=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۰-۱)^۲}=\sqrt{۵}$

$AC=\sqrt{(-۲-۲)^۲+(-۳-۰)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$

$BC=\sqrt{(-۲-۰)^۲+(-۳-۱)^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$

محیط مثلث $=۵+۳\sqrt{۵}$

اضلاع مثلث مساوی نیستند رابطه فیثاغورس را بررسی می کنیم

$$\begin{cases}۵^۲=۲۵\\(\sqrt{۵})^۲+(\sqrt{۲۰})^۲=۲۵\end{cases}\Rightarrow AC^۲=AB^۲+BC^۲\Rightarrow$$ مثلث قائم الزاویه است

$$S=\frac{AB\times BC}{۲}=\frac{\sqrt{۵}\times ۲\sqrt{۵}}{۲}=۵$$

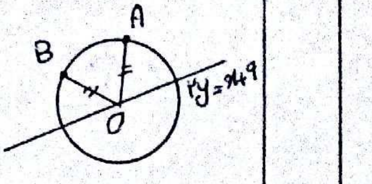
مثال ۲: نقطه‌ای روی خط $y=۲x+۱$ پیدا کنید که از دو نقطه $A\left|\begin{matrix}۳\\۰\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.$ به یک فاصله باشد (مسئله نقطه شناور)

حل: نقطه مورد نظر را M در نظر می گیریم: $M\in y=۲x+۱\Rightarrow M\left|\begin{matrix}x\\۲x+۱\end{matrix}\right.$

$AM=BM\Rightarrow\sqrt{(۳-x)^۲+(۲x+۱-۰)^۲}=\sqrt{(-۱-x)^۲+(۲x+۱-۰)^۲}$

$\Rightarrow(۳-x)^۲=(-۱-x)^۲\Rightarrow ۹-۶x+x^۲=۱+۲x+x^۲\Rightarrow\underline{x=۱}\Rightarrow M\left|\begin{matrix}۱\\۳\end{matrix}\right.$

مثال ۳: مرکز دایره ای روی خط $۲y=x+۹$ قرار دارد و از دو نقطه $A\Big|\begin{matrix}۱\\-۴\end{matrix}$ و $B\Big|\begin{matrix}۵\\۲\end{matrix}$ می گذرد. مساحت این دایره چقدر است؟



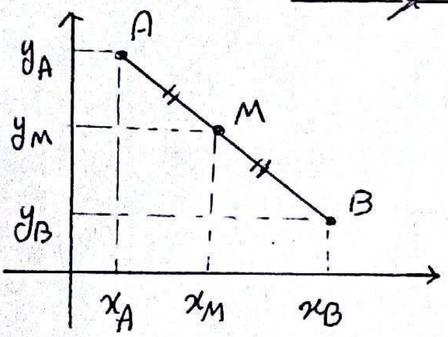
$$۲y=x+۹ \Rightarrow ۲y-۹=x \Rightarrow O\in ۲y-۹=x \Rightarrow O\Big|\begin{matrix}۲k-۹\\k\end{matrix}$$

$$OA=OB \Rightarrow \sqrt{(۲k-۹-۱)^۲+(k-(-۴))^۲}=\sqrt{(۲k-۹-۵)^۲+(k-۲)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (۲k-۱۰)^۲+(k+۴)^۲=(۲k-۱۴)^۲+(k-۲)^۲ \Rightarrow ۲۸k=۸۴ \Rightarrow \boxed{k=۳}$$

$$O\Big|\begin{matrix}-۳\\۳\end{matrix} \qquad \text{شعاع}=R=OA=\sqrt{(-۳-۱)^۲+(۳-(-۴))^۲}=\sqrt{۱۶+۴۹}=\sqrt{۶۵}$$

$$S=\pi R^۲=\pi(\sqrt{۶۵})^۲ \Rightarrow S=۶۵\pi$$

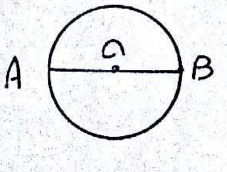


فرمول مختصات وسط پاره خط:

اگر $A\Big|\begin{matrix}x_A\\y_B\end{matrix}$ و $B\Big|\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}$ دو نقطه از صفحه محورهای مختصات باشند مختصات نقطه M وسط پاره خط AB از فرمولهای زیر بدست می آید:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲} \quad \text{و} \quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

مثال ۱: اگر $A\Big|\begin{matrix}-۱\\۷\end{matrix}$ و $B\Big|\begin{matrix}۳\\۱\end{matrix}$ مختصات دو سر قطر یک دایره باشند مساحت دایره را بدست آورید.

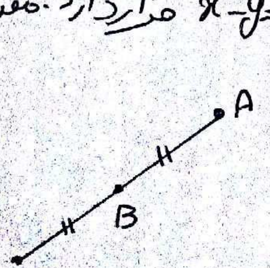


$$x_O=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{-۱+۳}{۲}=۱$$

$$y_O=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۷+۱}{۲}=۴ \qquad O\Big|\begin{matrix}۱\\۴\end{matrix}$$

$$R=OA=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۷-۴)^۲}=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳} \Rightarrow S=\pi R^۲=\pi(\sqrt{۱۳})^۲ \Rightarrow \boxed{S=۱۳\pi}$$

مثال ۲: قرینه نقطه $A\Big|\begin{matrix}۳\\۴\end{matrix}$ نسبت به نقطه $B\Big|\begin{matrix}۱\\-۲\end{matrix}$ روی خط $x-y=k$ قرار دارد. مقدار k را بیابید.



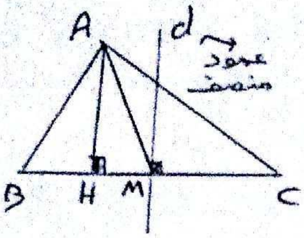
$$x_B=\frac{x_A+x_C}{۲} \Rightarrow ۱=\frac{۳+x_C}{۲} \Rightarrow x_C=-۱$$

$$y_B=\frac{y_A+y_C}{۲} \Rightarrow -۲=\frac{۴+y_C}{۲} \Rightarrow y_C=-۸ \qquad C\Big|\begin{matrix}-۱\\-۸\end{matrix}$$

$$C(-۱,-۸)\in x-y=k \Rightarrow -۱-(-۸)=k \Rightarrow \boxed{k=۷}$$

مثال ۳: اگر $A\Big|^{-۲}_{۳}$ و $B\Big|^{۴}_{-۴}$ و $C\Big|^{-۴}_{۲}$ مختصات سه رأس مثلث $A\hat{B}C$ باشند

مطلوبست محاسبه:



الف) طول میانه AM

ب) معادله میانه AM

ج) معادله ارتفاع AH

د) معادله عمود منصف BC

حل الف)

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{۴+(-۴)}{۲}=۰$$

$$y_M=\frac{y_B+y_C}{۲}=\frac{-۴+۲}{۲}=-۱ \Rightarrow \underset{\text{وسط } BC}{M\Big|^{۰}_{-۱}}$$

$$AM=\sqrt{(-۲-۰)^۲+(۳-(-۱))^۲}$$

$$=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}\Rightarrow \boxed{AM=۲\sqrt{۵}}$$

حل ب)

$A\Big|^{-۲}_{۳}$ $\begin{matrix}\to x_1\\ \to y_1\end{matrix}$

$M\Big|^{۰}_{-۱}$ $\begin{matrix}\to x_۲\\ \to y_۲\end{matrix}$

$$y-y_1=\frac{y_۲-y_1}{x_۲-x_1}(x-x_1)\Rightarrow y-۳=\frac{-۱-۳}{۰-(-۲)}(x-(-۲))$$

$$\Rightarrow y-۳=-۲(x+۲)\Rightarrow \boxed{y=-۲x-۱}$$ معادله میانه AM

حل ج)

$B\Big|^{۴}_{-۴}$

$C\Big|^{-۴}_{۲}$

$$BC \text{ شیب } =\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{-۴-۲}{۴-(-۴)}=\frac{-۶}{۸}=-\frac{۳}{۴}$$

AH بر BC عمود است پس شیب AH قرینه و معکوس شیب BC است

$m_{AH}=\frac{۴}{۳}$

$A\Big|^{-۲}_{۳}$

$$AH:\ y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-۳=\frac{۴}{۳}(x-(-۲))$$

$$\Rightarrow y-۳=\frac{۴}{۳}x+\frac{۸}{۳}\Rightarrow \boxed{y=\frac{۴}{۳}x+\frac{۱۷}{۳}}$$ معادله AH

حل د) عمود منصف BC بر BC عمود است پس شیب آن قرینه و معکوس شیب BC است یعنی $m_d=\frac{۴}{۳}$ و از نقطه $M\Big|^{۰}_{-۱}$ می‌گذرد:

$m=\frac{۴}{۳}$

$M\Big|^{۰}_{-۱}$

$$d:\ y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-(-۱)=\frac{۴}{۳}(x-۰)\Rightarrow \boxed{y=\frac{۴}{۳}x-۱}$$ معادله عمود منصف BC

* * *

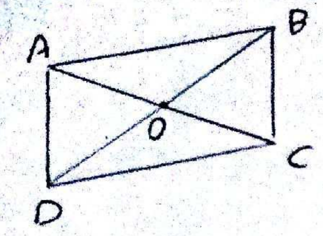
تمرین اضافی: نقاط $A\Big|^{۲}_{-۳}$ و $B\Big|^{۳}_{۴}$, $C\Big|^{-۵}_{-۲}$ مختصات سه رأس مثلث $A\hat{B}C$ هستند مطلوبست محاسبه:

الف) طول میانه AM

ب) معادله میانه AM

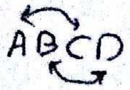
ج) معادله ارتفاع AH

د) معادله عمود منصف BC



ویژگی مختصات رئوس متوازی الاضلاع :

اگر $A|^{x_A}_{y_A}$ و $B|^{x_B}_{y_B}$ و $C|^{x_C}_{y_C}$ و $D|^{x_D}_{y_D}$ مختصات چهار رأس متوازی الاضلاع ABCD باشند بین مختصات رئوس رابطه زیر برقرار است :



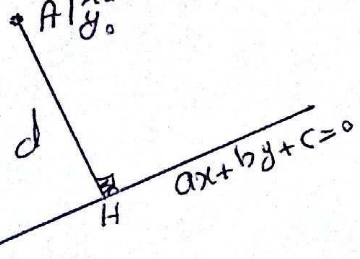
$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D .. \end{cases}$$

مثال) اگر $A|^{۲}_{۵}$ و $B|^{-۱}_{۲}$ و $C|^{۵}_{۱}$ سه راس متوازی الاضلاع ABCD باشند معادله ضلع CD را بنویسید.

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲+۵=-۱+x_D \\ ۵+۱=۲+y_D \end{cases} \Rightarrow D|^{۸}_{۴} \qquad CD: y-۱=\frac{۴-۱}{۸-۵}(x-۵)$$

$$\Rightarrow \boxed{y=x-۴}$$

فاصله نقطه از خط :



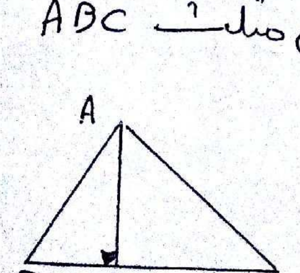
فاصله نقطه $A|^{x_۰}_{y_۰}$ از خط $ax+by+c=۰$ از فرمول زیر بدست می آید :

$$\boxed{AH=d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

واضح است که فاصله مبدا مختصات یعنی $O|^{۰}_{۰}$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با :

$$\boxed{OH=\frac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

مثال ۱ : سه نقطه $A|^{-۳}_{-۲}$ و $B|^{۵}_{۰}$ و $C|^{۱}_{۲}$ مختصات سه رأس مثلث $A\hat{B}C$ هستند. طول ارتفاع AH را بیابید.

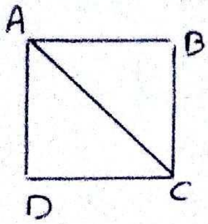


$$BC: y-۰=\frac{۲-۰}{۱-۵}(x-۵) \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲} \Rightarrow \boxed{x+۲y-۵=۰}$$

$$AH=\frac{|(-۳)+۲(-۲)-۵|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}} \Rightarrow AH=\frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵}$$

مثال ۲: مربع ABCD مفروض است اگر $A\Big|{}^{۱}_{۲}$ یک رأس آن و معادله ضلع BC بصورت $۳x-۴y=۵$ باشد مطلوبست:

الف) مساحت مربع   ب) طول قطر مربع   ج) مختصات رأس B



$$BC: ۳x-۴y-۵=۰ \Rightarrow m_{BC}=\frac{۳}{۴}$$

الف) $$ضلع=AB=\frac{|۳(۱)-۴(۲)-۵|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{|-۱۰|}{۵}=\frac{۱۰}{۵}=۲ \Rightarrow S=۲^۲=۴$$

ب) $$AC^۲=۲^۲+۲^۲=۴+۴=۸ \Rightarrow AC=\sqrt{۸} \Rightarrow \boxed{AC=۲\sqrt{۲}}$$ قطر

ج) $$AB\perp BC \Rightarrow m_{AB}\times m_{BC}=-۱ \Rightarrow m_{AB}\times\frac{۳}{۴}=-۱ \Rightarrow m_{AB}=-\frac{۴}{۳}$$

معادله AB: $$y-۲=-\frac{۴}{۳}(x-۱) \Rightarrow y=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow \boxed{۴x+۳y=۱۰}$$

محل برخورد AB و BC برابر مختصات رأس B است.

$$\begin{cases} ۴x+۳y=۱۰ \\ ۳x-۴y=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=\frac{۲}{۵} \\ x=\frac{۱۱}{۵} \end{matrix} \Rightarrow B\Big|{}^{\frac{۱۱}{۵}}_{\frac{۲}{۵}}$$

مثال ۳: فاصله نقطه $A\Big|{}^{-۱}_{۴}$ از خط $۸x+۶y=k$ برابر ۴ است مقدار k را بدست آورید.

$$AH=\frac{|۸(-۱)+۶(۴)-k|}{\sqrt{۸^۲+۶^۲}}=۴ \Rightarrow \frac{|۱۶-k|}{۱۰}=۴ \Rightarrow |۱۶-k|=۴۰ \Rightarrow \begin{cases} ۱۶-k=۴۰ \Rightarrow k=-۲۴ \\ ۱۶-k=-۴۰ \Rightarrow k=۵۶ \end{cases}$$

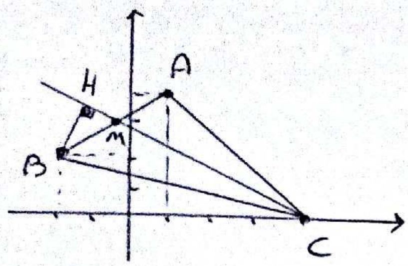
مثال ۴: نقطه‌ای روی محور عرض‌ها پیدا کنید که فاصله آن از خط $۳x+۲y=۱۵$ برابر $\sqrt{۱۳}$ باشد.

حل: نقطه مورد نظر را $A\Big|{}^{۰}_{\alpha}$ در نظر می‌گیریم:

$$AH=\frac{|۳(۰)+۲(\alpha)-۱۵|}{\sqrt{۳^۲+۲^۲}}=\sqrt{۱۳} \Rightarrow \frac{|۲\alpha-۱۵|}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳} \Rightarrow |۲\alpha-۱۵|=۱۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲\alpha-۱۵=۱۳ \Rightarrow ۲\alpha=۲۸ \Rightarrow \alpha=۱۴ \Rightarrow A\Big|{}^{۰}_{۱۴} \\ ۲\alpha-۱۵=-۱۳ \Rightarrow ۲\alpha=+۲ \Rightarrow \alpha=۱ \Rightarrow A\Big|{}^{۰}_{۱} \end{cases}$$

مثال ۵: مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ با رأس‌های $A|^{۱}_{۴}$ و $B|^{-۲}_{۲}$ و $C|^{۴}_{۰}$ مفروض است. طول عمود خارج شده از رأس B بر میانه نظیر رأس C را بیابید.



حل: می‌خواهیم طول BH را که همان فاصله رأس B از میانه CM است بیابیم.

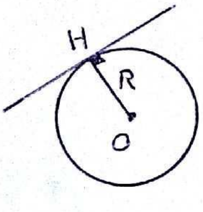
$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A+x_B}{۲} = \dfrac{۱-۲}{۲} = -\dfrac{۱}{۲} \\ y_M = \dfrac{y_A+y_B}{۲} = \dfrac{۴+۲}{۲} = ۳ \end{cases} \qquad M|^{-\frac{۱}{۲}}_{۳}$$

معادله CM: $y-۰ = \dfrac{۳-۰}{-\frac{۱}{۲}-۴}(x-۴) \Rightarrow y = -\dfrac{۲}{۳}x + \dfrac{۸}{۳} \Rightarrow ۳y = -۲x+۸$

$$\Rightarrow ۲x+۳y-۸=۰ \qquad \Rightarrow BH = \frac{|۲(-۲)+۳(۲)-۸|}{\sqrt{۹+۴}} = \frac{۶}{\sqrt{۱۳}} = \frac{۶\sqrt{۱۳}}{۱۳}$$

* * *

مثال ۶: خط $۴x-۲y=۵$ بر دایره‌ای به مرکز $O|^{۲}_{-۱}$ مماس است، مساحت دایره را بدست آورید:

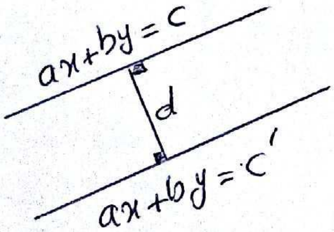


$$R = OH = \frac{|۴(۲)-۲(-۱)-۵|}{\sqrt{۴^۲+(-۲)^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۲۰}} = \frac{۵\sqrt{۲۰}}{۲۰} = \frac{۱۰\sqrt{۵}}{۲۰} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$S = \pi R^۲ = \pi\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)^۲ \Rightarrow S = \frac{۵\pi}{۴}$$

* * *

فاصله دو خط موازی:



فاصله بین دو خط موازی $ax+by=c$ و $ax+by=c'$ از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

مثال ۷: فاصله دو خط موازی $۳x+۴y+۱=۰$ و $۶x+۸y-۸=۰$ را بدست آورید:

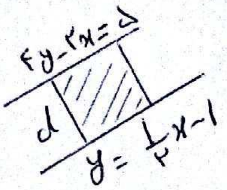
$$۶x+۸y-۸=۰ \xrightarrow{\div ۲} ۳x+۴y-۴=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x+۴y=-۱ \\ ۳x+۴y=۴ \end{cases} \qquad d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \frac{|-۱-۴|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}} = \frac{۵}{۵} = ۱$$

مثال ۲: دو ضلع مربعی بر خطوط $۴y-۲x=۵$ و $y=\frac{۱}{۲}x-۱$ واقع شده‌اند مساحت مربع چقدر است؟

$$y=\frac{۱}{۲}x-۱ \xrightarrow{\times ۴} ۴y=۲x-۴ \Rightarrow -۲x+۴y=-۴$$

$$۴y-۲x=۵ \Rightarrow -۲x+۴y=۵$$



$$d=\frac{|-۴-۵|}{\sqrt{(-۲)^۲+۴^۲}}=\frac{۹}{\sqrt{۲۰}} \Rightarrow S=d^۲=\left(\frac{۹}{\sqrt{۲۰}}\right)^۲=\frac{۸۱}{۲۰}=۴٫۰۵$$

* * *

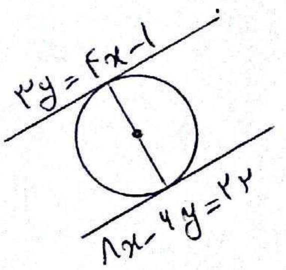
مثال ۳: دو خط به معادله‌های $۳y=۴x-۱$ و $۸x-۶y=۲۲$ بر دایره‌ای مماس هستند. مساحت دایره را بیابید؟

$$۳y=۴x-۱ \Rightarrow ۴x-۳y=۱$$

$$۸x-۶y=۲۲ \xrightarrow{\div ۲} ۴x-۳y=۱۱$$

$$۲R=d=\frac{|۱-۱۱|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

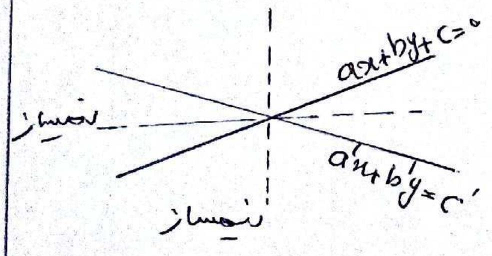
$$\Rightarrow R=۱ \Rightarrow S=\pi R^۲=\pi(۱)^۲=\pi$$



* * *

معادله نیمسازهای دو خط:

معادله نیمسازهای دو خط متقاطع به معادلات $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y=c'$ از فرمول زیر بدست می‌آید:



$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^۲+b'^۲}}$$

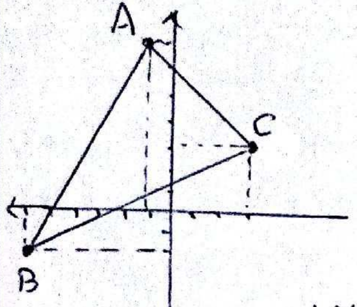
مثال معادله نیمسازهای دو خط $۵x-۱۲y+۱=۰$ و $۳x+۴y-۱=۰$ را بیابید.

$$\frac{|۳x+۴y-۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{|۵x-۱۲y+۱|}{\sqrt{۵^۲+(-۱۲)^۲}} \Rightarrow \frac{|۳x+۴y-۱|}{۵}=\frac{|۵x-۱۲y+۱|}{۱۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۳x+۴y-۱}{۵}=\frac{۵x-۱۲y+۱}{۱۳} \Rightarrow ۳۹x+۵۲y-۱۳=۲۵x-۶۰y+۵ \Rightarrow \boxed{۷x+۵۶y-۹=۰} \\ \text{یا} \\ \frac{۳x+۴y-۱}{۵}=-\frac{۵x-۱۲y+۱}{۱۳} \Rightarrow ۳۹x+۵۲y-۱۳=-۲۵x+۶۰y-۵ \Rightarrow \boxed{۸x-y-۱=۰} \end{cases}$$

(منتخب تمرینات صـ ۳۵ کتاب درسی)

۱) مثلث $\hat{ABC}$ با راس‌های $A\big|^{-۱}_{۷}$ و $B\big|^{-۶}_{-۲}$ و $C\big|^{۳}_{۳}$ را در نظر بگیرید.
الف) مثلث را رسم کنید ب) نشان دهید مثلث متساوی الساقین است پ) معادله عمود منصف ضلع BC را بدست آورید. ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟



$$AC=\sqrt{(-۱-۳)^۲+(۷-۳)^۲}=\sqrt{۳۲}$$
$$AB=\sqrt{(-۶-(-۱))^۲+(-۲-۷)^۲}=\sqrt{۱۰۶}$$
$$AC=\sqrt{(-۶-۳)^۲+(-۲-۳)^۲}=\sqrt{۱۰۶}$$
$\Rightarrow AB=AC \Rightarrow$ متساوی الساقین $\hat{ABC}$

وسط BC $M\Big|\begin{array}{l}\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{-۶+۳}{۲}=-\frac{۳}{۲}\\ \frac{y_B+y_C}{۲}=\frac{-۲+۳}{۲}=\frac{۱}{۲}\end{array} \Rightarrow M\Big|^{-\frac{۳}{۲}}_{\frac{۱}{۲}}$

$m_{BC}=\frac{۳-(-۲)}{۳-(-۶)}=\frac{۵}{۹}$

$\Rightarrow m_{\text{عمود منصف}}=-\frac{۹}{۵}$

معادله عمود منصف: $y-\frac{۱}{۲}=-\frac{۹}{۵}(x-(-\frac{۳}{۲})) \Rightarrow \boxed{y=-\frac{۹}{۵}x-\frac{۲۲}{۱۰}}$

$m_{BC}=\frac{۵}{۹} \Rightarrow m_{AH}=-\frac{۹}{۵}$, $A\big|^{-۱}_{۷}$ $\Rightarrow y-۷=-\frac{۹}{۵}(x-(-۱)) \Rightarrow \boxed{y=-\frac{۹}{۵}x+\frac{۲۶}{۵}}$

معادله AH

$B\big|^{-۶\to x_۱}_{-۲\to y_۱}$ $C\big|^{۳\to x_۲}_{۳\to y_۲}$ $\Rightarrow BC: y-(-۲)=\frac{۳-(-۲)}{۳-(-۶)}(x-(-۶)) \Rightarrow \boxed{y=\frac{۵}{۹}x+\frac{۴}{۳}}$

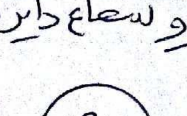
معادله BC

محل برخورد AH و BC همان مختصات نقطه H است.

$$\begin{cases} y=-\frac{۹}{۵}x+\frac{۲۶}{۵} \\ y=\frac{۵}{۹}x+\frac{۴}{۳} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{۸۷}{۵۳} \quad y=\frac{۱۱۹}{۵۳} \quad H\left(\frac{۸۷}{۵۳},\frac{۱۱۹}{۵۳}\right)$$

$$AH=\sqrt{\left(-۱-\frac{۸۷}{۵۳}\right)^۲+\left(۷-\frac{۱۱۹}{۵۳}\right)^۲}\simeq ۵,۴$$

۲) نقاط $A\big|^{۰}_{۶}$ و $B\big|^{۸}_{-۸}$ نقاط دوسر قطر یک دایره‌اند مختصات مرکز و شعاع دایره را بدست آورید.

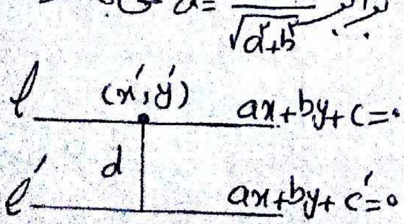


$O\Big|\begin{array}{l}\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۰+۸}{۲}=۴\\ \frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۶-۸}{۲}=-۱\end{array}$

$R=OA=\sqrt{(۴-۰)^۲+(-۱-۶)^۲}=\sqrt{۶۵}$

۳) ثابت کنید فاصله دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ می‌باشد.

فاصله دو خط موازی l و l' برابر است با فاصله نقطه (x',y') از خط l'



$(x',y')\in l \Rightarrow ax'+by'+c=۰ \Rightarrow ax'+by'=-c$

$$d=\frac{|ax'+by'+c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-c+c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

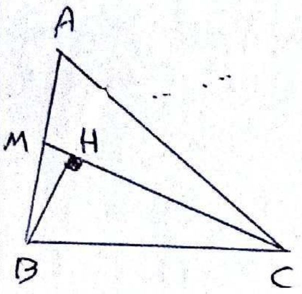
۴) اگر فاصله نقطه $A(۱,۲)$ از خط $ax+۴y=۱$ برابر ۲ باشد مقدار a چقدر است؟

$$\frac{|a(۱)+۴(۲)-۱|}{\sqrt{a^۲+۴^۲}}=۲ \Rightarrow |a+۷|=۲\sqrt{a^۲+۱۶} \Rightarrow (a+۷)^۲=۴(a^۲+۱۶) \Rightarrow ۳a^۲-۱۴a+۱۵=۰$$

$$\Rightarrow a=۳ \text{ یا } a=\frac{۵}{۳}$$

---

۵) سه راس مثلث $\hat{ABC}$، $A\left|\begin{matrix}-۱۱\\-۱۳\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-۳\\۳\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۳\\۱\end{matrix}\right.$ می باشند. طول عمودی را که از راس B بر میانه نظیر راس C وارد می شود را بدست آورید.



