بنام خدا

جزوه ریاضی ۳

(دوازدهم تجربی)

تهیه و تنظیم از :

امیر حسین مطلّبی دبیر ریاضی دبیرستان نمونه دولتی استاد شهریار ناحیه ۳ تبریز

*** هزینه استفاده از این جزوه صلواتی بر محمّد و آل محمّد است ***

التماس دعا

فصل 1 (تابع)

یادآوری:

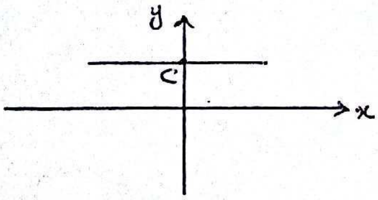
۱) هر تابع با ضابطه $y=f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را که در آن a_0 و a_1 و ... و a_n اعداد حقیقی و n یک عدد طبیعی یا صفر باشد را یک تابع چندجمله‌ای می‌نامند (مثال)

$f(x)=7$, $g(x)=5x$, $h(x)=-4x+1$, $k(x)=x^2+3x-7$

در هر تابع مقادیری که برای x می‌توان در نظر گرفت را دامنه تابع (D_f) و مقادیری که برای y بدست می‌آید را برد تابع (R_f) می‌نامند.

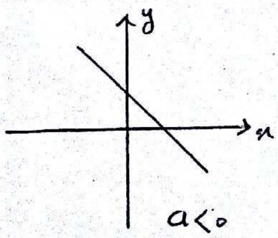
دامنه همه توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ و اگر n فرد باشد برد تابع نیز برابر $\mathbb{R}$ است.

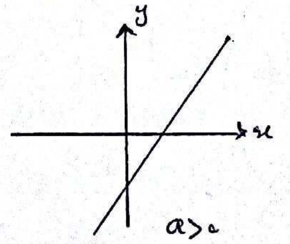
۲) هر تابع بصورت $y=f(x)=c$ (از درجه صفر) را یک تابع ثابت می‌گویند و نمودار آن یک خط راست موازی محور x ها است.



$D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ $\qquad R_f=\{c\}$

۳) هر تابع بصورت $y=f(x)=ax+b$ (از درجه 1) را یک تابع خطی می‌نامند.

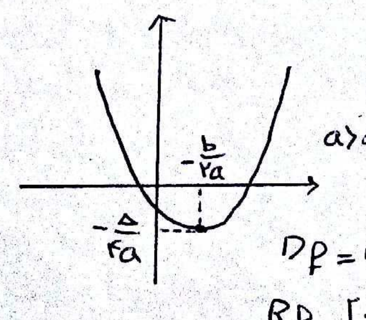




$D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

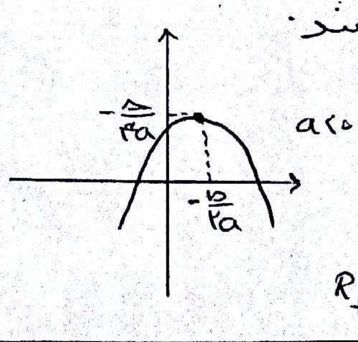
$R_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

۴) هر تابع بصورت $y=f(x)=ax^2+bx+c$ (از درجه ۲) را یک تابع درجه دوم یا یک سهمی می‌نامند.



$D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

$R_f=[-\frac{\Delta}{4a},+\infty)$

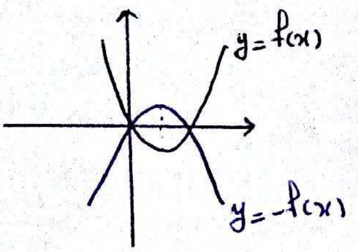


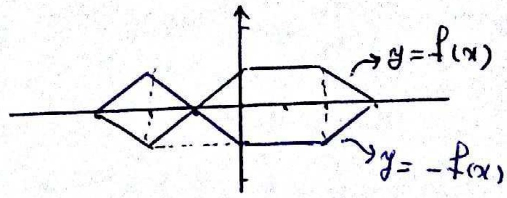
$D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

$R_f=(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}]$

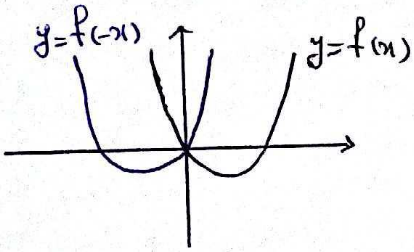
رسم نمودار توابع به کمک انتقال منحنی ها :

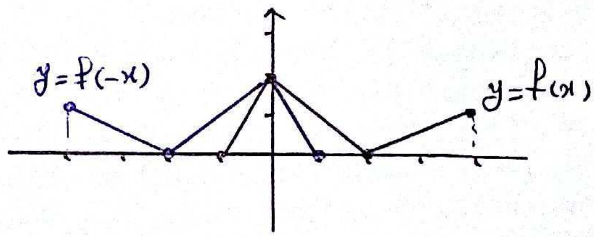
۱) برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ کافی است قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.



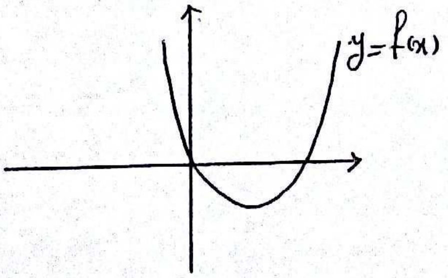


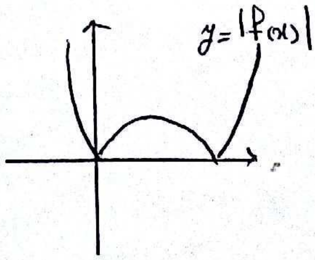
۲) برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ کافی است قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور y ها رسم کنیم





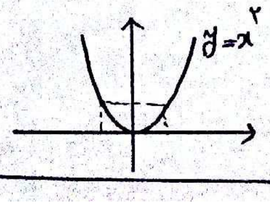
۳) برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ کافی است قرینه قسمتی از نمودار تابع $y=f(x)$ را که زیر محور x ها قرار دارد نسبت به محور x ها رسم کنیم.

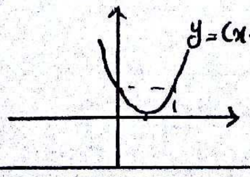


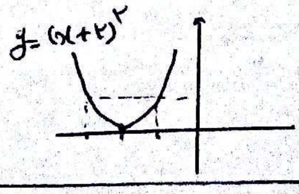


۴) برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ بصورت زیر عمل می کنیم :

اگر a مثبت باشد نمودار به اندازه a به سمت چپ و اگر a منفی باشد نمودار به اندازه a به سمت راست منتقل می شود.

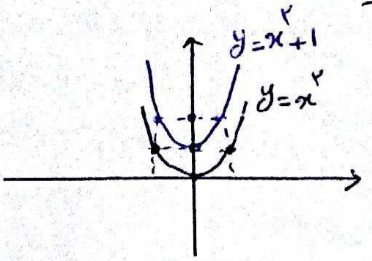


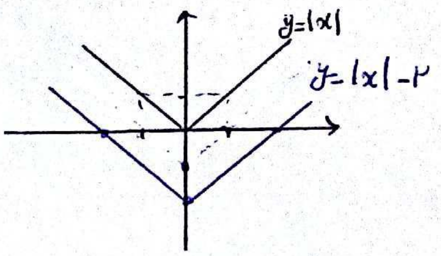




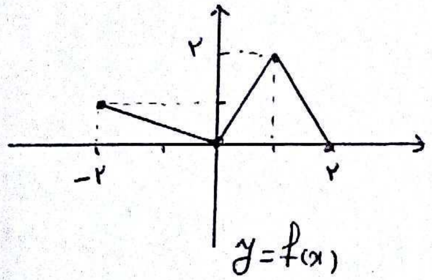
۵) برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+a$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ بصورت زیر عمل می کنیم:

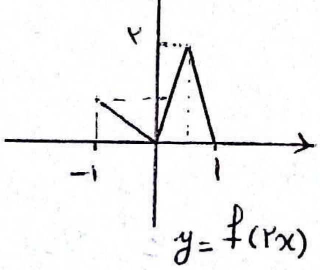
اگر a مثبت باشد نمودار به اندازه a واحد به سمت بالا و اگر a منفی باشد نمودار به اندازه a واحد به سمت پایین منتقل می شود.

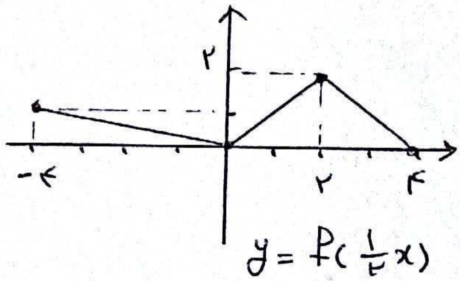




۶) برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، عرض نقاط را ثابت نگه داشته و طول همه نقاط را بر k تقسیم می کنیم ($k>1$ نمودار منقبض و $k<1$ نمودار منبسط)

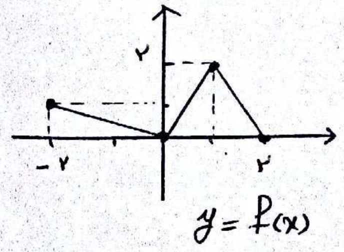


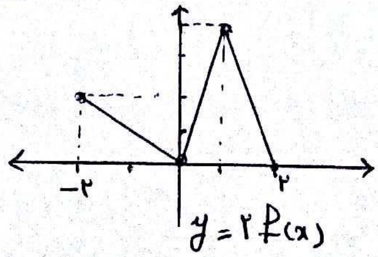


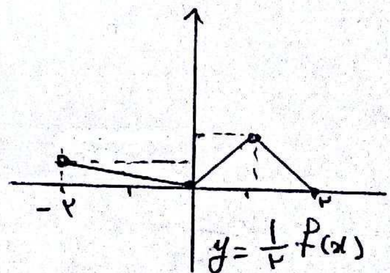


تذکر مهم: برد تابع های $y=f(x)$ و $y=f(kx)$ باهم برابرند.

۷) برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، طولها را ثابت نگه داشته و عرض همه نقاط را در k ضرب می کنیم.

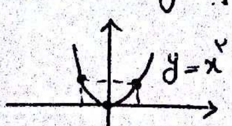


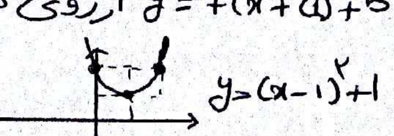




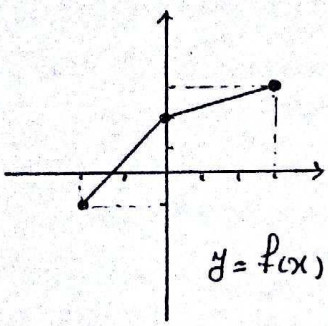
تذکر مهم: دامنه تابع های $y=f(x)$ و $y=kf(x)$ باهم برابرند.

۸) برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)+b$ از روی نمودار $y=f(x)$ حالتهای ۴ و ۵ را باهم ترکیب می کنیم:



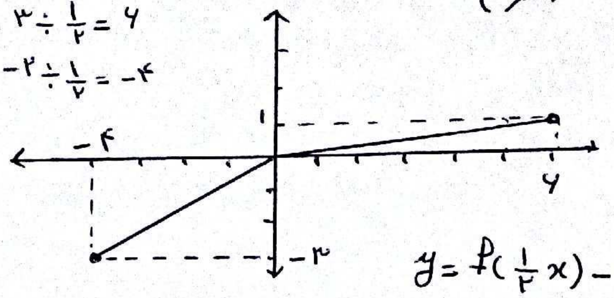


۱) (هماهنگ - دیماه ۹۷): با استفاده از نمودار تابع f، نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})-2$ را رسم کنید (۰/۷۵ نمره)

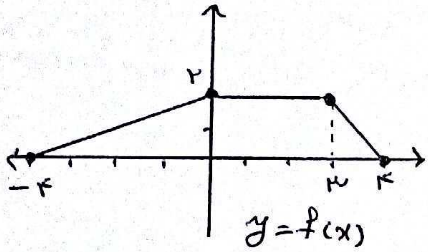


$3 \div \frac{1}{2} = 6$

$-2 \div \frac{1}{2} = -4$



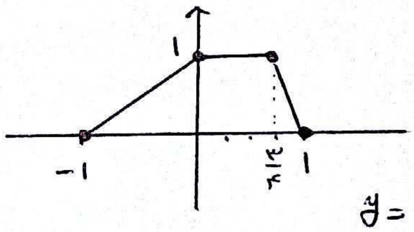
۲) (هماهنگ - خرداد ۹۸): با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار $y=\frac{1}{2}f(4x)$ را رسم کنید (۰/۵ نمره)



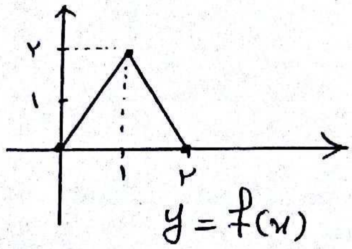
$4 \div 4 = 1$

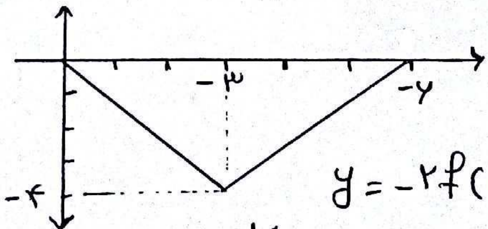
$-4 \div 4 = -1$

$3 \div 4 = \frac{3}{4}$

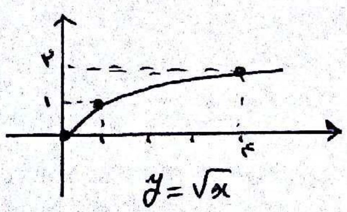


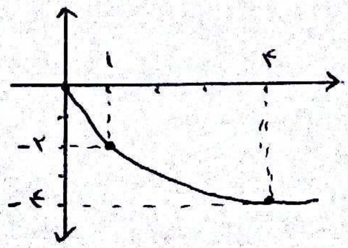
۳) (هماهنگ - شهریور ۹۸): نمودار تابع $y=f(x)$ بصورت زیر است. با استفاده از آن نمودار $y=-2f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید.

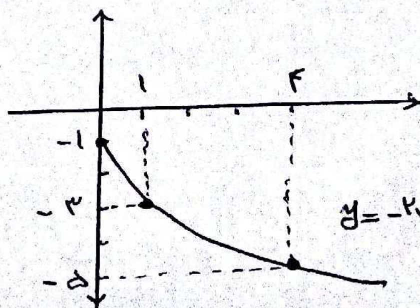




۴) (هماهنگ - خرداد ۹۲): ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم نموده سپس با استفاده از آن، نمودار $y=-2f(x)-1$ را رسم کنید.

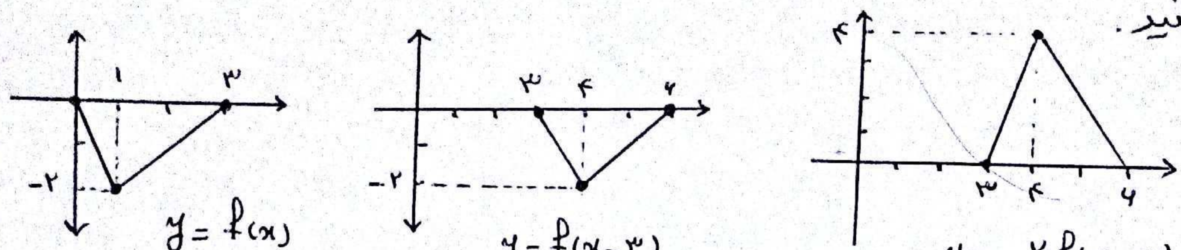






$f(x)=\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}=\frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{1-x}=1+\sqrt{x}=\sqrt{x}+1$ D=R-{1} ★

(هماهنگ - خرداد ۹۱) : از روی نمودار تابع $y=f(x)$ نمودار تابع $y=-2f(x-3)$ را رسم کنید.



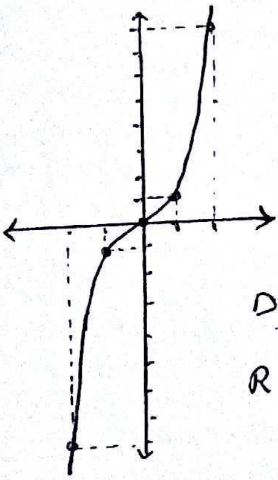
$y=f(x)$ ، $y=f(x-3)$ ، $y=-2f(x-3)$

تابع درجه ۳ :

هر تابع بصورت $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ را که در آن $(a\neq 0)$ باشد را یک تابع درجه ۳ می نامند نمودار این تابع در فصل ۵ (کاربرد مشتق) مورد بررسی قرار خواهد گرفت که در اینجا بطور خاص تابع $y=f(x)=x^3$ را مورد بررسی قرار می دهیم. دامنه و برد تابع درجه ۳ برابر $\mathbb{R}$ است.

رسم نمودار تابع $y=f(x)=x^3$:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

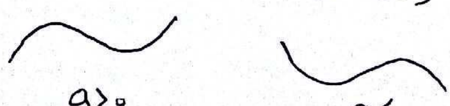


$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=\mathbb{R}$

تذکر مهم :

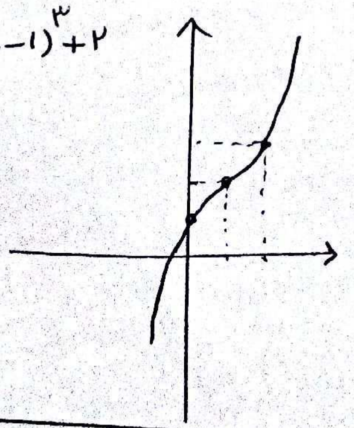
نمودار تابع درجه ۳ به یکی از دو صورت زیر است.



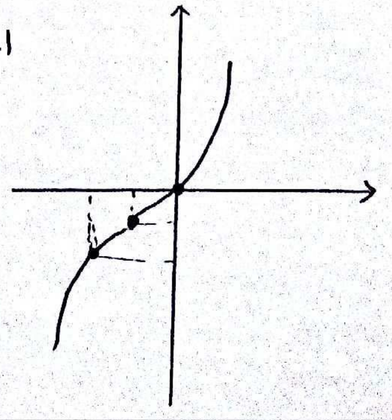
$a>0$ ، $a<0$

تمرین : از روی نمودار تابع $y=x^3$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

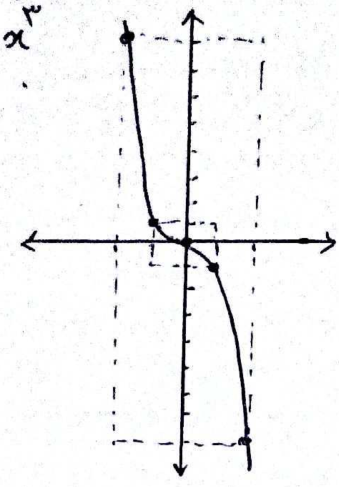
1) $y=(x-1)^3+2$



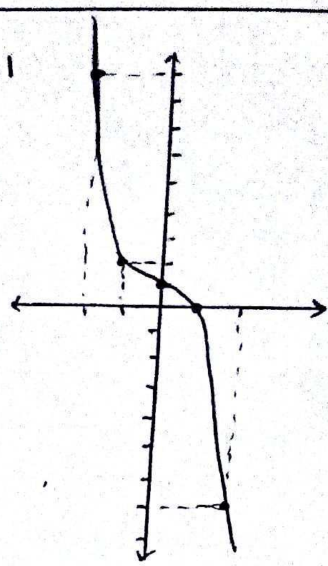
2) $y=(x+1)^2-1$



۳) $y=-x^3$



۴) $y=-x^3+1$



تابع صعودی:

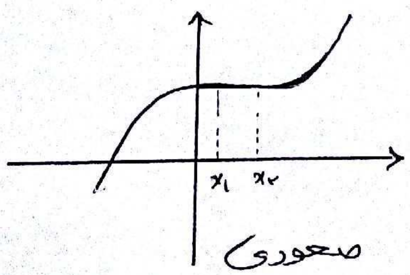
تابع $y=f(x)$ را صعودی می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقادیر x، مقادیر تابع یعنی y ها نیز بزرگ شود و یا ثابت بماند به عبارت دیگر:

اگر: $x_1, x_2 \in D_f$ ، $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

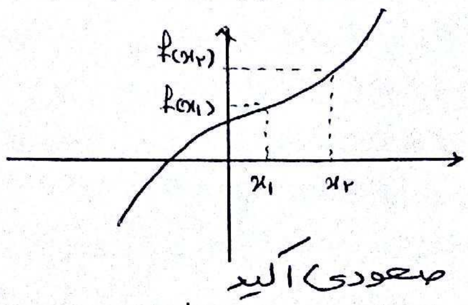
همچنین:

تابع $y=f(x)$ را صعودی اکید می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقادیر x، مقادیر تابع یعنی y ها نیز بزرگ شود به عبارت دیگر:

اگر: $x_1, x_2 \in D_f$ ، $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



صعودی



صعودی اکید

تابع نزولی:

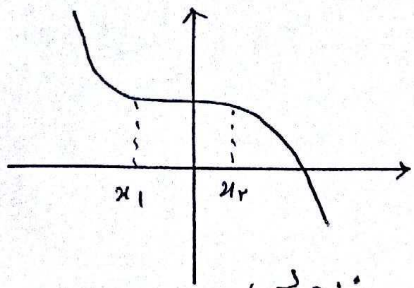
تابع $y=f(x)$ را نزولی می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقادیر x، مقادیر تابع یعنی y ها کاهش یابد و یا ثابت بماند به عبارت دیگر:

اگر: $x_1, x_2 \in D_f$ ، $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

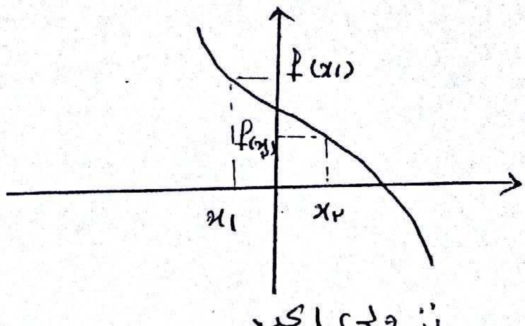
همچنین:

تابع $y=f(x)$ را نزولی اکید می‌نامند هرگاه با بزرگ‌شدن مقادیر x، مقادیر تابع یعنی yها کوچکتر شود به عبارت دیگر:

الف: $x_1, x_2 \in D_f \ , \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



نزولی



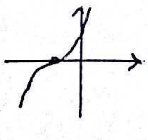
نزولی اکید

تذکر مهم ۱: تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است تابع ثابت است.