حل: مطابق شکل فرضی مقابل CM میانه و M وسط AB، BH فاصله راس B از میانه CM است.

$$M\left|\begin{matrix}\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{-۱۱-۳}{۲}=-۷\\ \frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{-۱۳+۳}{۲}=-۵\end{matrix}\right. \Rightarrow M\left|\begin{matrix}-۷\\-۵\end{matrix}\right.$$

$$C\left|\begin{matrix}۳\\۱\end{matrix}\right. , M\left|\begin{matrix}-۷\\-۵\end{matrix}\right. \Rightarrow CM: y-۱=\frac{-۵-۱}{-۷-۳}(x-۳) \Rightarrow y=\frac{۳}{۵}x-\frac{۴}{۵} \xrightarrow{\times ۵} \boxed{۵y-۳x+۴=۰}$$

$$BH=\frac{|۵(۳)-۳(-۳)+۴|}{\sqrt{(-۳)^۲+(۵)^۲}}=\frac{|۲۸|}{\sqrt{۳۴}}=\frac{۲۸\sqrt{۳۴}}{۳۴}=\frac{۱۴\sqrt{۳۴}}{۱۷}$$

---

۶) نقطه‌ای روی خط $y=۲x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدا مختصات و نقطه $A(۲,۴)$ برابر ۵ باشد.

$$M\in y=۲x \Rightarrow M\left|\begin{matrix}x\\۲y\end{matrix}\right. \quad OM+AM=۵ \Rightarrow \sqrt{(x-۰)^۲+(۲x-۰)^۲}+\sqrt{(x-۲)^۲+(۲x-۴)^۲}=۵$$

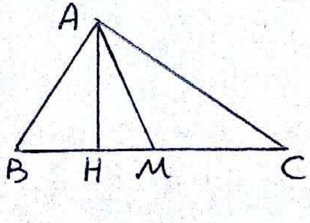
$$\Rightarrow \sqrt{۵x^۲}+\sqrt{۵x^۲-۲۰x+۲۰}=۵ \Rightarrow \sqrt{۵x^۲-۲۰x+۲۰}=۵-\sqrt{۵x^۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۵x^۲-۲۰x+۲۰=$$

$$۲۵-۱۰\sqrt{۵}|x|+۵x^۲ \Rightarrow ۱۰\sqrt{۵}x^۲=۵+۲۰x \Rightarrow \begin{cases} x\geq ۰ \Rightarrow ۱۰\sqrt{۵}x=۵+۲۰x \Rightarrow x=\frac{۱}{۲\sqrt{۵}-۴}=\frac{\sqrt{۵}+۲}{۲} \\ x<۰ \Rightarrow -۱۰\sqrt{۵}x=۵+۲۰x \Rightarrow x=\frac{-۱}{۲\sqrt{۵}+۴}=\frac{۲-\sqrt{۵}}{۲} \end{cases}$$

پس $M\left(\frac{\sqrt{۵}+۲}{۲}, \sqrt{۵}+۲\right)$ و $M\left(\frac{۲-\sqrt{۵}}{۲}, ۲-\sqrt{۵}\right)$

---

۷) نقاط $A\left|\begin{matrix}۴\\۲\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۱\\-۱\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۸\\-۲\end{matrix}\right.$ سه راس مثلث $\hat{ABC}$ هستند اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH را بدست آورید.



$$m_{BC}=\frac{-۲-(-۱)}{۸-۱}=-\frac{۱}{۷} \Rightarrow m_{AH}=۷$$

$$BC: y-(-۱)=\frac{-۲-(-۱)}{۸-۱}(x-۱) \Rightarrow y=-\frac{۱}{۷}x-\frac{۶}{۷}$$

$$AH: y-۲=۷(x-۴) \Rightarrow y=۷x-۲۶$$

$$\begin{cases} y=-\frac{۱}{۷}x-\frac{۶}{۷} \\ y=۷x-۲۶ \end{cases} \Rightarrow H\left|\begin{matrix}x=\frac{۸۸}{۲۵}\\ y=-\frac{۳۴}{۲۵}\end{matrix}\right. \quad M\left|\begin{matrix}\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{۹}{۲}\\ \frac{y_B+y_C}{۲}=-\frac{۳}{۲}\end{matrix}\right. \quad MH=\sqrt{\left(\frac{۸۸}{۲۵}-\frac{۹}{۲}\right)^۲+\left(-\frac{۳۴}{۲۵}+\frac{۳}{۲}\right)^۲}=\frac{\sqrt{۲۴۵۰}}{۵۰}$$

فصل ۲ : تابع

هر تابع مجموعه‌ای از زوجهای مرتب است که در آن هیچ دو زوج مرتب دارای مولفه‌های اول مساوی نباشند.

$$f=\{(۱,۷),(۳,۶),(۹,۵)\}$$

تست : رابطه $f=\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟ (خارج - ۸۵)

$m^۲=m+۲ \Rightarrow m^۲-m-۲=۰ \Rightarrow (m-۲)(m+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۲ \\ m=-۱ \end{cases}$

۱) -۲

۲) -۱ ✓

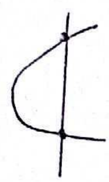
۳) ۲

۴) هیچ مقدار m

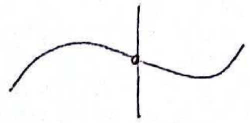
$m=۲ \Rightarrow f=\{(۳,۴),(۲,۱),(-۲,۲),(۳,۴),(۲,۴)\}$ تابع نیست

$m=-۱ \Rightarrow f=\{(۳,۱),(۲,۱),(-۲,-۱),(۳,۱),(-۱,۴)\}$ تابع است

از نظر هندسی (رسم نمودار) یک رابطه زمانی تابع است که هر خط موازی محور yها نمودار رابطه را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

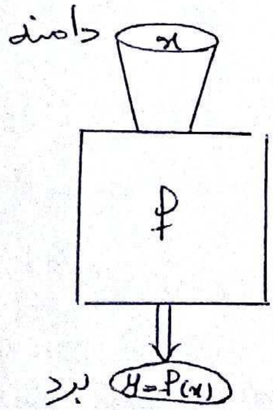


تابع نیست



تابع است

تابع به عنوان ماشین :



ضابطه یک تابع را معمولاً بصورت $y=f(x)$ نشان می‌دهند که f مخفف کلمه function به معنای تابع است. وقتی می‌گوئیم y تابعی از x است یعنی yها از xها تبعیت می‌کنند به عبارت دیگر مقدار تابع که همان مقدار خروجی یعنی $f(x)$ است از مقدار ورودی آن یعنی x بدست می‌آید.

$$(x,y)\in f \Leftrightarrow y=f(x)$$

مثال ۱ : اگر $f(x)=\dfrac{x^۲+۲x+۹}{x^۲+۲x-۶}$ باشد حاصل $f(\sqrt{۲}-۱)$ را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{x^۲+۲x+۱+۸}{x^۲+۲x+۱-۷}=\frac{(x+۱)^۲+۸}{(x+۱)^۲-۷}$$

$$f(\sqrt{۲}-۱)=\frac{(\sqrt{۲}-۱+۱)^۲+۸}{(\sqrt{۲}-۱+۱)^۲-۷}=\frac{۲+۸}{۲-۷}=\frac{۱۰}{-۵}=-۲$$

مثال ۲) از رابطه $f(x)+۲f(۱)=x^۲-۴x$ ضابطه $f(x)$ را بیابید.

$$x=۱ \Rightarrow f(۱)+۲f(۱)=۱^۲-۴(۱) \Rightarrow ۳f(۱)=-۳ \Rightarrow f(۱)=-۱$$

$$f(x)+۲(-۱)=x^۲-۴x \Rightarrow f(x)=x^۲-۴x+۲$$

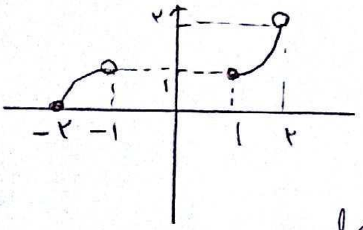
* * *

دامنه و برد تابع:

مجموعه شامل مولفه های اول زوج های مرتب تابع f را دامنه تابع نامیده و با D_f (Domain) نشان می دهند و مجموعه شامل مولفه های دوم زوج های مرتب تابع f را برد تابع نامیده و با R_f (Range) نشان می دهند:

$f=\{(-۲,۷),(۳,۵),(۴,۱)\}$ $\quad D_f=\{-۲,۳,۴\}$ $\quad R_f=\{۷,۵,۱\}$

در دستگاه مختصات دکارتی تصویر نمودار روی محور xها نشان دهنده دامنه تابع و تصویر نمودار روی محور yها نشان دهنده برد تابع است.



$D_f=[-۲,۱)\cup[۱,۲)$ $\quad R_f=[۰,۱]\cup[۱,۲)=[۰,۲)$

* * *

توابع گویا:

تابع هایی که ضابطه آنها بصورت $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ است بطوریکه $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله ای بوده و $Q(x)\neq ۰$ را تابع گویا می نامند (مثال)

$f(x)=\dfrac{x}{x+۵}$ $\quad g(x)=\dfrac{x^۳+x^۲-۲}{x^۲+۴x-۱}$ $\quad h(x)=\dfrac{۷}{x^۳-x+۱}$

* * *

دامنه توابع گویا:

دامنه توابع گویا برابر است با همه اعداد حقیقی به غیر از مقادیری که مخرج کسر را صفر می کنند.

دامنه توابع کسری $=D_f=\mathbb{R}-\{$ ریشه های مخرج $\}$

مثال) دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{x}{x}$ $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

ب) $f(x)=\frac{x^۲+۲x}{x^۲+x+۲}$ $x^۲+x+۲=۰ \Rightarrow \Delta=-۷<۰ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

ج) $f(x)=\frac{۳x+۱}{x^۲-۸x+۱۲}$ $x^۲-۸x+۱۲=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=۶ \end{cases}$ ریشه‌های مخرج

$D_f=\mathbb{R}-\{۲,۶\}$

د) $f(x)=\frac{۵}{\frac{۳}{x}-۱}$

$x\neq ۰$

$\frac{۳}{x}-۱\neq ۰ \Rightarrow \frac{۳}{x}\neq ۱ \Rightarrow x\neq ۳$ $D_f=\mathbb{R}-\{۰,۳\}$

ه) $f(x)=\frac{x-۱}{x^۲-۳|x|+۲}$ $x^۲-۳|x|+۲=۰ \Rightarrow |x|^۲-۳|x|+۲=۰$

$\Rightarrow (|x|-۱)(|x|-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} |x|=۱ \Rightarrow x=\pm ۱ \\ |x|=۲ \Rightarrow x=\pm ۲ \end{cases}$

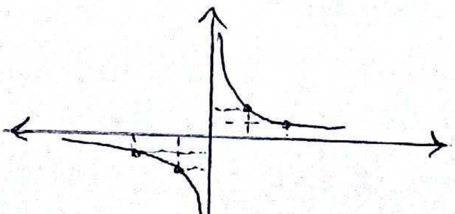
$D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۱,۲,-۲\}$

و) $f(x)=\frac{۱}{x-|x|}$

$x-|x|=۰ \Rightarrow |x|=x \Rightarrow x\geq ۰ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-[۰,+\infty)=(-\infty,۰)$

مثال) مطلوبست رسم نمودار توابع تحویای زیر:

الف) $f(x)=\frac{۱}{x}$

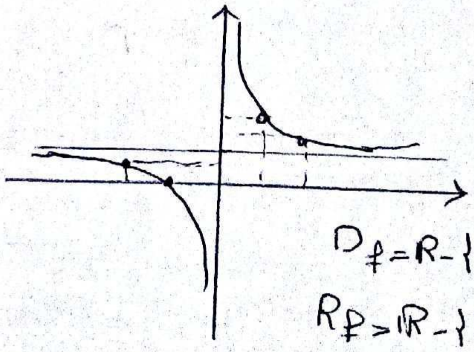


$D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

$R_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

x	-۲	-۱	۱	۲	۳
y	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$

ب) $f(x)=\frac{x+۱}{x}$



$D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

$R_f=\mathbb{R}-\{۱\}$

$f(x)=\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{x}+\frac{۱}{x}=۱+\frac{۱}{x}$

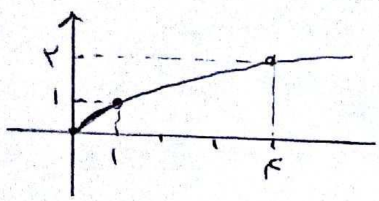
کافی است نمودار $f(x)=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به بالا انتقال دهیم.

توابع رادیکالی:

توابعی که ضابطه آنها دارای عبارت رادیکالی باشد توابع رادیکالی نامیده می شود.

$f(x)=\sqrt{x+1}$ $g(x)=\sqrt{x^۲+۲x+۱}$

مثال) نمودار تابع $y=f(x)=\sqrt{x}$ را رسم کنید.



$D_f=[۰,+\infty)$ $R_f=[۰,+\infty)$

دامنه توابع رادیکالی:

در تعیین دامنه توابع رادیکالی که بصورت $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ هستند دو حالت زیر را درنظر می گیریم:

۱) اگر n فرد باشد دامنه تابع $f(x)$ با دامنه تابع $g(x)$ برابر است.

۲) اگر n زوج باشد دامنه تابع $f(x)$ برابر مقادیری از x است که: $g(x)\geq ۰$
یعنی برای تعیین دامنه، عبارت داخل رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر می گیریم

یادآوری: $|x|\geq a \Rightarrow \begin{cases} x\geq a \\ \text{یا} \\ x\leq -a \end{cases}$ $|x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a$

مثال) دامنه توابع زیر را تعیین کنید:

الف) $f(x)=\sqrt{۱-x}$

$۱-x\geq ۰ \Rightarrow ۱\geq x \Rightarrow x\leq ۱ \Rightarrow D_f=(-\infty,۱]$

ب) $f(x)=\sqrt{x^۲+۵x+۶}$

$x^۲+۵x+۶\geq ۰$ $(x+۲)(x+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۲ \\ x=-۳ \end{cases}$

x	$-\infty$		-۳		-۲		$+\infty$
$x^۲+۵x+۶$		+	۰	−	۰	+	

$D_f=(-\infty,-۳]\cup[-۲,+\infty)$

ج) $f(x)=\sqrt{-x^۲(x-۱)^۲}$

عبارت داخل رادیکال همواره منفی یا صفر است به ازای $x=۰$ و $x=۱$ عبارت زیر رادیکال صفر است که این مقادیر قابل قبول هستند $D_f=\{۰,۱\}$

د) $f(x)=\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ $\quad x\geq 0 \Rightarrow D_f=[0,+\infty)$

هـ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x^2-1}{1-x^2}}$

$\dfrac{-x^2-1}{1-x^2}\geq 0 \Rightarrow$ صورت همواره منفی است $\Rightarrow 1-x^2<0 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow |x|>1 \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ \text{یا} \\ x<-1 \end{cases}$

$D_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

و) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad 9-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 9 \Rightarrow |x|\leq 3 \Rightarrow -3\leq x\leq 3$

$x^2-1>0 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow |x|>1 \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<-1 \end{cases}$

اشتراک $= D_f=[-3,-1)\cup(1,3]$

تساوی توابع :

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را مساوی می‌گویند هرگاه :

۱) دامنه آنها برابر باشند ($D_f=D_g$)

۲) ضابطه آنها باهم برابر باشند ($f(x)=g(x)$)

تمرین : کدام جفت از توابع زیر باهم برابرند ؟

الف) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2+1}-x \\ g(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$ $\quad$ شرط اول : $D_f=D_g=\mathbb{R}$

شرط دوم : $g(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\times\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-(x^2+1)}=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{-1}=\sqrt{x^2+1}-x=f(x)$

پس دو تابع برابرند

ب) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x} \\ g(x)=\dfrac{x}{x^2} \end{cases}$ $\quad D_f=D_g=\mathbb{R}-\{0\}$

$g(x)=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}=f(x)$

پس دو تابع برابرند.

ج) $\begin{cases} f(x)=x-۲ \\ g(x)=\dfrac{x^۲-۴}{x+۲} \end{cases}$ $D_f=\mathbb{R}$ $D_g=\mathbb{R}-\{-۲\}$

$D_f \neq D_g$

دو تابع برابر نیستند

د) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^۲-x} \\ g(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1} \end{cases}$ $D_f: x^۲-x \geq ۰ \Rightarrow x(x-1)\geq ۰ \xrightarrow[\text{علامت}]{\text{تعیین}} \begin{cases} x\geq 1 \\ x\leq ۰ \end{cases}$

$D_g: \begin{cases} x\geq ۰ \\ x-1\geq ۰ \Rightarrow x\geq 1 \end{cases}$ $D_f \neq D_g$

دو تابع برابر نیستند

ه) $\begin{cases} f(x)=\sin x \\ g(x)=\sqrt{1-\cos^۲ x} \end{cases}$ $D_f=D_g=\mathbb{R}$

$g(x)=\sqrt{1-\cos^۲ x}=\sqrt{\sin^۲ x}=|\sin x| \neq f(x)$

دو تابع برابر نیستند

جزء صحیح:

برای هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن را با علامت $[x]$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{[x]=n \Leftrightarrow n\leq x<n+1 \quad n\in\mathbb{Z}}$$

$[۳,۷]=۳ \Leftrightarrow ۳\leq ۳,۷<۴$ $[۵]=۵ \Leftrightarrow ۵\leq ۵<۶$

$[-۲,۷]=-۳ \Leftrightarrow -۳\leq -۲,۷<-۲$ $[-۹]=-۹ \Leftrightarrow -۹\leq -۹<-۸$

$[۰,۵]=۰ \Leftrightarrow ۰\leq ۰,۵<۱$ $[-۱۰,۳]=-۱۱ \Leftrightarrow -۱۱\leq -۱۰,۳<-۱۰$

خواص جزء صحیح:

۱) $[x]\leq x<[x]+1$ ۲) $۰\leq x-[x]<1$

۳) $x\geq n \Rightarrow [x]\geq n$ ۴) $[x+n]=[x]+n \quad n\in\mathbb{Z}$

۵) $[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -1 & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$ ۶) $[x+y]=\begin{cases} [x]+[y] & \rightarrow x=۲, y=۳ \\ \text{یا} \\ [x]+[y]+1 & \rightarrow x=۳,۷ , y=۴,۵ \end{cases}$

۷) $[x+y]\geq [x]+[y]$ (نتیجه رابطه ۶)

تابع جزء صحیح :

تابعی که به هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می دهد تابع جزء صحیح نامیده می شود و ضابطه آن را بصورت $y=f(x)=[x]$ نشان می دهند

تابع جزء صحیح را تابع پله‌ای (پلکانی ـ براکت) نیز می‌نامند. برای رسم نمودار تابع جزء صحیح x را در بازه هایی به طول ۱ واحد در نظر گرفته پس نمودار تابع را رسم می کنیم :

مثال ۱ : نمودار تابع $y=[x]$ را در بازه $[-۲,۳)$ رسم کنید.

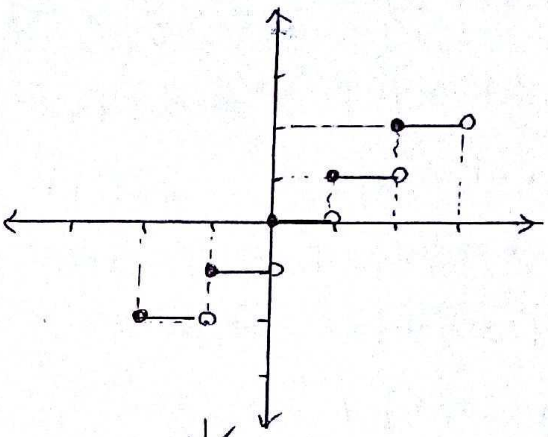
$-۲ \leq x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = -۲$

$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = -۱$

$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = ۰$

$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = ۱$

$۲ \leq x < ۳ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow y = ۲$



مثال ۲ : نمودار تابع $f(x)=[۲x]$ را در بازه $[-۱,۲)$ رسم کنید.

$-۱ \leq x < ۲ \Rightarrow -۲ \leq ۲x < ۴$

$-۲ \leq ۲x < -۱ \Rightarrow [۲x] = -۲ \Rightarrow y = -۲ \; , \; -۱ \leq x < -\frac{۱}{۲}$

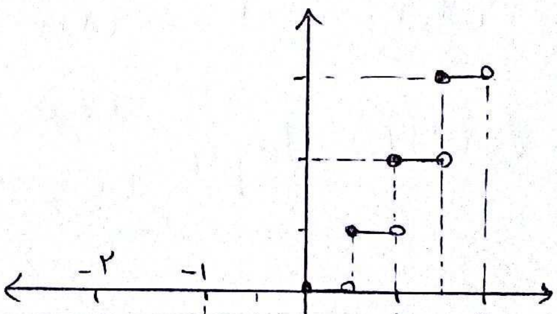
$-۱ \leq ۲x < ۰ \Rightarrow [۲x] = -۱ \Rightarrow y = -۱$ و $-\frac{۱}{۲} \leq x < ۰$

$۰ \leq ۲x < ۱ \Rightarrow [۲x] = ۰ \Rightarrow y = ۰ \; , \; ۰ \leq x < \frac{۱}{۲}$

$۱ \leq ۲x < ۲ \Rightarrow [۲x] = ۱ \Rightarrow y = ۱ \; , \; \frac{۱}{۲} \leq x < ۱$

$۲ \leq ۲x < ۳ \Rightarrow [۲x] = ۲ \Rightarrow y = ۲ \; , \; ۱ \leq x < \frac{۳}{۲}$

$۳ \leq ۲x < ۴ \Rightarrow [۲x] = ۳ \Rightarrow y = ۳ \; , \; \frac{۳}{۲} \leq x < ۲$

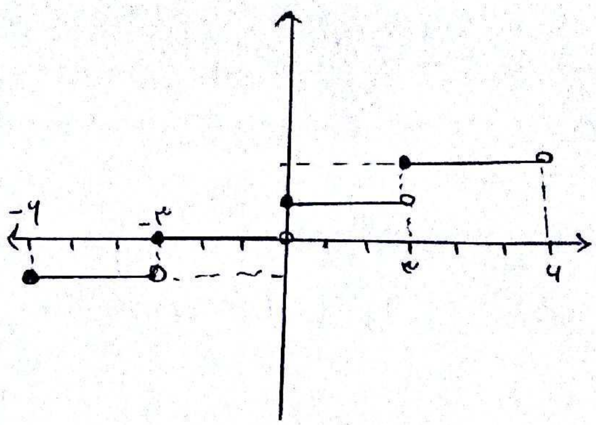


مثال ۳ : نمودار تابع $f(x)=[\frac{۱}{۳}x+۱]$ را در بازه $[-۶,۶)$ رسم کنید.

$-۶ \leq x < ۶ \Rightarrow -۲ \leq \frac{۱}{۳}x < ۲$ $\quad y=[\frac{۱}{۳}x+۱]=[\frac{۱}{۳}x]+۱$

$$-۲ \leq \frac{۱}{۳}x < -۱ \Rightarrow \begin{cases} [\frac{۱}{۳}x] = -۲ \Rightarrow y = -۲+۱ = -۱ \\ -۶ \leq x < -۳ \end{cases}$$

$-1 \leq \frac{1}{3}x < 0 \Rightarrow \begin{cases} [\frac{1}{3}x] = -1 \Rightarrow y = -1+1 = 0 \\ -3 \leq x < 0 \end{cases}$



$0 \leq \frac{1}{3}x < 1 \Rightarrow \begin{cases} [\frac{1}{3}x] = 0 \Rightarrow y = 0+1 = 1 \\ 0 \leq x < 3 \end{cases}$

$1 \leq \frac{1}{3}x < 2 \Rightarrow \begin{cases} [\frac{1}{3}x] = 1 \Rightarrow y = 1+1 = 2 \\ 3 \leq x < 6 \end{cases}$

مثال ۴) مطلوبست رسم نمودار تابع $y = x - [x]$ در بازه $[-3,3)$:

$-3 \leq x < -2 \Rightarrow [x] = -3 \Rightarrow y = x+3$

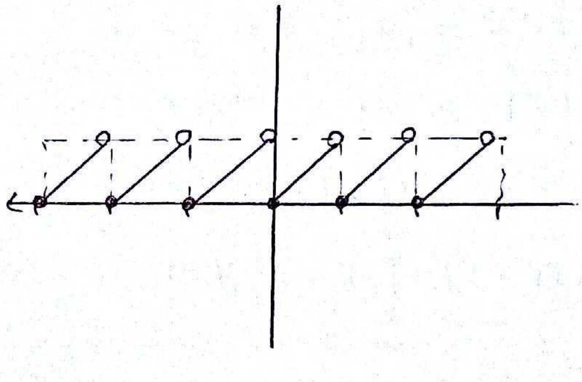
$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = x+2$

$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x+1$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x$

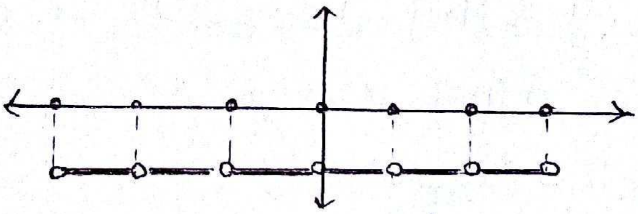
$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x-1$

$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = x-2$



مثال ۵) مطلوبست رسم نمودار تابع $y = [x] + [-x]$ در بازه $[-3,3]$

$y = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$



مثال ۶) مطلوبست رسم نمودار تابع $y = x + [x]$ در بازه $[-2,3)$

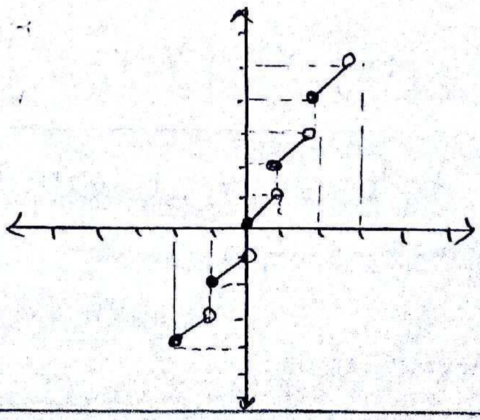
$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = x-2$

$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x-1$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x+1$

$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = x+2$

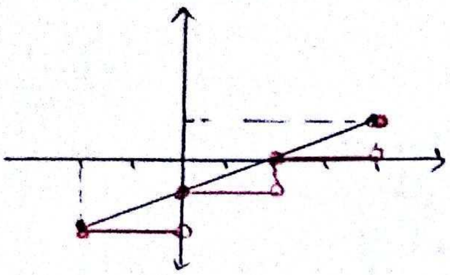


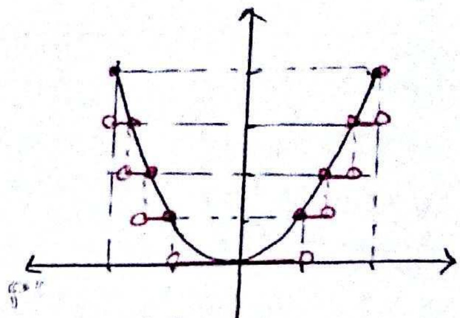
نکته ریاضی:

برای رسم نمودار تابع $y=[f(x)]$ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می کنیم سپس تصویر نمودار $y=f(x)$ را روی خطوط $y=k\ (k\in\mathbb{Z})$ رسم می کنیم:

الف) $y=[\frac{۱}{۲}x-۱]$ $x\in[-۲,۴]$

ب) $y=[x^۲]$ $x\in[-۲,۲]$





تمرین: معادلات زیر را حل کنید:

الف) $[۲x-۱]=۴$

$[۲x-۱]=۴ \Rightarrow ۴\leq ۲x-۱<۵ \Rightarrow ۵\leq ۲x<۶ \Rightarrow \frac{۵}{۲}\leq x<۳$

ب) $[۱-x^۲]=-۳$

$[۱-x^۲]=-۳ \Rightarrow -۳\leq ۱-x^۲<-۲ \Rightarrow -۴\leq -x^۲<-۳ \Rightarrow ۳<x^۲\leq ۴ \Rightarrow \sqrt{۳}<|x|\leq ۲$

$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{۳}<x\leq ۲\\ -۲\leq x<-\sqrt{۳}\end{cases}$

ج) $[x]^۲-۵[x]+۶=۰$

$([x]-۲)([x]-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases}[x]=۲ \Rightarrow ۲\leq x<۳\\ [x]=۳ \Rightarrow ۳\leq x<۴\end{cases} \xrightarrow{\cup} ۲\leq x<۴$

تمرین: مطلوبست تعیین دامنه توابع زیر:

الف) $y=\frac{۱}{x-[x]}$

$x-[x]=۰ \Rightarrow x=[x] \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$

$D_f=\mathbb{R}-\mathbb{Z}=\mathbb{R}-\{۰,\pm۱,\pm۲,\dots\}$

ب) $y=\sqrt{۳-۲[x]}$

$۳-۲[x]\geq ۰ \Rightarrow ۲[x]\leq ۳ \Rightarrow [x]\leq\frac{۳}{۲}$

$\Rightarrow [x]\leq ۱/۵ \Rightarrow x<۲ \Rightarrow D_f=(-\infty,۲)$

ج) $f(x)=\frac{۲x+۱}{[x]-۲}$

$[x]-۲=۰ \Rightarrow [x]=۲ \Rightarrow ۲\leq x<۳$

$D_f=\mathbb{R}-[۲,۳)$

د) $f(x)=[\frac{۱}{x}]-\frac{۱}{[x]}$

جواب جمع، $\begin{cases}x=۰\\ [x]=۰ \Rightarrow ۰\leq x<۱\end{cases}$

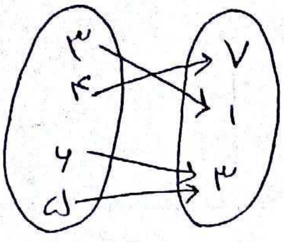
$D_f=\mathbb{R}-[۰,۱)$

تابع یک به یک:

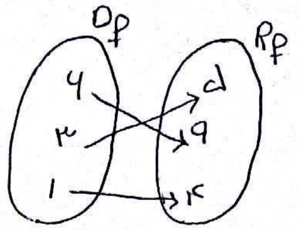
تابع f را یک به یک می‌گویند هرگاه هیچ دو زوج مرتب آن دارای مؤلفه دوم مساوی نباشد.

$$f=\{(۱,۲),(۳,۴),(۲,۵)\}$$

از نظر نمودار ون تابع f زمانی یک به یک است که به هر عضو برد فقط و فقط یک پیکان رسم شود.



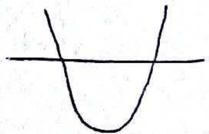
تابع است یک به یک نیست



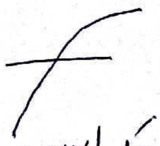
تابع است یک به یک است.

از نظر هندسی (رسم نمودار):

تابع f زمانی یک به یک است که هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



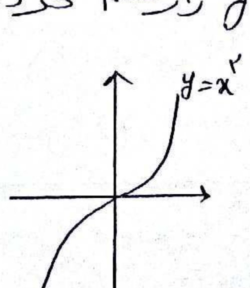
یک به یک نیست



یک به یک است.

مثال) نمودار تابع $y=f(x)=x|x|$ را رسم کرده و یک به یک بودن تابع را از روی نمودار بررسی کنید.

$$f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$$



یک به یک است چون هر خط موازی محور xها نمودار تابع را در یک نقطه قطع می‌کند.

از نظر ضابطه تابع:

تابع f را یک به یک می‌گویند اگر برای هر x_1 و x_2 عضو دامنه f داشته باشیم:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

مثال ۱: ثابت کنید تابع $y=\frac{-2x+1}{x+1}$ یک به یک است.

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{-2x_1+1}{x_1+1}=\frac{-2x_2+1}{x_2+1} \Rightarrow -2x_1x_2-2x_1+x_2+1=-2x_1x_2-2x_2+x_1+1$

$\Rightarrow -3x_1=-3x_2 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow$ f یک به یک است.

مثال ۲: ثابت کنید تابع $f(x)=\sqrt{3x+1}$ یک به یک است

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \sqrt{3x_1+1}=\sqrt{3x_2+1} \Rightarrow 3x_1+1=3x_2+1 \Rightarrow 3x_1=3x_2 \Rightarrow x_1=x_2$

f یک به یک است

مثال ۳: آیا تابع $f(x)=2x^2+1$ یک به یک است؟

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2x_1^2+1=2x_2^2+1 \Rightarrow 2x_1^2=2x_2^2 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2$

f یک به یک نیست

مثال ۴: یک به یک بودن تابع $f(x)=5|x|-2$ را بررسی کنید

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 5|x_1|-2=5|x_2|-2 \Rightarrow 5|x_1|=5|x_2| \Rightarrow |x_1|=|x_2| \Rightarrow x_1=\pm x_2$

f یک به یک نیست.

تابع وارون (تابع معکوس):

اگر در زوج‌های مرتب تابع f، جای مولفه‌های اول و دوم را عوض کنیم رابطه ی جدیدی حاصل می شود چنانچه این رابطه تابع باشد آنرا وارون تابع f نامیده و با f^{-1} نشان می دهند پس:

$f^{-1}=\{(y,x) \mid (x,y)\in f\}$ $\qquad D_f=R_{f^{-1}} \;,\; R_f=D_{f^{-1}}$

تابع است $f=\{(1,3),(4,7),(6,2)\} \Rightarrow f^{-1}=\{(3,1),(7,4),(2,6)\}$ تابع است

تذکر خیلی مهم: [redacted] $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ [redacted]

پیدا کردن ضابطه تابع وارون:

شرط اینکه تابعی وارون پذیر باشد آن است که یک بیک باشد و برعکس برای بدست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون یک تابع وارون پذیر مانند f، در معادله $y=f(x)$ ابتدا x را برحسب y محاسبه می‌کنیم سپس با تبدیل y به x و برعکس، تابع $y=f^{-1}(x)$ را بدست می‌آوریم:

مثال ۱: ثابت کنید تابع $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ وارون پذیر است سپس ضابطه تابع وارون آنرا بیابید.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم یک بیک است.

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-2}=\frac{x_2+1}{x_2-2} \Rightarrow x_1x_2-2x_1+x_2-2=x_1x_2+x_1-2x_2-2$$

$$\Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow \text{یک بیک است } f \Rightarrow \text{وارون پذیر است}$$

$$y=\frac{x+1}{x-2} \Rightarrow xy-2y=x+1 \Rightarrow xy-x=2y+1 \Rightarrow x(y-1)=2y+1$$

$$\Rightarrow x=\frac{2y+1}{y-1} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-1}$$

مثال ۲: ثابت کنید تابع $y=f(x)=-3x+7$ وارون پذیر است سپس ضابطه تابع وارون آنرا بیابید.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم یک بیک است.

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow -3x_1+7=-3x_2+7 \Rightarrow -3x_1=-3x_2 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow \text{یک بیک است}$$

$$y=-3x+7 \Rightarrow y-7=-3x \Rightarrow x=\frac{y-7}{-3} \xrightarrow{y\leftrightarrow x} y=f^{-1}(x)=\frac{x-7}{-3}$$

مثال ۳: دو تابع $f=\{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-1}$ مفروضند اگر $f^{-1}(g(2a))=6$ باشد مقدار a را بدست آورید.

$$f^{-1}=\{(5,2),(3,6),(7,3),(1,4),(9,1)\}$$

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(3)=6 \\ f^{-1}(g(2a))=6 \end{array}\right\} \Rightarrow g(2a)=3 \Rightarrow \frac{2a}{2a-1}=3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

مثال ۴: اگر g وارون پذیر باشد و $f(\frac{x+۱}{۲}) = g(\frac{۲x-۱}{۳x+۲})$ و بدانیم $g(\frac{۳}{۸})=۲$ است آنگاه حاصل $f^{-۱}(۲)$ را بدست آورید.

$$g(\frac{۳}{۸})=۲ \Rightarrow \frac{۲x-۱}{۳x+۲}=\frac{۳}{۸} \Rightarrow ۱۶x-۸=۹x+۶ \Rightarrow ۷x=۱۴ \Rightarrow \boxed{x=۲}$$

$$f(\frac{x+۱}{۲})=g(\frac{۲x-۱}{۳x+۲}) \xRightarrow{x=۲} f(\frac{۳}{۲})=g(\frac{۳}{۸})=۲ \Rightarrow f(\frac{۳}{۲})=۲ \Rightarrow f^{-۱}(۲)=\frac{۳}{۲}$$

مثال ۵: ثابت کنید تابع $f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x$ در دامنه اش وارون پذیر است سپس ضابطه تابع وارون آن را بیابید.

$$f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x+۱-۱ \Rightarrow f(x)=(x-۱)^۳+۱$$

$$f(x_۱)=f(x_۲) \Rightarrow (x_۱-۱)^۳+۱=(x_۲-۱)^۳+۱ \Rightarrow (x_۱-۱)^۳=(x_۲-۱)^۳ \Rightarrow x_۱-۱=x_۲-۱$$

$\Rightarrow x_۱=x_۲ \Rightarrow$ یک به یک است

$$y=(x-۱)^۳+۱ \Rightarrow y-۱=(x-۱)^۳ \Rightarrow \sqrt[۳]{y-۱}=x-۱ \Rightarrow x=\sqrt[۳]{y-۱}+۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x-۱}+۱$$

تذکر مهم:

ترکیب هر تابع با وارون خودش برابر x است.

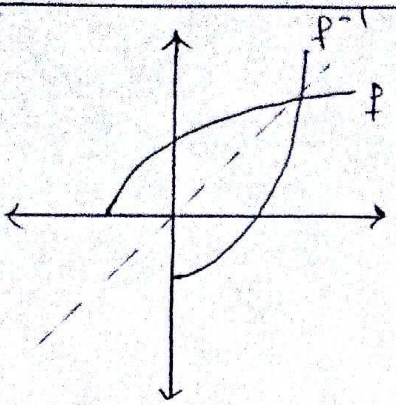
$$f(f^{-۱}(x))=x \quad , \quad f^{-۱}(f(x))=x$$

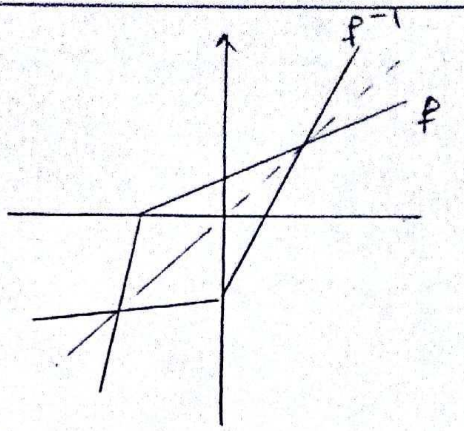
مثال) ثابت کنید تابع $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ وارون تابع $g(x)=\frac{۱-x}{x}$ است

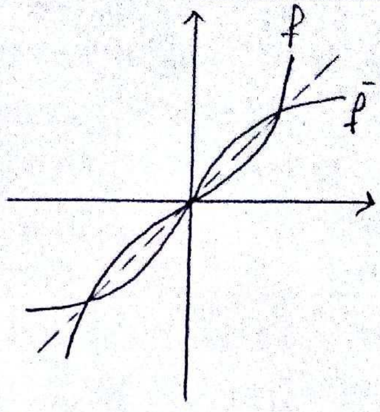
$$f(g(x))=f(\frac{۱-x}{x})=\frac{۱}{\frac{۱-x}{x}+۱}=\frac{۱}{\frac{۱-x+x}{x}}=\frac{۱}{\frac{۱}{x}}=x$$

رسم نمودار $f^{-۱}$ از روی نمودار f:

اگر نمودار تابع یک به یک f داده شده باشد برای رسم نمودار تابع $f^{-۱}$ کافی است قرینه نمودار f را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) رسم کنیم به عبارت دیگر نمودار توابع f و $f^{-۱}$ نسبت به نیمسازهای ربع اول و سوم $(y=x)$ متقارن هستند.







اعمال جبری روی توابع :

فرض کنیم f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند و منظور از $D_f \cap D_g$ اشتراک دامنه‌های توابع f و g باشد به ازای هر x عضو $D_f \cap D_g$ توابع $f+g$ ، $f-g$ و $f.g$ و f/g را بصورت‌های زیر تعریف می‌کنیم :

۱) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $\quad D_{f+g}=D_f \cap D_g$

۲) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ $\quad D_{f-g}=D_f \cap D_g$

۳) $(f.g)(x)=f(x).g(x)$ $\quad D_{f.g}=D_f \cap D_g$

۴) $(f/g)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad D_{f/g}=D_f \cap D_g-\{x \mid g(x)=۰\}$

۵) $(kf)(x)=k\,f(x)$ $\quad (k \in R)$

مثال ۱ : فرض کنیم $f=\{(-۱,۱),(۲,۳),(۳,-۲),(۴,۱)\}$ و $g=\{(۰,۲),(۲,۴),(۴,۰)\}$

مطلوبست محاسبه : $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ ، f/g و $۲f+۱$

$D_f=\{-۱,۲,۳,۴\}$ $\qquad D_g=\{۰,۲,۴\}$ $\qquad D_f \cap D_g=\{۲,۴\}$

۱) $(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=۳+۴=۷$, $(f+g)(۴)=f(۴)+g(۴)=۱+۰=۱$

$$f+g=\{(۲,۷),(۴,۱)\}$$

۲) $(f-g)(۲)=f(۲)-g(۲)=۳-۴=-۱$, $(f-g)(۴)=f(۴)-g(۴)=۱-۰=۱$

$$f-g=\{(۲,-۱),(۴,۱)\}$$

۳) $(f\cdot g)(۲)=f(۲)\times g(۲)=۳\times۴=۱۲$ ، $(f\cdot g)(۴)=f(۴)\times g(۴)=۱\times۰=۰$

$$f\cdot g=\{(۲,۱۲),(۴,۰)\}$$

۴) $g(۴)=۰\Rightarrow D_{f/g}=\{۲,۴\}-\{۴\}=\{۲\}$

$(f/g)(۲)=\frac{f(۲)}{g(۲)}=\frac{۳}{۴}$ $\qquad f/g=\{(۲,\frac{۳}{۴})\}$

د) $(۲f+۱)(x)=(۲f)(x)+۱(x)=۲f(x)+x$

$(۲f+۱)(-۱)=۲f(-۱)+(-۱)=۲\times۱+(-۱)=۱$

$(۲f+۱)(۲)=۲f(۲)+(+۲)=۲\times۳+۲=۸$

$(۲f+۱)(۳)=۲f(۳)+(۳)=۲\times(-۲)+۳=-۱$

$(۲f+۱)(۴)=۲f(۴)+(۴)=۲\times۱+۴=۶$

$$۲f+۱=\{(-۱,۱),(۲,۸),(۳,-۱),(۴,۶)\}$$

مثال ۲: اگر $f=\{(-۲,-۱),(-۱,۰),(۰,۲),(-۳,۱),(۳,۴)\}$ و $g=\{(-۲,-۴),(۰,۵),(۳,۰),(۴,۴)\}$ باشد حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

الف) $(\frac{۲f+g}{۳f-g})(-۲)=\frac{۲f(-۲)+g(-۲)}{۳f(-۲)-g(-۲)}=\frac{۲(-۱)+(-۴)}{۳(-۱)-(-۴)}=\frac{-۶}{۱}=-۶$

ب) $f^۲+۲g=?$ $\qquad D_f\cap D_g=\{-۲,۰,۳\}$

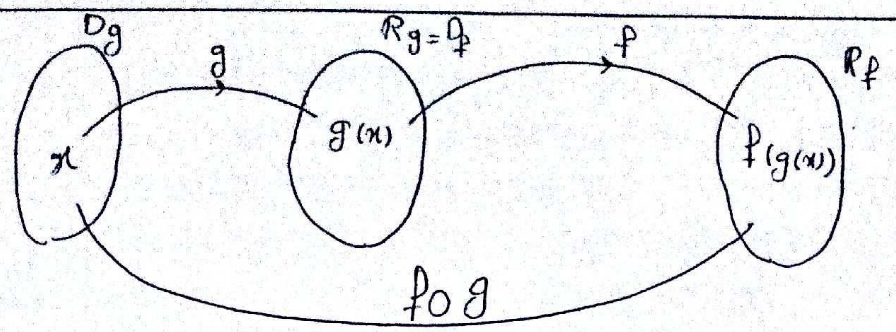
$f^۲+۲g=\{(-۲,(-۱)^۲+۲(-۴)),(۰,۲^۲+۲(۵)),(۳,۴^۲+۲(۰))\}=\{(-۲,-۷),(۰,۱۴),(۳,۱۶)\}$

ترکیب توابع:

فرض کنیم f و g دو تابع باشند ترکیب این دو تابع را با علامت $(fog)(x)$ یا $(gof)(x)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

۱) $(fog)(x)=f(g(x))$ ، $D_{fog}=\{x|x\in D_g,\ g(x)\in D_f\}$

۲) $(gof)(x)=g(f(x))$ ، $D_{gof}=\{x|x\in D_f,\ f(x)\in D_g\}$



مثال ۱: توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۴x-۱$ مفروضند مطلوبست محاسبه:

الف) D_{fog} ب) ضابطه fog

$D_f=[۰,+\infty)$

$D_g=\mathbb{R}$

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}$$
$$=\{x|x\in\mathbb{R}, ۴x-۱\in[۰,+\infty)\}$$
$$=\{x|x\in\mathbb{R}, ۴x-۱\geqslant ۰\}=\{x|x\in\mathbb{R}, x\geqslant \frac{۱}{۴}\}=[\frac{۱}{۴},+\infty)$$
$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{۴x-۱}$$

* * *

مثال ۲: دو تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$ مفروضند. در صورت وجود D_{fog} و ضابطه gof را تعیین کنید.

$D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$ $D_g=[۱,+\infty)$

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|x\in[۱,+\infty), \sqrt{x-۱}\neq ۲\}$$
$$=\{x|x\geqslant ۱, x-۱\neq ۴\}=\{x|x\geqslant ۱, x\neq ۵\}=[۱,۵)\cup(۵,+\infty)$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{\frac{x+۱}{x-۲}-۱}=\sqrt{\frac{x+۱-x+۲}{x-۲}}=\sqrt{\frac{۳}{x-۲}}$$

* * *

مثال ۳: (خرداد ۹۰): اگر $g(x)=\frac{۱}{x-۳}$ و $f(x)=۳x-۲$ باشد آنگاه حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

الف) $(۳f+۲g)(۴)=?$ ب) $D_{fog}=?$

حل الف) $(۳f+۲g)(۴)=۳f(۴)+۲g(۴)=۳(۱۰)+۲(۱)=۳۲$

حل ب) $D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|x\neq ۳, \frac{۱}{x-۳}\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}-\{۳\}$

مثال ۴: توابع $f(x)=\frac{x}{x+۲}$ و $g(x)=\frac{۱}{x-۱}$ مفروضند مطلوبست محاسبه:

الف) D_{fog} ب) D_{gof}

$D_f=\mathbb{R}-\{-۲\}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g \text{ و } g(x)\in D_f\}=\{x|x\in\mathbb{R}-\{۱\} \text{ و } \frac{۱}{x-۱}\in\mathbb{R}-\{-۲\}\}$$

$$=\{x|x\neq ۱ \text{ و } \frac{۱}{x-۱}\neq -۲\}=\{x|x\neq ۱ \text{ و } x-۱\neq -\frac{۱}{۲}\}$$

$$=\{x|x\neq ۱ \text{ و } x\neq \frac{۱}{۲}\}=\mathbb{R}-\{۱,\frac{۱}{۲}\}$$

$$D_{gof}=\{x|x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}=\{x|x\in\mathbb{R}-\{-۲\} \text{ و } \frac{x}{x+۲}\in\mathbb{R}-\{۱\}\}$$

$$=\{x|x\neq -۲ \text{ و } \underbrace{\frac{x}{x+۲}\neq ۱}\}=\mathbb{R}-\{-۲\}$$

مخرج از صورت بزرگتر است پس کسر کوچکتر از واحد است و هرگز یک نمی شود.

مثال ۵: اگر $f(x)=۴x-۳$ و $g(x)=x+۲$ ، تابع $(gof)^{-1}$ را حساب کنید:

$$(gof)(x)=g(f(x))=(۴x-۳)+۲=۴x-۱$$

$$y=۴x-۱\Rightarrow y+۱=۴x\Rightarrow x=\frac{y+۱}{۴}\Rightarrow (gof)^{-1}(x)=\frac{x+۱}{۴}$$

مثال ۶: اگر $f=\{(۷,۴),(۹,۲),(۳,۱)\}$ و $g=\{(۲,۷),(۴,۹),(۵,۱۱)\}$ آنگاه توابع fog و gof را بیابید.

حل: مقدار fog را در نقاط دامنه تابع g حساب می کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(g(۲))=f(۷)=۴\Rightarrow(۲,۴)\in fog \\ f(g(۴))=f(۹)=۲\Rightarrow(۴,۲)\in fog \\ f(g(۵))=f(۱۱)=\text{وجود ندارد} \end{array}\right\}\Rightarrow fog=\{(۲,۴),(۴,۲)\}$$

مقدار تابع gof از نقاط دامنهٔ f حساب می‌کنیم:

$g(f(۷))=g(۴)=۹ \Rightarrow (۷,۹)\in gof$

$g(f(۹))=g(۲)=۷ \Rightarrow (۹,۷)\in gof$

$g(f(۳))=g(۱)=$ وجود ندارد

$\Rightarrow gof=\{(۷,۹),(۹,۷)\}$

* * *

مثال ۷: اگر $f(x)=۳x+a$ و $g(x)=۲-x$ و $(fog)(x)-(gof)(x)=۶$ باشد مقدار a را بیابید.

$(fog)(x)=f(g(x))=f(۲-x)=۳(۲-x)+a=۶-۳x+a$

$(gof)(x)=g(f(x))=g(۳x+a)=۲-(۳x+a)=۲-۳x-a$

$(fog)(x)-(gof)(x)=۶ \Rightarrow (۶-۳x+a)-(۲-۳x-a)=۶ \Rightarrow ۴+۲a=۶$

$\Rightarrow ۲a=۲ \Rightarrow \boxed{a=۱}$

* * *

مثال ۸: اگر $f(x)=۲x-۵$ ، $(fog)(x)=۴x^۶+۲x^۲-۱$ ، آنگاه تابع $g(x)$ را بیابید.

$(fog)(x)=۴x^۶+۲x^۲-۱$

$(fog)(x)=f(g(x))=۲g(x)-۵$

$\Rightarrow ۲g(x)-۵=۴x^۶+۲x^۲-۱$

$\Rightarrow ۲g(x)=۴x^۶+۲x^۲-۱+۵$

$\Rightarrow ۲g(x)=۴x^۶+۲x^۲+۴ \xrightarrow{\div ۲} g(x)=۲x^۶+x^۲+۲$

* * *

مثال ۹: توابع $f(x)=mx+۲$ و $g(x)=۳x+۲$ مفروضند. مقدار m را طوری تعیین کنید که داشته باشیم: $(gof)(x)=(fog)(x)$

$(gof)(x)=(fog)(x) \Rightarrow g(f(x))=f(g(x)) \Rightarrow g(mx+۲)=f(۳x+۲)$

$\Rightarrow ۳(mx+۲)+۲=m(۳x+۲)+۲ \Rightarrow ۳mx+۸=۳mx+۲m+۲$

$\Rightarrow ۲m=۶ \Rightarrow \boxed{m=۳}$

مثال ۱۰: اگر $g(x)=ax+b$ و $f(x)=۲x-۴$ و داشته باشیم: $(gof)(x)=۲x+۵$ مقادیر a و b را محاسبه کنید.

$(gof)(x)=۲x+۵$ ①

$(gof)(x)=g(f(x))=g(۲x-۴)=a(۲x-۴)+b=۲ax-۴a+b$ ②

①, ② $\Rightarrow ۲x+۵=۲ax-۴a+b \Rightarrow \begin{cases} ۲=۲a \Rightarrow \boxed{a=۱} \\ ۵=-۴a+b \Rightarrow \boxed{b=۹} \end{cases}$

مثال ۱۱: اگر $f=\{(۲,۳),(۳,۱),(۱,۴)\}$ و $g=\{(۲,۲),(۴,۱),(۳,۵)\}$ باشد، تابع $fog+gof$ را بیابید.

$(fog)(۲)=f(g(۲))=f(۲)=۳$

$(fog)(۴)=f(g(۴))=f(۱)=۴$

$(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۵)=$ وجود ندارد

$\Rightarrow fog=\{(۲,۳),(۴,۴)\}$

$D_{fog}=\{۲,۴\}$

$(gof)(۲)=g(f(۲))=g(۳)=۵$

$(gof)(۳)=g(f(۳))=g(۱)=$ وجود ندارد

$(gof)(۱)=g(f(۱))=g(۴)=۱$

$\Rightarrow gof=\{(۲,۵),(۱,۱)\}$

$D_{gof}=\{۲,۱\}$

$D_{fog}\cap D_{gof}=\{۲\}$ $(fog+gof)(۲)=(fog)(۲)+(gof)(۲)=۳+۵=۸$

$\Rightarrow fog+gof=\{(۲,۸)\}$

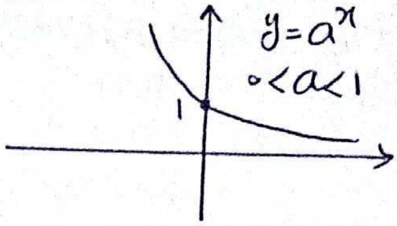
مثال ۱۲: اگر $f(x)=۲x-۲$ و $g(x)=x^۲-۱$، جوابهای معادله $(fog)(x)=۰$ را بیابید.

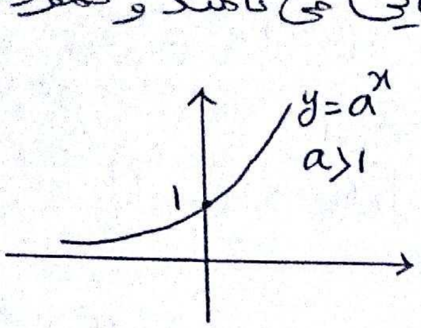
$(fog)(x)=۰ \Rightarrow f(g(x))=۰ \Rightarrow f(x^۲-۱)=۰ \Rightarrow ۲(x^۲-۱)-۲=۰$

$\Rightarrow ۲(x^۲-۱)=۲ \Rightarrow x^۲-۱=۱ \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{۲}}$

فصل ۳ : (تابع نمایی)

هر تابع با ضابطه $y=f(x)=a^x$ را که در آن a عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد ($a\neq ۱$ و $a>۰$) را تابع نمایی می نامند و نمودار آن به یکی از دو صورت زیر است :



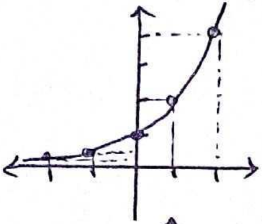


دامنه تابع نمایی $f(x)=a^x$ برابر $D_f=\mathbb{R}$ و برد آن برابر $R_f=(۰,+\infty)$ است

تمرین ۱ : نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را بدست آورید

۱) $y=۲^x$

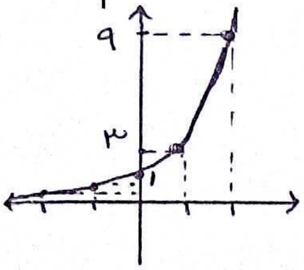
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴



$D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=(۰,+\infty)$

۲) $y=۳^x$

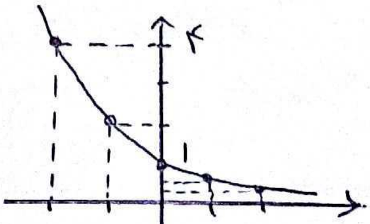
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹



$D_f=\mathbb{R}$, $R_f=(۰,+\infty)$

۳) $y=(\frac{۱}{۲})^x$

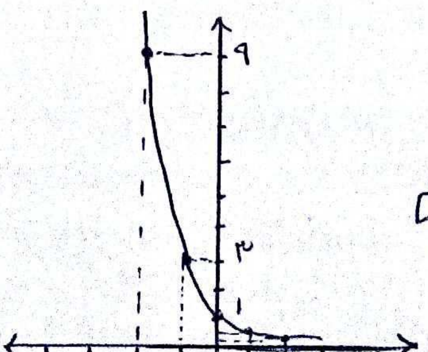
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$



$D_f=\mathbb{R}$, $R_f=(۰,+\infty)$

۴) $y=(\frac{۱}{۳})^x$

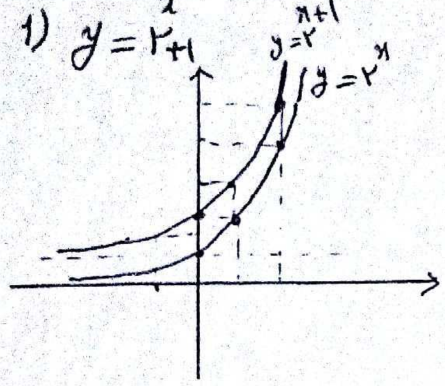
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۹	۳	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۹}$



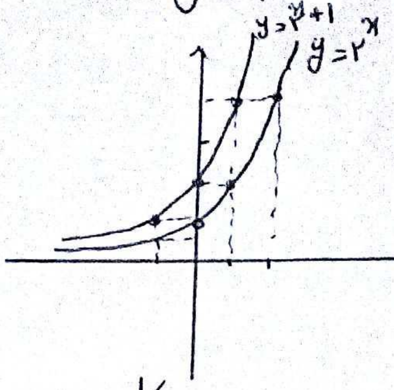
$D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=(۰,+\infty)$

تمرین: به کمک انتقال منحنی ها مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

۱) $y=۲^{x}+۱$

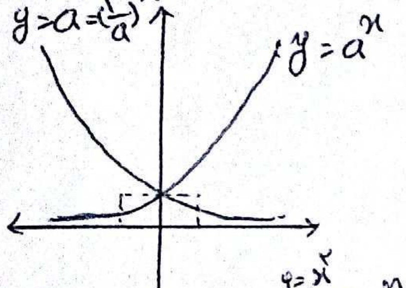


۲) $y=۲^{x+۱}$

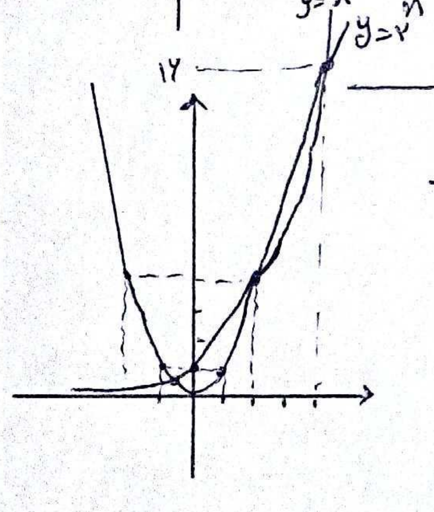


نکته ریاضی:

نمودار توابع با ضابطه های $y=a^{x}$ و $y=a^{-x}=(\frac{۱}{a})^{x}$ ($a>۰$ و $a\neq ۱$) نسبت به محور yها قرینه اند.