تذکر مهم ۲: اگر خمیدگی تابعی به سمت راست باشد تابع صعودی و اگر خمیدگی تابعی به سمت چپ باشد تابع نزولی است.

(هماهنگ خرداد ۹۸):

تابع $y=(x+1)^3$ در دامنه تعریف خود ...... (صعودی - نزولی) است.



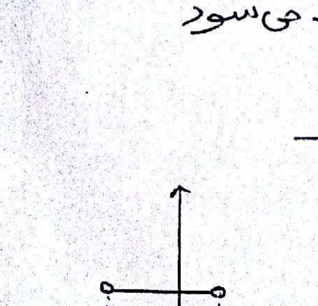
جواب: صعودی

(هماهنگ - دیماه ۹۷): درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید:

تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود

جواب: درست.

(هماهنگ - خرداد ۹۰):



تابع $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<-2 \\ 1 & -2<x<1 \\ -2x & x>1 \end{cases}$ را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

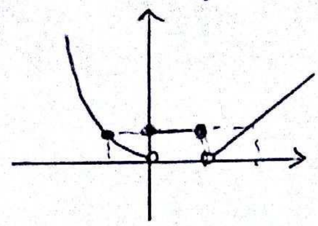
$(-\infty,-2)$ صعودی $(-2,1)$ ثابت

$(1,+\infty)$ نزولی

(هماهنگ - شهریور ۹۲)

ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید پس بازه‌هایی را که در آن تابع صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 1 & 0\leq x\leq 1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$$

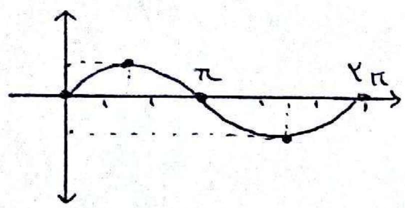


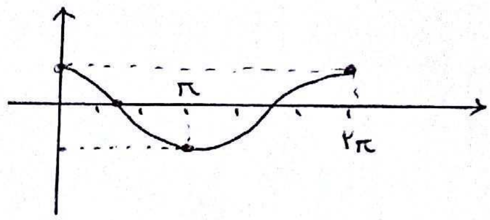
$(-\infty,0)$ اکیداً نزولی

$[0,1]$ ثابت

$(1,+\infty)$ اکیداً صعودی

مثال) نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را در بازه $[0,2\pi]$ رسم کرده، صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه های مشخص تعیین نمایید.





x	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
$y=\sin x$	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

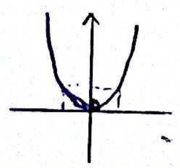
x	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
$y=\cos x$	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی

تمرین کتاب ص ۱۰:

تابع $y=x^2|x|$ در بازه $(-\infty,a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a چقدر است؟

$x\geq 0 \Rightarrow |x|=x \Rightarrow y=x^2(x) \Rightarrow y=x^3$

$x<0 \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow y=x^2(-x) \Rightarrow y=-x^3$



جواب: صفر

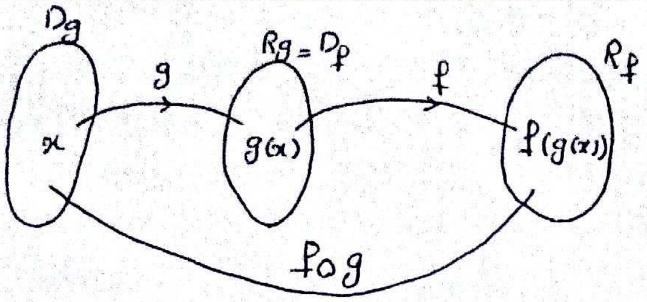
در بازه $(-\infty,0]$ تابع نزولی است.

ترکیب توابع:

فرض کنیم f و g دو تابع باشند ترکیب این دو تابع را با علامت $(fog)(x)$ یا $(gof)(x)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

1) $(fog)(x)=f(g(x))$ ، $D_{fog}=\{x|x\in D_g , g(x)\in D_f\}$

2) $(gof)(x)=g(f(x))$ ، $D_{gof}=\{x|x\in D_f , f(x)\in D_g\}$



مثال ۱: توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 4x-1$ مفروضند. مطلوبست محاسبه:

الف) D_{fog} بدون تشکیل ضابطه fog ب) ضابطه fog

الف) $D_{fog} = \{x \mid x \in D_g \,,\, g(x) \in D_f\} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \,,\, 4x-1 \in [0,+\infty)\}$ $\quad D_f = [0,+\infty)$

$D_g = \mathbb{R}$ $\quad = \{x \mid x \in \mathbb{R} \,,\, 4x-1 \geq 0\} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \,,\, x \geq \frac{1}{4}\} = [\frac{1}{4},+\infty)$

ب) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{4x-1}$

مثال ۲: دو تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ مفروضند. در صورت وجود دامنه fog را بدون تشکیل ضابطه تعیین کرده و gof را مشخص کنید.

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ $\qquad D_g = [1,+\infty)$

$D_{fog} = \{x \mid x \in D_g \,,\, g(x) \in D_f\} = \{x \mid x \in [1,+\infty) \,,\, \sqrt{x-1} \neq 2\}$

$= \{x \mid x \geq 1 \,,\, x-1 \neq 4\} = \{x \mid x \geq 1 \,,\, x \neq 5\} = [1,5) \cup (5,+\infty)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2} - 1} = \sqrt{\frac{x+1-x+2}{x-2}} = \sqrt{\frac{3}{x-2}}$

(هماهنگ خرداد ۹۸): دو تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف بدست آورید (۱ نمره)

$D_f = [4,+\infty)$ $\qquad D_{gof} = \{x \mid x \in D_f \,,\, f(x) \in D_g\} = \{x \mid x \geq 4 \,,\, \sqrt{x-4} \neq \pm 1\}$

$D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ $\qquad = \{x \mid x \geq 4 \,,\, x-4 \neq 1\} = \{x \mid x \geq 4 \,,\, x \neq 5\} = [4,5) \cup (5,+\infty)$

(هماهنگ دیماه ۹۷): توابع $f(x)=\frac{x+3}{2x}$ و $g(x)=3x-1$ را در نظر بگیرید دامنه fog را با استفاده از تعریف بدست آورید. (۱٫۲۵ نمره)

$D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

$D_g=\mathbb{R}$

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g,\ g(x)\in D_f\}=\{x|x\in\mathbb{R},\ 3x-1\neq 0\}$$
$$=\{x|x\in\mathbb{R},\ x\neq\tfrac{1}{3}\}=\mathbb{R}-\{\tfrac{1}{3}\}$$

(هماهنگ - خرداد ۹۰): اگر $g(x)=\frac{1}{x-3}$ و $f(x)=3x-2$ باشد آنگاه حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

الف) $(3f+2g)(4)=3f(4)+2g(4)=3(10)+2(1)=32$

ب) $D_{fog}=\{x|x\in D_g,\ g(x)\in D_f\}=\{x|x\neq 3,\ \frac{1}{x-3}\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}-\{3\}$

(هماهنگ خرداد ۹۴): اگر $g=\{(2,\sqrt{2}),(-1,2),(\frac{1}{4},3),(1,\frac{3}{2})\}$ و $f=\{(0,2),(1,-1),(3,-\frac{1}{4}),(-2,3),(-1,0)\}$ باشند تابع gof را بدست آورید.

$$(gof)(x)=g(f(x))$$

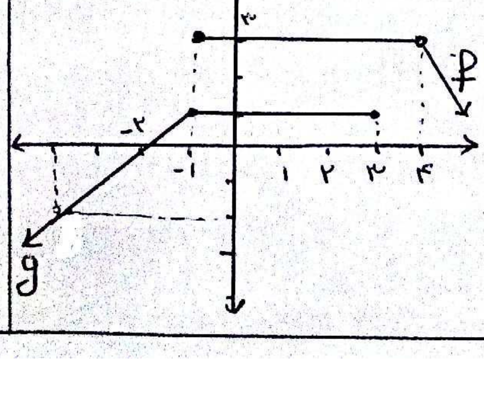
$0\xrightarrow{f}2\xrightarrow{g}\sqrt{2}$ $\qquad$ $1\xrightarrow{f}-1\xrightarrow{g}2$

$3\xrightarrow{f}-\frac{1}{4}\xrightarrow{g}\times$ $\qquad$ $-2\xrightarrow{f}3\xrightarrow{g}\times$

$-1\xrightarrow{f}0\xrightarrow{g}\times$

$gof=\{(0,\sqrt{2}),(1,2)\}$ $\qquad$ $D_{gof}=\{0,1\}$

مثال) نمودار روبرو توابع f و g را نشان می دهد. مقادیر زیر را در صورت وجود پیدا کنید:



الف) $(fog)(-2)=f(g(-2))=f(0)=3$

ب) $(fog)(-4)=f(g(-4))=f(-2)=$ تعریف نشده

ج) $(gof)(4)=g(f(4))=g(3)=1$

د) $(gof)(0)=g(f(0))=g(3)=1$

تمرین: در هر کدام از موارد زیر با توجه به ضابطه‌های f و g معادله داده شده را حل کنید:

الف) $f(x)=x^2+2x$ ، $g(x)=x^2-1$ و $(gof)(x)=8$

حل: $(gof)(x)=8 \Rightarrow g(f(x))=8 \Rightarrow (x^2+2x)^2-1=8 \Rightarrow (x^2+2x)^2=9$

$$\Rightarrow x^2+2x=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x=3 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x+3)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=+1 \end{cases} \\ x^2+2x=-3 \Rightarrow x^2+2x+3=0 \Rightarrow \Delta=-8<0 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

ب) $f(x)=x^2-x$ ، $g(x)=x^3-5$ ، $(fog)(x)=6$

حل: $(fog)(x)=6 \Rightarrow f(g(x))=6 \Rightarrow (x^3-5)^2-(x^3-5)=6$ $\quad x^3-5=t$

$$\Rightarrow t^2-t=6 \Rightarrow t^2-t-6=0 \Rightarrow (t-3)(t+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=3 \Rightarrow x^3-5=3 \Rightarrow \\ t=-2 \Rightarrow x^3-5=-2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3=8 \Rightarrow \boxed{x=2} \\ x^3=3 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{3}} \end{cases}$$

تمرین: اگر $f(x)=x^3+3$ و $(fog)(x)=x^3-3x^2+3x+2$ باشد ضابطه تابع $g(x)$ را پیدا کنید:

$$\left.\begin{array}{l} (fog)(x)=f(g(x))=(g(x))^3+3 \\ (fog)(x)=x^3-3x^2+3x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow (g(x))^3+3=x^3-3x^2+3x+2$$

$$\Rightarrow (g(x))^3=x^3-3x^2+3x-1 \Rightarrow (g(x))^3=(x-1)^3 \Rightarrow \boxed{g(x)=x-1}$$

تمرین: تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$ را بصورت ترکیب دو تابع بنویسید:

روش I)

$f(x)=\sqrt[3]{x}$

$g(x)=x^2+1$

$(fog)(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

روش II)

$f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

$g(x)=x^2$

$(fog)(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

تابع وارون (معکوس):

اگر در زوج‌های مرتب تابع f، جای مولفه‌های اول و دوم را عوض کنیم، رابطهٔ جدیدی حاصل می‌شود، چنانچه این رابطه تابع باشد آن را وارون تابع f نامیده و با f^{-1} نشان می‌دهیم پس:

$$f^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in f\}$$

$$f=\{(1,7),(-2,5),(3,6)\} \Rightarrow f^{-1}=\{(7,1),(5,-2),(6,3)\}$$

تذکر مهم:

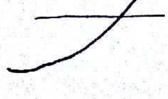
شرط اینکه تابعی وارون پذیر باشد آن است که یک به یک باشد و برعکس (تابعی یک به یک است که در آن هیچ دو زوج مرتب دارای مولفه دوم مساوی نباشد).

مثال) آیا تابع $f=\{(1,5),(3,7),(2,5)\}$ وارون پذیر است؟

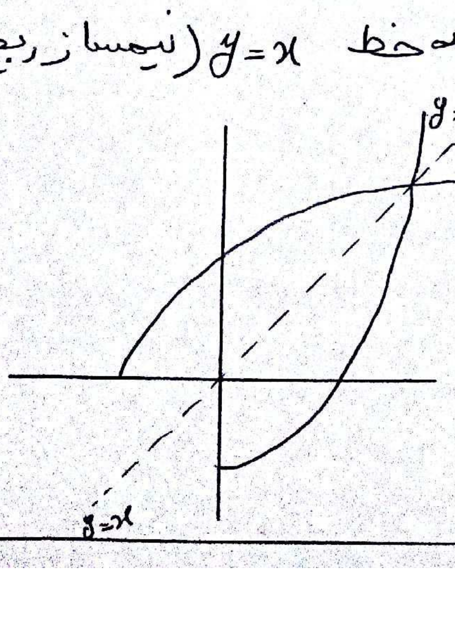
جواب: خیر زیرا یک به یک نیست (دو مولفه دوم مساوی دارد).

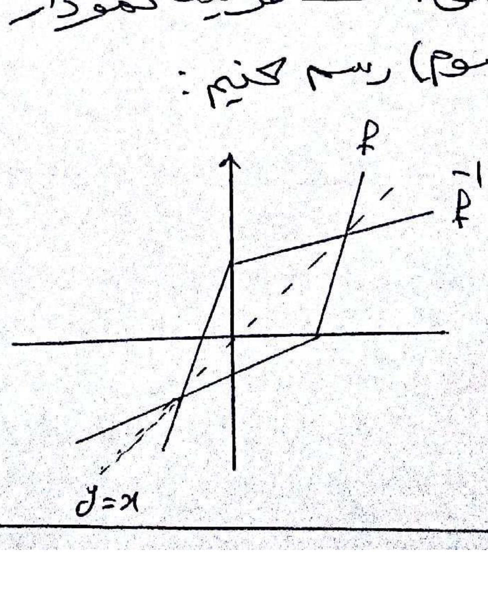
نمودار تابع وارون:

از نظر نموداری، تابعی یک به یک است که هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند



اگر نمودار تابع یک به یک f داده شده باشد برای رسم نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینه نمودار f را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) رسم کنیم:





تذکر مهم: $1)\ (x,y)\in f \Leftrightarrow y=f(x)$ $\qquad 2)\ y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

پیدا کردن ضابطه تابع وارون:

شرط اینکه تابعی وارون پذیر باشد آن است که یک به یک باشد و برعکس. برای بدست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع مانند f ابتدا طبق فرمول $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ یک به یک بودن را بررسی می‌کنیم سپس در معادله $y=f(x)$ ابتدا x را برحسب y محاسبه کرده سپس با تبدیل y به x و برعکس، ضابطه تابع $y=f^{-1}(x)$ را بدست می‌آوریم.

مثال ۱: ثابت کنید تابع $y=f(x)=\sqrt{2x+3}$ وارون پذیر است سپس ضابطه تابع وارون آن را بیابید.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم یک به یک است.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \sqrt{2x_1+3}=\sqrt{2x_2+3}\Rightarrow 2x_1+3=2x_2+3\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

یک به یک است.

$$y=\sqrt{2x+3}\Rightarrow y^2=2x+3\Rightarrow y^2-3=2x\Rightarrow x=\frac{y^2-3}{2}\Rightarrow y=f^{-1}(x)=\frac{x^2-3}{2}$$

مثال ۲: ثابت کنید تابع $f(x)=x^3-3x^2+3x$ در دامنه‌اش وارون پذیر است سپس ضابطه تابع وارون آن را بیابید.

$$f(x)=x^3-3x^2+3x-1+1\Rightarrow f(x)=(x-1)^3+1$$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow (x_1-1)^3+1=(x_2-1)^3+1\Rightarrow (x_1-1)^3=(x_2-1)^3\Rightarrow x_1-1=x_2-1$$

$\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow$ یک به یک است.

$$y=(x-1)^3+1\Rightarrow y-1=(x-1)^3\Rightarrow x-1=\sqrt[3]{y-1}\Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}+1\Rightarrow y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}+1$$

مثال ۳: اگر $f(x)=3ax-5$ و نقطه (۴،۳) روی نمودار تابع f^{-1} باشد: اولاً: مقدار a را بدست آورید. ثانیاً: ضابطه تابع وارون f را پیدا کنید.

$$(4,3)\in f^{-1} \Rightarrow (3,4)\in f \Rightarrow f(3)=4 \Rightarrow 3a(3)-5=4 \Rightarrow 9a=9 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$\Rightarrow f(x)=3x-5 \Rightarrow y=3x-5 \Rightarrow y+5=3x \Rightarrow x=\frac{y+5}{3} \Rightarrow y=f^{-1}(x)=\frac{x+5}{3}$$

تست: دو تابع $f=\{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-1}$ مفروضند. اگر $f^{-1}(g(2a))=6$ باشد مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{3}{2}$

$$f^{-1}=\{(5,2),(3,6),(7,3),(1,4),(9,1)\}$$

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(3)=6 \\ f^{-1}(g(2a))=6 \end{array}\right\} \Rightarrow g(2a)=3 \Rightarrow \frac{2a}{2a-1}=3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

تست: اگر g وارون پذیر باشد و $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=g\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)$ و بدانیم $g\left(\frac{3}{8}\right)=2$ است، حاصل $f^{-1}(2)$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) $\frac{4}{3}$

$$g\left(\frac{3}{8}\right)=2 \Rightarrow \frac{2x-1}{3x+2}=\frac{3}{8} \Rightarrow 16x-8=9x+6 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=g\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right) \xRightarrow{x=2} f\left(\frac{2+1}{2}\right)=g\left(\frac{3}{8}\right)=2 \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(2)=\frac{3}{2}$$

تذکر مهم:

۱) ترکیب هر تابع با وارون خودش برابر تابع همانی است یعنی:

۱) $(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=x$

۲) $(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=x$

مثال) $f(x)=-\sqrt{x-8}$ و $g(x)=x^2+8$ $(x<0)$ وارون یکدیگرند زیرا:

$$f(g(x))=-\sqrt{x^2+8-8}=-\sqrt{x^2}=-|x|=-(-x)=x$$

۲) دامنه توابع $f\circ f^{-1}$ و $f^{-1}\circ f$ همان دامنه تابع درونی است

$$1)\ D_{f^{-1}\circ f} = D_f = R_{f^{-1}} \qquad 2)\ D_{f\circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$$

۳) اگر f و g دو تابع وارون پذیر باشند آنگاه:

$$1)\ (f\circ g)^{-1}(x) = (g^{-1}\circ f^{-1})(x) \qquad 2)\ (g\circ f)^{-1}(x) = (f^{-1}\circ g^{-1})(x)$$

مثال) اگر $f(x) = 2x+3$ و $g(x) = x^3+1$ باشد مقادیر زیر را پیدا کنید:

الف) $(f^{-1}\circ g^{-1})(1)$ ب) $(f\circ g)^{-1}(7)$ ج) $(f\circ f)^{-1}(9)$

حل: ابتدا ضابطه f^{-1} و g^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = 2x+3 \Rightarrow y = 2x+3 \Rightarrow y-3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y-3}{2} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

$$g(x) = x^3+1 \Rightarrow y = x^3+1 \Rightarrow y-1 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow y = g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

الف) $(f^{-1}\circ g^{-1})(1) = f^{-1}(g^{-1}(1)) = f^{-1}(0) = -\frac{3}{2}$

ب) $(f\circ g)^{-1}(7) = (g^{-1}\circ f^{-1})(7) = g^{-1}(f^{-1}(7)) = g^{-1}(2) = \sqrt[3]{2-1} = 1$

ج) $(f\circ f)^{-1}(9) = (f^{-1}\circ f^{-1})(9) = f^{-1}(f^{-1}(9)) = f^{-1}(3) = \frac{3-3}{2} = 0$

(هماهنگ - دیماه ۹۷):

اگر $f(x) = \frac{1}{8}x-3$ و $g(x) = x^3$ باشد مقدار $(g^{-1}\circ f^{-1})(5)$ را بدست آورید.

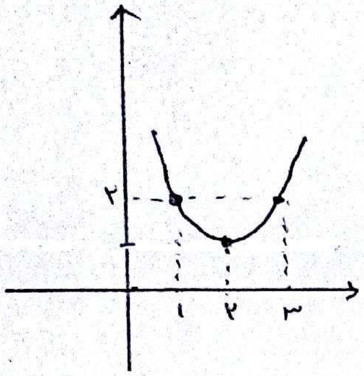
$$f(x) = \frac{1}{8}x-3 \Rightarrow y = \frac{1}{8}x-3 \Rightarrow y+3 = \frac{1}{8}x \Rightarrow x = 8y+24 \Rightarrow f^{-1}(x) = 8x+24$$

$$g(x) = x^3 \Rightarrow y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$(g^{-1}\circ f^{-1})(5) = g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(64) = \sqrt[3]{64} = 4$$

محدود کردن دامنه تابع‌های غیر یک‌به‌یک :

می‌دانیم اگر تابع f ، یک به یک نباشد وارون پذیر نیست و نمی‌توانیم ضابطه تابع وارونش را پیدا کنیم ولی می‌توانیم دامنه تابع f را طوری محدود کنیم که تابع در دامنه جدیدش یک‌به‌یک بوده و ضابطه تابع وارون را در دامنه جدید پیدا کنیم.