تمرین: نمودار توابع $y=x^{۲}$ و $y=۲^{x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و مشخص کنید در چند نقطه مقادیر ۲^{x} و $x^{۲}$ باهم مساویند؟



$x=۲,\ x=۴,\ -۱<x<۰$

معادله $۲^{x}=x^{۲}$ سه جواب دارد.

معادله نمایی:

معادله ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادله نمایی می گوئیم

۱) $a^{۰}=۱$ ۲) $a^{-x}=\frac{۱}{a^{x}}$ ۳) $a^{x}\cdot a^{y}=a^{x+y}$ ۴) $(a^{x})^{y}=a^{xy}$

۵) $a^{x}\div a^{y}=a^{x-y}$ ۶) $(\frac{a}{b})^{-x}=(\frac{b}{a})^{x}$ ۷) $a^{x}=a^{y}\Rightarrow x=y$ ۸) $(a^{x})^{y}=(a^{y})^{x}$

تمرین: معادلات توانی زیر را حل کنید:

۱) $۳۲^{۳x-۱}=(\frac{۱}{۸})^{۵-۲x}$

$(۲^{۵})^{۳x-۱}=(۲^{-۳})^{۵-۲x}\Rightarrow ۲^{۱۵x-۵}=۲^{-۱۵+۶x}\Rightarrow ۱۵x-۵=-۱۵+۶x\Rightarrow ۹x=-۱۰\Rightarrow \boxed{x=-\frac{۱۰}{۹}}$

۲) $۵^{x-۱} \times ۲^{x-۱} = ۰/۰۰۱$

$$(۵\times۲)^{x-۱} = ۱۰^{-۳} \Rightarrow ۱۰^{x-۱} = ۱۰^{-۳} \Rightarrow x-۱=-۳ \Rightarrow \boxed{x=-۲}$$

* * *

۳) $۲^{۵x+۱} = ۸^{x^۲+۱}$

$$۲^{۵x+۱} = (۲^۳)^{x^۲+۱} \Rightarrow ۲^{۵x+۱} = ۲^{۳x^۲+۳} \Rightarrow ۳x^۲+۳ = ۵x+۱ \Rightarrow ۳x^۲-۵x+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases}\boxed{x=۱}\\ \boxed{x=\frac{۲}{۳}}\end{cases}$$

* * *

۴) $۴^{x+۱} - ۱۸\times ۲^x + ۸ = ۰$

$$۴\times۴^x - ۱۸\times۲^x + ۸ = ۰ \Rightarrow ۴(۲^۲)^x - ۱۸(۲^x)+۸=۰ \Rightarrow ۴(۲^x)^۲ - ۱۸(۲^x)+۸=۰$$

$$۲^x = t \Rightarrow ۴t^۲-۱۸t+۸=۰ \xrightarrow{\div ۲} ۲t^۲-۹t+۴=۰ \qquad \Delta = ۸۱-۳۲=۴۹$$

$$t=\frac{۹\pm\sqrt{۴۹}}{۲(۲)} = \frac{۹\pm۷}{۴} = \begin{cases} t=۴ \Rightarrow ۲^x=۴ \Rightarrow \boxed{x=۲}\\ t=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲^x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{x=-۱}\end{cases}$$

* * *

۵) $۸\times۲^x + ۱۵\times۲^{x+۳} = ۵۱۲$

$$۲^{x+۳} + ۱۵\times۲^{x+۳} = ۵۱۲ \Rightarrow ۲^{x+۳}(۱+۱۵) = ۵۱۲ \Rightarrow ۲^{x+۳}\times۱۶ = ۵۱۲ \Rightarrow ۲^{x+۳} = ۳۲$$

$$\Rightarrow ۲^{x+۳} = ۲^۵ \Rightarrow x+۳=۵ \Rightarrow \boxed{x=۲}$$

* * *

تمرین: اگر $f(x)=۲^x+۲^{-x}$ باشد مطلوبست: $\dfrac{f(x+۱)+f(x-۱)}{f(x)} = ?$

$$\frac{f(x+۱)+f(x-۱)}{f(x)} = \frac{۲^{x+۱}+۲^{-x-۱}+۲^{x-۱}+۲^{-x+۱}}{۲^x+۲^{-x}} = \frac{۲^x(۲^۱+۲^{-۱})+۲^{-x}(۲^۱+۲^{-۱})}{۲^x+۲^{-x}} = \frac{\frac{۵}{۲}\times۲^x+\frac{۵}{۲}\times۲^{-x}}{۲^x+۲^{-x}} = \frac{۵}{۲}$$

* * *

تمرین: سه عدد بین $۳^{۲/۵}$ و $۳^{\sqrt{۱۰}}$ پیدا کنید:

$\sqrt{۱۰} \simeq ۳/۱$

$x = ۳^{۲/۶}$

$y = ۳^{۲/۸}$

$z = ۳^۳$

$$۳^{۲/۵} < x < y < z < ۳^{\sqrt{۱۰}\simeq ۳/۱}$$

تمرین : ۵۰ گرم باکتری را در محیط کشت قرار می دهیم. طبق آزمایش های قبلی، جرم باکتری ها در هر ساعت دو برابر می شود:

الف) جرم باکتری را بصورت یک تابع نمایی بنویسید

ب) مقدار باکتری ها پس از نیم ساعت چقدر می شود.

پ) مقدار باکتری ها پس از چند ساعت برابر $200\sqrt{2}$ گرم می شود؟

حل الف) زمان $= t$ جرم باکتری ها $= m(t)$ جرم اولیه $= m(0) = 50$

t	0	1	2
$m(t)$	50	50×2	50×2^2

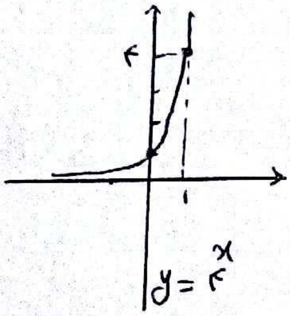
$$m(t) = 50\times 2^t$$

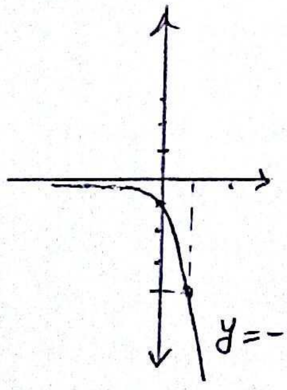
حل ب) $m(\frac{1}{2}) = 50\times 2^{\frac{1}{2}} = 50\times\sqrt{2} \simeq 50\times 1.4 \simeq 70\, gr$

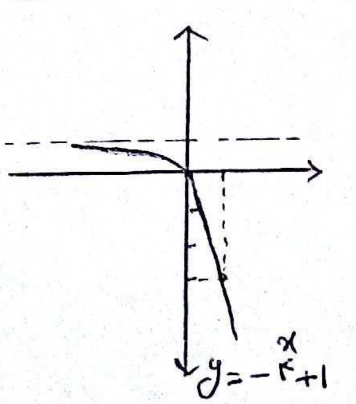
حل پ) $m(t) = 200\sqrt{2} \Rightarrow 50\times 2^t = 200\sqrt{2} \Rightarrow 2^t = 4\sqrt{2} \Rightarrow 2^t = 2^2\times 2^{\frac{1}{2}}$

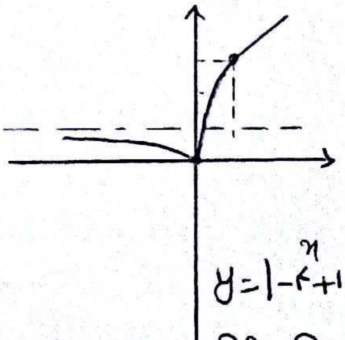
$\Rightarrow 2^t = 2^{\frac{5}{2}} \Rightarrow t = \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{t = 2.5}$ ساعت

تمرین : به کمک انتقال منحنی ها نمودار تابع $y = |-4^x+1|$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید:









$D_f = \mathbb{R}$

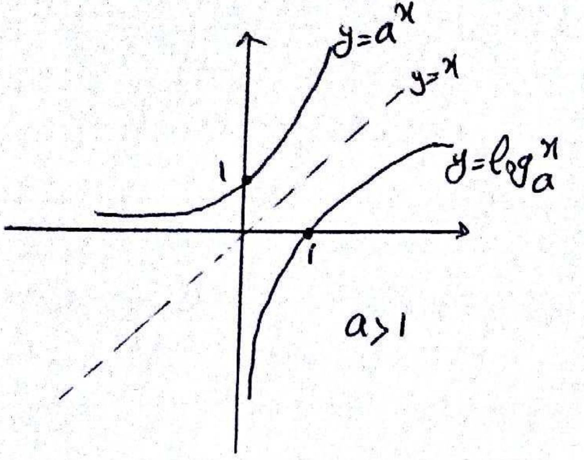
$R_f = [0, +\infty)$

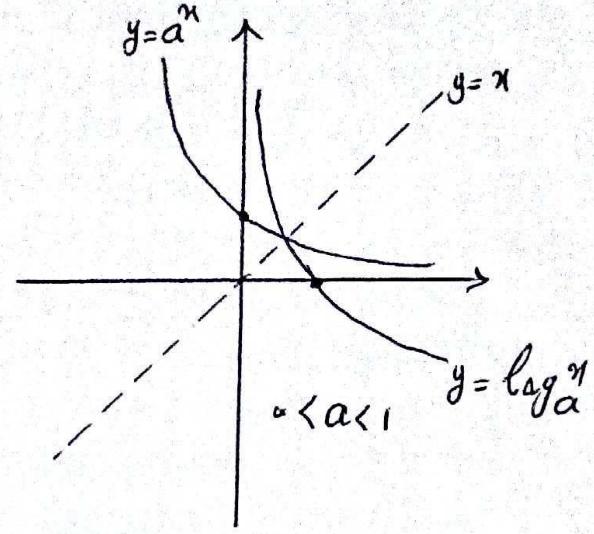
تابع لگاریتمی:

تابع نمایی $(a\neq 1 , a>0)$ $y = f(x) = a^x$ یک به یک است پس در نتیجه وارون پذیر است. وارون تابع نمایی را تابع لگاریتمی نامیده و بصورت $y = f(x) = \log_a^x$ نشان می دهند a را پایه ی (مبنای) لگاریتم می گویند که

عددی مثبت و مخالف یک است. بطور کلی:

$$\boxed{y=a^x \Leftrightarrow \log_a^y = x}$$





مثال) $\log_{۱۰}^{۰/۰۱} = -۲ \Leftrightarrow ۱۰^{-۲} = ۰/۰۱$ $\quad \log_۲^{۳۲} = ۵ \Leftrightarrow ۲^۵ = ۳۲$ $\quad \log_۲^۸ = ۳ \Leftrightarrow ۲^۳ = ۸$

$\log_۳^{\frac{۱}{۲۷}} = -۳ \Leftrightarrow ۳^{-۳} = \frac{۱}{۲۷}$ $\quad \log_۵^{۱۲۵} = ۳ \Leftrightarrow ۵^۳ = ۱۲۵$ $\quad \log_{۱۰}^{۱۰۰۰} = ۳ \Leftrightarrow ۱۰^۳ = ۱۰۰۰$

قضایای لگاریتم:

۱) اعداد منفی و صفر لگاریتم ندارند. $\log_۵^۰ =$ جواب ندارد $\quad \log_۲^{-۱} =$ جواب ندارد

۲) لگاریتم ۱ در هر پایه‌ای صفر است.

$$\boxed{\log_a^1 = ۰ \quad (a>۰, a\neq ۱)}$$

مثال) $\log_۵^۱ = ۰$ $\quad \log_{۱۲}^۱ = ۰$

۳) لگاریتم هر عدد مثبت مخالف یک در پایه خودش برابر یک است.

$$\boxed{\log_a^a = ۱ \quad , a>۰, a\neq ۱}$$

اثبات: $\log_a^a = x \Rightarrow a^x = a \Rightarrow a^x = a^1 \Rightarrow \boxed{x=1}$

مثال) $\log_۵^۵ = ۱$ $\quad \log_۸^۸ = ۱$

۴) لگاریتم حاصلضرب دو عدد حقیقی مثبت برابر است با مجموع لگاریتم های آن دو عدد

$$\boxed{\log_a^{x.y} = \log_a^x + \log_a^y} \qquad (x>0, y>0, a>0, a\neq 1)$$

اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} \log_a^x = m \Rightarrow a^m = x \\ \log_a^y = n \Rightarrow a^n = y \end{array}\right\} \Rightarrow x.y = a^m . a^n \Rightarrow xy = a^{m+n} \Rightarrow \log_a^{x.y} = m+n$$

$$\Rightarrow \log_a^{x.y} = \log_a^x + \log_a^y$$

۵) لگاریتم حاصل تقسیم دو عدد حقیقی مثبت برابر است با تفاضل لگاریتم های آن دو عدد

$$\boxed{\log_a^{\frac{x}{y}} = \log_a^x - \log_a^y} \qquad (x>0, y>0, a>0, a\neq 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \log_a^x = m \Rightarrow a^m = x \\ \log_a^y = n \Rightarrow a^n = y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} \Rightarrow \frac{x}{y} = a^{m-n} \Rightarrow \log_a^{\frac{x}{y}} = m-n$$

$$\Rightarrow \log_a^{\frac{x}{y}} = \log_a^x - \log_a^y$$

۶) برای هر عدد طبیعی n داریم :

$$\boxed{\log_a^{x^n} = n\log_a^x} \qquad (x>0, a>0, a\neq 1, x>0)$$

اثبات :

$$\log_a^{x^n} = \log_a^{\overbrace{x.x.\ldots x}^{n\text{تا}}} = \log_a^x + \log_a^x + \cdots + \log_a^x = n\log_a^x$$

۷) اگر مبنای (پایه ی) لگاریتم ۱۰ باشد آن را نمی نویسند و اسمش لگاریتم اعشاری است

$$\boxed{\log_{10}^a = \log a}$$

تمرین: حاصل هر یک از عبارتهای زیر را با استفاده از قضایای لگاریتم بدست آورید.

$$A=\log_{۲}^{۳۲}=\log_{۲}^{۲^{۵}}=۵\log_{۲}^{۲}=۵\times۱=۵$$

$$B=\log_{۳}^{\frac{۱}{۸۱}}=\log_{۳}^{\frac{۱}{۳^{۴}}}=\log_{۳}^{۳^{-۴}}=-۴\log_{۳}^{۳}=-۴\times۱=-۴$$

$$C=\log_{۵}^{\sqrt{۱۲۵}}=\log_{۵}^{\sqrt{۵^{۳}}}=\log_{۵}^{۵^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۳}{۲}\log_{۵}^{۵}=\frac{۳}{۲}\times۱=\frac{۳}{۲}$$

تمرین: اگر $\log ۲=۰٫۳۰۱$ و $\log ۳=۰٫۴۷۷۱$ و $\log ۷=۰٫۸۴۵$ باشد مطلوبست محاسبه:

الف) $\log ۱۲=\log ۴\times۳=\log ۴+\log ۳=\log ۲^{۲}+\log ۳=۲\log ۲+\log ۳$

$=۲(۰٫۳۰۱)+۰٫۴۷۷۱=۰٫۶۰۲+۰٫۴۷۷۱=۱٫۰۷۹۱$

ب) $\log ۲۵=\log\frac{۱۰۰}{۴}=\log ۱۰۰-\log ۴=\log ۱۰^{۲}-\log ۲^{۲}=۲\log ۱۰-۲\log ۲$

$=۲\times۱-۲(۰٫۳۰۱)=۲-۰٫۶۰۲=۱٫۳۹۸$

ج) $\log\frac{۸۱۰۰}{\sqrt[۳]{۴۹}}=\log ۸۱۰۰-\log\sqrt[۳]{۴۹}=\log ۸۱+\log ۱۰۰-\log ۷^{\frac{۲}{۳}}$

$=\log ۳^{۴}+\log ۱۰^{۲}-\frac{۲}{۳}\log ۷=۴\log ۳+۲\log ۱۰-\frac{۲}{۳}\log ۷$

$=۴(۰٫۴۷۷۱)+۲(۱)-\frac{۲}{۳}(۰٫۸۴۵)\simeq ۱٫۹۰۸۴+۲-۰٫۵۶۳=۳٫۳۴۵$

تمرین: اگر $\log ۲=۰٫۳۰۱$ و $\log ۳=۰٫۴۷۷۱$ آنگاه مطلوبست محاسبه:

$$A=۲\log_{۲}^{\sqrt{۲}}+\log_{۵}^{۱۲۵}+\log\sqrt{۷۲}=۲\log_{۲}^{۲^{\frac{۱}{۲}}}+\log_{۵}^{۵^{۳}}+\log ۷۲^{\frac{۱}{۲}}$$

$$=۲\times\frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۲}+۳\log_{۵}^{۵}+\frac{۱}{۲}\log ۷۲=۱+۳+\frac{۱}{۲}\log(۲^{۳}\times۳^{۲})=۴+\frac{۱}{۲}(\log ۲^{۳}+\log ۳^{۲})$$

$$=۴+\frac{۱}{۲}(۳\log ۲+۲\log ۳)=۴+\frac{۱}{۲}(۳\times۰٫۳۰۱+۲\times۰٫۴۷۷۱)=۴+\frac{۱}{۲}(۱٫۸۵۷۲)=۴٫۹۲۸۶$$

$$B=\log^{\sqrt{۱۵}}+\log_{۳}^{۲۷}-\log_{۲}^{۳۲}=\log ۱۵^{\frac{۱}{۲}}+\log_{۳}^{۳^{۳}}-\log_{۲}^{۲^{۵}}$$

$$=\frac{۱}{۲}\log(۳\times۵)+۳\log_{۳}^{۳}-۵\log_{۲}^{۲}=\frac{۱}{۲}(\log۳+\log۵)+۳-۵$$

$$=\frac{۱}{۲}(\log۳+\log۱۰-\log۲)-۲=\frac{۱}{۲}(۰/۴+۱-۰/۳)-۲=\frac{۱/۱}{۲}-۲=-۱/۴$$

تمرین: اگر $\log_{۳}^{۱۲}=a$ باشد حاصل $\log_{۳}^{۱۸}$ را بر حسب a بدست آورید:

$$\log_{۳}^{۱۲}=a\Rightarrow\log_{۳}^{۲^{۲}\times۳}=a\Rightarrow\log_{۳}^{۲^{۲}}+\log_{۳}^{۳}=a\Rightarrow۲\log_{۳}^{۲}+۱=a$$

$$\Rightarrow\log_{۳}^{۲}=\frac{a-۱}{۲}$$

$$\log_{۳}^{۱۸}=\log_{۳}^{۲\times۳^{۲}}=\log_{۳}^{۲}+۲\log_{۳}^{۳}=\log_{۳}^{۲}+۲=\frac{a-۱}{۲}+۲=\frac{a+۳}{۲}$$

تمرین: اگر $\log_{۱۵}^{۳}=a$ باشد $\log_{۱۵}^{۷۵}$ را بدست آورید:

$$\log_{۱۵}^{۷۵}=\log_{۱۵}^{۵\times۱۵}=\log_{۱۵}^{۱۵}+\log_{۱۵}^{۵}=۱+\log_{۱۵}^{\frac{۱۵}{۳}}=۱+\log_{۱۵}^{۱۵}-\log_{۱۵}^{۳}=۱+۱-a=۲-a$$

تمرین: اگر $\log_{۲}^{(\log_{۳}^{(\log_{۲}^{a})})}=۱$ ، مقدار $\log(a+۴۸۸)$ را بدست آورید

$$\log_{۳}^{(\log_{۲}^{a})}=۲\Rightarrow\log_{۲}^{a}=۹\Rightarrow a=۲^{۹}=۵۱۲\Rightarrow\log(a+۴۸۸)=\log۱۰۰۰=۳$$

تمرین: حاصل $\log_{۳۰}^{۲}+\log_{۳۰}^{۵}+\log_{۳۰}^{۹۰}$ را بدست آورید:

$$\log_{۳۰}^{۲}+\log_{۳۰}^{۵}+\log_{۳۰}^{۹۰}=\log_{۳۰}^{(۲\times۵\times۹۰)}=\log_{۳۰}^{۹۰۰}=\log_{۳۰}^{۳۰^{۲}}=۲\log_{۳۰}^{۳۰}=۲$$

فرمولهای مهم لگاریتم :

۱) $\boxed{\log_{a^m}^{x^n} = \frac{n}{m}\log_a^x}$

اثبات :

$$\log_{a^m}^{x^n} = z \Rightarrow x^n = (a^m)^z \Rightarrow x^n = a^{mz} \Rightarrow x = \sqrt[n]{a^{mz}} \Rightarrow x = a^{\frac{mz}{n}}$$

$$\Rightarrow \log_a^x = \frac{mz}{n} \Rightarrow \frac{n}{m}\log_a^x = z \Rightarrow \frac{n}{m}\log_a^x = \log_{a^m}^{x^n}$$

تمرین۵: اگر $۳^a = ۷$ و $۳^b = ۲$ باشد حاصل $\log_۹^{۵۶}$ را بدست آورید.

$۳^a = ۷ \Rightarrow \log_۳^۷ = a$ $\qquad$ $۳^b = ۲ \Rightarrow \log_۳^۲ = b$

$$\log_۹^{۵۶} = \log_۹^{۸\times۷} = \log_۹^۸ + \log_۹^۷ = \log_{۳^۲}^{۲^۳} + \log_{۳^۲}^{۷^۱} = \frac{۳}{۲}\log_۳^۲ + \frac{۱}{۲}\log_۳^۷$$

$$= \frac{۳}{۲}b + \frac{۱}{۲}a = \frac{۳b+a}{۲}$$

۲) $\log_b^a = \dfrac{\log_c^a}{\log_c^b}$ (قاعده تغییر مبنا)

$\log_b^a = M \Rightarrow a = b^M$ $\qquad$ $\log_c^b = N \Rightarrow b = c^N$

$$a = b^M \Rightarrow a = (c^N)^M \Rightarrow a = c^{NM} \Rightarrow \log_c^a = NM \Rightarrow \log_c^a = \log_c^b \times \log_b^a$$

$$\Rightarrow \frac{\log_c^a}{\log_c^b} = \log_b^a$$

نتیجه:

الف) $\log_b^a = \dfrac{\log a}{\log b}$ (پایه ۱۰ را نمی نویسیم)

۲) $\log_b^a = \dfrac{\log_a^a}{\log_a^b} \Rightarrow \log_b^a = \dfrac{1}{\log_a^b}$

۳) $\log_b^a \times \log_c^b \times \log_d^c = \log_d^a$

تمرین: اگر $\log ۵ = a$ حاصل $\log_{۵}^{۲}$ را بر حسب a بدست آورید.

$$\log ۵ = a \Rightarrow \log \frac{۱۰}{۲} = a \Rightarrow \log ۱۰ - \log ۲ = a \Rightarrow ۱ - \log ۲ = a \Rightarrow \log ۲ = ۱ - a$$

$$\log_{۵}^{۲} = \frac{\log ۲}{\log ۵} = \frac{۱-a}{a}$$

تمرین: اگر $\log_{۲۰}^{۴} = a$ باشد حاصل $\log_{۴}^{۵}$ را بر حسب a بیابید.

$$\log_{۲۰}^{۴} = a \Rightarrow \log_{۴}^{۲۰} = \frac{۱}{a} \Rightarrow \log_{۴}^{۴\times۵} = \frac{۱}{a} \Rightarrow \log_{۴}^{۴} + \log_{۴}^{۵} = \frac{۱}{a}$$

$$\Rightarrow ۱ + \log_{۴}^{۵} = \frac{۱}{a} \Rightarrow \log_{۴}^{۵} = \frac{۱}{a} - ۱ \Rightarrow \log_{۴}^{۵} = \frac{۱-a}{a}$$

تمرین: مطلوبست محاسبه:

$$\log_{۵}^{۲۷} \times \log_{۱۱}^{۵} \times \log_{۳}^{۱۱} = \log_{۳}^{۲۷} = \log_{۳}^{۳^{۳}} = ۳\log_{۳}^{۳} = ۳\times۱ = ۳$$

۳) $\boxed{a^{\log_{a}^{x}} = x}$

اثبات: $\log_{a}^{x} = m \Rightarrow a^{m} = x$

سمت چپ $= a^{\log_{a}^{x}} = a^{\log_{a}^{a^{m}}} = a^{m\log_{a}^{a}} = a^{m\times۱} = a^{m} = x =$ سمت راست

۴) $\boxed{x^{\log_{a}^{a}} = x}$ مثال: $۳^{\log_{۱۰}^{۱۰}} = ۳$

$\textcircled{۳}, \textcircled{۴} \Rightarrow \boxed{a^{\log_{a}^{x}} = x^{\log_{a}^{a}}}$ (تعویض جای x و a)

تست) حاصل $۲^{\log_{۸}^{x}}$ کدام است؟

۱) $x^{۲}$ ۲) $x^{۳}$ ۳) $\sqrt[۳]{x}$ ۴) $\sqrt{x}$

حل: گزینه ۳

$$۲^{\log_{۸}^{x}} = x^{\log_{۸}^{۲}} = x^{\log_{۲^{۳}}^{۲^{۱}}} = x^{\frac{۱}{۳}\log_{۲}^{۲}} = x^{\frac{۱}{۳}\times ۱} = x^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{x}$$

معادلات لگاریتمی:

یک معادله لگاریتمی شامل یک یا چند عبارت لگاریتمی شامل متغیر است که پس از ساده شدن بتوان بصورت $\log_a^{f(x)} = \log_a^{g(x)}$ نوشت و از آنجا با فرض مثبت بودن f و g نتیجه گرفت: $f(x)=g(x)$

منظور از حل یک معادله لگاریتمی یافتن مقادیری برای متغیر است که در معادله صدق کند پس آزمایش جوابها لازم است.

تمرین: معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_{۴}^{(x-۳)} + \log_{۴}^{(x+۳)} = ۲$

$\log_{۴}^{(x-۳)} + \log_{۴}^{(x+۳)} = \log_{۴}^{۱۶} \Rightarrow \log_{۴}^{(x-۳)(x+۳)} = \log_{۴}^{۱۶} \Rightarrow x^{۲}-۹=۱۶$

$\Rightarrow x^{۲}=۲۵ \Rightarrow \begin{cases} x=۵ & \text{ق ق} \\ x=-۵ & \text{غ ق ق} \end{cases}$

۲) $\log(x+۱) - \frac{۱}{۲}\log(x-۱) = \log ۳$

$\xRightarrow{\times ۲} ۲\log(x+۱) - \log(x-۱) = ۲\log ۳ \Rightarrow \log(x+۱)^{۲} - \log(x-۱) = \log ۳^{۲}$

$\Rightarrow \log\frac{(x+۱)^{۲}}{x-۱} = \log ۹ \Rightarrow \frac{(x+۱)^{۲}}{x-۱} = ۹ \Rightarrow x^{۲}+۲x+۱ = ۹x-۹ \Rightarrow$

$x^{۲}-۷x+۱۰=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ & \text{ق ق} \\ x=۵ & \text{ق ق} \end{cases}$

۳) $\frac{۱}{۲}\log ۲۵ + \log(x-۳) = ۲$

$\Rightarrow \log ۲۵^{\frac{۱}{۲}} + \log(x-۳) = ۲ \Rightarrow \log\sqrt{۲۵} + \log(x-۳) = ۲ \Rightarrow \log ۵ + \log(x-۳) = ۲$

$\Rightarrow \log ۵(x-۳) = ۲ \Rightarrow ۵(x-۳) = ۱۰^{۲} \Rightarrow ۵x-۱۵=۱۰۰ \Rightarrow ۵x=۱۱۵ \Rightarrow \boxed{x=۲۳}$

ق ق

۴) $\log_{۲}(۱۲x-۲۱)-\log_{۲}(x^{۲}-۳)=۲$

$$\log_{۲}\frac{۱۲x-۲۱}{x^{۲}-۳}=۲\Rightarrow\frac{۱۲x-۲۱}{x^{۲}-۳}=۲^{۲}\Rightarrow ۱۲x-۲۱=۴x^{۲}-۱۲\Rightarrow ۴x^{۲}-۱۲x+۹=۰$$

$\Rightarrow(۲x-۳)^{۲}=۰\Rightarrow ۲x-۳=۰\Rightarrow\boxed{x=\frac{۳}{۲}}$ غ ق ق معادله جواب ندارد.