مثال) تابع $f(x)=(x-2)^2+1$ را در نظر می‌گیریم :

$$D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$$

تابع در دامنه اش یک‌به‌یک نیست ولی در $(-\infty,2]$ و $[2,+\infty)$ تابع یک‌به‌یک است.

نکته ریاضی :

تابعی که صعودی یا نزولی باشد را تابع یکنوا نیز می‌گویند.

★ تمرینات مهم فصل ۱ (تابع) کتاب درسی ★

۱) اگر $f=\{(7,8),(5,3),(9,8),(11,4)\}$ و $g=\{(5,7),(3,5),(7,9),(9,11)\}$ توابع fog و gof را بدست آورید.

$fog=\{(5,8),(3,3),(7,8),(9,4)\}$ $\qquad$ $gof=\{(5,5)\}$

---

۲) در هر قسمت موارد خواسته شده را درصورت امکان بدست آورید.

الف) $f(x)=x^2-5$ و $g(x)=\sqrt{x+6}$ ، $D_{fog}=?$ ، $(fog)(x)=?$

حل: $D_f=\mathbb{R}$ $\qquad$ $D_{fog}=\{x \mid x\in D_g , g(x)\in D_f\}=\{x \mid x\geq -6 , \sqrt{x+6}\in\mathbb{R}\}$

$D_g=[-6,+\infty)$ $\qquad$ $=[-6,+\infty)$

$(fog)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x+6})^2-5=x+6-5=x+1$

ب) $f(x)=\sqrt{3-2x}$ ، $g(x)=\dfrac{6}{3x-5}$ و $D_{fog}=?$ ، $(fog)(x)=?$

حل: $D_f=(-\infty,\frac{3}{2}]$ $\qquad$ $D_{fog}=\{x \mid x\in D_g , g(x)\in D_f\}$

$D_g=\mathbb{R}-\{\frac{5}{3}\}$ $\qquad$ $=\{x \mid x\in\mathbb{R}-\{\frac{5}{3}\} , \frac{6}{3x-5}\in(-\infty,\frac{3}{2}]\}$

$=\{x \mid x\neq\frac{5}{3} , \frac{6}{3x-5}\leq\frac{3}{2}\}=(-\infty,\frac{5}{3})\cup[3,+\infty)$

به حل نامعادله $\dfrac{6}{3x-5}\leq\dfrac{3}{2}$ دقت کنید:

$$\frac{6}{3x-5}\leq\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{6}{3x-5}-\frac{3}{2}\leq 0\Rightarrow\frac{-9x+27}{6x-10}\leq 0$$

$-9x+27=0\Rightarrow x=3$

$6x-10=0\Rightarrow x=\frac{5}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		3		$+\infty$
$-9x+27$		$+$		$+$	0	$-$	
$6x-10$		$-$	0	$+$		$+$	
		$-$	تن	$+$	0	$-$	
		ج			ج	ج	

$x\in(-\infty,\frac{5}{3})\cup[3,+\infty)$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{3-2\left(\frac{6}{3x-5}\right)}=\sqrt{\frac{9x-27}{3x-5}}$$

---

۳) اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ و $f(x)=3x-4$ ضابطه تابع $g(x)$ را بدست آورید.

$$\left.\begin{array}{l} f(g(x))=3g(x)-4 \\ f(g(x))=3x^2-6x+14 \end{array}\right\}\Rightarrow 3g(x)-4=3x^2-6x+14\Rightarrow 3g(x)=3x^2-6x+18$$

$$\Rightarrow 3g(x)=3(x^2-2x+6)\Rightarrow g(x)=x^2-2x+6$$

۴) مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x)=x^2-4$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ آنگاه: $(fog)(5)=-25$

نادرست زیرا:

$(fog)(5)=f(g(5))=f(\sqrt{21})=(\sqrt{21})^2-4=21-4=17$

ب) برای دو تابع f و g که $f\neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

نادرست زیرا:

$f(x)=3x \quad , \quad g(x)=2x$

$(fog)(x)=f(g(x))=f(2x)=3(2x)=6x$

$(gof)(x)=g(f(x))=g(3x)=2(3x)=6x$

پ) اگر $f(7)=5$ و $g(4)=7$ آنگاه: $(fog)(4)=5$

درست زیرا:

$(fog)(4)=f(g(4))=f(7)=5$

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=2x-1$ آنگاه $(fog)(5)=g(2)$

درست زیرا:

$(fog)(5)=f(g(5))=f(9)=\sqrt{9}=3$

$g(2)=2(2)-1=3$

---

۵) الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالتهای (الف) یا (ب) به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه کند.

حل: الف مقرون به صرفه است زیرا:

الف) $g(x)=x-200000 \quad (x>1500000)$ $\qquad f(x)=x-\frac{1}{5}x=\frac{4}{5}x \quad (x>0)$ $\qquad 20\%=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$

$$g(f(x))=g\left(\frac{4}{5}x\right)=\frac{4}{5}x-200000=\frac{4}{5}\times 2000000-200000=1{,}400{,}000$$

ب) $$f(g(x))=f(x-200000)=\frac{4}{5}(x-200000)=\frac{4}{5}(2000000-200000)$$
$$=\frac{4}{5}(1800000)=1{,}440{,}000$$

۶) با توجه به ضابطه های توابع f و g، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x)=2x-5$ ، $g(x)=x^2-3x+8$ ، $(fog)(x)=7$

$(fog)(x)=f(g(x))=2(x^2-3x+8)-5=2x^2-6x+11$ ①

$(fog)(x)=7$ ②

①,② $\Rightarrow 2x^2-6x+11=7 \Rightarrow 2x^2-6x+4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

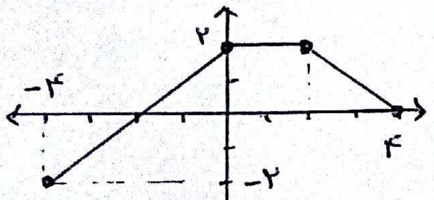
ب) $f(x)=3x^2+x-1$ ، $g(x)=1-2x$ ، $(gof)(x)=-5$

$(gof)(x)=g(f(x))=1-2(3x^2+x-1)=-6x^2-2x+3$ ①

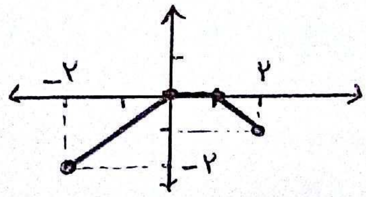
$(gof)(x)=-5$ ②

①,② $\Rightarrow -6x^2-2x+3=-5 \Rightarrow -6x^2-2x+8=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases}$

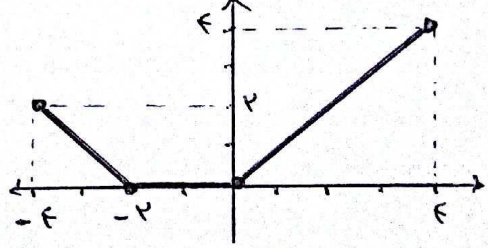
۷) با استفاده از نمودار تابع f، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



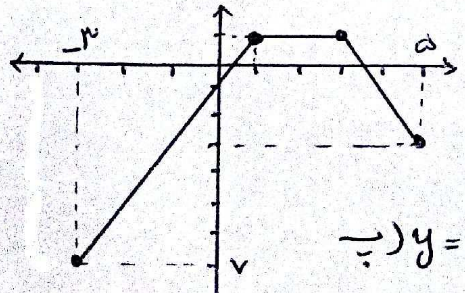
$y=f(x)$



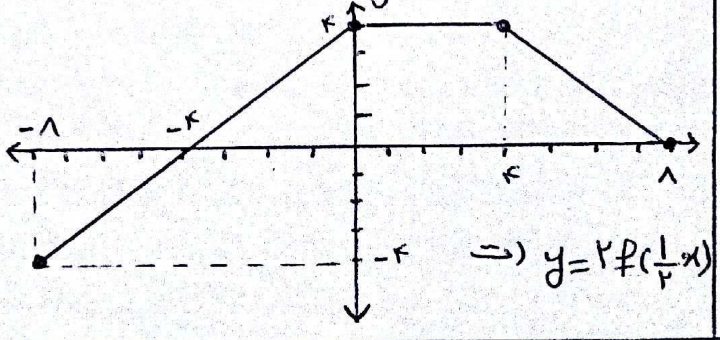
الف) $y=\frac{1}{2}f(2x)-1$



ب) $y=-f(-x)+2$



پ) $y=2f(x-1)-3$



ت) $y=2f(\frac{1}{2}x)$

۱۸) اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$ ، مقادیر زیر را بدست آورید.

الف) $(fog)^{-1}(5)=?$ ب) $(f^{-1}of^{-1})(6)=?$

حل: ابتدا f^{-1} و g^{-1} را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{8}x-3 \Rightarrow y=\frac{1}{8}x-3 \Rightarrow y+3=\frac{1}{8}x \Rightarrow x=8y+24 \Rightarrow f^{-1}(x)=8x+24$$

$$g(x)=x^3 \Rightarrow y=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y} \Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$$

حل الف) $(fog)^{-1}(5)=(g^{-1}of^{-1})(5)=g^{-1}(f^{-1}(5))=g^{-1}(64)=\sqrt[3]{64}=4$

حل ب) $(f^{-1}of^{-1})(6)=f^{-1}(f^{-1}(6))=f^{-1}(72)=8(72)+24=576+24=600$

---

۱۹) تحت چه شرایطی تابع هموگرافیک $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0 ,\ ad-bc\neq 0)$

معکوس خودش می‌شود؟

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow cxy+dy=ax+b \Rightarrow cxy-ax=-dy+b \Rightarrow$$

$$x(cy-a)=-dy+b \Rightarrow x=\frac{-dy+b}{cy-a} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow \begin{cases} a=-d \\ d=-a \end{cases}$$

(کافی است a را به قرینه d و d را به قرینه a تبدیل کنیم.)

مثال: وارون تابع $y=\dfrac{3x+5}{2x-7}$ را بدست آورید.

$$y=\frac{7x+5}{2x-3}$$

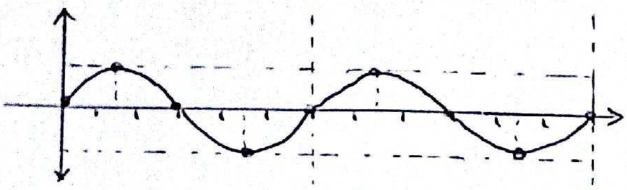
فصل ۲ (مثلثات)

توابع متناوب (تکراری):

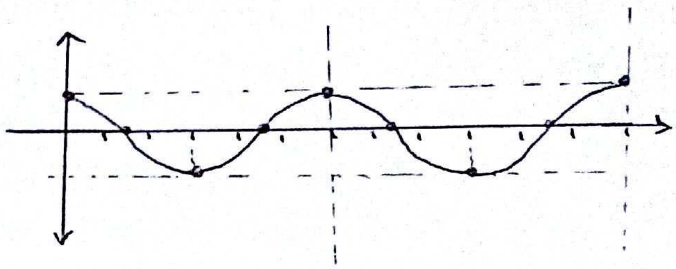
تابع f را متناوب می‌نامند هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد بطوریکه:

۱) برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $x+T \in D_f$ ۲) $f(x \pm T) = f(x)$

کوچکترین عدد T با خاصیت بالا را دوره تناوب تابع f می‌نامند



$y = \sin x$ $T = 2\pi$



$y = \cos x$ $T = 2\pi$

نکته ریاضی:

بطور کلی:

تابع	دوره تناوب
$y = \sin ax$	$T = \frac{2\pi}{\lvert a \rvert}$
$y = \cos ax$	$T = \frac{2\pi}{\lvert a \rvert}$
$y = tg\, ax$	$T = \frac{\pi}{\lvert a \rvert}$
$y = cotg\, ax$	$T = \frac{\pi}{\lvert a \rvert}$

مثال) دوره تناوب هرکدام از تابع‌های زیر را بیابید:

۱) $f(x) = \sin(4x)$

$T = \frac{2\pi}{\lvert 4 \rvert} = \frac{\pi}{2}$

۲) $f(x) = \cos(\frac{x}{2})$

$T = \frac{2\pi}{\lvert \frac{1}{2} \rvert} = 4\pi$

۳) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{3}x)$

$T = \frac{2\pi}{\lvert \frac{\pi}{3} \rvert} = 6$

۴) $f(x) = \cos(\sqrt{2}x)$

$T = \frac{2\pi}{\lvert \sqrt{2} \rvert} = \sqrt{2}\pi$

۵) $f(x) = \cos(-\frac{3x}{2})$

$T = \frac{2\pi}{\lvert -\frac{3}{2} \rvert} = \frac{4}{3}\pi$

۶) $f(x) = \sin(4\pi x)$

$T = \frac{2\pi}{\lvert 4\pi \rvert} = \frac{1}{2}$

۷) $f(x) = tg\, 3x$

$T = \frac{\pi}{\lvert 3 \rvert} = \frac{\pi}{3}$

۸) $y = cotg(-\frac{\pi}{4}x)$

$T = \frac{\pi}{\lvert -\frac{\pi}{4} \rvert} = 4$

نکته ریاضی:

تبدیل هایی که باعث تغییر برد تابع یا انتقال می‌شوند روی دوره تناوب اثر ندارند در حالت کلی:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a\sin(bx+c)+d \\ g(x) = a\cos(bx+c)+d \end{array}\right\} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

مثال) دوره تناوب تابع های زیر را بدست آورید.

الف) $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + 2$ $\qquad T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ب) $g(x) = -2\cos(\frac{\pi}{2}x) + 4$ $\qquad T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

نکته ریاضی:

اگر تابعی از مجموع چند تابع مثلثاتی تشکیل شده باشد دوره تناوب تابع برابر است با کوچکترین مضرب مشترک بین دوره تناوب ها

مثال ۱: دوره تناوب تابع $y = tg2x + \sin 3x + \sin 4x$ را بدست آورید:

$y_1 = tg2x \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{2}$ $\qquad y_2 = \sin 3x \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad y = \sin 4x \Rightarrow T_3 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

مخرج ها را مشترک می‌کنیم: $\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6}$ $\qquad \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6}$ $\qquad \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6}$

کوچکترین مضرب مشترک بین ۳ و ۴ برابر ۱۲ می‌باشد پس: $T = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$

مثال ۲: دوره تناوب تابع $y = \sin\frac{2}{3}x + \cos\frac{3}{2}x$ را بیابید

$y_1 = \sin\frac{2}{3}x \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$ $\qquad y_2 = \cos\frac{3}{2}x \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$

$3\pi = \frac{9\pi}{3}$ $\qquad \frac{4\pi}{3}$

کـ م م ۴ و ۹ برابر ۳۶ می‌باشد

$$T = \frac{36\pi}{3} = 12\pi$$

نکته ریاضی :

۱) دوره تناوب اصلی توابع $y=\sin^{2n-1}(ax+b)$ و $y=\cos^{2n-1}(ax+b)$ برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد ($n\in N$ و $a\neq 0$) توان فرد

۲) دوره تناوب اصلی توابع $y=\sin^{2n}(ax+b)$ $y=\cos^{2n}(ax+b)$ برابر $T=\frac{\pi}{|a|}$ می‌باشد ($n\in N$ و $a\neq 0$) توان زوج

نکته ریاضی :

در توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ داریم :

$y_{max}=$ مقدار ماکزیمم تابع $=|a|+c$

$y_{min}=$ مقدار مینیمم تابع $=-|a|+c$

$a=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}$ ، $c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}$ ، $T=\frac{2\pi}{|b|}$ (b را مثبت فرض می‌کنیم)

مثال ۱ : ضابطه تابع به صورت $y=a\sin bx+c$ را بنویسید که دوره تناوب آن 4π، مقدار ماکزیمم آن ۱- و مقدار مینیمم آن (۷-) باشد.

$T=\frac{2\pi}{|b|}\Rightarrow\frac{2\pi}{|b|}=4\pi\Rightarrow|b|=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\frac{1}{2}$ $a=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=\frac{-1-(-7)}{2}=3$

$c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=\frac{-1+(-7)}{2}=-4$ $y=3\sin(\frac{1}{2}x)-4$

مثال ۲ : ضابطه تابعی به شکل $y=a\cos bx+c$ را بنویسید که دوره تناوب آن $T=\frac{3}{2}$، مقدار ماکزیمم آن (۲-) و مقدار مینیمم آن (۸-) باشد.

$T=\frac{2\pi}{|b|}\Rightarrow\frac{2\pi}{|b|}=\frac{3}{2}\Rightarrow|b|=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow b=\frac{4\pi}{3}$

$a=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=\frac{(-2)-(-8)}{2}=3$ $c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=\frac{(-2)+(-8)}{2}=-5$

$y=3\cos(\frac{4\pi}{3}x)-5$

(هماهنگ - خرداد ۹۸)

مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=1-2\sin(-\frac{\pi}{3}x)$ را بدست آورید:

$y=-2\sin(-\frac{\pi}{3}x)+1$

$max=|a|+c=|-2|+1=3$

$min=-|a|+c=-|-2|+1=-1$

(هماهنگ - دیماه ۹۷)

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=2-3\sin 4x$ را بدست آورید:

$y=-3\sin 4x+2$

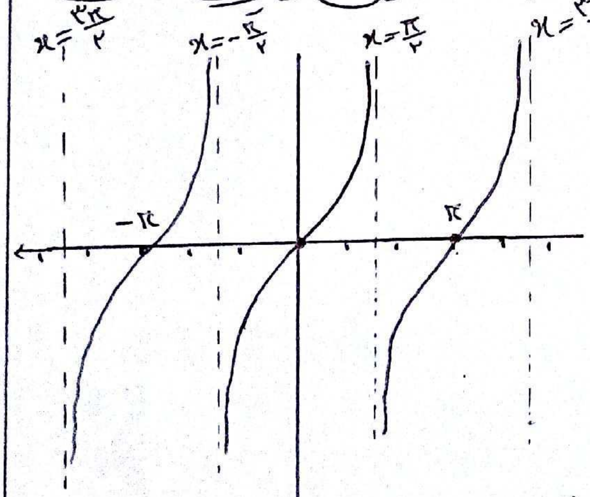
$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$

$max=|a|+c=|-3|+2=5$

$min=-|a|+c=-|-3|+2=-1$

تابع تانژانت:

تابع $y=tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x}$ را تابع تانژانت می‌نامیم که دارای ویژگی های زیر است:



۱) در بازه $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ همواره صعودی اکید است.

۲) دوره تناوب آن برابر π است $(T=\pi)$

۳) $D_f=\mathbb{R}-\{x \mid \cos x=0\}=\mathbb{R}-\{x \mid x=k\pi+\frac{\pi}{2}\}$
$=\{x \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\}$

۴) $R_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

(هماهنگ دیماه ۹۷):

دامنه تابع $f(x)=tg(2x)$ را بدست آورید:

$2x\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

نکته ریاضی:

دوره تناوب تابع $y=a\,tg(bx)+c$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ خواهد بود

نسبتهای مثلثاتی کمان 2α (دو برابر کمان):

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

3) $tg 2\alpha = \dfrac{2\,tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

مثال ۱: اگر $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ و α زاویه‌ای در ربع سوم باشد مطلوبست محاسبه:

$\sin 2\alpha = ?$, $tg 2\alpha = ?$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5} \xrightarrow[\text{سوم}]{\alpha\ \text{ربع}} \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$tg 2\alpha = \frac{2\,tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2\left(\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

مثال ۲: ثابت کنید:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\,tg\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\text{سمت راست} = \frac{2\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}{1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha = \text{سمت چپ}$$

مثال ۳: اگر $\cos 2\alpha = 0{,}62$ و α زاویه‌ای در ربع دوم باشد مقدار $\cos\alpha$ را بدست آورید:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow 0{,}62 = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow 2\cos^2\alpha = 1{,}62$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = 0{,}81 \Rightarrow \cos\alpha = \pm 0{,}9 \xrightarrow[\text{دوم}]{\alpha\ \text{ربع}} \cos\alpha = -0{,}9$$

نسبتهای مثلثاتی نصف کمان:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha \Rightarrow \boxed{\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha \Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \xrightarrow[\text{نصف می کنیم}]{\text{کمان را}} \boxed{\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}$$

یادآوری:

نسبت \ زاویه	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$cotg\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال) مطلوبست محاسبه:

1) $\sin 15^\circ = ?$ 2) $\cos 15^\circ =$ 3) $\sin 75^\circ = ?$ 4) $\cos 75^\circ = ?$

5) $\sin 22{,}5^\circ = ?$ 6) $\cos 22{,}5^\circ = ?$

حل 1: می دانیم 15° نصف 30° است.

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

حل 2: می دانیم 15° نصف 30° است.

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

حل 3: می دانیم $75^\circ = \frac{150^\circ}{2}$ و $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 75^\circ = \frac{1-\cos 150^\circ}{2} = \frac{1-(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

حل 4: $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos^2 75^\circ = \frac{1+\cos 150^\circ}{2} = \frac{1+(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

حل الف: می‌دانیم $22.5°$ نصف $45°$ است.

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 22.5° = \frac{1-\cos 45°}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 22.5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

حل ب:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos^2 22.5° = \frac{1+\cos 45°}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

تذکر مهم:

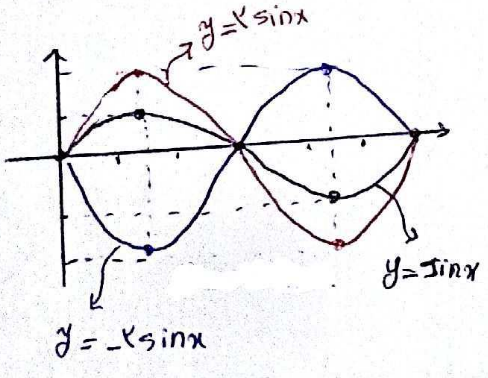
$$\sin 67.5° = \cos 22.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \sin 22.5° = \cos 67.5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

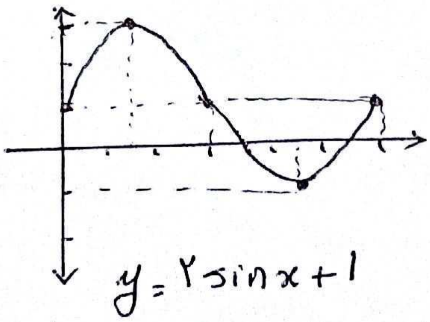
بررسی نمودار توابع $y=a\sin bx + c$ و $y=a\cos bx + c$:

در تابع $y=a\sin bx+c$ دو حالت داریم:

۱) اگر شروع تابع مثل تابع $y=\sin x$ باشد، $ab>0$ است یعنی یا a و b هردو مثبت و یا a و b هردو منفی هستند.