۵) $۴\log\frac{x}{۲}+۳\log\frac{x}{۳}=۵\log x-\log ۲۷$

$$\Rightarrow\log(\frac{x}{۲})^{۴}+\log(\frac{x}{۳})^{۳}=\log x^{۵}-\log ۲۷\Rightarrow\log\frac{x^{۴}}{۱۶}+\log\frac{x^{۳}}{۲۷}=\log x^{۵}-\log ۲۷$$

$$\Rightarrow\log(\frac{x^{۴}}{۱۶}\times\frac{x^{۳}}{۲۷})=\log\frac{x^{۵}}{۲۷}\Rightarrow\frac{x^{۷}}{۱۶\times ۲۷}=\frac{x^{۵}}{۲۷}\Rightarrow\frac{x^{۲}}{۱۶}=۱\Rightarrow x^{۲}=۱۶\Rightarrow\begin{cases}x=۴ & \text{ق ق}\\ x=-۴ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

دامنه توابع لگاریتمی:

می دانیم اعداد منفی و صفر لگاریتم ندارند همچنین پایه لگاریتم باید عددی مثبت و مخالف یک باشد بنابراین:

$y=\log_{B}A \qquad A>۰,\ B>۰,\ B\neq ۱$

مثال) مطلوبست دامنه توابع زیر:

۱) $y=\log\frac{x+۱}{x-۱}$

پایه $=۱۰>۰$ و $۱۰\neq ۱$

$\frac{x+۱}{x-۱}>۰$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$x+۱$		$-$	۰	$+$		$+$	
$x-۱$		$-$		$-$	۰	$+$	
$\frac{x+۱}{x-۱}$		$+$	۰	$-$	تعریف نشده	$+$	

$D_f=(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$

۲) $y=\log_{۲}(x^{۲}-۹)$

$$\begin{cases}۲>۰\\ ۲\neq ۱\\ x^{۲}-۹>۰\end{cases}$$

$x^{۲}-۹=۰$

$(x-۳)(x+۳)=۰$

$\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\ x=-۳\end{cases}$

x	$-\infty$		-۳		۳		$+\infty$
$x^{۲}-۹$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$D_f=(-\infty,-۳)\cup(۳,+\infty)$

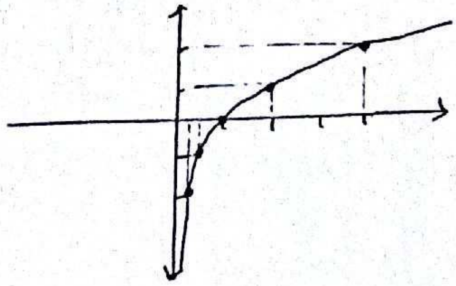
رسم نمودار توابع لگاریتمی:

با استفاده از نقطه یابی در محدوده‌ی دامنه تعریف تابع لگاریتمی می‌توان نمودار تابع لگاریتمی را رسم کرد و با استفاده از انتقال منحنی‌ها توابع ساخته شده از آن را رسم نمود.

تمرین: مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

1) $y=\log_{2}^{x}$ $\quad x>0 \Rightarrow D_f=(0,+\infty)$

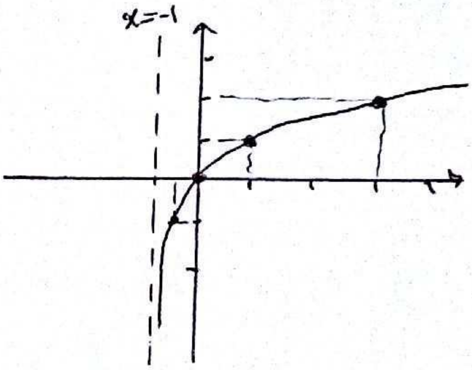
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2



2) $y=\log_{2}(x+1)$ $\quad x+1>0 \Rightarrow x>-1$

$D_f=(-1,+\infty)$

x	$-\frac{1}{2}$	0	1	3
y	-1	0	1	2

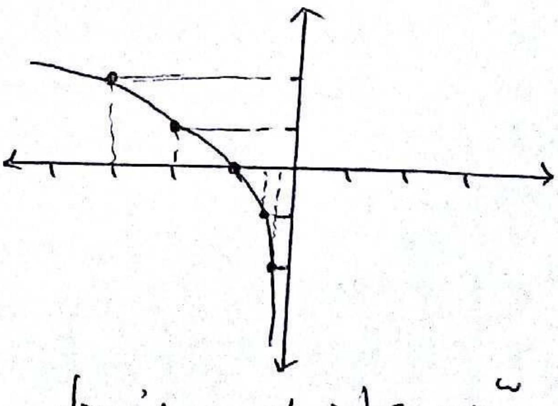


روش دوم: نمودار $y=\log_{2}^{x}$ را به اندازه‌ی یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم

3) $y=\log_{2}(-x)$ $\quad -x>0 \Rightarrow x<0$

$D_f=(-\infty,0)$

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
y	2	1	0	-1	-2

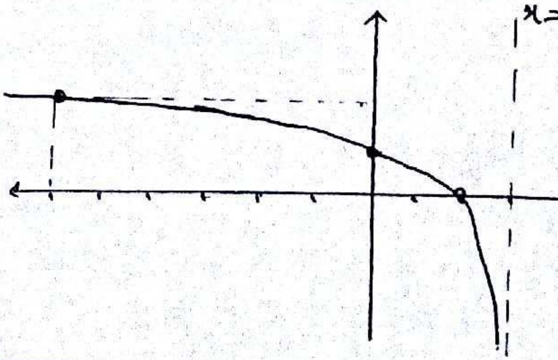


روش دوم: کافی است نمودار $y=\log_{2}^{x}$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم

4) $y=\log_{3}^{(3-x)}$ $\quad 3-x>0 \Rightarrow x<3$

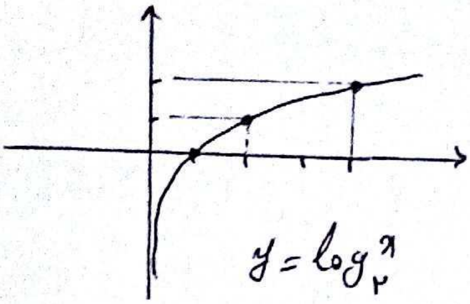
$D_f=(-\infty,3)$

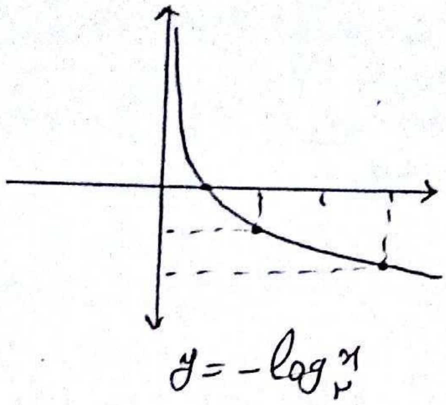
x	-6	0	2
y	2	1	0

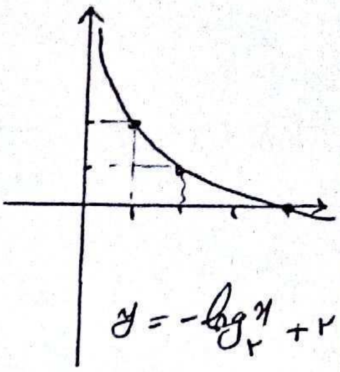


تمرین: به کمک انتقال منحنی ها مطلوبست رسم نمودار تابع:

$y = 2 - \log_2 x$







کاربردهایی از لگاریتم:

۱) PH و غلظت یون هیدرونیم:

PH یک محلول در شیمی، معیاری برای سنجش میزان اسیدی یا بازی یا خنثی بودن یک محلول است ($PH=7$ خنثی، $PH<7$ اسیدی، $PH>7$ بازی)

PH یک محلول از رابطه زیر بدست می آید که در آن $[H_3O^+]$ غلظت یون هیدرونیم بر حسب مول بر لیتر است:

$$\boxed{PH = -\log[H_3O^+]}$$

مثال) میزان PH نرمال خون انسان تقریباً عددی بین ۷٫۳۵ و ۷٫۴۵ است فرض کنید میزان یون هیدرونیم در غلظت خون یک فرد سیگاری برابر 5.2×10^{-5} مول بر لیتر باشد PH خون این فرد را بدست آورید ($\log 5.2 = 0.71$)

$$PH = -\log[H_3O^+] = -\log(5.2 \times 10^{-5}) = -(\log 5.2 + \log 10^{-5}) = -\log 5.2 + 5$$

$$= -0.71 + 5 = 4.29$$ (خون افراد سیگاری اسیدی است)

۲) رشد جمعیت:

فرض کنید جمعیت اولیه شهری برابر P_0 و نرخ رشد جمعیت برابر r باشد (مثلاً در هر سال ٪۳) پس از n سال جمعیت این شهر از فرمول $\boxed{P_n = P_0(1+r)^n}$ بدست می آید که با گرفتن لگاریتم از دو طرف مقدار n را بدست می آوریم.

مثال) فرض کنید جمعیت شهری برابر ۵۰۰۰۰ نفر و نرخ رشد جمعیت در هر سال $r = ۶\%$ است:

الف) پس از چهار سال جمعیت این شهر تقریباً چند نفر می‌شود؟

ب) پس از چند سال جمعیت این شهر تقریباً دو برابر می‌شود؟ ($\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۱/۰۶ = ۰/۰۲۵$)

حل الف) $P_n = P_0(1+r)^n \Rightarrow P_۴ = ۵۰۰۰۰(1+\frac{۶}{۱۰۰})^۴ = ۵۰۰۰۰ \times (۱/۰۶)^۴ \simeq ۶۳۱۲۳$

حل ب) $P_n = P_0(1+r)^n \Rightarrow ۲P_0 = P_0(1+۰/۰۶)^n \Rightarrow ۲ = (۱/۰۶)^n \xrightarrow{\text{لگاریتم}} \log ۲ = \log(۱/۰۶)^n$

$\Rightarrow \log ۲ = n\log(۱/۰۶) \Rightarrow ۰/۳ = n(۰/۰۲۵) \Rightarrow \boxed{n = ۱۲}$ (پس از حدود ۱۲ سال)

۳) محاسبه شدت زمین لرزه:

ریشتر مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه است که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد ارگ (Erg) است که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M}$$

مثال) روز پنجم دیماه ۱۳۸۲ زلزله‌ای به شدت ۶/۶ ریشتر شهر بم را لرزاند مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر بوده است؟

$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M = ۱۱/۸ + ۱/۵(۶/۶) = ۲۱/۷ \Rightarrow E = ۱۰^{۲۱/۷}$ Erg

۴) نیمه عمر مواد رادیواکتیو:

منظور از نیمه عمر یک ماده هسته‌ای، زمانی است که طول می‌کشد نصف آن ماده از بین برود مثلاً وقتی می‌گوئیم نیمه عمر ماده‌ای ۱۰ سال است یعنی بعد از ۱۰ سال جرم آن از m به $\frac{m}{۲}$ تغییر می‌کند. اگر مقدار اولیه ماده‌ای برابر m_0 و نیمه عمر آن برابر K باشد مقدار ماده پس از t سال از رابطه زیر بدست می‌آید:

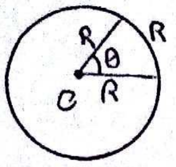
$$m(t) = m_0 \times ۲^{-\frac{t}{K}}$$

مثال) نیمه عمر یک ماده رادیواکتیو ۱۰ سال است. پس از چند سال از ۱۰۰ میلی‌گرم آن ۴۰ میلی‌گرم باقی می‌ماند؟ ($\log ۲ = ۰/۳$ و $\log ۰/۴ = -۰/۳۹$)

$m(t) = m_0 ۲^{-\frac{t}{K}} \Rightarrow ۴۰ = ۱۰۰ \times ۲^{-\frac{t}{۱۰}} \Rightarrow ۰/۴ = ۲^{-\frac{t}{۱۰}} \Rightarrow \log ۰/۴ = -\frac{t}{۱۰}\log ۲ \Rightarrow -۰/۳۹ = -\frac{t}{۱۰}(۰/۳)$

$\Rightarrow t = ۱۳$ سال

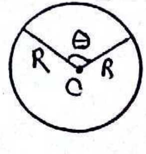
فصل ۴ : (مثلثات)



رادیان : در دایره‌ای به شعاع R ، زاویه مرکزی مقابل به کمانی به اندازه R برابر یک رادیان است $\theta = 1 rad$

* * *

نکته ریاضی :
اگر شعاع دایره‌ای برابر R باشد و زاویه θ که راس آن روی مرکز دایره است کمانی به طول L روی دایره ایجاد کند در اینصورت اندازه θ به رادیان از فرمول زیر بدست می‌آید :



$$\boxed{\theta = \frac{L}{R}} \quad \text{یا} \quad \boxed{L = R.\theta}$$

* * *

مثال ۱ : اگر زاویه θ که راس آن روی مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ cm قرار دارد کمانی به طول ۱۰ cm روی دایره ایجاد کرده است. اندازه θ به رادیان چقدر است؟

$$\theta = \frac{L}{R} = \frac{۱۰}{۵} = ۲ \ rad$$

مثال ۲ : در دایره‌ای به شعاع ۸ ، اندازه کمان روبرو به زاویه مرکزی ۴٫۵ رادیان چقدر است؟

$$L = R.\theta = ۸ \times ۴٫۵ = ۳۶$$

* * *

رابطه بین درجه و رادیان :

$$\boxed{\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}}$$

مثال ۱ : ۱۲۰ درجه چند رادیان است؟

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۱۲۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۱۲۰\pi}{۱۸۰} = \frac{۲\pi}{۳}$$

مثال ۲ : $\frac{\pi}{۴}$ رادیان چند درجه است؟

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{۱۸۰} = \frac{\frac{\pi}{۴}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{۱۸۰\pi}{۴\pi} = ۴۵^\circ$$

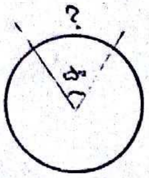
* * *

نکته ریاضی :
می‌دانیم شعاع دایره مثلثاتی برابر ۱ است

$$\left.\begin{array}{l} \text{کل دایره} = ۲\pi r = ۲\pi(۱) = ۲\pi \\ \text{کل دایره} = ۳۶۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲\pi = ۳۶۰^\circ$$

۰	۱۵°	۱۳۵°	۱۲۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°	درجه (زاویه مرکزی)
۰	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π	رادیان (کمان)

مثال) حلقه‌ای فلزی به محیط ۱۸ cm را از دو نقطه برش داده ایم بطوریکه زاویه مرکزی روبروی کمان جدا شده برابر ۵۰ درجه است طول کمان جدا شده چند سانتیمتر است؟



$$\text{محیط} = ۲\pi R = ۱۸ \Rightarrow R = \frac{۹}{\pi}$$

$$\frac{۵۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۵۰\pi}{۱۸۰} = \frac{۵\pi}{۱۸} rad \Rightarrow \theta = \frac{۵\pi}{۱۸}$$

$$L = R.\theta = \frac{۹}{\pi} \times \frac{۵\pi}{۱۸} = \frac{۵}{۲} = ۲٫۵$$

* * *

فرمول زاویه بین عقربه‌های ساعت:

در ساعت $h:m'$ زاویه بین عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار برحسب درجه از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\alpha = |۵٫۵m - ۳۰h|}$$

مثال) در ساعت $۵:۴۰'$ زاویه بین عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار چند رادیان است؟

$$\alpha = |۵٫۵(۴۰) - ۳۰(۵)| = |۲۲۰ - ۱۵۰| = ۷۰^\circ$$

$$\frac{۷۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۷۰\pi}{۱۸۰} \Rightarrow R = \frac{۷\pi}{۱۸}$$

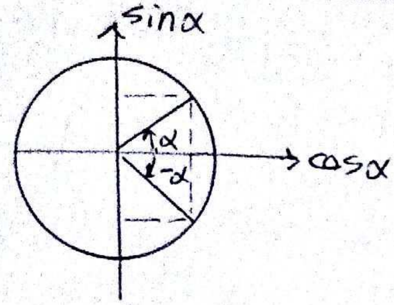
* * *

جدول نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مهم:

زاویه نسبت	$۳۰^\circ = \frac{\pi}{۶}$	$۴۵^\circ = \frac{\pi}{۴}$	$۶۰^\circ = \frac{\pi}{۳}$
$\sin\theta$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$tg\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$cotg\theta$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

زاویه نسبت	۰°	$۹۰^\circ = \frac{\pi}{۲}$	$۱۸۰^\circ = \pi$	$۲۷۰^\circ = \frac{۳\pi}{۲}$	$۳۶۰^\circ = ۲\pi$
$\sin\theta$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\cos\theta$	۱	۰	-۱	۰	۱
$tg\theta$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$cotg\theta$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

محاسبه نسبتهای مثلثاتی زاویه $(-\alpha)$:



1) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

2) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

3) $tg(-\alpha) = -tg\alpha$

4) $cotg(-\alpha) = -cotg\alpha$

انتهای کمانهای مقابل به دو زاویه α و $-\alpha$ نسبت به محور کسینوسها قرینه یکدیگرند.

مثال) مطلوبست محاسبه :

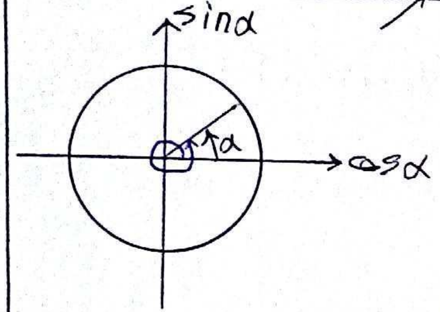
$\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg(-\frac{\pi}{6}) = -tg\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$cotg(-60^\circ) = -cotg\,60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

محاسبه نسبتهای مثلثاتی زاویه $(2\pi+\alpha)$:



انتهای کمانهای مقابل به زاویه α و $2\pi+\alpha$ یک نقطه است.

1) $\sin(2\pi+\alpha) = \sin\alpha$

2) $\cos(2\pi+\alpha) = \cos\alpha$

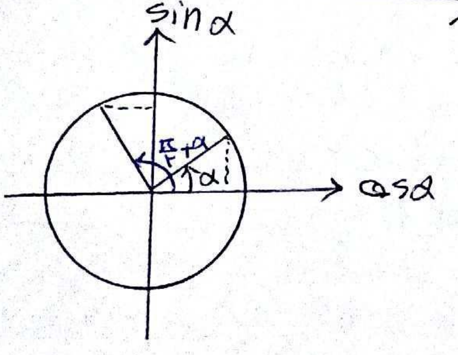
3) $tg(2\pi+\alpha) = tg\alpha$

4) $cotg(2\pi+\alpha) = cotg\alpha$

مثال) $tg\,390^\circ = tg(360^\circ+30^\circ) = tg(2\pi+\frac{\pi}{6}) = tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال) $\sin 420^\circ = \sin(360^\circ+60^\circ) = \sin(2\pi+\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

محاسبه نسبتهای مثلثاتی زاویه $(\frac{\pi}{2}+\alpha)$:



1) $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha$

2) $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha$

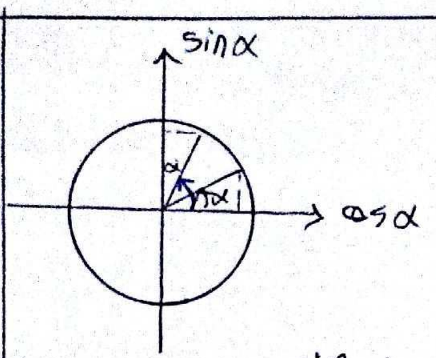
3) $tg(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -cotg\alpha$

4) $cotg(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -tg\alpha$

مثال) $\sin 120^\circ = \sin\frac{2\pi}{3} = \sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 150^\circ = \cos(90^\circ+60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

تذکر مهم: نسبتهای فرد $\frac{\pi}{2}$ (مانند $\frac{3\pi}{2}$، $\frac{5\pi}{2}$ و ...) نسبت مثلثاتی را تغییر می دهند.



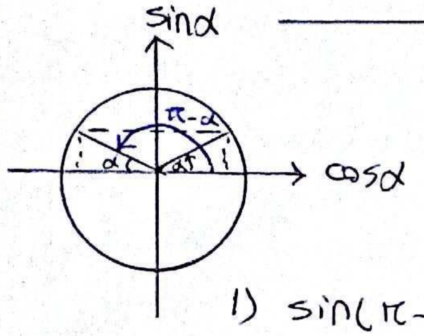
محاسبه نسبتهای مثلثاتی زاویه $(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$:

۱) $\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$ ۲) $\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$

۳) $tg(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=cotg\alpha$ ۴) $cotg(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=tg\alpha$

مثال) $\sin ۳۰^\circ=\sin(۹۰-۶۰)=\cos ۶۰=\frac{۱}{۲}$

* * *



محاسبه نسبتهای مثلثاتی زاویه $(\pi-\alpha)$:

انتهای کمانهای مقابل به دو زاویه α و $\pi-\alpha$ نسبت به محور سینوسها قرینه یکدیگرند.

۱) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ ۲) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

۳) $tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha$ ۴) $cotg(\pi-\alpha)=-cotg\alpha$

مثال) مطلوبست محاسبه :

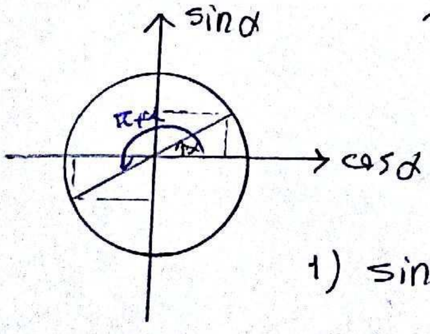
$\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\cos\frac{۳\pi}{۴}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۴})=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$tg\frac{۵\pi}{۶}=tg(\pi-\frac{\pi}{۶})=-tg\frac{\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$

$cotg\,۱۵۰^\circ=cotg(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=-cotg\,۳۰^\circ=-\sqrt{۳}$

* * *



محاسبه نسبتهای مثلثاتی زاویه $(\pi+\alpha)$:

انتهای کمانهای مقابل به زاویه‌های α و $\pi+\alpha$ نسبت به مرکز دایره مثلثاتی قرینه یکدیگرند.

۱) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ ۲) $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

۳) $tg(\pi+\alpha)=tg\alpha$ ۴) $cotg(\pi+\alpha)=cotg\alpha$

مثال) مطلوبست محاسبه :

$\sin\frac{۴\pi}{۳}=\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\sin\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\cos\frac{۵\pi}{۴}=\cos(\pi+\frac{\pi}{۴})=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$tg\frac{۷\pi}{۶}=tg(\pi+\frac{\pi}{۶})=tg\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$cotg\frac{۵\pi}{۳}=cotg(\pi+\frac{۲\pi}{۳})=cotg\frac{۲\pi}{۳}=cotg(\pi-\frac{\pi}{۳})=-cotg\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

تمرین ۱: اگر $\sin ۱۰^\circ = ۰٫۱۷$ و $\cos ۱۰^\circ = ۰٫۹۹$ باشد حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$A = \sin ۱۰۰^\circ + \sin ۳۵۰^\circ - \cos ۲۶۰^\circ - \cos ۱۹۰^\circ$$

$$A = \sin \underbrace{(۹۰^\circ + ۱۰^\circ)}_{\text{ربع دوم}} + \sin \underbrace{(۳۶۰^\circ - ۱۰^\circ)}_{\text{ربع چهارم}} - \cos \underbrace{(۲۷۰^\circ - ۱۰^\circ)}_{\text{ربع سوم}} - \cos \underbrace{(۱۸۰^\circ + ۱۰^\circ)}_{\text{ربع سوم}}$$

$$= \cos ۱۰^\circ - \sin ۱۰^\circ - (-\sin ۱۰^\circ) - (-\cos ۱۰^\circ) = ۲\cos ۱۰^\circ = ۲ \times ۰٫۹۹ = ۱٫۹۸$$

* * *

تمرین ۲: اگر $\text{tg}\, ۷۵^\circ = ۲ + \sqrt{۳}$ باشد مطلوبست مقدار عددی عبارت زیر:

$$A = \frac{۳\sin ۳۷۵^\circ + ۲\sin ۱۰۵^\circ}{\cos ۱۶۵^\circ - \cos ۲۵۵^\circ} = ?$$

$$A = \frac{۳\sin(۳۶۰^\circ + ۱۵^\circ) + ۲\sin(۱۸۰^\circ - ۷۵^\circ)}{\cos(۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ) - \cos(۱۸۰^\circ + ۷۵^\circ)} = \frac{۳\sin ۱۵^\circ + ۲\sin ۷۵^\circ}{-\cos ۱۵^\circ + \cos ۷۵^\circ}$$

$$= \frac{۳\cos ۷۵^\circ + ۲\sin ۷۵^\circ}{-\sin ۷۵^\circ + \cos ۷۵^\circ} = \frac{\frac{۳\cos ۷۵^\circ}{\cos ۷۵^\circ} + \frac{۲\sin ۷۵^\circ}{\cos ۷۵^\circ}}{-\frac{\sin ۷۵^\circ}{\cos ۷۵^\circ} + \frac{\cos ۷۵^\circ}{\cos ۷۵^\circ}} = \frac{۳ + ۲\,\text{tg}\, ۷۵^\circ}{-\text{tg}\, ۷۵^\circ + ۱}$$

$$= \frac{۳ + ۲(۲ + \sqrt{۳})}{-(۲ + \sqrt{۳}) + ۱} = \frac{۷ + ۲\sqrt{۳}}{-۱ - \sqrt{۳}}$$

* * *

تمرین ۳: مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید.

$$A = \frac{۲\sin(\frac{۴۱\pi}{۱۰}) + \sin(-\frac{\pi}{۱۰}) + \sin(\frac{۲۹\pi}{۱۰}) - ۲\sin(\frac{۱۱\pi}{۱۰})}{\cos(-\frac{\pi}{۱۰}) \times \text{tg}(\frac{۱۱\pi}{۱۰}) + \sin(\frac{۲۱\pi}{۱۰})} = ?$$

$$A = \frac{۲\sin(۴\pi + \frac{\pi}{۱۰}) - \sin\frac{\pi}{۱۰} + \sin(۳\pi - \frac{\pi}{۱۰}) - ۲\sin(\pi + \frac{\pi}{۱۰})}{\cos\frac{\pi}{۱۰} \times \text{tg}(\pi + \frac{\pi}{۱۰}) + \sin(۲\pi + \frac{\pi}{۱۰})}$$

$$= \frac{۲\sin\frac{\pi}{۱۰} - \sin\frac{\pi}{۱۰} + \sin\frac{\pi}{۱۰} + ۲\sin\frac{\pi}{۱۰}}{\cos\frac{\pi}{۱۰} \times \frac{\sin\frac{\pi}{۱۰}}{\cos\frac{\pi}{۱۰}} + \sin\frac{\pi}{۱۰}} = \frac{۴\sin\frac{\pi}{۱۰}}{۲\sin\frac{\pi}{۱۰}} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

تمرین ۴ : مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید :

$$A=\frac{\sin ۲۲۵^\circ \times \cos(-۳۰^\circ)+\cos ۱۳۵^\circ \times \sin ۶۰^\circ}{tg\,۲۱۰^\circ \times tg\,۶۰^\circ+\cos ۲۱۰^\circ \times tg\,۳۳۰^\circ}=?$$

$$A=\frac{\sin(۱۸۰^\circ+۴۵^\circ)\times\cos ۳۰^\circ+\cos(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)\times\sin ۶۰^\circ}{tg(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)\times tg\,۶۰^\circ+\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)\times tg(۳۶۰^\circ-۳۰^\circ)}$$

$$=\frac{-\sin ۴۵^\circ\times\cos ۳۰^\circ-\cos ۴۵^\circ\times\sin ۶۰^\circ}{tg\,۳۰^\circ\times tg\,۶۰^\circ-\cos ۳۰^\circ\times(-tg\,۳۰^\circ)}=\frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\sqrt{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}}=-\frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

* * *

تمرین ۵ : مقدار عددی عبارت زیر را بیابید .

$$A=\frac{\sin(۲۴۰^\circ)\times tg(۵۷۰^\circ)}{\sin\frac{۹\pi}{۴}-\cos\frac{۱۱\pi}{۴}}=?$$

$$A=\frac{\sin\overbrace{(۱۸۰^\circ+۶۰^\circ)}^{\text{ربع سوم}}\times tg\overbrace{(۳\times۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)}^{\text{ربع سوم}}}{\sin\underbrace{(۲\pi+\frac{\pi}{۴})}_{\text{ربع اول}}-\cos\underbrace{(۳\pi-\frac{\pi}{۴})}_{\text{ربع دوم}}}=\frac{-\sin ۶۰^\circ\times tg\,۳۰^\circ}{\sin\frac{\pi}{۴}-(-\cos\frac{\pi}{۴})}$$

$$=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{\sqrt{۲}}=-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

* * *

تمرین ۶ : مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید .

$$A=\frac{\sin ۲۲۵^\circ\times\cos ۳۰^\circ+\cos ۱۳۵^\circ\times\sin ۶۰^\circ}{tg\,۲۱۰^\circ\times cotg\,۶۰^\circ-cotg\,۲۴۰^\circ\times tg\,۳۳۰^\circ}=$$

$$A=\frac{\sin(۱۸۰^\circ+۴۵^\circ)\times\cos ۳۰^\circ+\cos(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)\times\sin ۶۰^\circ}{tg(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)\,cotg\,۶۰^\circ-cotg(۱۸۰^\circ+۶۰^\circ)\,tg(۳۶۰^\circ-۳۰^\circ)}$$

$$=\frac{-\sin ۴۵^\circ\cos ۳۰^\circ-\cos ۴۵^\circ\sin ۶۰^\circ}{tg\,۳۰^\circ\times cotg\,۶۰^\circ-cotg\,۶۰^\circ(-tg\,۳۰^\circ)}=\frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}}=\frac{-\frac{\sqrt{۶}}{۲}}{\frac{۲}{۳}}=-\frac{۳\sqrt{۶}}{۴}$$

نکته ریاضی :

در حالت کلی برای هر عدد صحیح K :

۱) $\sin(۲K\pi-\alpha)=-\sin\alpha$

۲) $\cos(۲K\pi-\alpha)=\cos\alpha$

۳) $tg(۲K\pi-\alpha)=-tg\alpha$

۴) $cotg(۲K\pi-\alpha)=-cotg\alpha$

۱) $\sin(۲K\pi+\alpha)=\sin\alpha$

۲) $\cos(۲K\pi+\alpha)=\cos\alpha$

۳) $tg(۲K\pi+\alpha)=tg\alpha$

۴) $cotg(۲K\pi+\alpha)=cotg\alpha$

تمرین : حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف) $tg\,۱۳۵^\circ+cotg\,۱۲۰^\circ=tg(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)+cotg(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=-tg۴۵^\circ-cotg۶۰^\circ$

$=-۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{-۳-\sqrt{۳}}{۳}$

ب) $\cos(-۲۱۰^\circ)+cotg\,۲۴۰^\circ=\cos۲۱۰^\circ+cotg۲۴۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)+$

$cotg(۱۸۰^\circ+۶۰^\circ)=-\cos۳۰^\circ+cotg۶۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

ج) $\sin۶۳۰^\circ+tg(-۵۴۰^\circ)=\sin۶۳۰^\circ-tg۵۴۰^\circ=\sin(۲\times۳۶۰-۹۰)-$

$tg(۳۶۰^\circ+۱۸۰^\circ)=-\sin۹۰^\circ-tg۱۸۰^\circ=-۱+۰=-۱$

د) $\sin(\frac{۲۵\pi}{۳})-\cos(\frac{۲۳\pi}{۴})=\sin(۸\pi+\frac{\pi}{۳})-\cos(۸\pi-\frac{\pi}{۴})$

$=\sin\frac{\pi}{۳}-\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{۲}$

تمرین : حاصل عبارت $y=۴-\frac{۲}{۳}\sin(۳x-\pi)$ را به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ بدست آورید.

$y=۴-\frac{۲}{۳}\sin[-(\pi-۳x)]=۴+\frac{۲}{۳}\sin(\pi-۳x)=۴+\frac{۲}{۳}\sin۳x$

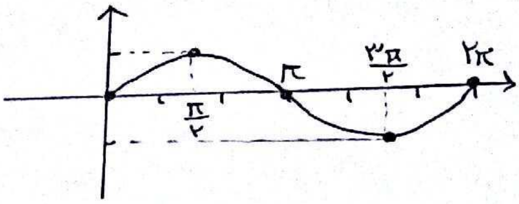
$=۴+\frac{۲}{۳}\sin(\frac{۳\pi}{۶})=۴+\frac{۲}{۳}\sin\frac{\pi}{۲}=۴+\frac{۲}{۳}\times۱=۴+\frac{۲}{۳}=\frac{۱۴}{۳}$

توابع مثلثاتی:

۱) تابع سینوس:

تابع $y=\sin x$ را تابع سینوس می‌نامند و نمودار آن بصورت زیر است:

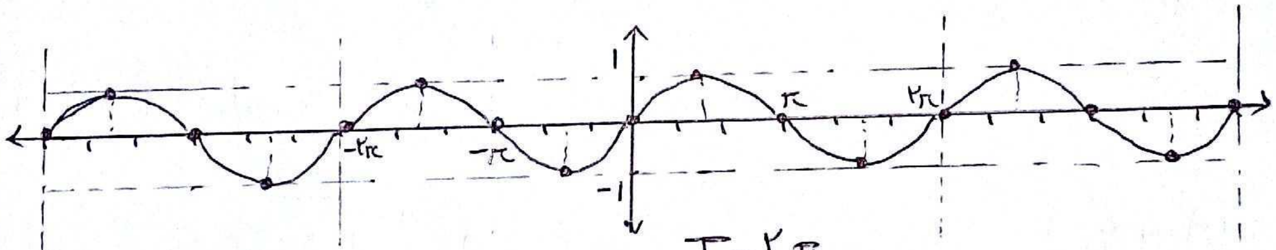
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۰	۱	۰	۱-	۰



در رسم نمودار توابع مثلثاتی $\pi = ۳$ درنظر می‌گیریم،

دامنه تابع $y=\sin x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن $[-۱,۱]$ است. $R_f=[-۱,۱]$ $D_f=\mathbb{R}$

نمودار تابع سینوس در فاصله‌هایی به طول ۲π تکرار می‌شود این فاصله را دوره تناوب (دوره تکرار) می‌نامند و با T نشان می‌دهند.



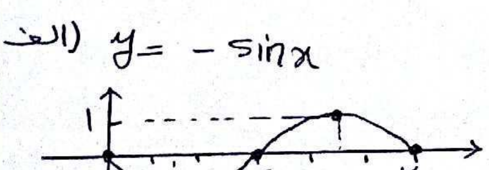
$T=۲\pi$

تابع $y=\sin x$ در مضارب صحیح π برابر صفر است. بیشترین مقدار تابع در بازه $[۰,۲\pi]$ در نقطه $x=\frac{\pi}{۲}$ برابر ۱ و کمترین مقدار تابع در بازه $[۰,۲\pi]$ در نقطه $x=\frac{۳\pi}{۲}$ برابر (۱-) است.

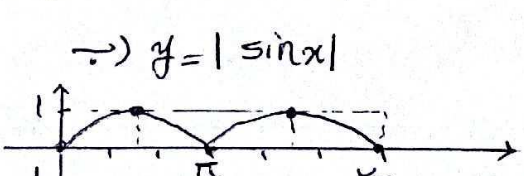
* * *

تمرین: مطلوبست رسم نمودار توابع زیر در بازه $[۰,۲\pi]$:

الف) $y=-\sin x$



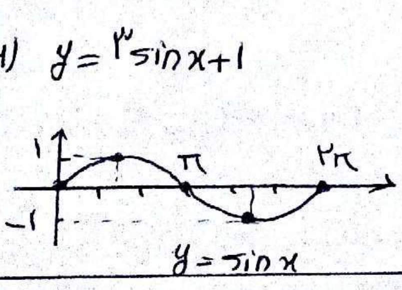
ب) $y=|\sin x|$



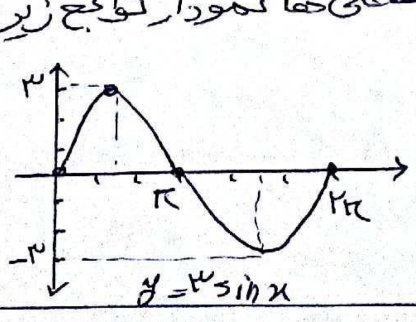
* * *

تمرین: به کمک انتقال منحنی‌ها نمودار توابع زیر را در یک دوره تناوب رسم کنید

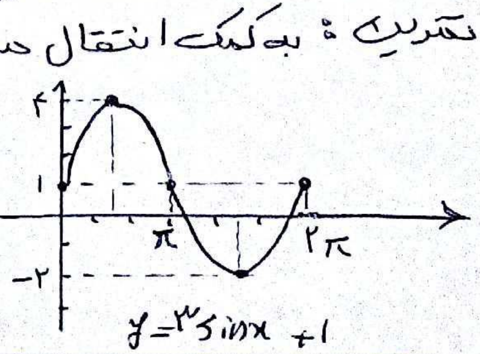
۱) $y=۳\sin x+۱$



$y=\sin x$

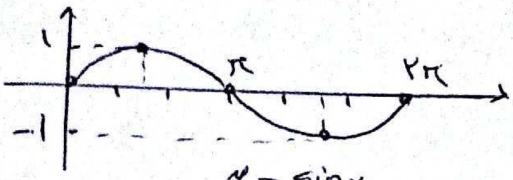


$y=۳\sin x$

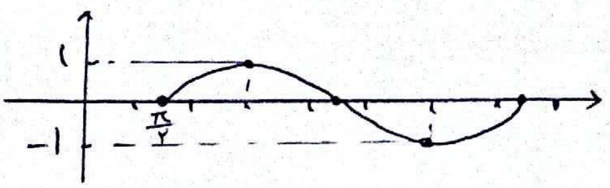


$y=۳\sin x+۱$

۲) $y = \sin(x - \frac{\pi}{۲})$ $\frac{\pi}{۲} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$



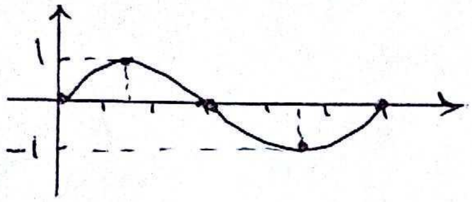
$y = \sin x$

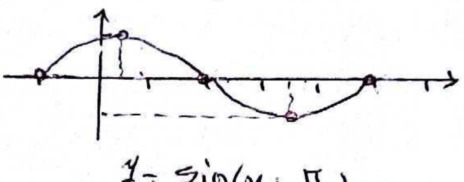


$y = \sin(x - \frac{\pi}{۲})$

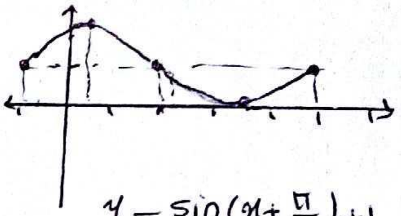
۳) $y = \sin(x + \frac{\pi}{۳}) + ۱$

$\frac{\pi}{۳} = \frac{۳}{۳} = ۱$



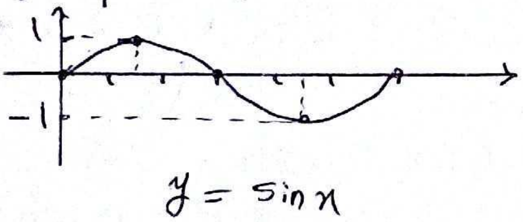


$y = \sin(x + \frac{\pi}{۳})$

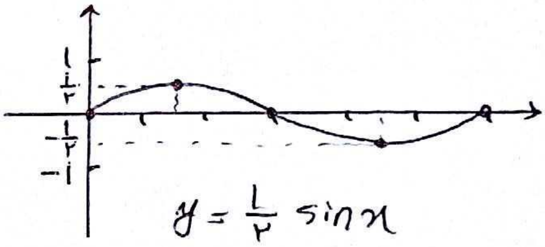


$y = \sin(x + \frac{\pi}{۳}) + ۱$

۴) $y = \frac{۱}{۲} \sin x$



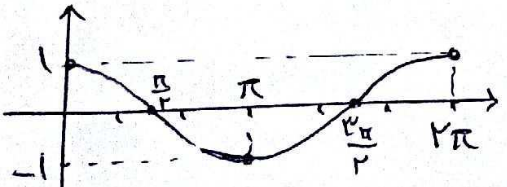
$y = \sin x$



$y = \frac{۱}{۲} \sin x$

۲) تابع کسینوس :

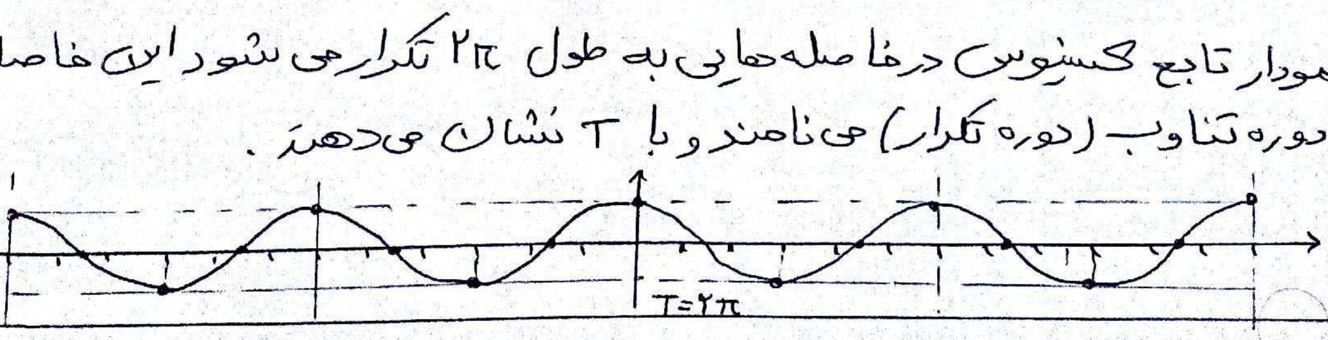
تابع $y = \cos x$ را تابع کسینوس می‌نامند و نمودار آن بصورت زیر است ($\pi = ۳$)



x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۱	۰	-۱	۰	۱

دامنه تابع $y = \cos x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن $[-۱, ۱]$ است $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-۱, ۱]$

نمودار تابع کسینوس در فاصله‌هایی به طول ۲π تکرار می‌شود این فاصله را دوره تناوب (دوره تکرار) می‌نامند و با T نشان می‌دهند.

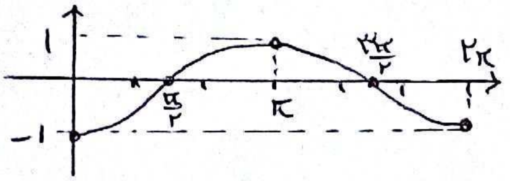


تابع $y=\cos x$ در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ برابر صفر است. بیشترین مقدار تابع در بازه $[0, 2\pi]$ در نقاط $x=0$ و $x=2\pi$ برابر یک و کمترین مقدار تابع در بازه $[0, 2\pi]$ در نقطه $x=\pi$ برابر (-1) است.

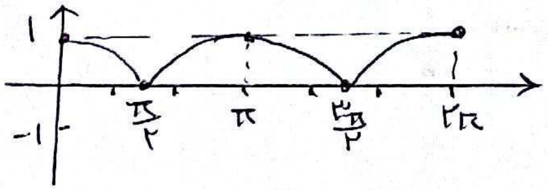
* * *

تمرین: به کمک انتقال منحنی‌ها، نمودار توابع زیر را در یک دوره تناوب رسم کنید.

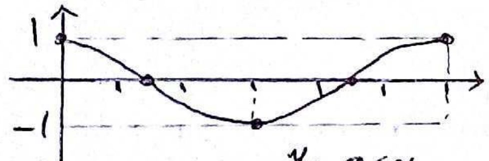
۱) $y=-\cos x$



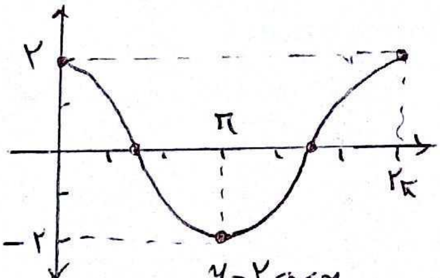
۲) $y=|\cos x|$



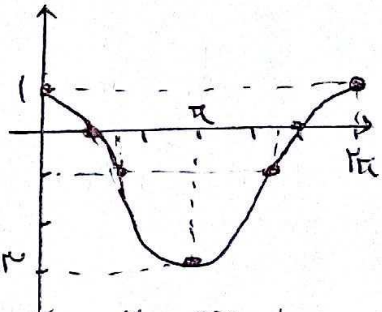
۳) $y=2\cos x-1$



$y=\cos x$

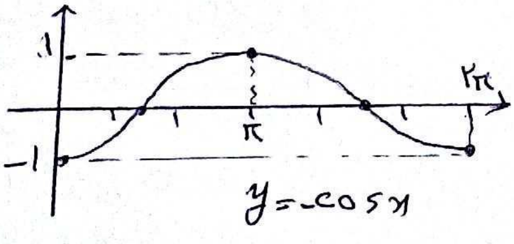


$y=2\cos x$

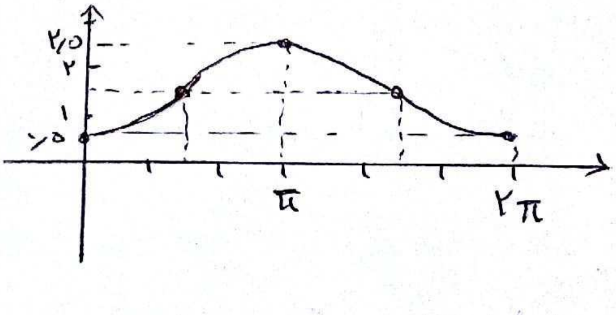


$y=2\cos x-1$

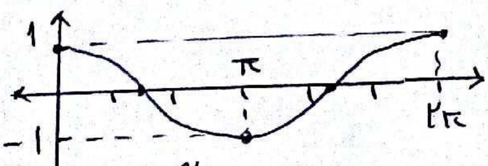
۴) $y=\frac{\pi}{2}-\cos(-x)=-\cos x+\frac{\pi}{2}$



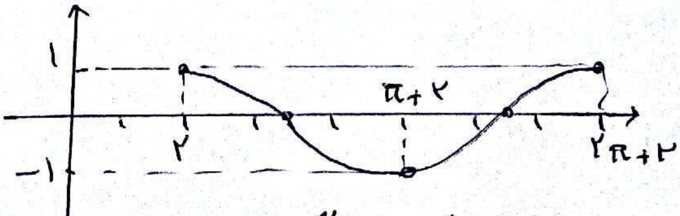
$y=-\cos x$



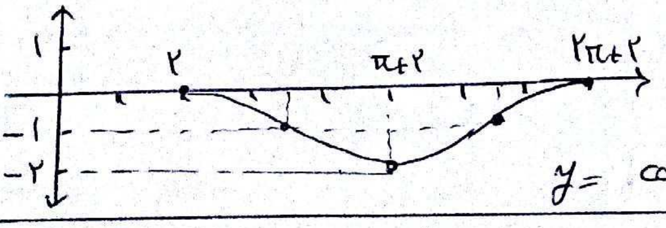
۵) $y=\cos(x-2)-1$



$y=\cos x$



$y=\cos(x-2)$



$y=\cos(x-2)-1$

روابط بین نسبتهای مثلثاتی :

۱) $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱ \Rightarrow \begin{cases}\sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta\\ \cos^۲\theta=۱-\sin^۲\theta\end{cases}$

۲) $tg\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ۳) $cotg\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ۴) $tg\theta.cotg\theta=۱\Rightarrow\begin{cases}tg\theta=\dfrac{۱}{cotg\theta}\\ cotg\theta=\dfrac{۱}{tg\theta}\end{cases}$

۵) $۱+tg^۲\theta=\dfrac{۱}{\cos^۲\theta}$ ۶) $۱+cotg^۲\theta=\dfrac{۱}{\sin^۲\theta}$ ۷) $\begin{cases}-۱\leqslant\sin\theta\leqslant۱\\ -۱\leqslant\cos\theta\leqslant۱\end{cases}$

۸) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{۲}\Rightarrow \sin\alpha=\cos\beta\ ,\ \cos\alpha=\sin\beta\ ,\ tg\alpha=cotg\beta\ ,\ cotg\alpha=tg\beta$

* * *

مثال ۱ : اگر α در ناحیه دوم و $\sin\alpha=\frac{۳}{۵}$ باشد سایر نسبتهای مثلثاتی α را بیابید.

$$\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha=۱-(\frac{۳}{۵})^۲=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{۴}{۵}\xrightarrow{\alpha \text{ ربع دوم}}\cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{۳}{۵}}{-\frac{۴}{۵}}=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow cotg\alpha=-\frac{۴}{۳}$$

* * *

مثال ۲ : اگر $\sin x.\cos x=\frac{۱۲}{۲۵}$ باشد مقادیر $\sin x+\cos x$ و $\sin x-\cos x$ را بیابید.

$$(\sin x+\cos x)^۲=\sin^۲x+\cos^۲x+۲\sin x.\cos x=۱+۲(\frac{۱۲}{۲۵})=\frac{۴۹}{۲۵}\Rightarrow\sin x+\cos x=\pm\frac{۷}{۵}$$

$$(\sin x-\cos x)^۲=\sin^۲x+\cos^۲x-۲\sin x.\cos x=۱-۲(\frac{۱۲}{۲۵})=\frac{۱}{۲۵}\Rightarrow\sin x-\cos x=\pm\frac{۱}{۵}$$

* * *

نسبتهای مثلثاتی مجموع وتفاضل زاویه ها :

۱) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta$

۲) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.\sin\beta$

۳) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta$

۴) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta$

۵) $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{۱-tg\alpha.tg\beta}$

۶) $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{۱+tg\alpha.tg\beta}$

مثال) مطلوبست محاسبه :

۱) $\sin۱۵^\circ=\sin(۴۵^\circ-۳۰^\circ)=\sin۴۵^\circ\cos۳۰^\circ-\cos۴۵^\circ\sin۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$

۲) $\sin۷۵^\circ=\sin(۴۵^\circ+۳۰^\circ)=\sin۴۵^\circ\cos۳۰^\circ+\cos۴۵^\circ\sin۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$

۳) $\cos ۱۰۵^\circ = \cos(۶۰^\circ + ۴۵^\circ) = \cos ۶۰^\circ \cos ۴۵^\circ - \sin ۶۰^\circ \sin ۴۵^\circ = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲} - \sqrt{۶}}{۴}$

۴) $tg\, ۱۰۵^\circ = tg(۶۰^\circ + ۴۵^\circ) = \frac{tg ۶۰ + tg ۴۵^\circ}{۱ - tg ۶۰\, tg ۴۵^\circ} = \frac{\sqrt{۳} + ۱}{۱ - \sqrt{۳} \times ۱} = \frac{۱ + \sqrt{۳}}{۱ - \sqrt{۳}}$

مثال: اگر α و β زاویه هایی در ربع سوم باشند و $\sin\alpha = -\frac{۴}{۵}$ و $\cos\beta = -\frac{۵}{۱۳}$ مقدار $\sin(\alpha+\beta)$ را محاسبه کنید.

$\sin\alpha = -\frac{۴}{۵} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{۱ - \sin^۲\alpha} = \sqrt{۱ - (-\frac{۴}{۵})^۲} = \sqrt{۱ - \frac{۱۶}{۲۵}} = \sqrt{\frac{۹}{۲۵}} = \pm\frac{۳}{۵} \xrightarrow[\text{ربع سوم}]{\alpha} \underset{\text{ق ق}}{\cos\alpha = -\frac{۳}{۵}}$

$\cos\beta = -\frac{۵}{۱۳} \Rightarrow \sin\beta = \sqrt{۱ - \cos^۲\beta} = \sqrt{۱ - \frac{۲۵}{۱۶۹}} = \sqrt{\frac{۱۴۴}{۱۶۹}} = \pm\frac{۱۲}{۱۳} \xrightarrow{\beta \text{ ربع سوم}} \underset{\text{ق ق}}{\sin\beta = -\frac{۱۲}{۱۳}}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha = (-\frac{۴}{۵})(-\frac{۵}{۱۳}) + (-\frac{۳}{۵})(-\frac{۱۲}{۱۳}) = \frac{۵۶}{۶۵}$

مثال درستی اتحاد $\sqrt{۲}\sin(x + \frac{\pi}{۴}) = \sin x + \cos x$ را ثابت کنید.

سمت چپ $= \sqrt{۲}\sin(x + \frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۲}(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{۴} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۲}(\sin x \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \cos x \times \frac{\sqrt{۲}}{۲})$

$= \sin x + \cos x =$ سمت راست

مثال اگر $tg(\alpha+\beta) = \frac{۲}{۵}$ و $tg(\alpha-\beta) = \frac{۳}{۲}$ مطلوبست محاسبه: $tg۲\alpha = ?$

$tg۲\alpha = tg[(\alpha+\beta) + (\alpha-\beta)] = \frac{tg(\alpha+\beta) + tg(\alpha-\beta)}{۱ - tg(\alpha+\beta)\, tg(\alpha-\beta)} = \frac{\frac{۲}{۵} + \frac{۳}{۲}}{۱ - (\frac{۲}{۵})(\frac{۳}{۲})} = \frac{۱۹}{۴}$

مثال مطلوبست محاسبه:

$\sin\frac{\pi}{۱۲} = \sin(\frac{\pi}{۳} - \frac{\pi}{۴}) = \sin\frac{\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۴} - \cos\frac{\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴}$

نسبتهای مثلثاتی کمان ۲α:

۱) $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

اثبات تمرین کتاب: $\sin ۲\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha = ۲\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

۲) $\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$

اثبات : تمرین کتاب $\cos ۲\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha.\cos\alpha - \sin\alpha.\sin\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$

۳) $\operatorname{tg} ۲\alpha = \dfrac{۲\operatorname{tg}\alpha}{۱-\operatorname{tg}^۲\alpha}$

اثبات: سمت راست $= \dfrac{۲\operatorname{tg}\alpha}{۱-\operatorname{tg}^۲\alpha} = \dfrac{۲(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})}{۱-(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})^۲} = \dfrac{\frac{۲\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}} = \dfrac{\frac{۲\sin\alpha}{\cos\alpha}.\cos^۲\alpha}{\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha}$

$= \dfrac{۲\sin\alpha.\cos\alpha}{\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha} = \dfrac{\sin ۲\alpha}{\cos ۲\alpha} = \operatorname{tg} ۲\alpha =$ سمت چپ

مثال) اگر $\sin\alpha = -\frac{۳}{۵}$ و α زاویه‌ای در ربع سوم باشد مطلوبست محاسبه: $\sin ۲\alpha$ و $\operatorname{tg} ۲\alpha$:

$\cos\alpha = \sqrt{۱-\sin^۲\alpha} = \sqrt{۱-(-\frac{۳}{۵})^۲} = \sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}} = \sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}} = \pm\frac{۴}{۵} \xrightarrow[\text{سوم}]{\text{ربع}} \cos\alpha = -\frac{۴}{۵}$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{-\frac{۳}{۵}}{-\frac{۴}{۵}} = \dfrac{۳}{۴}$

$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha.\cos\alpha = ۲(-\frac{۳}{۵})(-\frac{۴}{۵}) = \frac{۲۴}{۲۵}$

$\operatorname{tg} ۲\alpha = \dfrac{۲\operatorname{tg}\alpha}{۱-\operatorname{tg}^۲\alpha} = \dfrac{۲(\frac{۳}{۴})}{۱-(\frac{۳}{۴})^۲} = \dfrac{۲۴}{۷}$

مثال) درستی اتحاد $\sin ۲\alpha = \dfrac{۲\operatorname{tg}\alpha}{۱+\operatorname{tg}^۲\alpha}$ را ثابت کنید.

سمت راست $= \dfrac{۲(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})}{۱+\frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}} = \dfrac{\frac{۲\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}} = \dfrac{\frac{۲\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{۱}{\cos^۲\alpha}} = \dfrac{۲\sin\alpha.\cos^۲\alpha}{\cos\alpha}$

$= ۲\sin\alpha.\cos\alpha = \sin ۲\alpha =$ سمت چپ

نسبتهای مثلثاتی نصف کمان:

$\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ \Rightarrow \cos ۲\alpha + ۱ = ۲\cos^۲\alpha \Rightarrow \boxed{\cos^۲\alpha = \frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}}$

$\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha \Rightarrow ۲\sin^۲\alpha = ۱ - \cos ۲\alpha \Rightarrow \boxed{\sin^۲\alpha = \frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}}$

مثال) مطلوبست محاسبه: $\sin ۲۲٫۵^\circ = ?$ و $\cos ۲۲٫۵^\circ = ?$

$$\sin^{۲} ۲۲٫۵^\circ = \frac{۱-\cos(۲\times ۲۲٫۵^\circ)}{۲} = \frac{۱-\cos ۴۵^\circ}{۲} = \frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow \sin ۲۲٫۵^\circ = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\cos^{۲} ۲۲٫۵^\circ = \frac{۱+\cos(۲\times ۲۲٫۵^\circ)}{۲} = \frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲+\sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow \cos ۲۲٫۵^\circ = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

نتیجه:

$$\sin ۶۷٫۵^\circ = \cos ۲۲٫۵^\circ = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

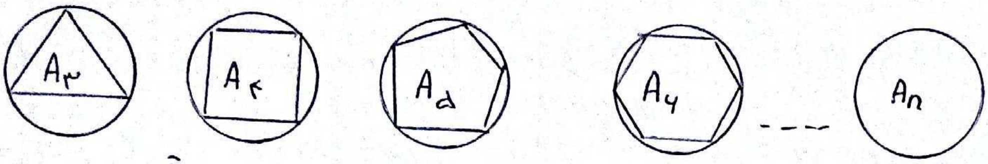
$$\sin ۲۲٫۵^\circ = \cos ۶۷٫۵^\circ = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

(حد = Limit)

فصل ۵ : «حد و پیوستگی»

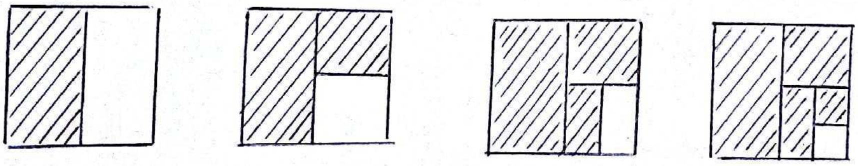
ابتدا با چند مثال مفهوم فرآیند حدی را بیان می کنیم :

۱) برای پیدا کردن مساحت یک دایره ، یک چند ضلعی منتظم را مطابق شکل در آن محاط می کنیم و تعداد اضلاع را افزایش می دهیم :



اگر A_n را مساحت n ضلعی منتظم محاط در دایره در نظر بگیریم با افزایش مقدار n ، مقدار A_n به مساحت دایره نزدیک و نزدیکتر می شود در این صورت می گوئیم که : وقتی n خیلی بزرگ شود حد مساحت چند ضلعی ها برابر مساحت دایره می شود

۲) در یک مربع به ضلع یک ، ابتدا نیمی از مساحت را رنگ می کنیم در مرحله دوم نیمی از مساحت باقیمانده را رنگ می کنیم و این کار را ادامه می دهیم :

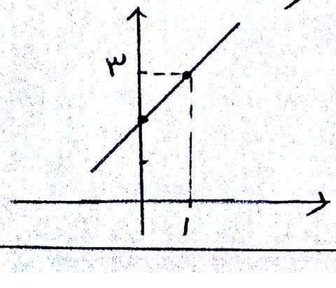


$S_{۱} = \frac{۱}{۲}$ $S_{۲} = \frac{۳}{۴}$ $S_{۳} = \frac{۷}{۸}$ $S_{۴} = \frac{۱۵}{۱۶}$

با افزایش مراحل به هر میزان که بخواهیم می توانیم مساحت قسمت رنگ شده را به عدد یک یعنی مساحت مربع نزدیک کنیم به شرط آنکه تعداد مراحل را به مقدار کافی افزایش داده باشیم و می گوئیم : مساحت مربع حد مساحت قسمت رنگ شده است .