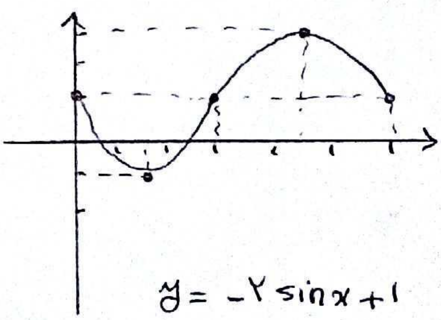
۲) اگر شروع تابع مثل قرینه تابع $y=\sin x$ باشد $ab<0$ است یعنی یا a مثبت و b منفی است یا a منفی و b مثبت است.





$y=2\sin x+1$

$y=-2\sin(-x)+1$



$y=-2\sin x+1$

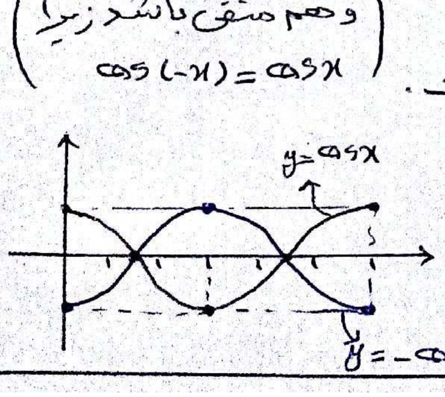
$y=2\sin(-x)+1$

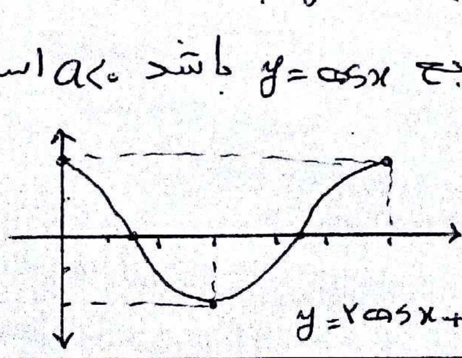
در تابع $y=a\cos bx+c$ دو حالت داریم:

۱) اگر شروع تابع مثل تابع $y=\cos x$ باشد $a>0$ است.

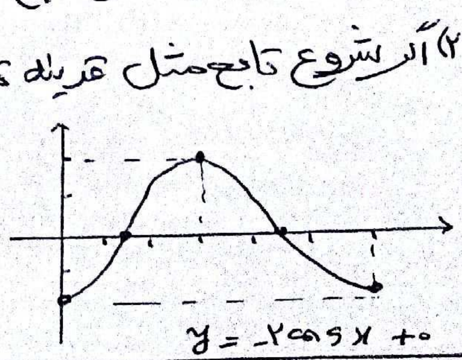
۲) اگر شروع تابع مثل قرینه تابع $y=\cos x$ باشد $a<0$ است.

(b می‌تواند هم مثبت و هم منفی باشد زیرا $\cos(-x)=\cos x$)



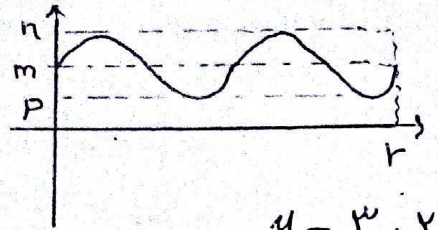


$y=2\cos x+0$



$y=-2\cos x+0$

تست: در شکل روبرو نمودار $y=3+2\sin\frac{x}{2}$ را می‌بینیم مقدار $mnpr$ کدام است؟



۱) 60π ۲) 40π ۳) 30π ۴) 120π

حل: گزینه (۴)

$$y=3+2\sin\frac{x}{2} \Rightarrow y=\underbrace{2}_{a}\sin(\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{b}x)+\underbrace{3}_{c}$$

$$y_{max}=n \Rightarrow |a|+c=n \Rightarrow |2|+3=n \Rightarrow \boxed{n=5}$$

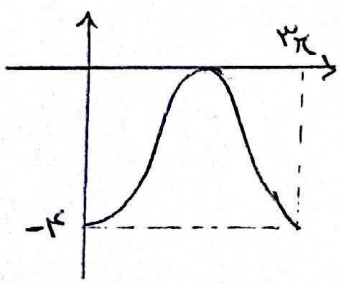
$$y_{min}=p \Rightarrow -|a|+c=p \Rightarrow -|2|+3=p \Rightarrow \boxed{p=1}$$

تابع سینوس به اندازه m واحد به سمت بالا انتقال یافته است: $\boxed{m=c=3}$

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|}=4\pi \Rightarrow r=2T=2(4\pi)=8\pi$$

$$mnpr=3\times5\times1\times8\pi=120\pi$$

تست: در نمودار $y=a\cos bx+c$ به شکل روبرو $a-b+2c$ کدام است؟ $(b>0)$



۱) $-\frac{17}{3}$ ۲) -6 ۳) $-\frac{20}{3}$ ۴) $-\frac{22}{3}$

حل: گزینه (۳)

$$T=3\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=3\pi \Rightarrow |b|=\frac{2}{3} \Rightarrow b=\pm\frac{2}{3} \xrightarrow{b>0} \boxed{b=\frac{2}{3}}$$

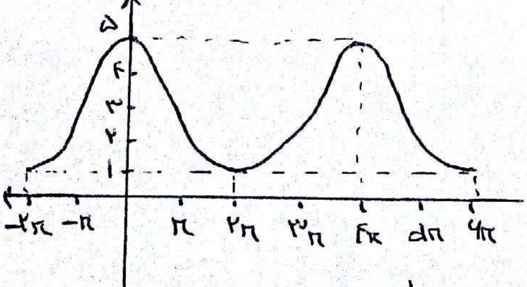
$$y_{max}=0 \Rightarrow |a|+c=0$$

$$y_{min}=-4 \Rightarrow -|a|+c=-4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a|+c=0 \\ -|a|+c=-4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c=-2} \quad |a|=2 \xrightarrow{a<0} \boxed{a=-2}$$

$$a-b+2c=-2-\frac{2}{3}+2(-2)=-\frac{20}{3}$$

تست: اگر نمودار تابع $y=a\cos(bx)+c$ بصورت مقابل باشد حاصل abc کدام است؟



۱) ±1 ۲) ±2 ۳) ±3 ۴) ±6

حل: گزینه ۳:

$$T=4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=4\pi \Rightarrow |b|=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{b=\pm\frac{1}{2}}$$

$$\begin{matrix} y_{max}=5 \Rightarrow \\ y_{min}=1 \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} |a|+c=5 \\ -|a|+c=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c=3},\ |a|=2 \Rightarrow a=\pm2 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$abc=2\times\frac{1}{2}\times3=3$$

$$abc=2\times(-\frac{1}{2})\times3=-3$$

معادلات مثلثاتی :

معادلاتی که در آنها ، مجهول معادله ، کمان یک نسبت مثلثاتی باشد معادلات مثلثاتی نامیده می‌شوند که برای حل آنها حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم :(مثال) $3\sin x - 3 = 0$

۱) حل معادلات شامل سینوس :

اگر پس از ساده کردن یک معادله مثلثاتی داشته باشیم $\sin x = a$ دراینصورت برای حل معادله و پیدا کردن x از فرمولهای زیر که به جوابهای کلی معادله معروفند استفاده می‌کنیم :

$$\sin x = a = \sin\theta \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ x = 2k\pi + \pi - \theta \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

مثال) مطلوبست حل معادلات مثلثاتی زیر :

1) $2\sin x - \sqrt{2} = 0$

$$2\sin x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2\sin x = \sqrt{2} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

---

2) $2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$

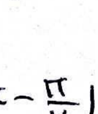
$$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 1 + 24 = 25$$

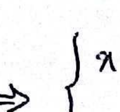
$$\sin x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{1 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{3}{2} \text{ غ ق ق} \\ \sin x = -1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}}$$

تذکر مهم :

اگر در حل معادلات مثلثاتی شامل سینوس به حالت $\sin x = 0$ یا $\sin x = \pm 1$ رسیدیم می‌توانیم جوابها را بصورت زیر بنویسیم :


$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$


$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$


$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

۳) $2\sin^2 x - \sin x = 0$

$$2\sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

---

۴) $\sin 3x + \sin\frac{3\pi}{5} = 0$

$$\sin 3x + \sin\frac{3\pi}{5} = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\sin\frac{3\pi}{5} \Rightarrow \sin 3x = \sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - \frac{3\pi}{5} \\ 3x = 2k\pi + \pi + \frac{3\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - \frac{3\pi}{5} \\ 3x = 2k\pi + \frac{8\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{5} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{8\pi}{15} \end{cases}$$

---

۵) $\sin x - \cos 2x = 0$ (هماهنگ دیماه ۹۷)

$$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \\ \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

---

۶) $\cos 2\alpha - \sin\alpha + 1 = 1$ (هماهنگ خرداد ۹۸)

$$1 - 2\sin^2\alpha - \sin\alpha + 1 = 1 \Rightarrow -2\sin^2\alpha - \sin\alpha + 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-2)(1) = 1 + 8 = 9$$

$$\sin\alpha = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2(-2)} = \frac{1 \pm 3}{-4} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin\alpha = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

۷) $\cos 2x + 4\sin^2 x = 2$

$1 - 2\sin^2 x + 4\sin^2 x = 2 \Rightarrow 2\sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

---

۲) حل معادلات شامل کسینوس:

اگر پس از ساده کردن یک معادله مثلثاتی داشته باشیم: $\cos x = a$

در اینصورت برای حل معادله و پیدا کردن x از فرمولهای زیر که به جوابهای کلی معادله معروفند استفاده می‌کنیم:

$$\cos x = a = \cos\theta \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ x = 2k\pi - \theta \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

مثال) مطلوبست حل معادلات مثلثاتی زیر:

۱) $2\cos^2 x - 1 = 0$

$2\cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos\frac{\pi}{4} = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

---

۲) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -2 \text{ غ ق ق} \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۳) $\cos 3x - 2\cos^2 x + 1 = 0$

$$\cos 3x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos 3x = \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

---

۴) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ (هماهنگ شهریور ۹۵)

$$\Delta = 1^2 - 4(2)(-1) = 9$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 = \cos \pi \Rightarrow x = 2k\pi \pm \pi \\ \cos x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

---

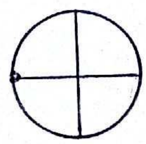
۵) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ (هماهنگ خرداد ۹۴)

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 = \cos\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{2} \\ 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

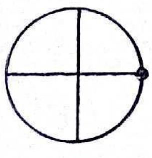
تذکر مهم:

اگر در حل معادلات مثلثاتی شامل کسینوس به حالت $\cos x = 0$ یا $\cos x = \pm 1$ رسیدیم می توانیم جوابها را بصورت زیر نیز بنویسیم:



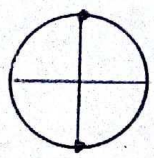
$\cos x = -1$

$\Rightarrow x = 2k\pi + \pi$



$\cos x = 1$

$\Rightarrow x = 2k\pi$



$\cos x = 0$

$\Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

---

۶) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$ (هماهنگ شهریور ۹۳)

جوابهای بین صفر و 2π را بدست آورید.

$$2\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ 2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{3} = 2k\pi + \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

★ تمرینات مهم فصل ۲ کتاب درسی (مثلثات) ★

۱) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y=1+2\sin 7x = 2\sin 7x+1$

$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|7|}=\frac{2\pi}{7}$ $\quad y_{max}=|a|+c=|2|+1=3$ $\quad y_{min}=-|a|+c=-|2|+1=-1$

ب) $y=\sqrt{3}-\cos\frac{\pi}{2}x = -\cos\frac{\pi}{2}x+\sqrt{3}$

$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{2}|}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$ $\quad y_{max}=|a|+c=|-1|+\sqrt{3}=1+\sqrt{3}$

$y_{min}=-|a|+c=-|-1|+\sqrt{3}=-1+\sqrt{3}$

پ) $y=-\pi\sin(\frac{x}{2})-2$

$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|}=4\pi$ $\quad y_{max}=|a|+c=|-\pi|-2=\pi-2$

$y_{min}=-|a|+c=-|-\pi|-2=-\pi-2$

ت) $y=-\frac{3}{4}\cos 3x$

$y_{max}=|a|+c=|-\frac{3}{4}|+0=\frac{3}{4}$

$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|3|}=\frac{2\pi}{3}$ $\quad y_{min}=-|a|+c=-|-\frac{3}{4}|+0=-\frac{3}{4}$

---

۲) در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده را بنویسید.

الف) $T=\pi$ ، $max=3$ ، $min=-3$

$T=\frac{2\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow |b|=2 \Rightarrow b=2$ $\quad a=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=\frac{3-(-3)}{2}=3$

$c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=\frac{3+(-3)}{2}=0$ $\quad y=a\sin bx+c \Rightarrow y=3\sin 2x+0$

یا $y=a\cos bx+c \Rightarrow y=3\cos 2x+0$

ب) $T=3$ ، $max=9$ ، $min=3$

$T=\frac{2\pi}{|b|}=3 \Rightarrow |b|=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow b=\frac{2\pi}{3}$ $\quad a=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=\frac{9-3}{2}=3$

$c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=\frac{9+3}{2}=6$

$y=a\sin bx+c \Rightarrow y=3\sin(\frac{2\pi}{3}x)+6$

یا

$y=a\cos bx+c \Rightarrow y=3\cos(\frac{2\pi}{3}x)+6$

ب) $T=\frac{\pi}{2}$, $max=1$, $min=-1$

$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow |b|=4\Rightarrow b=4$ $\qquad a=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=\frac{1-(-1)}{2}=1$

$c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0$

$y=a\sin bx+c\Rightarrow y=\sin 4x$

یا

$y=a\cos bx+c\Rightarrow y=\cos 4x$

---

۳) کدام یک از جملات زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است، نادرست

ب) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد نادرست.

پ) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد نادرست

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد صعودی است درست

---

۴) فرض کنید $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ و α زاویه ای حاده باشد حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\cos 2\alpha=?$ $\qquad$ ب) $\sin 2\alpha=?$

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-(\frac{5}{13})^2=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}\Rightarrow \sin\alpha=\pm\frac{12}{13}\xrightarrow[\text{حاده}]{\alpha}\sin\alpha=\frac{12}{13}$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2(\frac{5}{13})^2-1=\frac{50}{169}-1=-\frac{119}{169}$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha=2\times\frac{12}{13}\times\frac{5}{13}=\frac{120}{169}$

---

۵) معادلات زیر را حل کنید

الف) $\sin\frac{\pi}{2}=\sin 3x$

$$\begin{cases}3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\\ 3x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2}\Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow \boxed{x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}$$

جواب نهایی

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پ) $\cos x = \cos 2x$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + 2x \Rightarrow -x = 2k\pi \Rightarrow x = -2k\pi \\ x = 2k\pi - 2x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

ت) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow -\sin^2 x - \sin x + \frac{3}{4} = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(-1)\left(\frac{3}{4}\right) = 1 + 3 = 4$

$$\sin x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{1 \pm 2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ \sin x = -\frac{3}{2} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

ث) $\sin x - \cos 2x = 0$

$$\sin x = \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow x = -2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ج) $\cos 3x + \cos x = 0$ (خارج از کتاب)

$\cos 3x = -\cos x \Rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi \\ 2x = 2k\pi - \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ج) $\cos 5x + \sin x = 0$ (خارج از کتاب)

$$\cos 5x = -\sin x \Rightarrow \cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \\ 5x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 6x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

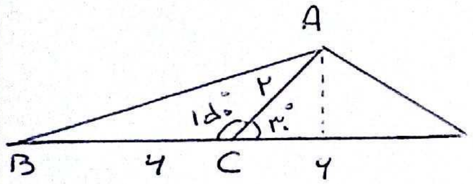
د) $\sin 5x + \sin x = 0$ (خارج از کتاب)

$$\sin 5x = -\sin x \Rightarrow \sin 5x = \sin(-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi + (-x) \\ 5x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 2k\pi \\ 4x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

---

۶) مثلثی با مساحت ۳ سانتیمتر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتیمتر باشد آنگاه چند مثلث با این خاصیت می‌توان ساخت؟



$$S = \frac{1}{2} ab \sin C \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin C$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} C = 30^\circ \\ C = 150^\circ \end{cases}$$

پس دو مثلث با ویژگی های بالا وجود دارد.

(هماهنگ - شهریور ۹۸)

معادله مثلثاتی مقابل را حل کنید $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\xrightarrow{\times 2} 2(\sin x \cdot \cos x) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \Rightarrow 2\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ 2x = 2k\pi + \underbrace{\pi - \frac{\pi}{4}}_{\frac{3\pi}{4}} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

فصل ۳ - (حد بی نهایت و حد در بی نهایت)

بخش پذیری چند جمله‌ای ها بر $(x-a)$:

اگر چند جمله‌ای $f(x)$ را بر $(x-a)$ تقسیم کنیم دارای خارج قسمتی مانند $Q(x)$ و باقیمانده ای مانند R خواهد بود بطوریکه :

$$f(x) = (x-a)\,Q(x) + R$$

این رابطه را رابطه تقسیم می گویند که در آن $f(x)$ مقسوم و $(x-a)$ مقسوم علیه و $Q(x)$ خارج قسمت و R باقیمانده خواهد بود.

$$\begin{array}{r|l} x^3+5x^2-3x+1 & x-2 \\ \cline{2-2} -\;\; x^3-2x^2 \qquad\qquad & x^2+7x+11 \\ \hline 7x^2-3x \qquad & \\ -\;\; 7x^2-14x \qquad & \\ \hline 11x+1 & \\ 11x-22 & \\ \hline 23 & \end{array}$$

نکته : اگر در تقسیم بالا جواب مقسوم علیه را پیدا کنیم : $x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

و آنرا در مقسوم به جای x قرار دهیم : $2^3+5(2)^2-3(2)+1 = 8+20-6+1 = 23$

جواب برابر باقیمانده خواهد شد پس :

۱) برای پیدا کردن باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)$ کافی است مقدار $f(a)$ را حساب کنیم (a ریشه $x-a=0$ است)

۲) اگر $f(a)=0$ باشد (یعنی باقیمانده صفر باشد) چند جمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)$ بخشپذیر است.

۳) اگر چند جمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)$ بخشپذیر باشد برای تجزیه $f(x)$ می توانیم آنرا بر $(x-a)$ تقسیم کنیم.

مثال ۱ : باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x) = 5x^3-2x^2-3x+1$ را بر $(x+1)$ پیدا کنید.

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ $\qquad R = f(-1) = 5(-1)^3-2(-1)^2-3(-1)+1 = -3$

مثال ۲: نشان دهید چند جمله‌ای $f(x)=3x^3-5x^2+x+1$ بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است؟

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

کافی است نشان دهیم $f(1)=0$

$$\text{باقیمانده} = R = f(1) = 3(1)^3 - 5(1)^2 + (1) + 1 = 3 - 5 + 1 + 1 = 0$$

مثال ۳: مقدار k را چنان تعیین کنید که عبارت $f(x)=2x^8-kx^2+x+3$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد.

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$f(-1)=0 \Rightarrow 2(-1)^8 - k(-1)^2 + (-1) + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{k=4}$

مثال ۴: مقدار m را چنان تعیین کنید که عبارت $f(x)=5x^6-6x^2+mx+2$ بر $(2x+2)$ بخش‌پذیر باشد.

$2x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

$f(-1)=0 \Rightarrow 5(-1)^6 - 6(-1)^2 + m(-1) + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{m=1}$

حد توابع کسری:

برای محاسبه حد توابع کسری که به صورت $\frac{f(x)}{g(x)}$ هستند اگر حد صورت و حد مخرج برابر صفر باشد اصطلاحاً به آن حالت مبهم $(\frac{0}{0})$ می‌گوئیم. برای رفع ابهام و محاسبه حد صورت و مخرج را تجزیه کرده و عامل صفر کننده را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم تا حد محاسبه شود. اگر صورت و مخرج دارای عامل رادیکالی باشد برای رفع ابهام صورت و مخرج را در مزدوج عامل رادیکالی ضرب می‌کنیم:

$$(\sqrt[3]{x}-a)(\sqrt[3]{x^2}+a\sqrt[3]{x}+a^2)=x-a^3$$

$$(\sqrt[3]{x}+a)(\sqrt[3]{x^2}-a\sqrt[3]{x}+a^2)=x+a^3$$

تذکر مهم:

وقتی که $x \to a$، عامل صفر کننده برابر $(x-a)$ است که هم باید از صورت و هم از مخرج حذف شود و برای پیدا کردن عامل صفر کننده می‌توانیم از تجزیه یا تقسیم استفاده کنیم:

مثال) مطلوبست محاسبه حدهای زیر:

الف)
$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x^2+3x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2-2x+4}{x+1} = \frac{12}{-1} = -12$$

ب)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3+3x^2-4}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+4x+4)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2-4 & x-1 \\ \hline -\;\; -x^3+x^2 & x^2+4x+4 \\ \quad 4x^2-4 & \\ -\;\; 4x^2-4x & \\ \quad 4x-4 & \\ -\;\; 4x-4 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+4x+4)}{x+1} = \frac{9}{2}$$

ج)
$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-2x-8} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-2x-8} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(x+2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{6 \times 4} = \frac{1}{24}$$

د)
$$\lim_{x \to 9} \frac{x-3\sqrt{x}}{x^2-10x+9} = \lim_{x \to 9} \frac{x-3\sqrt{x}}{x^2-10x+9} \times \frac{x+3\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}} = \lim \frac{x^2-9x}{(x-9)(x-1)(x+3\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{x(x-9)}{(x-9)(x-1)(x+3\sqrt{x})} = \lim \frac{x}{(x-1)(x+3\sqrt{x})} = \frac{9}{8 \times 18} = \frac{1}{16}$$

ه)
$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+5x+4} = \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+5x+4} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1} =$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(x+4)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+4)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{1}{3\times 3}=\frac{1}{9}$$

و) $$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{(x+1)(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\lim_{x\to 8}\frac{1}{(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\frac{1}{9\times 12}=\frac{1}{108}$$

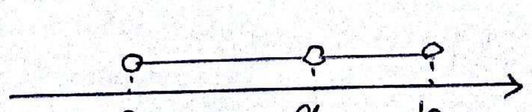
تعریف همسایگی یک عدد:

فرض کنیم x_0 یک عدد حقیقی باشد هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌گوئیم به عبارت دیگر اگر $x_0\in(a,b)$ باشد بازه (a,b) را یک همسایگی x_0 نامیده و x_0 را یک نقطه درونی بازه (a,b) می‌گوئیم

مثلاً بازه $(0,2)$ یک همسایگی عدد ۱ یا ۱٫۳ یا $\frac{1}{2}$ یا ... است.