۳) تابع $f(x) = x + ۲$ را در نظر می گیریم

نمودار این تابع را رسم می کنیم :



x	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱	۱/۱	۱/۲	۱/۳
f(x)	۲/۷	۲/۸	۲/۹	۳	۳/۱	۳/۲	۳/۳

با توجه به جدول فوق، وقتی x با مقادیر بزرگتر از یک به یک نزدیک می‌شود (از سمت راست) $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می‌شود و اگر x با مقادیر کمتر از یک، به یک نزدیک می‌شود (از سمت چپ) $f(x)$ به ۳ نزدیک می‌شود، ۳ را حد تابع $f(x)=x+2$ در نقطه $x=1$ می‌گویند.

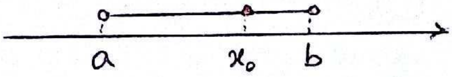
تذکر مهم:

در مثال فوق اگر از سمت راست (مقادیر بزرگتر از 1) به 1 نزدیک شویم می‌گوئیم x از سمت راست به 1 میل می‌کند و می‌نویسیم: $x\to 1^+$ و اگر از سمت چپ (مقادیر کوچکتر از 1) به 1 نزدیک شویم می‌گوئیم x از سمت چپ به 1 میل می‌کند و می‌نویسیم: $x\to 1^-$

* * *

تعریف همسایگی یک عدد:

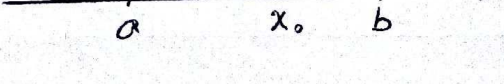
فرض کنیم x_0 یک عدد حقیقی باشد هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌گوئیم. به عبارت دیگر اگر $x_0\in(a,b)$ باشد بازه (a,b) را یک همسایگی x_0 نامیده و x_0 را یک نقطه درونی بازه (a,b) می‌گوئیم.



مثلاً: بازه $(0,2)$ یک همسایگی عدد 1 یا ۱٫۳ یا $\frac{1}{2}$ یا ... است.

تعریف همسایگی محذوف:

اگر عدد x_0 را از همسایگی (a,b) حذف کنیم یعنی $(a,b)-\{x_0\}$ به مجموعه بدست آمده یک همسایگی محذوف (حذف شده) عدد x_0 می‌گوئیم به عبارت دیگر همسایگی محذوف x_0 بصورت $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ است.



تعریف همسایگی راست و چپ:

اگر $r>0$ باشد بازه (x_0,x_0+r) را یک همسایگی راست عدد x_0 و (x_0-r,x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می‌گوئیم. r را شعاع همسایگی می‌نامند.

مثلاً بازه (۱ و ۵) یک همسایگی راست عدد ۱ و بازه (۲,۳) یک همسایگی چپ عدد ۳ است

مثال ۱: مجموعه جواب نامعادله $|x+۱|<۲$ همسایگی چه اعدادی است؟

$|x+۱|<۲ \Rightarrow -۲<x+۱<۲ \Rightarrow -۳<x<۱ \Rightarrow$ جواب $=(-۳و۱)$

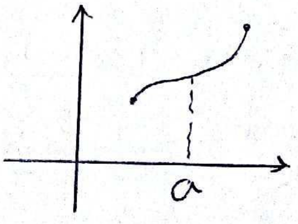
مثال ۲: بازه $(x+۱ , ۲x+۵)$ یک همسایگی عدد ۱ است. مجموعه مقادیر x را بدست آورید:

$$\begin{cases} x+۱<۱ \Rightarrow x<۰ \\ ۱<۲x+۵ \Rightarrow -۲<x \end{cases} \xrightarrow{\cap} -۲<x<۰$$

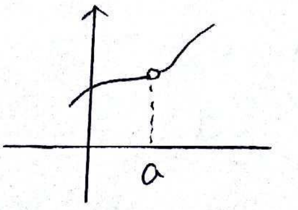
مثال ۳: یک همسایگی محذوف بصورت $(۳a-۷ , a+۵)-\{۳\}$ است مجموعه مقادیر a را پیدا کنید:

$$\begin{cases} ۳a-۷<۳ \Rightarrow a<\frac{۱۰}{۳} \\ ۳<a+۵ \Rightarrow -۲<a \end{cases} \xrightarrow{\cap} -۲<a<\frac{۱۰}{۳}$$

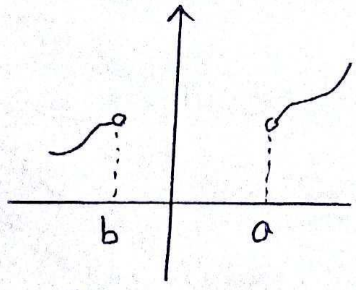
تعریف تابع در همسایگی a:



تابع در همسایگی a تعریف شده است.



تابع در همسایگی محذوف a تعریف شده است.

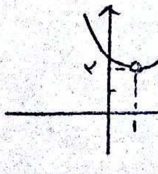


تابع فقط در همسایگی راست a و در همسایگی چپ b تعریف شده است.

نمونه سوال خرداد:

مثال: نمودار تابعی را رسم کنید که شرایط زیر را داشته باشد:

تابع در $x=۱$ تعریف نشده باشد ولی در همسایگی محذوف ۱ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

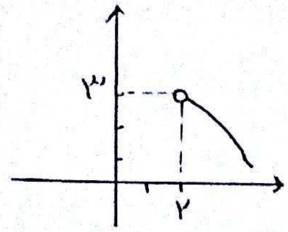


حد=۲
$f(۱)=$ تعریف نشده

حد راست:

اگر x از سمت راست به a میل کند (نزدیک شود) و مقدار تابع $f(x)$ به عددی مانند L_1 نزدیک شود، L_1 را حد راست تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ می‌نامند و می‌نویسند:

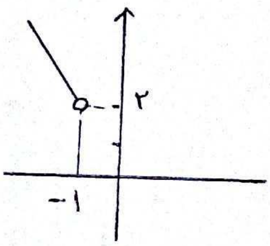
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$$



$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۳$$

حد چپ:

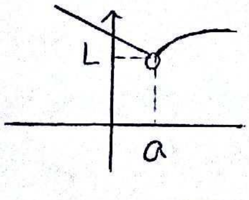
اگر x از سمت چپ به a میل کند (نزدیک شود) و مقدار تابع $f(x)$ به عددی مانند L_2 نزدیک شود L_2 را حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ می‌نامند و می‌نویسند:



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$$

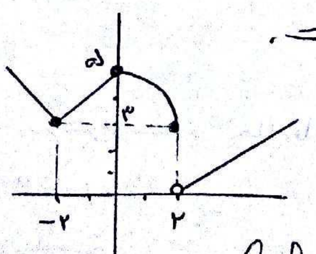
$$\lim_{x \to -۱^-} f(x) = ۲$$

حد تابع: اگر حد راست و حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ موجود و باهم برابر باشد می‌گوئیم تابع $f(x)$ در $x=a$ دارای حدی برابر L است و آنرا بصورت زیر می‌نویسیم:



$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

مثال 1: نمودار تابع f بصورت مقابل داده شده است. مطلوبست محاسبه حدهای زیر:

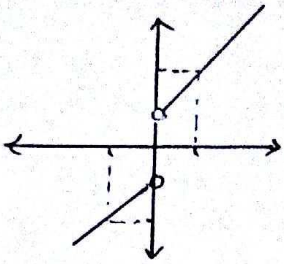


$\lim_{x \to ۰^+} f(x) = ۵$ $\lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۳$ $\lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۰$

$\lim_{x \to -۲} f(x) = ۳$ $\lim_{x \to ۰} f(x) = ۵$ $\lim_{x \to ۰^-} f(x) = ۵$ $\lim_{x \to ۲} f(x) =$ وجود ندارد

مثال ۲ : نمودار تابع $f(x)=x+\frac{|x|}{x}$ را رسم کرده و حد تابع را در $x=۰$ بررسی کنید.

$D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$



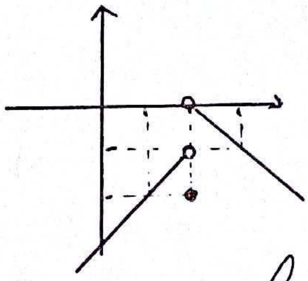
$x>۰ \Rightarrow |x|=x \Rightarrow f(x)=x+\frac{x}{x} \Rightarrow f(x)=x+1$

$x<۰ \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow f(x)=x+\frac{-x}{x} \Rightarrow f(x)=x-1$

$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=1$ $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-1$ $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=$ وجود ندارد

مثال ۳ : نمودار تابع زیر را رسم کرده و حد تابع را در $x=۲$ بررسی کنید؟

$$f(x)=\begin{cases} -x+۲ & x>۲ \\ -۲ & x=۲ \\ x-۳ & x<۲ \end{cases}$$

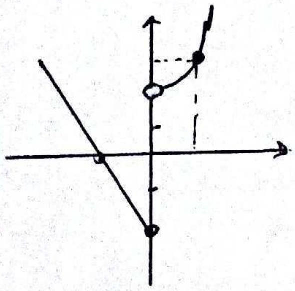


$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۰$

$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=-1$

$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=$ وجود ندارد

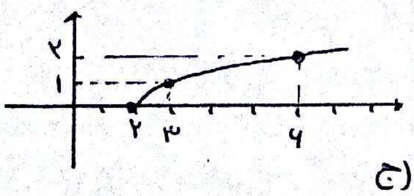
مثال ۴ : نمودار تابع زیر را رسم کرده و حد تابع را در $x=۰$ در صورت وجود بیابید



$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۲$ $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۲$

$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=$ وجود ندارد

مثال ۵ : در تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x-۲}$ با رسم نمودار، موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:



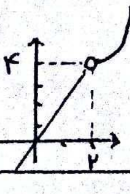
الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=$ وجود ندارد (تابع در $x<۲$ تعریف نشده است.)

ج) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=$ وجود ندارد

د) $f(۲)=۰$

مثال ۶ : تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطه $x=۲$ تعریف نشده باشد و $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$



قضایای حد :

۱) حد تابع ثابت در هر نقطه برابر همان مقدار ثابت است.

$$\lim_{x\to a} C = C$$

مثال) $\lim_{x\to a} ۴ = ۴$ $\lim_{x\to ۰} (-۷) = -۷$

۲) حد تابع همانی در هر نقطه برابر طول آن نقطه است.

$$\lim_{x\to a} x = a$$

مثال) $\lim_{x\to ۳} x = ۳$ $\lim_{x\to -۲} x = -۲$

۳) حد تابع چند جمله‌ای در هر نقطه برابر است با مقدار تابع در همان نقطه

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = f(a)$$

مثال) $\lim_{x\to ۱} (x^۳ - ۴x^۲ + ۱) = ۱^۳ - ۴(۱)^۲ + ۱ = ۱ - ۴ + ۱ = -۲$

۴) $$\lim_{x\to a} x^n = a^n , n \in N$$

مثال) $\lim_{x\to ۲} x^۵ = ۲^۵ = ۳۲$

۵) $$\lim_{x\to a} k f(x) = k \lim_{x\to a} f(x)$$

مثال) $\lim_{x\to -۲} ۵(x^۲ - ۴x + ۱) = ۵ \lim_{x\to -۲} (x^۲ - ۴x + ۱) = ۵ \left((-۲)^۲ - ۴(-۲) + ۱\right) = ۵ \times ۱۳ = ۶۵$

۶) اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند که در نقطه $x=a$ دارای حد باشند آنگاه :

$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال) $\lim_{x\to ۰} [(۴x+۱) + (x^۳ - ۳x^۲ + ۱)] = \lim_{x\to ۰} (۴x+۱) + \lim_{x\to ۰} (x^۳ - ۲x^۲ + ۱)$

$= ۱ + ۱ = ۲$

۷) اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند که در نقطه $x=a$ دارای حد باشند آنگاه:

الف) $$\boxed{\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)}$$

مثال) $$\lim_{x\to -۲} x^۲(۵x+۱) = \lim_{x\to -۲} x^۲ \times \lim_{x\to -۲}(۵x+۱) = (-۲)^۲ \times (۵(-۲)+۱) = ۴\times(-۹) = -۳۶$$

ب) $$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}} \qquad (\lim_{x\to a} g(x) \neq ۰)$$

مثال) $$\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲+۱}{x^۳-۳x+۲} = \frac{\lim_{x\to ۰}(x^۲+۱)}{\lim_{x\to ۰}(x^۳-۳x+۲)} = \frac{۱}{۲}$$

۸) اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $n\in N$ آنگاه:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}}$$

مثال) $$\lim_{x\to ۱}\sqrt[۳]{x+۷} = \sqrt[۳]{\lim_{x\to ۱}(x+۷)} = \sqrt[۳]{۱+۷} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

۹) اگر $\lim_{x\to a} f(x) \neq ۰$ آنگاه:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{۱}{f(x)} = \frac{۱}{\lim_{x\to a} f(x)}}$$

مثال) $$\lim_{x\to ۳}\frac{۱}{x^۲-۴} = \frac{۱}{\lim_{x\to ۳}(x^۲-۴)} = \frac{۱}{۳^۲-۴} = \frac{۱}{۵}$$

۱۰) حد توابع مثلثاتی در هر نقطه با مقدار تابع مثلثاتی در آن نقطه برابر است.

$$\lim_{x\to a}\sin x = \sin a \qquad \lim_{x\to a}\cos x = \cos a$$

$$\lim_{x\to a}\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \qquad \lim_{x\to a}\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} a$$

مثال) مطلوبست محاسبه حد توابع زیر:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{۴}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$

۲) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+\cos\pi} = \frac{1}{1+(-1)} = \frac{1}{۰} =$ حد وجود ندارد

۳) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۳}} tg\,x = tg\,\frac{\pi}{۳} = \sqrt{۳}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\cos x}{۲+\sin x} = \frac{\cos ۰}{۲+\sin ۰} = \frac{1}{۲+۰} = \frac{1}{۲}$

۵) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x.\cos x}{1+\cos^{۲} x} = \frac{\sin\pi.\cos\pi}{1+\cos^{۲}\pi} = \frac{۰\times(-1)}{1+(-1)^{۲}} = \frac{۰}{۲} = ۰$

۶) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{|\cos x|}{x-\pi} = \frac{|\cos\frac{\pi}{۲}|}{\frac{\pi}{۲}-\pi} = \frac{۰}{-\frac{\pi}{۲}} = ۰$ (تمرین کتاب)

* * *

تذکر مهم:

تمام قوانینی که درباره حد توابع مطرح شد برای حد راست و حد چپ تابع نیز برقرار است.

(تمرین کتاب) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} \frac{\sin x}{x+\cos x} = \frac{\sin(۰^{+})}{۰^{+}+\cos(۰^{+})} = \frac{۰}{۰+1} = ۰$

* * *

۱۱) در محاسبه حد توابع شامل قدر مطلق، حد چپ و حد راست تابع را جداگانه محاسبه می‌کنیم اگر با هم برابر شدند، تابع حد دارد.

مثال ۱: مطلوبست محاسبه حد تابع $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$ در نقطه $x=1$:

حد راست $= \lim\limits_{x\to 1^{+}} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^{+}} (\frac{|x-1|}{x-1}) = \lim\limits_{x\to 1^{+}} (\frac{x-1}{x-1}) = \lim\limits_{x\to 1^{+}} 1 = 1$

حد چپ $= \lim\limits_{x\to 1^{-}} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^{-}} (\frac{|x-1|}{x-1}) = \lim\limits_{x\to 1^{-}} (-\frac{(x-1)}{x-1}) = \lim\limits_{x\to 1^{-}} (-1) = -1$

$\Rightarrow$ تابع در $x=1$ حد ندارد.

مثال ۲: مطلوبست محاسبه حد تابع $f(x)=\frac{x}{|x|}$ در نقطه $x=۰$:

حد راست $= \lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{x}{|x|}\right) = \lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to ۰^+}(۱)=۱$

حد چپ $= \lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-}\left(\frac{x}{|x|}\right) = \lim_{x\to ۰^-}\left(\frac{x}{-x}\right) = \lim_{x\to ۰^-}(-۱)=-۱$

$\Rightarrow$ تابع در $x=۰$ حد ندارد.

مثال ۳: مطلوبست محاسبه حد تابع $f(x)=|x-۲|$ در نقطه $x=۵$:

حل: در سمت راست و چپ $x=۵$ مقدار تابع مثبت است پس نیازی به محاسبه حد راست و حد چپ نیست

$$\lim_{x\to ۵} f(x) = \lim_{x\to ۵}(|x-۲|) = \lim_{x\to ۵}(x-۲) = ۵-۲=۳$$

مثال ۴: مطلوبست محاسبه حد تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-۲x+۱}$ در نقطه $x=۱$:

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۲x+۱}=\sqrt{(x-۱)^۲}=|x-۱|$$

حد راست $= \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+}(|x-۱|) = \lim_{x\to ۱^+}(x-۱) = ۱-۱=۰$

حد چپ $= \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-}(|x-۱|) = \lim_{x\to ۱^-}(-(x-۱)) = -(۱-۱)=۰$

$\Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x)=۰$

---

۱۲) محاسبه حد توابع شامل جزء صحیح :

حد راست و حد چپ را طبق فرمولهای زیر محاسبه می‌کنیم اگر برابر باشند تابع دارای حد است.

$$\boxed{\lim_{x\to n^+}[x]=n} \quad , \quad \boxed{\lim_{x\to n^-}[x]=n-۱}$$

مثال ۱: مطلوبست محاسبه: $\lim_{x\to ۵}\frac{[x]+۳}{[x]-۳}=?$

حد راست $= \lim_{x\to ۵^+}\frac{[x]+۳}{[x]-۳} = \frac{۵+۳}{۵-۳} = \frac{۸}{۲}=۴$

حد چپ $= \lim_{x\to ۵^-}\frac{[x]+۳}{[x]-۳} = \frac{(۵-۱)+۳}{(۵-۱)-۳} = \frac{۷}{۱}=۷$

حد چپ و حد راست برابر نیست پس: $\lim_{x\to ۵}\frac{[x]+۳}{[x]-۳}=$ وجود ندارد

مثال ۲ : مطلوبست محاسبهٔ : $\lim\limits_{x\to 2}[x]=?$

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to 2^+}[x]=2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to 2^-}[x]=2-1=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}[x] = \text{وجود ندارد}$$

مثال ۳ : مطلوبست محاسبهٔ : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{[x-1]}=?$

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{[x-1]}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{[x]-1}=\frac{1^+-1}{1-1}=\frac{\text{عدد مثبت خیلی کوچک}}{0}=\text{وجود ندارد}$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{[x-1]}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{[x]-1}=\frac{1^- -1}{(1-1)-1}=\frac{0}{-1}=0$$

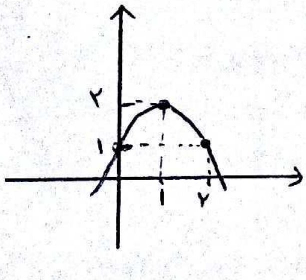
پس : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{[x-1]}=$ وجود ندارد

مثال ۴ : مطلوبست محاسبهٔ : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-[x^2]}{x-[x]}$

$x\to 1^+ \Rightarrow x^2\to 1^+$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-[x^2]}{x-[x]}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=1+1=2$$

تمرین کتاب ص ۱۲۹ : با رسم نمودار تابع $f(x)=-(x-1)^2+2$ حدود زیر را مشخص کنید : ([ ] نماد جزء صحیح است)



الف) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)]=[2^-]=1$

ب) $[\lim\limits_{x\to 1}f(x)]=[2]=2$

تمرین ص ۱۲۹ : با توجه به دامنه تابع ، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ در نقطه $x=1$ چه می توان گفت ؟

$x^2-x\geq 0 \Rightarrow x(x-1)\geq 0$

x		0		1	
x^2-x	$+$	0	$-$	0	$+$

$D_f=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

در سمت چپ $x=1$ عبارت داخل رادیکال منفی است و تابع تعریف نشده است

پس: $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(\sqrt{x^2-x})=$ وجود ندارد

* * *

تمرین ص ۱۲۹ : با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x)=\frac{x}{[x]-2}$ در نقطه $x=2$ چه می توان گفت؟

$[x]-2=0 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow 2\leq x<3 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-[2,3)=(-\infty,2)\cup[3,+\infty)$

تابع در $x=2$ و سمت راست ۲ تعریف نشده است چون عضو دامنه نیست

پس: $\lim_{x\to 2^+} f(x)=$ وجود ندارد

* * *

تمرین ص ۱۳۴ : مطلوبست محاسبه حد:

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{x-[x]}{1-x}=\frac{\frac{1}{2}-[\frac{1}{2}]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$$

* * *

تمرین ص ۱۳۸ :

مطلوبست محاسبه:

1) $\lim_{x\to 1^-}\frac{x-[x]}{x^2+2}=\frac{1-[1^-]}{(1^-)^2+2}=\frac{1-(1-1)}{1+2}=\frac{1-0}{3}=\frac{1}{3}$

2) $\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2}=\frac{\sqrt{2-2}}{[2^+]+2}=\frac{0}{4}=0$

* * *

تمرین ص ۱۳۹ : تابع g را به گونه ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{x^2-1}=4$

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{x^2-1}=4 \Rightarrow \frac{\lim_{x\to 2}g(x)}{\lim_{x\to 2}(x^2-1)}=4 \Rightarrow \frac{\lim_{x\to 2}g(x)}{2^2-1}=4 \Rightarrow \lim_{x\to 2}g(x)=12$$

می توانیم $g(x)=dx+2$ درنظر بگیریم

تمرین ص ۱۴۰:

مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=-1$ حد داشته باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+[x]}{|x|} & x<-1\\ 3x+b & x>-1\end{cases}$$

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(3x+b)=3(-1)+b=-3+b$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+[x]}{|x|}=\frac{(-1)^2+[-1^-]}{|-1|}=\frac{1+(-1-1)}{1}=\frac{-1}{1}=-1$$

شرط وجود حد: $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^-} f(x) \Rightarrow -3+b=-1 \Rightarrow \boxed{b=2}$

«تمرینات تکمیلی»

۱) مطلوبست محاسبه:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3x-|x|}{2x+[x]}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x-x}{2x+[x]}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{2x+[x]}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{2x+0}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

۲) مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{|x+1|} & x>-1\\ [x]+a & x<-1\end{cases}$ در $x=-1$ دارای حد باشد؟

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+x}{|x+1|}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+x}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}x=-1$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}([x]+a)=-1-1+a=-2+a$$

شرط وجود حد: حد راست = حد چپ $\Rightarrow -2+a=-1$

$\Rightarrow \boxed{a=1}$

۱۳) حالت $\frac{0}{0}$ و رفع ابهام:

در محاسبه حد توابعی که بصورت $\frac{f(x)}{g(x)}$ هستند، اگر حد صورت و حد مخرج برابر صفر باشد اصطلاحاً به آن حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌گوئیم برای رفع ابهام و محاسبه حد، صورت و مخرج را تجزیه کرده و عامل صفر کننده صورت و مخرج را حذف می‌کنیم تا حد محاسبه شود در توابع رادیکالی از روش گویا کردن استفاده می‌کنیم:

تمرین: مطلوبست محاسبه حد توابع زیر:

۱) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{3x^2-12} = \frac{2^3-8}{3(2)^2-12} = \frac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{3x^2-12} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{3(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{3(x+2)} = \frac{12}{12} = 1$

۲) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = \frac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-3}{x+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

۳) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3-2x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3-2x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x^2-x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x-1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

۴) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2x^2-x-1}{|x^2-x^3|} = \frac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2-x-1}{|x^2(1-x)|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(2x+1)}{x^2|1-x|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(2x+1)}{-x^2(1-x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(2x+1)}{x^2(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{x^2} = \frac{3}{1} = 3$$

۵) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱} = \frac{۰}{۰}$ مبهم

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱} = \lim \frac{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}(\sqrt{x}+۱) = ۲$$

* * *

۶) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{x-۲}{\sqrt{۲x}-۲} = \frac{۰}{۰}$ مبهم

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{\sqrt{۲x}-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(\sqrt{۲x}+۲)}{(\sqrt{۲x}-۲)(\sqrt{۲x}+۲)} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(\sqrt{۲x}+۲)}{۲x-۴} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(\sqrt{۲x}+۲)}{۲(x-۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt{۲x}+۲}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

* * *

۷) $\lim\limits_{x\to ۹} \frac{x-۹}{\sqrt{x}-۳} = \frac{۰}{۰}$ مبهم

$$\lim_{x\to ۹} \frac{x-۹}{\sqrt{x}-۳} = \lim_{x\to ۹} \frac{(\sqrt{x}-۳)(\sqrt{x}+۳)}{\sqrt{x}-۳} = \lim_{x\to ۹}(\sqrt{x}+۳) = \sqrt{۹}+۳ = ۳+۳ = ۶$$

* * *

۸) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱} = \frac{۰}{۰}$ مبهم

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)}{\sqrt{x}-۱} = \lim_{x\to ۱}\sqrt{x} = \sqrt{۱} = ۱$$

روش دوم گویا کردن

* * *

۹) $\lim\limits_{x\to -۲} \frac{۲x+\sqrt{x+۱۸}}{\sqrt{۳x+۷}-۱} = \frac{۰}{۰}$ مبهم

$$\lim_{x\to -۲} \frac{۲x+\sqrt{x+۱۸}}{\sqrt{۳x+۷}-۱} = \lim_{x\to -۲}\left(\frac{۲x+\sqrt{x+۱۸}}{\sqrt{۳x+۷}-۱} \times \frac{۲x-\sqrt{x+۱۸}}{۲x-\sqrt{x+۱۸}} \times \frac{\sqrt{۳x+۷}+۱}{\sqrt{۳x+۷}+۱}\right)$$

$$= \lim_{x\to -۲} \frac{(۴x^۲-(x+۱۸))(\sqrt{۳x+۷}+۱)}{(۳x+۷-۱)(۲x-\sqrt{x+۱۸})} = \lim_{x\to -۲} \frac{(۴x^۲-x-۱۸)(\sqrt{۳x+۷}+۱)}{(۳x+۶)(۲x-\sqrt{x+۱۸})} =$$

$$= \lim_{x\to -۲} \frac{(x+۲)(۴x-۹)(\sqrt{۳x+۷}\ +۱)}{۳(x+۲)(۲x-\sqrt{x+۱۸}\ )} = \frac{-۱۷\times ۲}{۳(-۸)} = \frac{۱۷}{۱۲}$$

رفع ابهام از کسرهای مثلثاتی:

اگر در محاسبه حدهای مثلثاتی به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ برسیم برای رفع ابهام از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{x}{\sin x} = ۱}$$

$$\boxed{\lim_{u\to ۰} \frac{\sin u}{u} = \lim_{u\to ۰} \frac{u}{\sin u} = ۱}$$

u تابعی از x است.