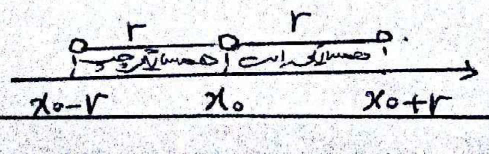
تعریف همسایگی محذوف:

اگر عدد x_0 را از همسایگی (a,b) حذف کنیم یعنی $(a,b)-\{x_0\}$ به مجموعه بدست آمده یک همسایگی محذوف (حذف شده) عدد x_0 می‌گوئیم. به عبارت دیگر همسایگی محذوف x_0 بصورت $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ است.



تعریف همسایگی راست و چپ:

اگر $r>0$ باشد بازه (x_0, x_0+r) را یک همسایگی راست عدد x_0 و بازه (x_0-r, x_0) را یک همسایگی چپ عدد x_0 می‌گوئیم، r را شعاع همسایگی می‌نامند.



تذکر خیلی مهم:

۱) a^+ : یعنی بزرگتر از a و خیلی نزدیک به a (سمت راست a و خیلی نزدیک به a)

۲) a^- : یعنی کمتر از a و خیلی نزدیک به a (سمت چپ a و خیلی نزدیک به a)

۳) $a^+ - a = 0^+$ (مثال) $2^+ - 2 = 0^+$

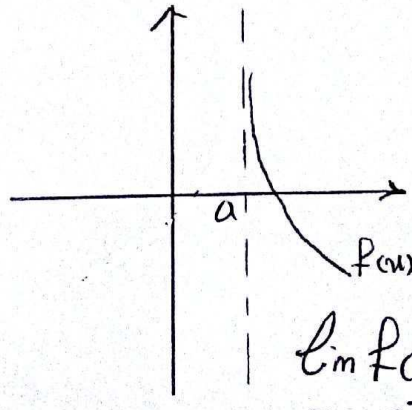
۴) $a - a^+ = 0^-$ (مثال) $3 - 3^+ = 0^-$

۵) $a^- - a = 0^-$ (مثال) $2^- - 2 = 0^-$

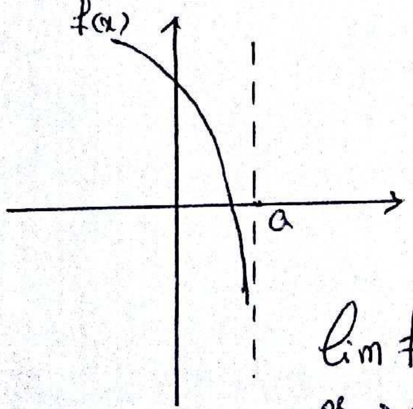
۶) $a - a^- = 0^+$ (مثال) $2 - 2^- = 0^+$

حد بی نهایت:

در محاسبه حد برخی از توابع، وقتی متغیر x به عددی مانند a نزدیک می‌شود مقدار تابع به $(+\infty)$ یا $(-\infty)$ نزدیک می‌شود در این حالت می‌گوئیم حد تابع بی نهایت شده است و می‌نویسیم:



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

برای محاسبه حد بی نهایت از فرمولهای مهم زیر استفاده می‌کنیم:

1) $\dfrac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$

۳) $\dfrac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$

۲) $\dfrac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$

۴) $\dfrac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$

مثال) مطلوبست محاسبه حدهای زیر:

۱) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+3}{x-2} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x-4}{x-2} = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty$

۳) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x-6}{(x-3)^2} = \dfrac{3-6}{(0^-)^2} = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty$

۴) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+7}{x-1} = \dfrac{8}{0^-} = -\infty$

۵) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+3}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+3}{(x-2)^2} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$

۶) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \dfrac{[x]-2}{4x^2-4x+1} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \dfrac{[x]-2}{(2x-1)^2} = \dfrac{[\frac{1}{2}]-2}{(1^- -1)^2} = \dfrac{0-2}{(0^-)^2} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$

۷) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{|x|-1}{|x-2|} = \dfrac{|2|-1}{|0^+|} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

۸) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-4x+4}} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-\sqrt{x-1}}{|x-2|} = \dfrac{2-1}{0^+} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

۹) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2+x-2}{x^3-3x^2+3x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^3} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+2}{(x-1)^2} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$

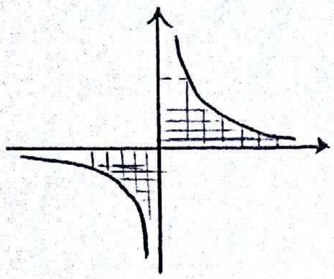
۱۰) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

۱۱) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \cot x = \lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

۱۲) $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{1-\sin x} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

۱۳) $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} \tan x = \lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

حد در بی نهایت :



تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر می گیریم نمودار این تابع بصورت مقابل است.

با توجه به نمودار وقتی مقدار x خیلی بزرگتر شود $(x \to +\infty)$ مقادیر تابع کم کم به صفر نزدیکتر می شوند و می نویسیم :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

همچنین وقتی مقدار x خیلی کوچکتر می شود $(x \to -\infty)$ مقادیر تابع کم کم به صفر نزدیکتر می شوند و می نویسیم :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$(\frac{\text{عدد حقیقی}}{\pm\infty} = 0)$

بطور کلی : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{a}{x^n} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a}{x^n} = 0$

برای پیدا کردن حد توابع کسری وقتی که $x \to \pm\infty$ در صورت و مخرج تابع از بزرگترین توان x فاکتور می گیریم و بعد از ساده کردن صورت و مخرج حاصل حد را پیدا می کنیم

۱) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+3}{3x-5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x(2+\frac{3}{x})}{x(3-\frac{5}{x})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{3-\frac{5}{x}} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}$

۲) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x-1}{3x^2+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x(5-\frac{1}{x})}{x^2(3+\frac{4}{x^2})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-\frac{1}{x}}{x(3+\frac{4}{x^2})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-0}{x(3+0)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{5}{3}\times\frac{1}{x})=\frac{5}{3}\times 0=0$

۳) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{2x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})}{x(2+\frac{5}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})}{(2+\frac{5}{x})}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(1+0-0)}{(2+0)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$

نتیجه:

در محاسبه حد توابع کسری وقتی $x\to\pm\infty$ سه حالت داریم:

۱) اگر درجه چند جمله‌ای صورت با درجه چند جمله‌ای مخرج برابر باشد در اینصورت حاصل حد برابر است با ضریب جمله‌ٔ بزرگترین درجه صورت بر ضریب جمله‌ٔ بزرگترین درجه مخرج

۲) اگر درجه چند جمله‌ای صورت از درجه چند جمله‌ای مخرج کوچکتر باشد در این حالت حد تابع برابر صفر است.

۳) اگر درجه چند جمله‌ای صورت از درجه چند جمله‌ای مخرج بزرگتر باشد در این حالت حد تابع برابر $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود.

تذکر مهم:

حد هر چند جمله‌ای وقتی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ با حد جمله‌ٔ دارای بزرگترین توان x آن برابر است.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n+bx^{n-1}+\dots+k=\lim ax^n$

بطورکلی: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^n+bx^{n-1}+\dots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\dots}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^n}{a'x^m}=\begin{cases}\frac{a}{a'} & n=m\\ 0 & n<m\\ \pm\infty & n>m\end{cases}$

تذکر مهم:

$(+\infty)^{\text{فرد}} = +\infty$ $\qquad$ $(+\infty)^{\text{زوج}} = +\infty$

$(-\infty)^{\text{فرد}} = -\infty$ $\qquad$ $(-\infty)^{\text{زوج}} = (+\infty)$

$(-\infty) = (-\infty) \times (\text{عدد مثبت})$ $\qquad$ $(+\infty) = (+\infty) \times (\text{عدد مثبت})$

$(+\infty) = (-\infty) \times (\text{عدد منفی})$ $\qquad$ $(-\infty) = (+\infty) \times (\text{عدد منفی})$

مثال) مطلوبست محاسبه حد توابع زیر:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-7x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-6x^2+7x-1) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^4+x^3-x^2-\frac{1}{2}x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^4) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3-\frac{7}{2}x^2+5x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3) = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-7x^3+6x^2-x+1}{x^2+2x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-7x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}(-7x) = +\infty$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+4}{2x^2-x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{2x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{2x} = 0$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{1}{1} = 1$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x}+1}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{2}{1} = 2$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{8x-1}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{8x}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{2}$

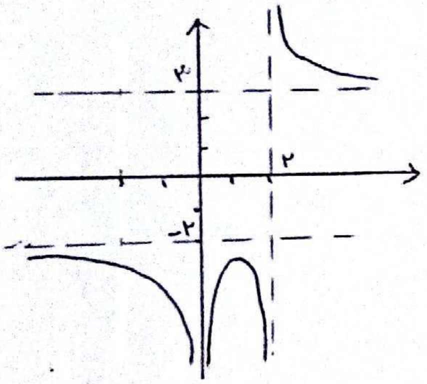
$$10)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+x-3}{x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty$$

$$11)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{3x-\sqrt{4x^2+1}}{2x+\sqrt{9x^2+8}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-\sqrt{4x^2}}{2x+\sqrt{9x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2|x|}{2x+3|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2x}{2x-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{-x}$$

$$=\frac{5}{-1}=-5$$

$$12)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{4x+5}}{\sqrt{9x+1}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{4x}}{\sqrt{9x}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+2\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}$$

مثال) نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل حدهای زیر را بدست آورید.



الف) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

ب) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

پ) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

ت) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

ث) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$

ج) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$

مثال) اگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^n+2x^2+1}{3x^4-x^3+5}=3$ باشد $a+n$ را پیدا کنید.

حل: حاصل برابر ۳ شده است پس بزرگترین درجه صورت با بزرگترین درجه مخرج برابر است پس: $\boxed{n=4}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^n}{3x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^4}{3x^4}=\frac{a}{3}=3\Rightarrow a=9$$

$$a+n=9+4=13$$

مثال) اگر $\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2-3x+2}{2x^2+x-3}=\frac{1}{2}$ باشد مقدار a را بیابید.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2}{2x^2}=\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=1$$

(هماهنگ دیماه ۹۷)

حد توابع زیر را بدست آورید (۰/۷۵ نمره)

الف) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \frac{[3^-]-3}{3^- - 3} = \frac{2-3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2} = \lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2} \times \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\right) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3} (x+3)(\sqrt{x+1}+2) = 6 \times 4 = 24$

(هماهنگ خرداد ۹۸)

الف) حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید (۱/۵ نمره)

الف) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x-\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{(x+2)(x+\sqrt{x})}$

$= \frac{1}{3\times 2} = \frac{1}{6}$

(هماهنگ شهریور ۹۸)

۱) حد تابع $f(x) = \frac{-3x^7+5x^2}{2x^3+9}$ وقتی $x \to -\infty$ برابر .... می‌باشد.

$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{-3x^7}{2x^3}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(-\frac{3}{2}x^4\right) = -\frac{3}{2}(-\infty)^4 = -\infty$

۲) حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید. (۱/۷۵ نمره)

الف) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{x^2-16} = \lim\limits_{x\to 4} \left(\frac{2-\sqrt{x}}{x^2-16} \times \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right) = \lim \frac{4-x}{(x-4)(x+4)(2+\sqrt{x})}$

$$= \frac{-1}{(x+4)(2+\sqrt{x})} = \frac{-1}{32}$$

ب) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

(خرداد ۹۹ - هماهنگ):

حد تابع $f(x) = \frac{5x+4}{x^3+x-8}$ وقتی که $x \to -\infty$ برابر ..... است.

جواب: صفر چون درجه مخرج از درجه صورت بزرگتر است

(هماهنگ-خرداد ۹۹):

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید (۱/۷۵ نمره)

الف) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-\sqrt{x+6}} = \frac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2-2x-3}{x-\sqrt{x+6}} \times \frac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{x+6}} \right) = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{x^2-x-6}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{(x+2)\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{x+2} = \frac{24}{5}$$

ب) $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \frac{[3^-]-3}{3^- - 3} = \frac{2-3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

فصل ۴: (مشتق)

مشتق تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ (عضو دامنه) با علامت $f'(a)$ نشان داده و از فرمولهای زیر بدست می آید:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

یا

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال) مشتق تابع $f(x)=x^2+x$ را در نقطه $x=2$ را با استفاده از هردو رابطه مشتق پیدا کنید:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$$

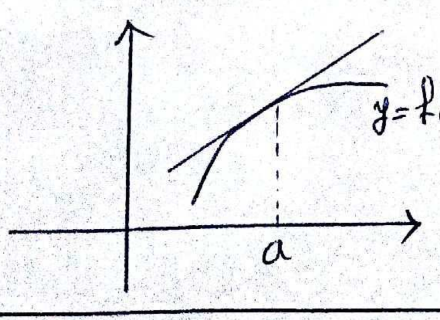
یا

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2+(2+h)-6}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2+2+h-6}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(5+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(5+h)=5$$

تعبیر هندسی مشتق:

از نظر هندسی مشتق تابع $y=f(x)$ در نقطه ای مانند $x=a$ عبارتست از شیب خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=a$



$$\text{شیب خط مماس}=m=f'(a)$$

مثال) شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه $x=4$ بنویسید.

$$\text{شیب} = m = f'(4) = \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

مثال) معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=x^3+1$ را در نقطه $x=1$ بنویسید.

$$x=1 \Rightarrow f(1)=1^3+1=2 \Rightarrow A\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$$

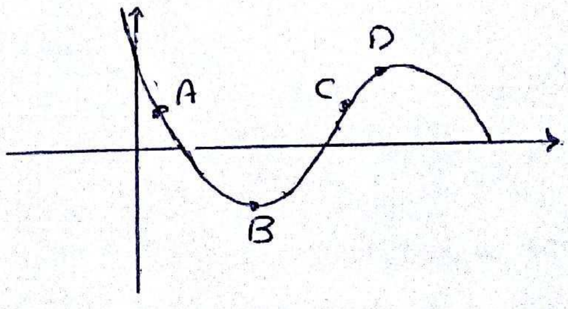
$$\text{شیب} = m = f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3+1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

$$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-2=3(x-1)\Rightarrow \boxed{y=3x-1}$$ معادله خط مماس

(هماهنگ شهریور ۹۸)

نقاط داده شده روی منحنی را با شیب های ارائه شده در جدول نظیر کنید. (۱ نمره)



شیب	1	0	$\frac{1}{2}$	-2
نقطه	C	B	D	A

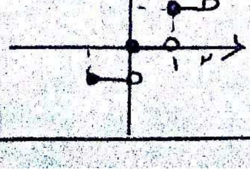
حل: خط مماس را در نقاط A و B و C و D رسم می کنیم:

$m_C > m_D$ $\quad m_B = 0$

$m_A < 0$

تذکر مهم: شرط اینکه تابع $y=f(x)$ در نقطه ای مانند $x=a$ مشتق پذیر باشد آن است که در آن نقطه پیوسته باشد.

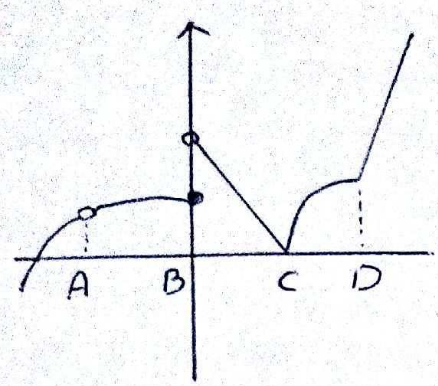
مثال) مشتق پذیری تابع $y=[x]$ را در $x=0$ بررسی کنید.



حد راست $=0$
حد چپ $=-1$ $\Rightarrow$ تابع پیوسته نیست $\Rightarrow$ در $x=0$ مشتق ندارد.

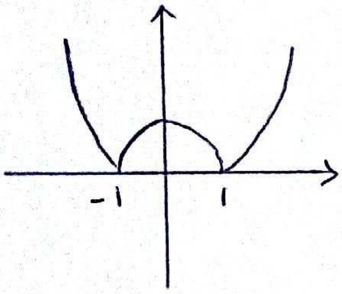
تذکر مهم:

هرگاه نمودار یک تابع داده شده باشد در نقاطی که تابع پیوسته نباشد یا دارای جهش باشد یا دارای زاویه (شکستگی) (گوشه‌ای) باشد در آن نقاط مشتق تابع وجود ندارد.



(تابع در نقاط A و B و C و D مشتق ندارد)

مثال) نمودار تابع $y=|x^2-1|$ را رسم کرده و نقاطی را که در آنها تابع مشتق پذیر نیست مشخص کنید.



تابع در $x=\pm 1$ مشتق پذیر نیست

(هماهنگ خرداد ۹۸)

مشتق تابع $f(x)=x^3-2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x=-1$ بدست آورید. (۱ نمره)

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2-(-3)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3$$

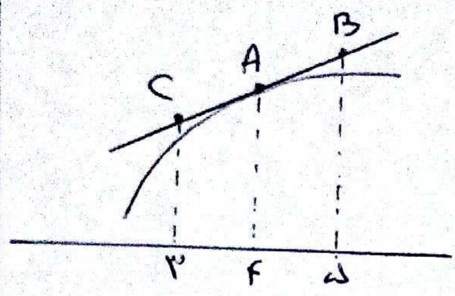
(هماهنگ دی ماه ۹۷)

اگر $f(x)=1-2x^2$ باشد $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید (۰/۷۵ نمره)

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1-2x^2+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{2(1-x)(1+x)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}2(1-x)=4$$

(هماهنگ دی ماه ۹۸)



برای تابع f در شکل روبرو داریم: (۰٫۷۵ نمره)

$f(۴)=۲۴$ ، $f'(۴)=۱٫۵$

با توجه به شکل، مختصات نقاط A و B و C را بیابید.

$f'(۴)=۱٫۵=m_{AB}=m_{AC}$

$m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\Rightarrow ۱٫۵=\dfrac{y_B-۲۴}{۵-۴}\Rightarrow y_B=۲۵٫۵$

$f(۴)=۲۴\Rightarrow A\left|\begin{matrix}۴\\۲۴\end{matrix}\right.$

$m_{AC}=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}\Rightarrow ۱٫۵=\dfrac{y_C-۲۴}{۴-۳}\Rightarrow y_C=۲۲٫۵$

$B\left|\begin{matrix}۵\\۲۵٫۵\end{matrix}\right.$ $\qquad$ $C\left|\begin{matrix}۳\\۲۲٫۵\end{matrix}\right.$

مشتق راست و چپ:

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه $x=a$ تعریف شده باشد مشتق راست تابع f را در نقطه $x=a$ با علامت $f'_+(a)$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

همچنین اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه $x=a$ تعریف شده باشد مشتق چپ تابع f را در نقطه $x=a$ با علامت $f'_-(a)$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تذکر خیلی مهم:

شرط اینکه تابع f در یک نقطه مشتق پذیر باشد آن است که مشتق راست و چپ موجود و با هم برابر باشند.

مثال ۱: مشتق پذیری تابع $f(x)=|x-2|$ را در نقطه $x=2$ بررسی کنید.

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)}{x-2}=1$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$

$f'_+(2)\neq f'_-(2) \Rightarrow$ تابع در $x=2$ مشتق ندارد

مثال ۲: مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)}{x-1}=1$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$$

$f'_+(1)\neq f'_-(1) \Rightarrow$ تابع در $x=1$ مشتق ندارد.

مثال ۳: مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}2x^2 & x\geq 1\\ x^3+1 & x<1\end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=4$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=3$$

$f'_+(1)\neq f'_-(1) \Rightarrow$ تابع در $x=1$ مشتق ندارد.

نکته ریاضی:

مشتق تابع $y=f(x)$ را به صورت y' یا $f'(x)$ نشان می دهند.

فرمولهای محاسبه مشتق توابع:

1) $y=a \Rightarrow y'=0$ (مشتق تابع ثابت برابر صفر است)

مثال) $y=3 \Rightarrow y'=0$ $\quad$ $y=-\frac{1}{2} \Rightarrow y'=0$ $\quad$ $y=\pi \Rightarrow y'=0$

2) $y=ax \Rightarrow y'=a$ $\Rightarrow y=x \Rightarrow y'=1$

مثال) $y=2x \Rightarrow y'=2$ $\quad$ $y=-7x \Rightarrow y'=-7$

3) $y=ax^n \Rightarrow y'=anx^{n-1}$

مثال) $y=-5x^7 \Rightarrow y'=-5\times7\times x^6=-35x^6$

4) $y=au^n \Rightarrow y'=anu'u^{n-1}$ (u تابعی از x)

مثال) $y=3(7x)^4 \Rightarrow y'=3\times4\times7\times(7x)^3$

5) $y=f(x)\pm g(x)\pm\cdots \Rightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)\pm\cdots$

مثال) $y=5x^3-6x^{11} \Rightarrow y'=5\times3\times x^2-6\times11\times x^{10}$

مثال) $y=4(3x^4-5x^2)^4 \Rightarrow y'=4\times4(3\times4x^3-5\times2\times x)(3x^4-5x^2)^3$

6) $y=u.v \Rightarrow y'=u'.v+v'.u$ (u و v توابعی از x)

مثال) $y=(3x+2)(5x^2-6)^3 \Rightarrow y'=(3+0)(5x^2-6)^3+3(10x-0)(5x^2-6)^2(3x+2)$

7) $y=\frac{1}{x} \Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}$

۸) $y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$ (u و v توابعی از x)

مثال) $y=\frac{5x^3-2x}{3x+1} \Rightarrow y'=\frac{(15x^2-2)(3x+1)-(3+0)(5x^3-2x)}{(3x+1)^2}$

۹) $y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

۱۰) $y=\sqrt{ax+b} \Rightarrow y'=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

مثال) $y=\sqrt{5x+3} \Rightarrow y'=\frac{5}{2\sqrt{5x+3}}$ $\qquad y=\sqrt{1-3x} \Rightarrow y'=\frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}$

۱۱) $y=\sqrt[m]{u^n} \Rightarrow y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$ (u تابعی از x)

مثال) $y=\sqrt[3]{(4x^2-2)^2} \Rightarrow y'=\frac{2(8x-0)}{3\sqrt[3]{4x^2-2}}$

مثال) $y=\sqrt[5]{(6x-2)^3} \Rightarrow y'=\frac{3(6)}{5\sqrt[5]{(6x-2)^2}}$

مثال) $y=\sqrt[4]{2x-5} \Rightarrow y'=\frac{2}{4\sqrt[4]{(2x-5)^3}}$

(هماهنگ شهریور ۹۸)

مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x\geq 1 \\ 3x-1 & x<1 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید (۰/۵ نمره)

$f'_+(x)=2x+1 \Rightarrow f'_+(1)=3$ $\qquad f'_-(x)=3 \Rightarrow f'_-(1)=3$

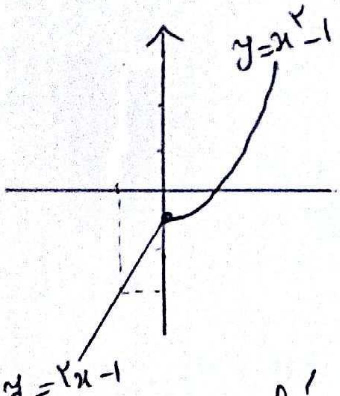
$f'_+(1)=f'_-(1)=3 \Rightarrow$ تابع در $x=1$ مشتق پذیر است

(شهریور ۹۸)

مشتق تابع $y=\frac{1}{x}(2\sqrt{x}-1)^4$ را بدست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$y' = -\frac{1}{x^2}(2\sqrt{x}-1)^4 + 4\left(2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(2\sqrt{x}-1)^3\left(\frac{1}{x}\right)$$

هماهنگ (خرداد ۹۸)



تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<0\\ x^2-1 & x\geq 0\end{cases}$ را در نظر بگیرید. (۱/۵ نمره)

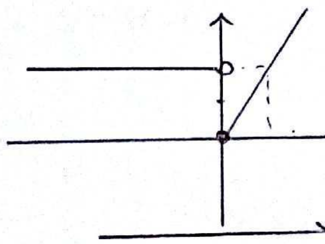
الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.

حل: $x=0$ نقطه‌ی گوشه‌ای و مشتق ناپذیر است.

ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

$$f'(x)=\begin{cases}2 & x<0\\ 2x & x\geq 0\end{cases}$$

ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.



(دی ماه ۹۷)

تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در نقطه $x=0$ مشتق پذیر است (درست / نادرست)

(هماهنگ خرداد ۹۸)

مشتق توابع زیر را بدست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست) (۱/۵ نمره)

الف) $f(x)=(x^4-3x)^5 \Rightarrow f'(x)=5(4x^3-3)(x^4-3x)^4$

ب) $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-x} \Rightarrow g'(x)=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(1-x)-(-1)(\sqrt{x})}{(1-x)^2}$

(هماهنگ دیماه ۹۷)

مشتق توابع زیر را بدست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x)=\left(\frac{x}{2x-1}\right)^5 \Rightarrow f'(x)=5\left(\frac{1(2x-1)-2x}{(2x-1)^2}\right)\left(\frac{x}{2x-1}\right)^4$

ب) $g(x)=x^2(\sqrt{x+1}) \Rightarrow g'(x)=(2x)(\sqrt{x+1})+\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)(x^2)$

تمرین: مطلوبست محاسبه مشتق توابع زیر:

۱) $f(x)=(2x-1)(x^2+3x) \Rightarrow f'(x)=(2-0)(x^2+3x)+(2x+3)(2x-1)$

۲) $f(x)=(x^2-x+2)^2(x^3-1)^3 \Rightarrow f'(x)=2(2x-1)(x^2-x+2)(x^3-1)^3+3(3x^2)(x^3-1)^2(x^2-x+2)^2$

۳) $f(x)=(\sqrt{5x+2})(x-3) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{5}{2\sqrt{5x+2}}(x-3)+(1-0)(\sqrt{5x+2})$

۴) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{x+2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2\times\frac{1}{2\sqrt{x}})(x+2)-(1)(2\sqrt{x}-1)}{(x+2)^2}$

۵) $f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{2x+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2x+1)(2x+1)-(2)(x^2+x-3)}{(2x+1)^2}$

۶) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{9x^2-6x+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2x+2)(9x^2-6x+1)-(18x-6)(x^2+2x+1)}{(9x^2-6x+1)^2}$

۷) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x+2}}{3x-2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\left[(1)(\sqrt{x+2})+(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\times x)\right](3x-2)-3(x\sqrt{x+2})}{(3x-2)^2}$

۸) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(3x^2-0)(x-1)-(1)(x^3-1)}{(x-1)^2}$

مشتق تابع قدرمطلق:

$y=|u| \Rightarrow y'=\dfrac{u\cdot u'}{|u|}$ (u تابعی از x)

مثال) $y=|x^2+3x| \Rightarrow y'=\dfrac{(x^2+3x)(2x+3)}{|x^2+3x|}$

مثال) $y=\left|\dfrac{1}{x}\right| \Rightarrow y'=\dfrac{(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{\left|\frac{1}{x}\right|}$

مشتق تابع مرکب:

$$(f\circ g)'(x) = [f(g(x))]' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

(قاعده زنجیره‌ای)

مثال ۱: اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ مطلوبست محاسبه مشتق $f\circ g$:

$f'(x) = 2x + 2$

$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$(f\circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(2\left(\frac{1}{x}\right) + 2\right)$$

مثال ۲: اگر $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt{x}$ مشتق تابع $f\circ g$ را حساب کنید

$f'(x) = 3x^2$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$(f\circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 3(\sqrt{x})^2 = \frac{3x}{2\sqrt{x}}$$

مشتق تابع $y = f(u)$:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' f'(u)$$

(u تابعی از x)

(قاعده زنجیره‌ای)

مثال) مطلوبست محاسبه مشتق تابع $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$y' = u' \cdot f'(u) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

مثال) مطلوبست محاسبه مشتق تابع $y = f(\sqrt{2x+5})$:

$$y' = u' \cdot f'(u) = \left(\frac{2}{2\sqrt{2x+5}}\right) f'(\sqrt{2x+5})$$

مثال) اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ مطلوبست محاسبه مشتق تابع $y = f(5x)$

$$y = f(5x) \Rightarrow y' = 5 \times f'(5x) = 5 \times \frac{1}{5x} = \frac{1}{x}$$

تمرین: اگر $f(x)=x^2+\sqrt{x}-2$ و $g(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{3}{x}$ باشد مشتق تابع fog را در نقطه $x=1$ پیدا کنید.

$$f'(x)=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{x^2}$$

$$(fog)'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))$$

$$x=1 \Rightarrow (fog)'(1)=g'(1)\cdot f'(g(1))$$

$$=\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}-\frac{3}{1^2}\right) f'\left(\sqrt[3]{1}+\frac{3}{1}\right)=$$

$$=\left(-\frac{8}{3}\right) f'(4)=\left(-\frac{8}{3}\right)\left(2\times 4+\frac{1}{2\sqrt{4}}\right)=-\frac{8}{3}\times\frac{33}{4}=-22$$

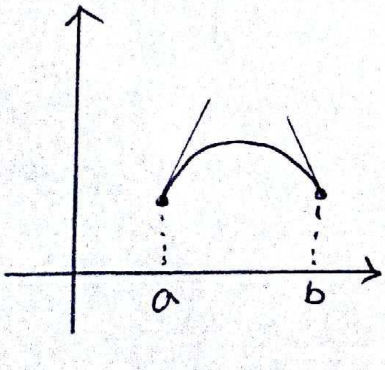
تمرین: اگر $f(x^2+2)=2g(3x-1)+2$ و $g'(5)=12$ باشد مقدار $f'(6)$ را پیدا کنید.

حل: از طرفین رابطه مشتق می‌گیریم:

$$(2x).f'(x^2+2)=2(3).g'(3x-1) \qquad 3x-1=5 \Rightarrow x=2$$

$$x=2 \Rightarrow (2\times 2)f'(2^2+2)=6g'(5) \Rightarrow 4f'(6)=6\times 12 \Rightarrow f'(6)=\frac{6\times 12}{4}=18$$

مشتق پذیری روی یک بازه:

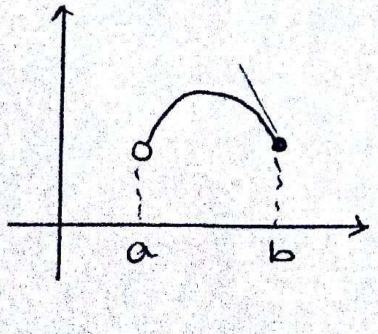


تابع f را در بازه $[a,b]$ مشتق پذیر می‌گویند هرگاه:

۱) در تمام نقاط بازه (a,b) مشتق داشته باشد.

۲) در نقطه $x=a$ مشتق راست داشته باشد

۳) در نقطه $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

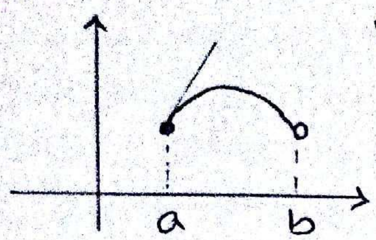


تابع f را در بازه $(a,b]$ مشتق پذیر می‌گویند هرگاه:

۱) در تمام نقاط بازه (a,b) مشتق داشته باشد.

۲) در نقطه $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

تابع f را در بازه $[a,b)$ مشتق پذیر می‌گویند هرگاه:



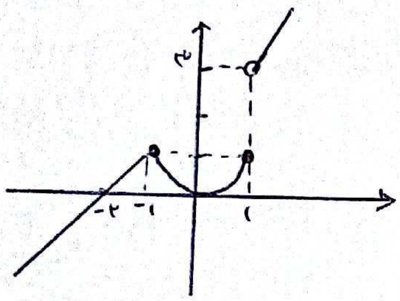
۱) در تمام نقاط بازه (a,b) مشتق پذیر باشد.

۲) در نقطه $x=a$ مشتق راست داشته باشد.

مثال) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x+2 & x<-1 \\ x^2 & -1\leqslant x\leqslant 1 \\ 2x+1 & x>1 \end{cases}$ را رسم کرده سپس مشخص کنید

تابع در کدام یک از بازه های زیر مشتق پذیر است؟

$[-2,0]$ ، $[-2,-1]$ ، $[-3,-1)$ ، $[-1,1]$ ، $[0,2]$ ، $[1,3]$ و $(1,3]$



$(1,3]$ مشتق پذیر است

$[1,3]$ مشتق ناپذیر در $x=1$ مشتق ندارد

$[0,2]$ مشتق ناپذیر در $x=1$ مشتق ندارد

$[-1,1]$ مشتق پذیر

$[-3,-1)$ مشتق پذیر

$[-2,-1]$ مشتق پذیر

$[-2,0]$ مشتق ناپذیر در $x=-1$ مشتق ندارد.

مشتق مرتبه دوم و سوم:

تابع $f(x)$ را در نظر می‌گیریم مشتق این تابع را با علامت $f'(x)$ نشان داده و آنرا مشتق اول تابع می‌نامیم حال اگر از $f'(x)$ مشتق بگیریم آنرا مشتق دوم تابع $f(x)$ نامیده و آنرا با $f''(x)$ (اف زگوند) نشان می‌دهیم و اگر از مشتق دوم تابع مشتق بگیریم آنرا مشتق سوم تابع نامیده آنرا با علامت $f'''(x)$ (اف تی پرس) نشان می‌دهیم.

$f(x)=5x^3+4x^2-3$

$f'(x)=15x^2+12x$

$f''(x)=30x+12$

$f'''(x)=30$

آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای :

در ریاضیات آهنگ تغییر همان سرعت تغییر است که بصورت زیر تعریف می شوند :

اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آهنگ تغییر متوسط این تابع را در این بازه از فرمول زیر محاسبه می کنیم :

$$\text{آهنگ تغییر متوسط از } a \text{ تا } b = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

آهنگ تغییر متوسط برای دو نقطه تعریف می شود.

مشتق تابع f در نقطه $x=a$ را آهنگ تغییر لحظه‌ای (آنی) نامیده و آنرا بصورت زیر نشان می دهند :

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطه } (x=a) = f'(a)$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای برای یک نقطه تعریف می شود.

(هماهنگ خرداد ۹۸)

معادله حرکت متحرکی بصورت $f(t)=2t^2-t$ برحسب متر داده شده است. درچه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0,4]$ باهم برابرند. (۱نمره)

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{28-0}{4} = 7$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(t) = 4t-1 \qquad 4t-1=7 \Rightarrow t=2$$

(هماهنگ شهریور ۹۸)

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x=2$ به $x=7$ تغییر می کند بدست آورید (۱نمره)

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(7)-f(2)}{7-2} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{4}}{5} = \frac{1}{5}$$

(هماهنگ دیماه ۹۷)

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است

آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه زمانی [۳،۴] چقدر است؟ (۱ نمره)

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{m(4)-m(3)}{4-3} = \frac{(\sqrt{4}+2(4)^3)-(\sqrt{3}+2(3)^3)}{1} = \frac{130-\sqrt{3}-54}{1} = 76-\sqrt{3}$$

مثال) یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است

آهنگ رشد (لحظه‌ای) جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}+6t^2 \Rightarrow m'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}+6(3)^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}+54$$

قاعده هوپیتال رفع ابهام از حالت $\frac{0}{0}$:

در محاسبه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر به حالت $\frac{0}{0}$ برسیم کافی است مشتق صورت

و مشتق مخرج را محاسبه کرده سپس حد بگیریم و اگر دوباره به حالت $\frac{0}{0}$ رسیدیم

این کار را تکرار کنیم این قاعده را قاعده هوپیتال (گیوم دو لوپیتال - فرانسوی)

می نامند.

مثال) مطلوبست محاسبه حدود زیر:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3+\sqrt{x}-2}{x^2-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x} = \frac{3+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{7}{2}}{2} = \frac{7}{4}$$

$$2)\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} = \lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{4}}}{1} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{2(x-1)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} = \lim_{x\to 1}\frac{6x}{2} = 3$$

(تمرینات مهم فصل ۴)

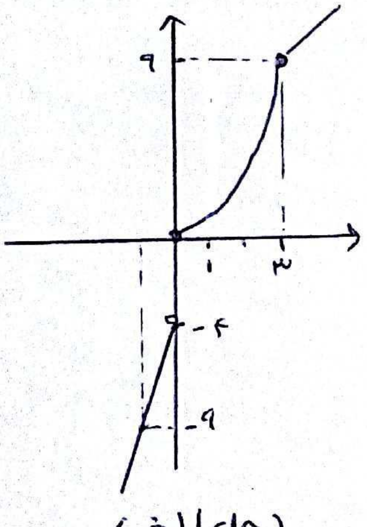
۱) دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هردو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند:

$$f(x)=|x-2| \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq 2 \\ -x-6 & x>2 \end{cases}$$

۲) تابع $f(x)=\begin{cases} 5x-4 & x<0 \\ x^2 & 0\leq x<3 \\ x+6 & x>3 \end{cases}$ داده شده است. الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارد. پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

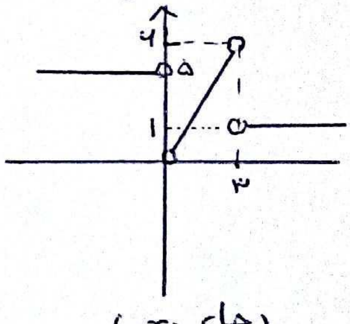


(حل الف)

حل ب) در $x=0$ پیوسته نیست و دارای جهش است

در $x=3^-$ گوشه‌ای است پس مشتق پذیر نیست

(حل پ) $f'(x)=\begin{cases} 5 & x<0 \\ 2x & 0<x<3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$

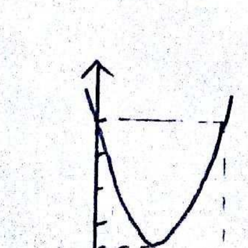


(حل ت)

۳) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن:

الف) در یک نقطه برابر صفر شود ب) در $x=2$ برابر ۳ شود پ) در تمام نقاط مثبت باشد

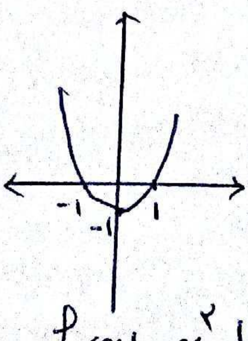
ت) در تمام نقاط یکسان باشد ث) در تمام نقاط منفی باشد.



$f(x)=x^2-4x+5$

$f'(2)=0$

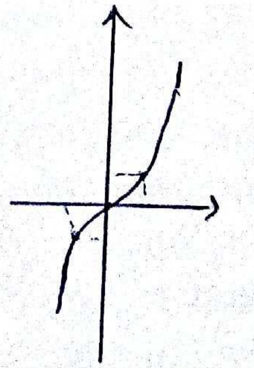
(حل الف)



$f(x)=x^2-1$

$f'(2)=3$

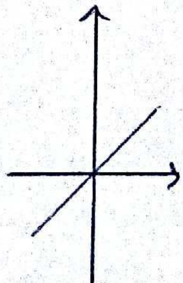
(حل ب)



$f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2\geq 0$

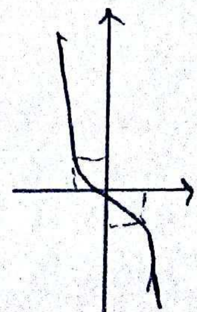
(حل پ)



$f(x)=x$

$f'(x)=1$

(حل ت)



$f(x)=-x^3$

$f'(x)=-3x^2\leq 0$

(حل ث)

۴) مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\geq 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

حل: حد راست و حد چپ در $x=1$ برابر نیست پس تابع در $x=1$ پیوسته نیست
درنتیجه مشتق پذیر نیست

۵) سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها باهم برابر باشند.

$$f(x)=5x-1 \Rightarrow f'(x)=5 \qquad g(x)=5x \Rightarrow g'(x)=5$$

$$k(x)=5x+3 \Rightarrow k'(x)=5$$

۶) اگر $f'(1)=3$ و $g'(1)=5$ مطلوبست محاسبه:

الف) $(f+g)'(1)=f'(1)+g'(1)=3+5=8$

ب) $(3f+2g)'(1)=3f'(1)+2g'(1)=3(3)+2(5)=19$

۷) گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم مایع باقیمانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=40\left(1-\frac{t}{100}\right)^2$ بدست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0,1]$ چقدر است؟

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{V(1)-V(0)}{1-0}=\frac{40\left(1-\frac{1}{100}\right)^2-40\left(1-\frac{0}{100}\right)^2}{1}=\frac{39.204-40}{1}=-0.796$$

ب) در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می شود؟

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{V(100)-V(0)}{100-0}=\frac{0-40}{100}=-0.4$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای}=V'=40\times 2\left(1-\frac{t}{100}\right)\left(-\frac{1}{100}\right)=-0.8\left(1-\frac{t}{100}\right)$$

$$-0.8\left(1-\frac{t}{100}\right)=-0.4 \Rightarrow \frac{8t}{1000}=\frac{4}{10} \Rightarrow t=50\ s$$

۸) مطلوبست محاسبه مشتق توابع زیر:

الف) $f(x)=(3x^2-4)(2x-5)^3 \Rightarrow f'(x)=6x(2x-5)^3+3(2)(2x-5)^2(3x^2-4)$

ب) $f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+1) \Rightarrow f'(x)=\left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)(x^3+1)+(3x^2)(\sqrt{3x+2})$

فصل ۴ : (کاربرد مشتق)

۱) تعیین یکنوایی (صعودی یا نزولی بودن) تابع :

برای تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع، ابتدا مشتق تابع را محاسبه کرده سپس آنرا مساوی صفر قرار داده و جوابهای مشتق را محاسبه می‌کنیم سپس مشتق را تعیین علامت می‌کنیم بازه هایی که در آنها مشتق مثبت باشد، تابع در آن بازه‌ها اکیداً صعودی و بازه‌هایی که در آنها مشتق منفی باشد، تابع در آن بازه‌ها اکیداً نزولی است.

مثال ۱ : تعیین کنید تابع $f(x)=x^3-3x^2-9x+12$ در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است.

$$f'(x)=3x^2-6x-9=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	17	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$+\infty$

$(-\infty,-1]$: اکیداً صعودی $\quad$ $[-1,3]$: اکیداً نزولی $\quad$ $[3,+\infty)$: اکیداً صعودی

مثال ۲ : یکنوایی تابع $f(x)=x-\sqrt{x}$ را در دامنه تعریفش بررسی کنید.

$$D_f=[0,+\infty) \qquad f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}=0 \Rightarrow 2\sqrt{x}-1=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{4}}$$

$$2\sqrt{x}=0 \Rightarrow \sqrt{x}=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$2\sqrt{x}-1$		$-$	0	$+$	
$2\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$[0,\frac{1}{4}]$: اکیداً نزولی $\quad$ $[\frac{1}{4},+\infty)$: اکیداً صعودی

نقاط بحرانی :

نقطه به طول c ($x=c$) از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی برای تابع f می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد
به عبارت دیگر نقطه $x=c$ از دامنه تابع f را نقطه بحرانی می‌نامند هرگاه در این نقطه مشتق تابع صفر شود یا موجود نباشد.