مثال) مطلوبست محاسبه حدهای زیر:

۱) $\lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos ۲x}{x^۲} = \frac{۱-۱}{۰} = \frac{۰}{۰}$ مبهم (خرداد ۹۰)

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos ۲x}{x^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{۲\sin^۲ x}{x^۲} = \lim_{x\to ۰} ۲\left(\frac{\sin x}{x}\right)^۲ = ۲\times ۱^۲ = ۲$$

۲) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۳x}{۵x} \overset{\text{مبهم } \frac{۰}{۰}}{=} \lim_{x\to ۰} \left(\frac{\sin ۳x}{۳x} \times \frac{۳x}{۵x}\right) = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۳x}{۳x} \times \lim_{x\to ۰} \frac{۳x}{۵x} = ۱\times\frac{۳}{۵} = \frac{۳}{۵}$

نتیجه: $\boxed{\lim_{x\to ۰} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}}$

۳) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۵x}{\sin ۷x} = \frac{۰}{۰}$ مبهم

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۵x}{\sin ۷x} = \lim_{x\to ۰} \left(\frac{۵x \times \frac{\sin ۵x}{۵x}}{۷x \times \frac{\sin ۷x}{۷x}}\right) = \lim_{x\to ۰} \frac{۵x\times ۱}{۷x\times ۱} = \lim_{x\to ۰} \frac{۵x}{۷x}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{۵}{۷} = \frac{۵}{۷}$$

نتیجه: $\boxed{\lim_{x\to ۰} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}}$

۴) $\lim_{x\to ۰^+} \frac{\sqrt{۱-\cos ۲x}}{\sin \frac{x}{۲}} = \frac{۰}{۰}$ مبهم (شهریور ۹۰)

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{۱-\cos ۲x}}{\sin\frac{x}{۲}} = \lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{۲\sin^۲ x}}{\sin\frac{x}{۲}} = \lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{۲}\times|\sin x|}{\sin\frac{x}{۲}} = \lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{۲}\,\sin x}{\sin\frac{x}{۲}}$$

$$= \lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{۲}\times x\times\frac{\sin x}{x}}{\frac{x}{۲}\times\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}}} = \lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{۲}\times x}{\frac{x}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{\frac{۱}{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

d) $\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲}{۱-\cos x} = \frac{۰^۲}{۱-۱} = \frac{۰}{۰}$ مبهم

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{x^۲}{۱-\cos x}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}\right) = \lim_{x\to ۰}\frac{x^۲(۱+\cos x)}{۱-\cos^۲ x} = \lim_{x\to ۰}\frac{x^۲(۱+\cos x)}{\sin^۲ x}$$

$$= \lim_{x\to ۰}\left(\left(\frac{x^۲}{\sin^۲ x}\right)\times(۱+\cos x)\right) = ۱\times(۱+۱) = ۲$$

رفع ابهام به روش تغییر متغیر

در محاسبه حدهای مثلثاتی در حالت $\frac{۰}{۰}$ اگر x به سمت عددی غیر صفر مانند a میل کند یعنی $x\to a$ در اینصورت $x-a=t$ درنظر بگیریم و از آنجا $x=a+t$ را در صورت مسئله جایگذاری کرده و حد را حساب می کنیم (که در این حالت $t\to ۰$ میل می کند)

$*\ ۱-\cos x = ۲\sin^۲(\frac{x}{۲})$

مثال) مطلوبست محاسبه حدود زیر:

۱) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲x-\pi}{\cos x} = \frac{۲(\frac{\pi}{۲})-\pi}{\cos\frac{\pi}{۲}} = \frac{\pi-\pi}{۰} = \frac{۰}{۰}$ مبهم

تغییر متغیر: $x-\frac{\pi}{۲}=t \Rightarrow x=t+\frac{\pi}{۲}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲x-\pi}{\cos x} = \lim_{t\to ۰}\frac{۲(t+\frac{\pi}{۲})-\pi}{\cos(t+\frac{\pi}{۲})} = \lim_{t\to ۰}\frac{۲t}{-\sin t} = -۲\lim_{t\to ۰}\frac{t}{\sin t}$$

$$= -۲\times ۱ = -۲$$

۲) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sin ۲x - ۱}{۴x - \pi} = \frac{\sin ۲(\frac{\pi}{۴}) - ۱}{۴(\frac{\pi}{۴}) - \pi} = \frac{۱-۱}{\pi - \pi} = \frac{۰}{۰}$ مبهم

تغییر متغیر : $x - \frac{\pi}{۴} = t \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{۴}$

$$\lim_{t \to ۰} \frac{\sin ۲(t+\frac{\pi}{۴}) - ۱}{۴(t + \frac{\pi}{۴}) - \pi} = \lim_{t \to ۰} \frac{\sin(۲t + \frac{\pi}{۲}) - ۱}{۴t + \pi - \pi} = \lim_{t \to ۰} \frac{\cos ۲t - ۱}{۴t}$$

$$= \lim_{t \to ۰} \frac{-۲\sin^۲ t}{۴t} = (\lim_{t \to ۰} \frac{\sin t}{t}) \times (\lim_{t \to ۰} \frac{-۲\sin t}{۴}) = ۱ \times \frac{-۲ \times ۰}{۴} = ۰$$

* * *

۳) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱ - \sin x}{\cos x} = \frac{۱ - \sin \frac{\pi}{۲}}{\cos \frac{\pi}{۲}} = \frac{۱-۱}{۰} = \frac{۰}{۰}$ مبهم (تمرین کتاب)

تغییر متغیر : $x - \frac{\pi}{۲} = t \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{۲}$

$$\lim_{t \to ۰} \frac{۱ - \sin(\frac{\pi}{۲} + t)}{\cos(\frac{\pi}{۲} + t)} = \lim_{t \to ۰} \frac{۱ - \cos t}{-\sin t} = \lim_{t \to ۰} \frac{۲\sin^۲(\frac{t}{۲})}{-۲\sin(\frac{t}{۲})\cos(\frac{t}{۲})}$$

$$= \lim_{t \to ۰} \frac{\sin(\frac{t}{۲})}{-\cos(\frac{t}{۲})} = \frac{۰}{-۱} = ۰$$

* * *

۴) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{۴})}{\cos x - \sin x} = \frac{\cos(\frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۴})}{\cos \frac{\pi}{۴} - \sin \frac{\pi}{۴}} = \frac{\cos \frac{\pi}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۰}{۰}$ مبهم (تمرین کتاب)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{۴})}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\cos x . \cos \frac{\pi}{۴} - \sin x . \sin \frac{\pi}{۴}}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x}{\cos x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۵) $\lim_{x\to ۰} \frac{x^۲}{|۱-\cos x|} = \frac{۰^۲}{|۱-۱|} = \frac{۰}{۰} =$ مبهم   (تمرین کتاب)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲}{|۱-\cos x|} = \lim_{x\to ۰}\frac{x^۲}{۱-\cos x} = \lim_{x\to ۰}\frac{x^۲}{۲\sin^۲(\frac{x}{۲})} = \lim_{x\to ۰}\frac{۴(\frac{x}{۲})^۲}{۲\sin^۲(\frac{x}{۲})}$$

$$= ۲\times\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\frac{x}{۲}}{\sin(\frac{x}{۲})}\right)^۲ = ۲\times(۱)^۲ = ۲$$

۶) $\lim_{x\to ۰}\frac{۲-۲\cos^۲ x}{x\sin x} = \frac{۰}{۰}$ مبهم   (تمرین کتاب)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲-۲\cos^۲ x}{x\sin x} = \lim_{x\to ۰}\frac{۲(۱-\cos^۲ x)}{x\sin x} = \lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲ x}{x\sin x} = ۲\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x} = ۲\times ۱ = ۲$$

۷) $\lim_{x\to -\pi}\frac{\cos x+۱}{x+\pi} = \frac{۰}{۰}$ مبهم   (تمرین کتاب)

تغییر متغیر: $x+\pi = t \Rightarrow x = t-\pi$

$$\lim_{x\to -\pi}\frac{\cos x+۱}{x+\pi} = \lim_{t\to ۰}\frac{\cos(t-\pi)+۱}{t} = \lim_{t\to ۰}\frac{-\cos t+۱}{t} = \lim_{t\to ۰}\frac{۲\sin^۲(\frac{t}{۲})}{t}$$

$$= \lim_{t\to ۰}\frac{\sin^۲(\frac{t}{۲})}{\frac{t}{۲}} = \lim_{t\to ۰}\left(\sin\frac{t}{۲}\times\frac{\sin\frac{t}{۲}}{\frac{t}{۲}}\right) = ۰\times ۱ = ۰$$

۸) $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \frac{۰}{۰}$ مبهم   (تمرین کتاب)

تغییر متغیر: $x-a = t \Rightarrow x = a+t$

$$\lim_{t\to ۰}\frac{\sin(a+t)-\sin a}{t} = \lim_{t\to ۰}\frac{\sin a\cos t+\cos a\sin t-\sin a}{t} = \lim_{t\to ۰}\frac{\sin a(\cos t-۱)}{t}$$

$$+\lim_{t\to ۰}\frac{\cos a\sin t}{t} = ۰+\cos a = \cos a$$

۹) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۴x-۲\pi} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۴(x-\frac{\pi}{۳})} = \lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{۴t} = \frac{۱}{۴}\times ۱ = \frac{۱}{۴}$$

تمرین ص ۱۴۴ کتاب درسی:

مطلوبست محاسبه حدود زیر: (حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$)

۱) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{x^۲[x]-۸}{x-۲} = \lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{x^۲[۲^+]-۸}{x-۲} = \lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{۲x^۲-۸}{x-۲} = \lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{۲(x-۲)(x+۲)}{x-۲}$

$= \lim\limits_{x\to ۲^+} ۲(x+۲) = ۲(۲+۲) = ۸$

۲) $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}} = \lim\limits_{x\to ۴} \left(\frac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}} \times \frac{۲+\sqrt{x}}{۲+\sqrt{x}} \times \frac{۳+\sqrt{۲x+۱}}{۳+\sqrt{۲x+۱}} \right)$

$= \lim\limits_{x\to ۴} \frac{(۴-x)(۳+\sqrt{۲x+۱})}{(۹-(۲x+۱))(۲+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to ۴} \frac{(\cancel{۴-x})(۳+\sqrt{۲x+۱})}{۲(\cancel{۴-x})(۲+\sqrt{x})} = \frac{۳+۳}{۲\times ۴} = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{x^۲+x} = \lim\limits_{x\to ۰} \left(\frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{x^۲+x} \times \frac{\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x}} \right)$

$= \lim\limits_{x\to ۰} \frac{(۱+\sqrt{x})^۲-(۱-\sqrt{x})^۲}{x(x+۱)(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})} = \lim\limits_{x\to ۰} \left(\frac{\cancel{۱}+x-\cancel{۱}+x}{x(x+۱)(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})} \right)$

$= \lim\limits_{x\to ۰} \frac{۲x}{x(x+۱)(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})} = \lim\limits_{x\to ۰} \frac{۲}{(x+۱)(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})} = \frac{۲}{۲} = ۱$

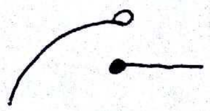
۴) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱} = \frac{۰}{۰}$ مبهم

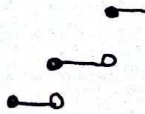
$\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱} \frac{(\cancel{\sqrt{x}-۱})(۲\sqrt{x}-۱)}{(\cancel{\sqrt{x}-۱})(\sqrt{x}+۱)} = \lim\limits_{x\to ۱} \frac{۲\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x}+۱}$

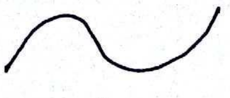
$= \frac{۳-۱}{۱+۱} = \frac{۱}{۲}$

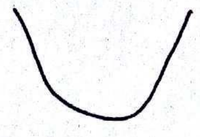
پیوستگی:

هرگاه نمودار یک تابع را با یک بار حرکت قلم بر روی کاغذ بتوان رسم کرد آن تابع را پیوسته می‌نامند


پیوسته نیست


پیوسته نیست


پیوسته است


پیوسته است

از نظر ریاضی:

تابع $f(x)$ را در نقطه $x=c$ پیوسته می‌گوئیم هرگاه:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

به عبارت دیگر:

تابع $f(x)$ را در نقطه $x=c$ پیوسته می‌گوئیم هرگاه در این نقطه حد راست برابر حد چپ برابر مقدار تابع باشد در غیر اینصورت تابع در $x=c$ ناپیوسته است.

مثال ۱: پیوستگی تابع $f(x)=x+۱$ را در نقطه $x=۳$ بررسی کنید.

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+}(x+۱) = ۳+۱ = ۴$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^-}(x+۱) = ۳+۱ = ۴$$

$$\text{مقدار تابع} = f(۳) = ۳+۱ = ۴$$

تابع $f(x)$ در $x=۳$ پیوسته است ⇐ مقدار تابع = حد چپ = حد راست

مثال ۲: پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} ۱ & x\geq ۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$ را در نقطه $x=۰$ بررسی کنید

مقدار تابع $= f(۰)=۱$ حد چپ $= \lim_{x\to ۰^-} f(x) = -۱$ حد راست $= \lim_{x\to ۰^+} f(x) = ۱$

تابع f در $x=۰$ پیوسته نیست ⇐ مقدار تابع = حد راست ≠ حد چپ

مثال ۳: به ازای چه مقداری از a تابع $f(x)=\begin{cases}-x+2 & x<2\\ ax-2 & x\geq 2\end{cases}$ در $x=2$ پیوسته است؟

حد راست $= \lim\limits_{x\to 2^+}(ax-2) = 2a-2$

حد چپ $= \lim\limits_{x\to 2^-}(-x+2) = -2+2=0$

مقدار تابع $= f(2)= a(2)-2=2a-2$

$$\Rightarrow 2a-2=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

مثال ۴: به ازای چه مقداری از a تابع $f(x)=\begin{cases}ax-1 & x>4\\ 3x+7 & x\leq 4\end{cases}$ در نقطه $x=4$ پیوسته است؟

حد راست $= \lim\limits_{x\to 4^+}(ax-1) = 4a-1$

حد چپ $= \lim\limits_{x\to 4^-}(3x+7) = 3(4)+7=19$

مقدار تابع $= f(4)= 19$

$$\Rightarrow 4a-1=19 \Rightarrow \boxed{a=5}$$

مثال ۵: به ازای چه مقادیری از a و b تابع $f(x)=\begin{cases}x & x\leq 1\\ ax+b & 1<x<4\\ -2x & x\geq 4\end{cases}$ پیوسته است؟

حل: باید پیوستگی تابع را در دو نقطه $x=1$ و $x=4$ همزمان بررسی کنیم:

حد راست $= \lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)= a+b$

حد چپ $= \lim\limits_{x\to 1^-} x=1$

مقدار تابع $= f(1)=1$

حد راست $= \lim\limits_{x\to 4^+}(-2x) = -8$

حد چپ $= \lim\limits_{x\to 4^-}(ax+b)=4a+b$

مقدار تابع $= f(4) = -8$

$$\begin{cases}a+b=1\\ 4a+b=-8\end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-3} , \boxed{b=4}$$

مثال ۶ : پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x+\frac{|۲x|}{x} & x\neq ۰ \\ ۲ & x=۰ \end{cases}$ را در نقطه $x=۰$ بررسی کنید.

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to ۰^+}\left(۳x+\frac{|۲x|}{x}\right)=\lim_{x\to ۰^+}\left(۳x+\frac{۲x}{x}\right)=\lim_{x\to ۰^+}(۳x+۲)=۰+۲=۲$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to ۰^-}\left(۳x+\frac{|۲x|}{x}\right)=\lim_{x\to ۰^-}\left(۳x+\frac{-۲x}{x}\right)=\lim_{x\to ۰^-}(۳x-۲)=۰-۲=-۲$$

چون حد راست با حد چپ مساوی نیست پس تابع در $x=۰$ پیوسته نیست

مثال ۷ : مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۲+bx+۱ & x>۲ \\ ۳ & x=۲ \\ (a+۱)x+b & x<۲ \end{cases}$ در نقطه $x=۲$ پیوسته باشد.

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to ۲^+}(ax^۲+bx+۱)=۴a+۲b+۱$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to ۲^-}((a+۱)x-b)=۲a+۲-b$$

$$\text{مقدار تابع} = f(۲)=۳ \Rightarrow \begin{cases} ۴a+۲b+۱=۳ \\ ۲a+۲-b=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴a+۲b=۲ \\ ۲a-b=۱ \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=\frac{۱}{۲}}\ \boxed{b=۰}$$

مثال ۸ : به ازای چه مقادیری از a و b تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{ax}{۱+[x]} & x<۱ \\ b & x=۱ \\ \frac{x^۲+x-۲}{\sqrt{x}-۱} & x>۱ \end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته است؟

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲+x-۲}{\sqrt{x}-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\left(\frac{(x-۱)(x+۲)}{\sqrt{x}-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۲)(\sqrt{x}+۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}(x+۲)(\sqrt{x}+۱)=۳\times۲=۶ \quad ①$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to ۱^-}\frac{ax}{۱+[x]}=\frac{a(۱)}{۱+(۱-۱)}=\frac{a}{۱}=a \quad ②$$

$$\text{مقدار تابع} = f(۱)=b \quad ③$$

$$①,②,③ \Rightarrow \boxed{a=b=۶}$$

پیوستگی راست و چپ:

تابع f را در نقطه $x=c$ از سمت راست پیوسته می‌نامیم هرگاه: $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=f(c)$ (حد راست برابر مقدار تابع باشد) در اینصورت می‌گوئیم تابع f در $x=c$ پیوستگی راست دارد.

همچنین تابع f را در نقطه $x=c$ از سمت چپ پیوسته می‌گوئیم هرگاه: $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=f(c)$ (حد چپ برابر مقدار تابع باشد) در اینصورت می‌گوئیم تابع f در $x=c$ پیوستگی چپ دارد.

مثال 1: تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x+۳ & x>۱ \\ ۵ & x=۱ \\ -x^۲+۳ & x<۱ \end{cases}$ مفروض است پیوستگی چپ و راست این تابع را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید

$$\left.\begin{array}{l} \text{حد راست} = \lim\limits_{x\to ۱^+}(۲x+۳) = ۲+۳ = ۵ \\ \text{حد چپ} = \lim\limits_{x\to ۱^-}(-x^۲+۳) = -(۱)^۲+۳ = ۲ \\ \text{مقدار تابع} = f(۱) = ۵ \end{array}\right\}$$

مقدارتابع = حدراست ≠ حدچپ ⇒ پس تابع در $x=۱$ پیوستگی راست دارد.

مثال 2: پیوستگی تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^۲-\dfrac{x-۱}{|x-۱|} & x\neq ۱ \\ ۲ & x=۱ \end{cases}$ را در $x=۱$ بررسی کنید

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to ۱^+}\left(x^۲-\frac{x-۱}{|x-۱|}\right) = \lim_{x\to ۱^+}\left(x^۲-\frac{x-۱}{x-۱}\right) = \lim_{x\to ۱^+}(x^۲-۱) = ۱^۲-۱ = ۰$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to ۱^-}\left(x^۲-\frac{x-۱}{|x-۱|}\right) = \lim_{x\to ۱^-}\left(x^۲-\frac{x-۱}{-(x-۱)}\right) = \lim_{x\to ۱^-}(x^۲+۱) = ۱^۲+۱ = ۲$$

$$\text{مقدار تابع} = f(۱) = ۲$$

تابع در $x=۱$ پیوستگی چپ دارد. ⇒ مقدارتابع = حدچپ ≠ حد راست

پیوستگی در بازه ها :

۱) پیوستگی در بازه (a,b) :

تابع f را در بازه (a,b) پیوسته می گوئیم هرگاه در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد.

مثال) پیوستگی تابع $f(x)=[x]+1$ را در بازه $(0,1)$ بررسی کنید

حل: فرض کنیم که a یک نقطه دلخواهی از بازه $(0,1)$ باشد حال پیوستگی تابع را در نقطه دلخواه a بررسی می کنیم:

$$a\in(0,1) \Rightarrow 0<a<1 \Rightarrow [a]=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{حد راست} = \lim\limits_{x\to a^+}([x]+1) = 0+1=1 \\ \text{حد چپ} = \lim\limits_{x\to a^-}([a]+1) = 0+1=1 \\ \text{مقدار تابع} = f(a)=[a]+1=0+1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مقدار تابع} = \text{حد چپ} = \text{حد راست}$$

تابع f در بازه $(0,1)$ پیوسته است.

* * *

۲) پیوستگی در بازه $[a,b]$:

تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته است هرگاه f در بازه (a,b) پیوسته باشد و در نقطه $x=a$ پیوستگی راست و در $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

مثال) پیوستگی تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x}+1 & x\in(0,1) \\ 2 & x=0,1 \end{cases}$ را در بازه $[0,1]$ بررسی کنید.

حل: ابتدا پیوستگی تابع f را در بازه $(0,1)$ بررسی می کنیم:

فرض کنیم a نقطه دلخواهی از $(0,1)$ باشد در اینصورت:

$$a\in(0,1) \Rightarrow 0<a<1 \Rightarrow |a|=a$$

حدراست $= \lim_{x\to a^+}\left(\frac{|x|}{x}+1\right)=\frac{|a|}{a}+1=\frac{a}{a}+1=1+1=2$

حدچپ $= \lim_{x\to a^-}\left(\frac{|x|}{x}+1\right)=\frac{|a|}{a}+1=\frac{a}{a}+1=1+1=2$

مقدارتابع $= f(a)=\frac{|a|}{a}+1=\frac{a}{a}+1=1+1=2$

تابع f در $(0,1)$ پیوسته است $\Leftarrow$ مقدارتابع $=$ حدچپ $=$ حدراست

پیوستگی راست تابع را در $x=0$ بررسی می‌کنیم:

حدراست $= \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{|x|}{x}+1\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x}+1\right)=\lim_{x\to 0^+}(1+1)=2$

مقدارتابع $= f(0)=2$

پس تابع در $x=0$ پیوستگی راست دارد.

پیوستگی چپ تابع را در $x=1$ بررسی می‌کنیم:

حدچپ $= \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{|x|}{x}+1\right)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x}{x}+1\right)=\lim_{x\to 1^-}(1+1)=2$

مقدارتابع $= f(1)=2$

پس تابع در $x=1$ پیوستگی چپ دارد

درنتیجه تابع f در $[0,1]$ پیوسته است.

تذکر مهم ۱:

تابع f را روی بازه $[a,b)$ پیوسته می‌گویند هرگاه روی بازه (a,b) پیوسته بوده و در نقطه $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

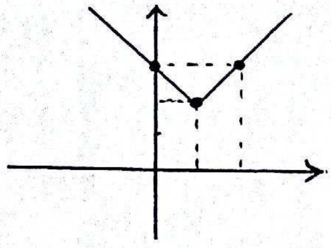
تذکر مهم ۲:

تابع f را روی بازه $(a,b]$ پیوسته می‌گویند هرگاه روی بازه (a,b) پیوسته بوده و در نقطه $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

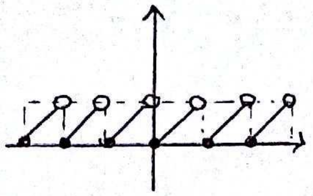
(تمرینات کتاب درسی)

۱) با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

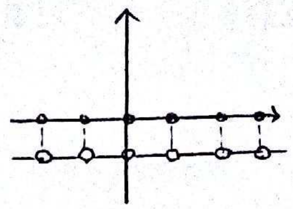
الف) $y=|x-1|+۲$ ب) $y=x-[x]$ پ) $y=[x]+[-x]$ ت) $y=\begin{cases} x(x-1) & x\leq ۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$



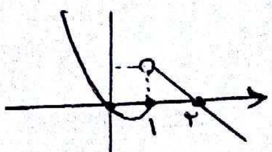
در کل اعداد حقیق پیوسته است.



در نقاط صحیح $(x\in \mathbb{Z})$ ناپیوسته است



در نقاط صحیح $(x\in \mathbb{Z})$ ناپیوسته است



فقط در نقطه $x=۱$ ناپیوسته است.

۲) در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=۱$ پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases} ۲x & x<۱ \\ a & x=۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$ ب) $g(x)=\begin{cases} \frac{x^۲+x-۲}{x-۱} & x\neq ۱ \\ a & x=۱ \end{cases}$ پ) $h(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} & ٠<x<۱ \\ [x]+a & x\geq ۱ \end{cases}$

ت) $K(x)=([x]-a)[x]$

حل الف

$$\left.\begin{aligned} \text{حد راست} &= \lim_{x\to ۱^+}(-x+۲)=۱ \\ \text{حد چپ} &= \lim_{x\to ۱^-}(۲x)=۲ \\ \text{مقدار تابع} &= f(۱)=a \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۱=۲=a \Rightarrow \text{امکان پذیر نیست} \Rightarrow$$

تابع به ازای هیچ مقدار a در $x=۱$ پیوسته نیست

حل ب

$$\lim_{x\to ۱} g(x)=\lim_{x\to ۱}\left(\frac{x^۲+x-۲}{x-۱}\right)=\lim_{x\to ۱}\frac{(x+۲)(x-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}(x+۲)=۳$$

$\text{مقدار تابع}=g(۱)=a$ شرط پیوستگی: $\lim_{x\to ۱} g(x)=g(۱) \Rightarrow \boxed{a=۳}$

حل پ $\text{مقدار تابع}=h(۱)=[۱]+a=۱+a$

$\text{حد راست}=\lim_{x\to ۱^+}([x]+a)=[۱^+]+a=۱+a$

$\text{حد چپ}=\lim_{x\to ۱^-}\left(\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}\right)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{\sqrt{x}-۱}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۱}{۲}$ $۱+a=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{a=-\frac{۱}{۲}}$

حل ت) حد راست $= \lim_{x\to ۱^+}([x]-a)[x] = ([1^+]-a)[1^+] = (1-a)(1) = 1-a$

حد چپ $= \lim_{x\to ۱^-}([x]-a)[x] = ([1^-]-a)[1^-] = (1-1-a)(1-1) = ۰$

مقدار تابع $= k(1) = ([1]-a)[1] = (1-a)(1) = 1-a$

شرط پیوستگی : $1-a=۰ \Rightarrow \boxed{a=1}$

۳) نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a، توابع زیر در $x=۰$ پیوسته نیستند.

الف) $f(x)=\begin{cases} x & x<۰ \\ a & x=۰ \\ ۲x+1 & x>۰ \end{cases}$ ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{|x|} & x\neq ۰ \\ 1 & x=۰ \end{cases}$

حل الف)

حد راست $= \lim_{x\to ۰^+}(۲x+1) = ۲(۰)+1 = 1$

حد چپ $= \lim_{x\to ۰^-}(x) = ۰$

مقدار تابع $= f(۰) = a$

$\xRightarrow[\text{پیوستگی}]{\text{شرط}} 1=۰=a \Rightarrow$ امکان پذیر نیست

تابع هیچگاه در $x=۰$ پیوسته نیست

حل ب) حد راست $= \lim_{x\to ۰^+}\left(\dfrac{ax}{|x|}\right) = \lim_{x\to ۰^+}\dfrac{ax}{x} = \lim_{x\to ۰^+} a = a$

حد چپ $= \lim_{x\to ۰^-}\left(\dfrac{ax}{|x|}\right) = \lim_{x\to ۰^-}\dfrac{ax}{-x} = \lim_{x\to ۰^-}(-a) = -a$

مقدار تابع $= g(۰)=1$

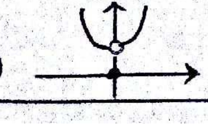
شرط پیوستگی : $a=-a=1 \Rightarrow$ امکان پذیر نیست

تابع هیچگاه در $x=۰$ پیوسته نیست

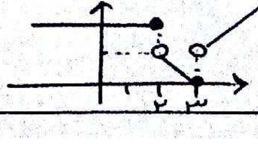
۴) الف) نمودار یک تابع را رسم کنید که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد

ب) نمودار یک تابع را رسم کنید که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد

(الف)



(ب



پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x\geq 2 \\ 1 & 1<x<2 \\ x-1 & x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

در $x=1$ و $x=2$ ناپیوسته است

* * *

ت) تابع $f(x)=[x]$ در بازه $(2,k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

حل: تابع $f(x)=[x]$ در نقاط صحیح $(x\in \mathbb{Z})$ ناپیوسته است نقطه ناپیوستگی این تابع بعد از نقطه صحیح $x=2$، نقطه صحیح $x=3$ است پس تابع در بازه $(2,3)$ پیوسته است بنابراین حداکثر مقدار k برابر ۳ می باشد

* * *

۶) یک بازه بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x)=2-\sqrt{3-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

$D_f: 3-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 3$

بازه مورد نظر باید داخل دامنه تابع باشد مثلاً $[0,2]$

* * *

۷) مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & x>0 \\ b-1 & x=0 \\ x-2a & x<0 \end{cases}$$

در نقطه $x=0$ پیوسته باشد

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{4(\frac{x}{2})^2}=\frac{2}{4}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{2}{4}\times 1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to 0^-}(x-2a)=0-2a=-2a$$

$$\text{مقدار تابع}=f(0)=b-1$$

$$\text{شرط پیوستگی}: \quad \frac{1}{2}=-2a=b-1\Rightarrow \begin{cases} -2a=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{4}} \\ b-1=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{b=\frac{3}{2}} \end{cases}$$

«پایان»