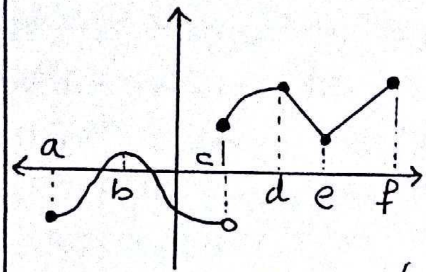
تذکر مهم : اگر دامنه تابع f بازه $[a,b]$ باشد نقاط $x=a$ و $x=b$ نقاط بحرانی اند

مثال ۱: نقاط بحرانی تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را در بازه $[-1,3]$ تعیین کنید

$$f'(x)=6x^2+6x-12=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \notin [-1,3] \\ x=1 \in [-1,3] \end{cases}$$

نقاط به طول $x=-1$ ، $x=1$ و $x=3$ نقاط بحرانی تابع هستند.

مثال ۲: مطلوبست تعیین نقاط بحرانی تابع زیر:



$x=a$ و $x=f$: چون نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه هستند

$x=b$: چون مشتق صفر است.

$x=c$: تابع ناپیوسته است.

$x=d$ و $x=e$: چون نقاط گوشه‌ای (زاویه‌ای) هستند.

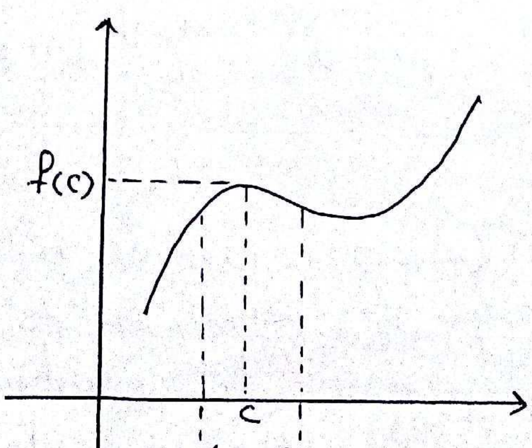
ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق:

نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع را نقاط اکسترمم تابع می‌نامند.

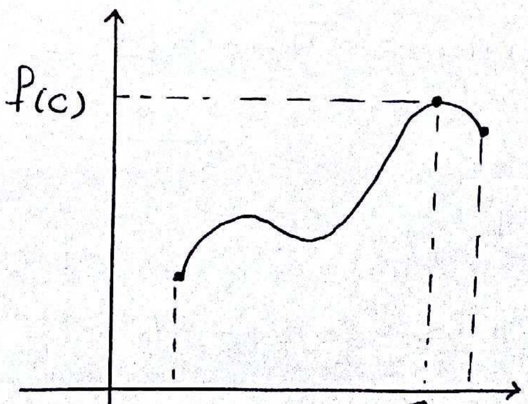
۱) نقطه $x=c$ را یک نقطه ماکزیمم نسبی تابع f می‌گویند هرگاه یک همسایگی از c مانند $I \subseteq D_f$ باشد که به ازای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(c) \geq f(x)$ در این حالت $f(c)$ را یک نقطه ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم

همچنین نقطه $x=c$ را یک نقطه ماکزیمم مطلق تابع f می‌گویند هرگاه به ازای هر x متعلق به دامنه f داشته باشیم: $f(c) \geq f(x)$

در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم مطلق تابع f نامیده می‌شود.

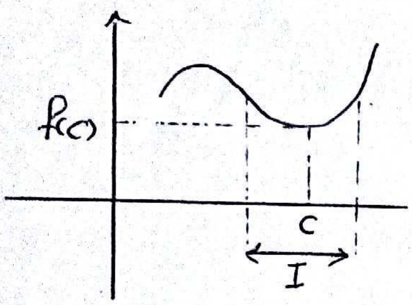


ماکزیمم نسبی = $f(c)$

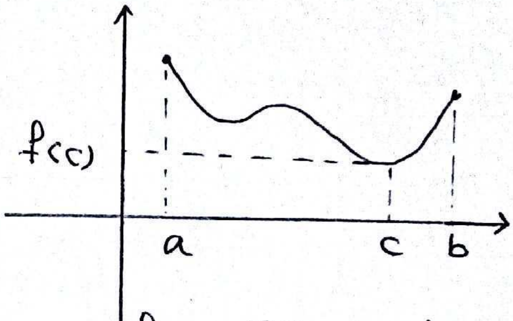


ماکزیمم مطلق = $f(c)$

۲) نقطه $x=c$ را یک نقطه مینیمم نسبی تابع f می‌گویند هرگاه یک همسایگی از c مانند $I \subseteq D_f$ باشد که به ازای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(c) \leqslant f(x)$ در این حالت $f(c)$ مقدار مینیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود همچنین نقطه $x=c$ را یک نقطه مینیمم مطلق تابع f می‌گویند هرگاه به ازای هر x متعلق به دامنه f داشته باشیم $f(c) \leqslant f(x)$ در این حالت $f(c)$ مقدار مینیمم مطلق تابع f نامیده می‌شود.

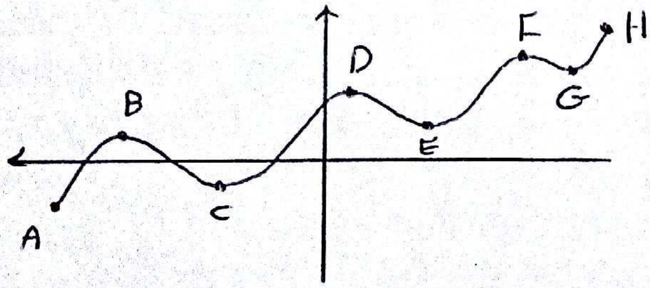


f(c) = مینیمم نسبی



f(c) = مینیمم مطلق

تذکر مهم:
اگر نمودار تابع چند نقطه ماکزیمم یا مینیمم داشته باشد بالاترین نقطه را ماکزیمم مطلق و بقیه را ماکزیمم نسبی می‌نامند و پایین‌ترین نقطه را مینیمم مطلق و بقیه را مینیمم نسبی می‌نامند:



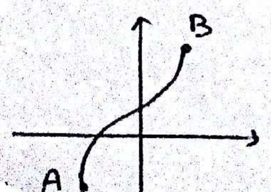
H = ماکزیمم مطلق

ماکزیمم نسبی = B, D, F

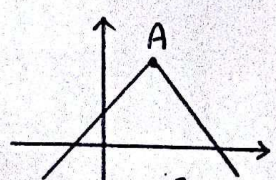
مینیمم مطلق = A

مینیمم نسبی = C, E, G

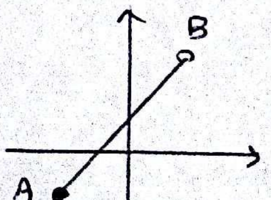
مثال) ماکزیمم و مینیمم مطلق را در نمودارهای زیر مشخص کنید.



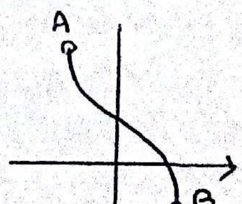
ماکزیمم مطلق = B
مینیمم مطلق = A



ماکزیمم مطلق = A
مینیمم مطلق وجود ندارد



مینیمم مطلق = A
ماکزیمم مطلق وجود ندارد

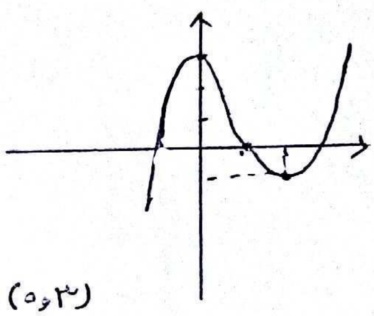


ماکزیمم و مینیمم مطلق وجود ندارد

آزمون مشتق اول برای پیدا کردن ماکزیمم و مینیمم نسبی :
مشتق تابع را حساب کرده و مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های مشتق را پیدا می‌کنیم سپس مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم نقاطی که مشتق تابع در اطراف آنها تغییر علامت بدهند نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی هستند.

مثال ۱ : ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3$ را بدست آورید.

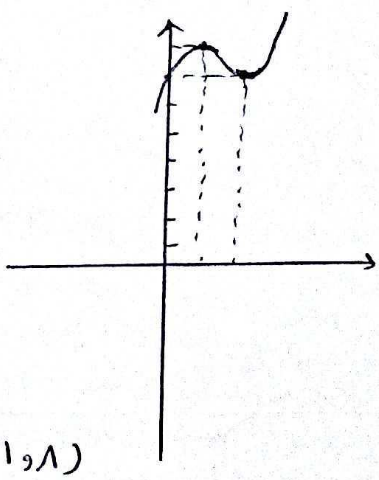
$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(3x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$



x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$y' = 3x^2 - 6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
			ماکزیمم نسبی		مینیمم نسبی		

$(0,3)$ ماکزیمم نسبی
$(2,-1)$ مینیمم نسبی

مثال ۲ : ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$ را بدست آورید.



$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow$$

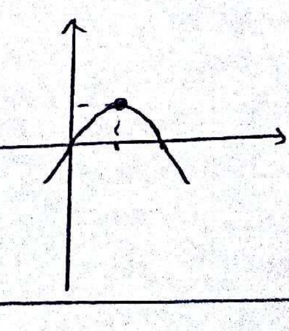
$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$
			ماکزیمم نسبی		مینیمم نسبی		

$(1,8)$ ماکزیمم نسبی
$(2,7)$ مینیمم نسبی

مثال ۳ : ماکزیمم یا مینیمم نسبی تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ را بیابید.

$$f'(x) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$



x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x) = -2x + 2$		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$
			ماکزیمم نسبی		

نقاط کمکی $(0,0)$ و $(2,0)$

(هماهنگ خرداد ۹۸)

اگر تابع $f(x)=ax^2+bx$ در $x=1$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد مقادیر a و b را بدست آورید. (۱ نمره)

$$f'(x)=2ax+b \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 2a(1)+b=0 \Rightarrow \boxed{2a+b=0}$$

$$f(1)=7 \Rightarrow a(1)^2+b(1)=7 \Rightarrow \boxed{a+b=7} \qquad \begin{cases} 2a+b=0 \\ a+b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=-7 \\ b=14 \end{matrix}$$

(هماهنگ شهریور ۹۸)

جدول تغییرات تابع $f(x)=x^3-3x+4$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید (۱ نمره)

$$f'(x)=3x^2-3=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)=3x^2-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	6 (ماکزیمم نسبی)	$\searrow$	2 (مینیمم نسبی)	$\nearrow$	$+\infty$

$(1,2)$ مینیمم نسبی

$(-1,6)$ ماکزیمم نسبی

(هماهنگ دی ماه ۹۷)

جدول تغییرات تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را مشخص کنید (۱ نمره)

$$f'(x)=6x^2+6x-12=0 \Rightarrow 6(x^2+x-2)=0 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

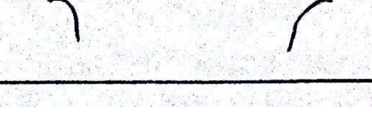
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)=6x^2+6x-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	20 max	$\searrow$	-7 min	$\nearrow$	$+\infty$

$(-2,20)$ ماکزیمم نسبی $(1,-7)$ مینیمم نسبی

مثال) کدام یک از جملات زیر درست است؟

۱) در تابع پیوسته f اگر $f'(a)=0$ باشد $x=a$ نقطه اکسترمم نسبی تابع است.

نادرست زیرا:



۲) هر نقطه اکسترمم نسبی یک نقطه بحرانی تابع است.

درست زیرا در نقاط ماکزیمم و مینیمم مشتق تابع صفر است (خط مماس موازی محور xها)

۳) اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد در این بازه هم مینیمم مطلق دارد و هم ماکزیمم مطلق

درست.

۴) هر نقطه بحرانی تابع یک نقطه اکسترمم نسبی تابع است.

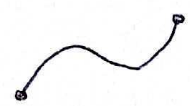
نادرست (مثل ۱)

۵) هر نقطه اکسترمم نسبی یک نقطه اکسترمم مطلق است

نادرست

۶) هر نقطه اکسترمم مطلق، یک نقطه اکسترمم نسبی است.

نادرست



روش تعیین ماکزیمم یا مینیمم مطلق یک تابع در یک بازه:

۱) مشتق تابع را مساوی صفر قرار داده ریشه‌های مشتق را حساب کرده و مقدار f را به ازای ریشه‌های مشتق حساب می‌کنیم.

۲) مقدار f را در دو سر بازه پیدا می‌کنیم.

۳) بزرگترین مقداری که در مرحله‌های (۱) و (۲) بدست می‌آید را ماکزیمم مطلق و کوچکترین این مقدارها، مینیمم مطلق تابع است.

(هماهنگ خرداد ۹۸)

اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را در بازه $[-1,3]$ بدست آورید (۱٫۲۵ نمره)

$$f'(x)=6x^2+6x-12=0 \Rightarrow 6(x^2+x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \notin [-1,3] \\ x=1 \in [-1,3] \end{cases}$$

طول نقاط بحرانی $\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases}$

$f(1)=-7 \quad , \quad f(-1)=13 \quad \quad f(3)=45$

$(1,-7)$ مینیمم مطلق

$(3,45)$ ماکزیمم مطلق

(هماهنگ - شهریور ۹۸)

اکسترمم های مطلق تابع $g(x)=x^3+2x-5$ را در بازه ی $[-2,1]$ در صورت وجود تعیین کنید (۱ نمره)

$g'(x)=3x^2+2 \neq 0$ جواب ندارد.

طول نقاط بحرانی $\begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$

$g(-2)=(-2)^3+2(-2)-5=-17$, $g(1)=1+2-5=-2$

$(-2,-17)$ = مینیمم مطلق

$(1,-2)$ = ماکزیمم مطلق.

(هماهنگ دیماه ۹۷)

نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم مطلق این تابع را در بازه $[-1,3]$ مشخص کنید (۱ نمره)

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x$$

$f'(x)=6x^2+6x-12=0 \Rightarrow 6(x^2+x-2)=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \notin [-1,3] \\ x=1 \end{cases}$

طول نقاط بحرانی $\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases}$

$f(1)=-7$, $f(-1)=13$, $f(3)=45$

$(1,-7)$ = مینیمم مطلق

$(-1,13)$ = نقطه بحرانی

$(3,45)$ = ماکزیمم مطلق

بهینه سازی:

یکی از کاربردهای ریاضی، بهینه سازی است یعنی وقت، سرمایه و مواد اولیه کمتری مصرف کنیم و سود بیشتری بدست آوریم پس باید دنبال مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق باشیم برای این منظور ابتدا تابعی که می خواهیم بیشترین یا کمترین مقدار را بگیرد، می نویسیم بعد از تابع مشتق گرفته و با پیدا کردن نقاط بحرانی مقادیر اکسترمم مطلق را بدست می آوریم:

(هماهنگ خرداد ۹۸):

ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید می خواهیم از چهار گوشه آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم پس لبه جعبه را به اندازه x بر می گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟ (۱/۲۵ نمره)

حجم $= V(x)=(1-2x)^2(x)=4x^3-4x^2+x$

$V'(x)=12x^2-8x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{6}$

$V(\frac{1}{2})=0$ $\quad V(\frac{1}{6})=\frac{2}{27}$ م ق ق $x=\frac{1}{6}$

(هماهنگ شهریور ۹۸)

دو عدد حقیقی a و b را طوری بیابید که دانسته باشیم $2a+b=40$ و حاصل ضرب آنها بیشترین مقدار ممکن گردد (۱ نمره)

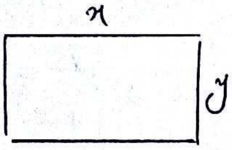
$$2a+b=40 \Rightarrow b=40-2a$$

$$P=ab=a(40-2a) \Rightarrow P(a)=40a-2a^2$$

$$P'(a)=40-4a=0 \Rightarrow \boxed{a=10} \Rightarrow b=40-2(10) \Rightarrow \boxed{b=20}$$

(هماهنگ دی ماه ۹۷)

اگر محیط یک مستطیل ۲۴ سانتیمتر باشد طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکزیمم شود (۱ نمره)

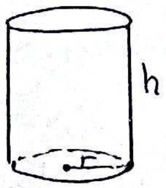


$$2x+2y=24 \Rightarrow x+y=12 \Rightarrow y=12-x$$

$$S(x)=xy=x(12-x) \Rightarrow S(x)=12x-x^2$$

$$S'(x)=0 \Rightarrow 12-2x=0 \Rightarrow \boxed{x=6} \qquad y=12-6 \Rightarrow \boxed{y=6}$$

مثال) در استوانه‌ای جمع شعاع قاعده و ارتفاع برابر ۶ است. بیشترین حجم این استوانه را بدست آورید.



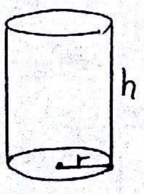
$$r+h=6 \Rightarrow h=6-r$$

$$V=\pi r^2 h=\pi r^2(6-r) \Rightarrow V(r)=\pi(6r^2-r^3)$$

$$V'(r)=\pi(12r-3r^2)=0 \Rightarrow 3r(4-r)=0 \Rightarrow \begin{cases} r=0 & \text{غ ق ق} \\ r=4 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$r=4 \Rightarrow h=6-4=2 \Rightarrow V=\pi(4)^2(2)=32\pi$$

مثال) می‌خواهیم با یک صفحه فلزی به مساحت 27π یک استوانه درباز با حجم ماکزیمم بسازیم. شعاع قاعده، ارتفاع و حجم این استوانه چقدر است؟



مساحت قاعده + مساحت بدنه $=27\pi \Rightarrow \pi r^2+2\pi r h=27\pi$

$$\Rightarrow h=\frac{27\pi-\pi r^2}{2\pi r} \Rightarrow h=\frac{27-r^2}{2r}$$

$$V=\pi r^2 h=\pi r^2\left(\frac{27-r^2}{2r}\right) \Rightarrow V(r)=\frac{\pi}{2}(27r-r^3) \Rightarrow V'(r)=\frac{\pi}{2}(27-3r^2)=0$$

$$\Rightarrow 27-3r^2=0 \Rightarrow r^2=9 \Rightarrow \boxed{r=3} \Rightarrow h=\frac{27-3^2}{2(3)} \Rightarrow \boxed{h=3}$$

$$V=\pi r^2 h=\pi(3)^2(3) \Rightarrow \boxed{V=27\pi}$$

(حل تمرینات مهم فصل ۵)

۱) اگر نقطه (۲،۱) نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+bx^2+d$ باشد مقادیر b و d را بدست آورید.

$$(2,1)\in f \Rightarrow f(2)=1 \Rightarrow 2^3+b(2)^2+d=1 \Rightarrow \boxed{4b+d=-7}$$

$$f'(x)=3x^2+2bx \Rightarrow f'(2)=0 \Rightarrow 3(2)^2+2b(2)=0 \Rightarrow 12+4b=0 \Rightarrow \boxed{b=-3} \Rightarrow \boxed{d=5}$$

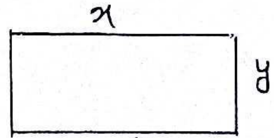
---

۲) کشاورزی می خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ متر مربع را دیوار کشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است:

الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را بصورت یک تابع بنویسید

ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوار کشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

حل الف) $xy=10000 \Rightarrow y=\frac{10000}{x}$



$$\text{محیط}=P(x)=2(2{,}000{,}000\,x)+2(8{,}000{,}000\times\frac{10000}{x})=\frac{4\times10^6(x^2-40000)}{x}$$

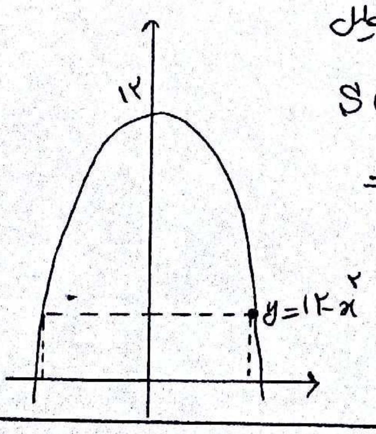
$$P'(x)=4\times10^6\left(\frac{2x^2-x^2-40000}{x^2}\right)=4\times10^6\left(\frac{x^2-40000}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow P'(x)=0 \Rightarrow x^2-40000=0 \Rightarrow x^2=40000 \Rightarrow x=200$$

$$x=200 \Rightarrow y=\frac{10000}{200} \Rightarrow y=50$$

---

۳) ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو راس آن روی محور xها و دو راس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y=12-x^2$ باشند.



طول مستطیل $=2x$ عرض مستطیل $=y$

$$S(x)=2x\cdot y=2x(12-x^2)=24x-2x^3 \Rightarrow S'(x)=24-6x^2$$

$$\Rightarrow S'(x)=0 \Rightarrow 24-6x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

پس: $y=12-x^2=12-(2)^2=8$

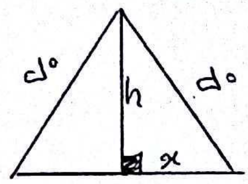
طول مستطیل برابر با ۸ و عرض آن برابر با ۴ است

۴) می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی الساقین را نرده کشی کنیم:

الف) اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

ب) بدون استفاده از مشتق نیز این مسئله را حل کنید.

حل الف) $x^2+h^2=50^2 \Rightarrow h=\sqrt{2500-x^2}$



$S(x)=\frac{1}{2}\times 2x\times h = x\sqrt{2500-x^2}$

$S'(x)=\sqrt{2500-x^2}+x\times\frac{-2x}{2\sqrt{2500-x^2}}=\frac{2500-x^2-x^2}{\sqrt{2500-x^2}}=\frac{2500-2x^2}{\sqrt{2500-x^2}}$

$S'(x)=0 \Rightarrow 2500-2x^2=0 \Rightarrow x^2=1250 \Rightarrow x=\sqrt{1250}=25\sqrt{2}$

$h=\sqrt{2500-x^2}=\sqrt{2500-1250}=\sqrt{1250}=25\sqrt{2}$

$S(x)=x\sqrt{2500-x^2}=(25\sqrt{2})\times(25\sqrt{2})=625\times 2 \Rightarrow S=1250$

حل ب) می‌دانیم: $S=\frac{1}{2}\times 50\times 50\times \sin\theta$ بیشترین مساحت وقتی است که $\sin\theta=1$ پس $\theta=90^\circ$ در نتیجه:

$S=\frac{1}{2}\times 50\times 50\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times 50\times 50\times 1=1250$

---

۵) هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت $32cm^2$ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب لازم است حاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه $2cm$ و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتیمتر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

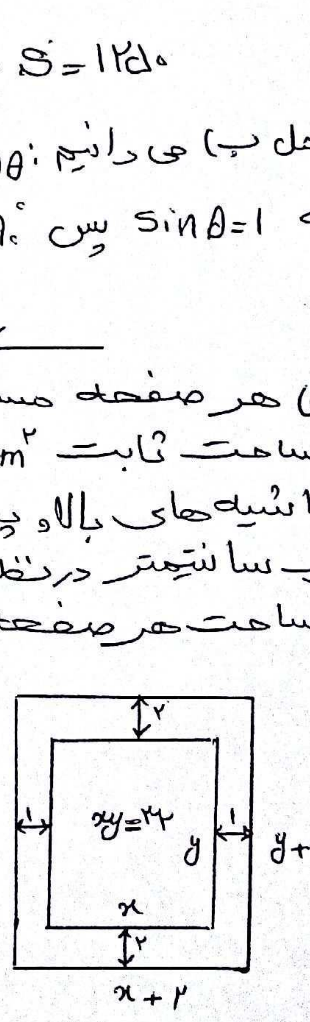
$xy=32 \Rightarrow y=\frac{32}{x}$

$S(x)=(x+2)(y+4)=xy+4x+2y+8$

$\xRightarrow{xy=32} S(x)=4x+2y+40=4x+\frac{64}{x}+40$

$\Rightarrow S'(x)=4-\frac{64}{x^2}=\frac{4x^2-64}{x^2}=0 \Rightarrow 4x^2-64=0 \Rightarrow x=4$

$\Rightarrow y=\frac{32}{4}=8 \Rightarrow$ ابعاد صفحه: $\begin{cases}4+2=6\\ 8+4=12\end{cases}$



فصل ۷ (هندسه)

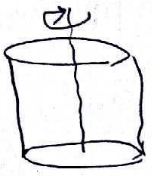
تفکر تجسمی:

تصویری که از هر شکل یا جسم در جهت های مختلف در ذهن هر شخص نقش می بندد را تفکر تجسمی می گویند.

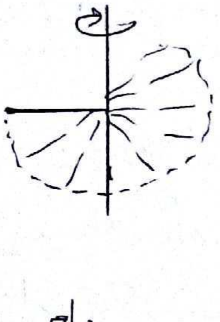
مثال) تصویر یک توپ فوتبال از بالا به شکل دایره است.

دوران حول محور:

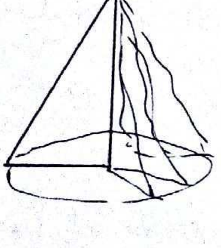
خط ثابتی به نام محور دوران را در نظر می گیریم و شکل مشخصی را حول (اطراف) آن می چرخانیم، حجمی ایجاد می شود که به این حجم، دوران یا حجم شکل حول آن خط می گوئیم.



مثال ۱: شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن استوانه است.

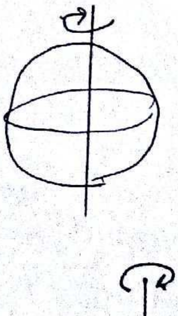


مثال ۲: شکل حاصل از دوران یک پاره خط حول پاره خط دیگری که بر آن عمود است یک دایره توپر است.



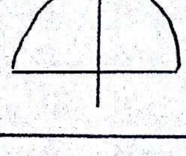
(هماهنگ خرداد ۹۸)

شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه آن بصورت مخروط توخالی است (زیرا مثلث را رنگی نکرده است)



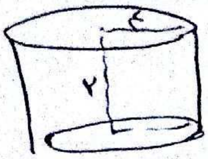
(هماهنگ دیماه ۹۷)

شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن برابر یک کره توخالی است.



مثال ۳: شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر آن یک نیمکره توخالی است.

مثال) اگر مستطیلی به طول ۴ و عرض ۲ را حول عرضش دوران دهیم، حجم جسم حاصل چقدر است؟

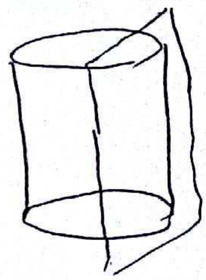


$r = ۴ \qquad h = ۲$

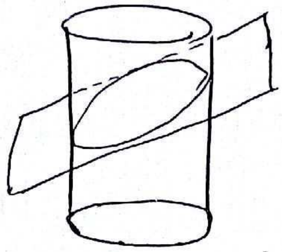
$V = \pi r^2 h = \pi (۴)^2 (۲) \Rightarrow V = ۳۲\pi$

برش و سطح مقطع:

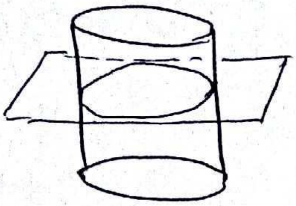
اگر صفحه ای یک جسم سه بعدی را قطع کند، شکلی ایجاد می شود که به آن سطح مقطع می گوئیم.



مستطیل = سطح مقطع

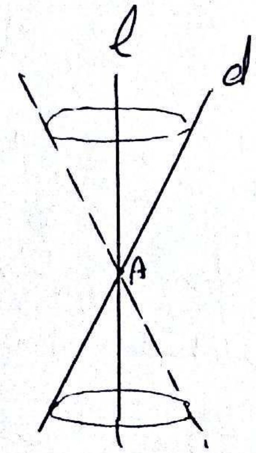


بیضی = سطح مقطع



دایره = سطح مقطع

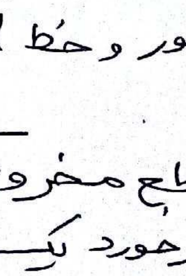
رویهٔ مخروطی:



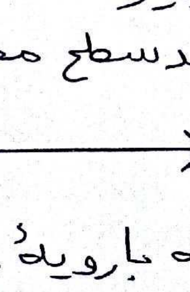
اگر دو خط d و l در نقطه A متقاطع باشند سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی) می گویند. نقطه A را رأس، خط l را محور و خط d را مولد سطح مخروطی می نامند.

مقاطع مخروطی:

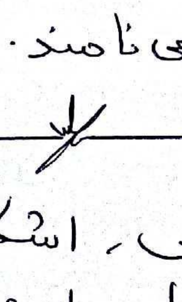
از برخورد یک صفحه با رویهٔ مخروطی، اشکالی بدست می آید که آنها را مقاطع مخروطی می نامند که عبارتند از:



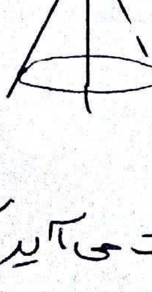
دایره



بیضی



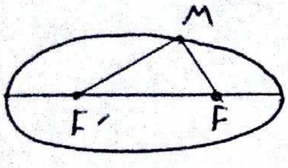
سهمی



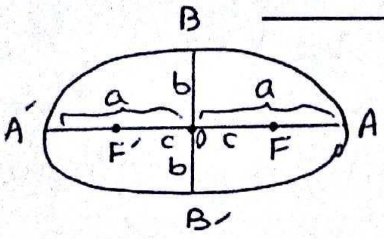
هذلولی

بیضی:

بیضی مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه ثابت، مقداری ثابت است. آن دو نقطه ثابت را کانون‌های بیضی نامیده و با F و F' نشان می‌دهند و آن مقدار ثابت را قطر بزرگ بیضی نامیده و با $2a$ نشان می‌دهند.



$MF + MF' = 2a =$ طول قطر بزرگ

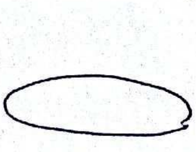


اجزاء بیضی:

۱) دو نقطه F و F' داخل بیضی را کانون‌های بیضی می‌نامند و فاصله آنها را فاصله کانونی نامیده و با $FF' = 2c$ نشان می‌دهیم.

۲) $AA' = 2a$ را قطر بزرگ بیضی و $BB' = 2b$ را قطر کوچک بیضی نامیده، که همان دو محور تقارن بیضی است و محل برخورد آنها یعنی O را مرکز بیضی می‌نامند که همان مرکز تقارن بیضی است.

۳) به مقدار ثابت $e = \frac{c}{a}$ که $0 < e < 1$ است خروج از مرکز بیضی می‌گوئیم که همواره مثبت است. اگر e به عدد 1 نزدیک شود بیضی کشیده‌تر و هرقدر e به صفر نزدیکتر شود بیضی به دایره نزدیکتر می‌شود.

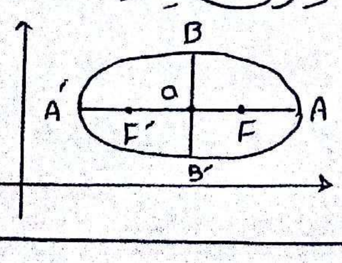


$e = 0,9$

$e = 0,2$

انواع بیضی و ویژگی هرکدام:

۱) بیضی افقی: اگر قطر بزرگ بیضی هم راستا با محور xها و قطر کوچک آن هم راستا با محور y ها باشد بیضی را افقی می‌نامند که دارای ویژگی‌های زیر است:



$AA' = 2a =$ قطر بزرگ

$BB' = 2b =$ قطر کوچک

$FF' = 2c =$ فاصله کانونی

$O\big|_{\beta}^{\alpha} =$ مرکز بیضی

$a > b > 0$

$a > c$

$e=\frac{c}{a}$ = خروج از مرکز بیضی $\qquad c^2=a^2-b^2$: رابطه بین a و b و c

A و A' را رئوس کانونی (در امتداد کانونها هستند) و B و B' را رئوس غیر کانونی (در امتداد کانونها نیستند) می نامند.

$A\left|\begin{array}{l}\alpha+a\\ \beta\end{array}\right.\quad A'\left|\begin{array}{l}\alpha-a\\ \beta\end{array}\right.\quad B\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \beta+b\end{array}\right.\quad B'\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \beta-b\end{array}\right.\quad F\left|\begin{array}{l}\alpha+c\\ \beta\end{array}\right.\quad F'\left|\begin{array}{l}\alpha-c\\ \beta\end{array}\right.$

فاصله یک رأس کانونی از یک رأس غیر کانونی $= AB=\sqrt{a^2+b^2}$

در بیضی افقی A و A' و F و F' با O هم عرض و B و B' با O هم طول هستند.

مثال ۱: نقاط $F\left|\begin{array}{l}-8\\ 4\end{array}\right.$ و $F'\left|\begin{array}{l}2\\ 4\end{array}\right.$ کانونهای یک بیضی اند. اگر بزرگترین قطر بیضی برابر ۲۶ باشد مختصات دو سر قطر بزرگ، دو سر قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

$F\left|\begin{array}{l}-8\\ 4\end{array}\right.$ و $F'\left|\begin{array}{l}2\\ 4\end{array}\right. \Rightarrow$ O وسط FF' $\Rightarrow O\left|\begin{array}{l}\frac{-8+2}{2}=-3=\alpha\\ \frac{4+4}{2}=4=\beta\end{array}\right. \Rightarrow$ O و F و F' هم عرض $\Rightarrow$ بیضی افقی

$FF'=\sqrt{(-8-2)^2+(4-4)^2}=\sqrt{100}=10 \Rightarrow FF'=2c=10 \Rightarrow \boxed{c=5}$

قطر بزرگ $=AA'=2a=26 \Rightarrow \boxed{a=13}\qquad c^2=a^2-b^2=5^2=13^2-b^2 \Rightarrow \boxed{b=12}$

دو سر قطر بزرگ: $A\left|\begin{array}{l}\alpha+a=-3+13=10\\ \beta=4\end{array}\right.\qquad A'\left|\begin{array}{l}\alpha-a=-3-13=-16\\ \beta=4\end{array}\right.$

دو سر قطر کوچک: $B\left|\begin{array}{l}\alpha=-3\\ \beta+b=4+12=16\end{array}\right.\qquad B'\left|\begin{array}{l}\alpha=-3\\ \beta-b=4-12=-8\end{array}\right.$

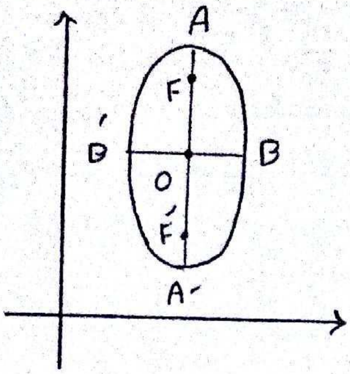
خروج از مرکز $= e=\frac{c}{a}=\frac{5}{13}$

مثال ۲: نقاط $B\left|\begin{array}{l}3\\ 7\end{array}\right.$ و $B'\left|\begin{array}{l}3\\ -1\end{array}\right.$ دو سر قطر کوچک یک بیضی اند. اگر اندازه فاصله کانونی بیضی برابر ۶ باشد مختصات دو سر قطر بزرگ و مختصات کانونها و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید

$B\left|\begin{array}{l}3\\ 7\end{array}\right.,\ B'\left|\begin{array}{l}3\\ -1\end{array}\right. \Rightarrow$ O وسط BB' $\Rightarrow O\left|\begin{array}{l}\frac{3+3}{2}=3\\ \frac{7-1}{2}=3\end{array}\right. \Rightarrow$ O و B و B' هم طول $\Rightarrow$ بیضی افقی

$BB'=\sqrt{(3-3)^2+(-1-7)^2}=\sqrt{64}=8 \Rightarrow 2b=8 \Rightarrow \boxed{b=4}\qquad FF'=6 \Rightarrow 2c=6 \Rightarrow \boxed{c=3}$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 9=a^2-16 \Rightarrow a^2=25 \Rightarrow \boxed{a=5}\quad A\left|\begin{array}{l}\alpha+a=8\\ \beta=3\end{array}\right.\quad A'\left|\begin{array}{l}\alpha-a=-2\\ \beta=3\end{array}\right.\quad F\left|\begin{array}{l}\alpha+c=6\\ \beta=3\end{array}\right.\quad F'\left|\begin{array}{l}\alpha-c=0\\ \beta=3\end{array}\right.\quad e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$



۲) بیضی قائم:

اگر قطر بزرگ بیضی هم راستا با محور yها و قطر کوچک آن هم راستا با محور xها باشد بیضی را قائم می‌نامند که دارای ویژگی‌های زیر است:

قطر بزرگ $= AA' = 2a$ قطر کوچک $= BB' = 2b$

فاصله کانونی $= FF' = 2c$ مرکز بیضی $= O\Big|^{\alpha}_{\beta}$ $a>b>0$ ، $a>c$

رابطه بین a و b و c : $c^2 = a^2 - b^2$ خروج از مرکز بیضی $= e = \frac{c}{a}$ $0<e<1$

A و A' را رئوس کانونی (در امتداد کانون‌ها هستند) و B و B' را رئوس غیرکانونی (در امتداد کانون‌ها نیستند) می‌نامند.

$A\Big|^{\alpha}_{\beta+a}$ $A'\Big|^{\alpha}_{\beta-a}$ $B\Big|^{\alpha+b}_{\beta}$ $B'\Big|^{\alpha-b}_{\beta}$ $F\Big|^{\alpha}_{\beta+c}$ $F'\Big|^{\alpha}_{\beta-c}$

فاصله یک رأس کانونی از یک رأس غیرکانونی $= AB = \sqrt{a^2+b^2}$

در بیضی قائم A و A' و O و F و F' هم طول و B و B' و O هم عرض هستند.

مثال) نقاط $A(-3,4)$ و $A'(-3,-6)$ دو سر قطر بزرگ یک بیضی اند. اگر اندازه کوچکترین قطر برابر ۶ باشد مختصات دو سر قطر کوچک، کانون‌ها و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

بیضی قائم $\Leftarrow$ A و A' و O هم طول هستند $\Rightarrow O\Big|^{\frac{-3-3}{2}=-3=\alpha}_{\frac{4-6}{2}=-1=\beta} \Leftarrow$ O وسط AA'

$$AA' = 2a \Rightarrow \sqrt{(-3-(-3))^2 + (-6-4)^2} = 2a \Rightarrow 10 = 2a \Rightarrow \boxed{a=5}$$

$$2b = 6 \Rightarrow \boxed{b=3} \qquad c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow \boxed{c=4}$$

$$B\Big|^{\alpha+b=-3+3=0}_{\beta=-1} \qquad B'\Big|^{\alpha-b=-3-3=-6}_{\beta=-1} \qquad F\Big|^{\alpha=-3}_{\beta+c=-1+4=3} \qquad F'\Big|^{\alpha=-3}_{\beta-c=-1-4=-5}$$

خروج از مرکز $= e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

(هماهنگ دی‌ماه ۹۷)
در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟ (۱ نمره)

$2a = 8 \Rightarrow \boxed{a = 4}$ $\quad 2b = 6 \Rightarrow \boxed{b = 3}$

$c^2 = a^2 - b^2 = 4^2 - 3^2 = 7 \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{7}}$ $\quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

(هماهنگ خرداد ۹۸)
در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است فاصله‌ی کانونی بیضی را بدست آورید (۱ نمره)

$2a = 8 \Rightarrow \boxed{a = 4}$ $\quad 2b = 6 \Rightarrow \boxed{b = 3}$

$c^2 = a^2 - b^2 = 4^2 - 3^2 = 7 \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{7}}$ $\quad FF' = 2c = 2\sqrt{7}$

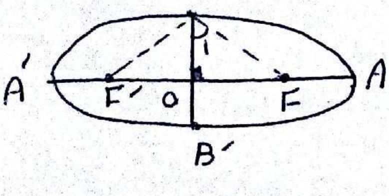
(هماهنگ خرداد ۹۸)
هر چه خروج از مرکز بیضی ...... (کوچکتر - بزرگتر) شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد

جواب: کوچکتر

(هماهنگ شهریور ۹۸)
اگر در یک بیضی داشته باشیم: $a = 5$ و $b = 3$ در اینصورت اندازه فاصله کانونی این بیضی را محاسبه کنید (۰٫۷۵ نمره)

$c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow \boxed{c = 4}$ $\quad FF' = 2c = 2(4) = 8$

تمرین: اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟

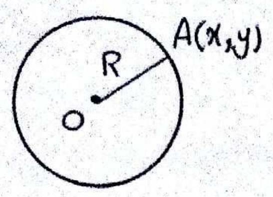


$2a = 2(2b) \Rightarrow a = 2b$

$c^2 = a^2 - b^2 = 4b^2 - b^2 = 3b^2 \Rightarrow c = \sqrt{3}\, b$

$\tan \hat{B}_1 = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}\, b}{b} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{B}_1 = 60^\circ \Rightarrow F\hat{B}F' = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$

دایره:



دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت به نام مرکز به فاصله ثابت هستند که این فاصله ثابت را شعاع دایره می‌نامند.

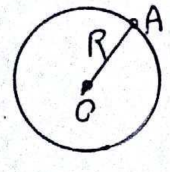
$C(O,R)$

معادله استاندارد (کلاسیک) دایره:

معادله دایره‌ای که مرکزش نقطه $O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ و شعاعش برابر R باشد از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2}$$

اثبات:



$O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$, $A\left|\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right.$

$$OA=R \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=R \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

یادآوری:

۱) شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

۲) فاصله نقطه $A\left|\begin{matrix}x_0\\ y_0\end{matrix}\right.$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با: $d=OH=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مثال ۱: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطه $O\left|\begin{matrix}-2\\ 3\end{matrix}\right.$ و شعاع آن برابر ۲ باشد.

$O\left|\begin{matrix}-2 \rightsquigarrow \alpha\\ 3 \rightsquigarrow \beta\end{matrix}\right.$

$R=2$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$
$$\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=4$$

مثال ۲: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطه $O\left|\begin{matrix}1\\ 2\end{matrix}\right.$ بوده و از نقطه $A(3,-1)$ بگذرد.

$$R=OA=\sqrt{(1-3)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=13$$

مثال ۳: معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A\left|\begin{matrix}1\\ -1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}3\\ 3\end{matrix}\right.$ دو سر قطری از دایره باشند.

وسط AB $O \Rightarrow O\left|\begin{matrix}\frac{1+3}{2}=2\\ \frac{-1+3}{2}=1\end{matrix}\right.$

$$R=OA=\sqrt{(2-1)^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{5}$$
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=5$$

مثال ۴: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطه $O\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix}$ بوده و بر خط به معادله $-3x+4y=4$ مماس باشد.

حل: می‌دانیم فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر شعاع دایره است.

$$R=OH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-3(1)+4(-2)-4|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3$$

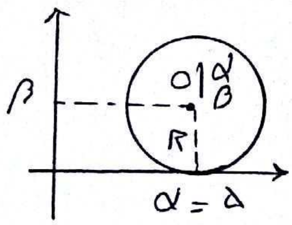
خط مماس: $-3x+4y-4=0$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=9$$

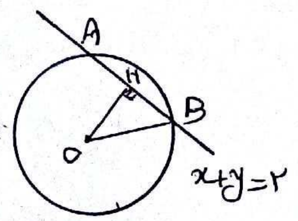
مثال ۵: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن روی خط $x=y+2$ بوده و در نقطه‌ای به طول ۵ بر محور طول‌ها مماس باشد.

$O\begin{vmatrix}\alpha=5\\ \beta=R\end{vmatrix}$ $\quad O\in x=y+2 \Rightarrow 5=R+2 \Rightarrow \boxed{R=3}$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-5)^2+(y-3)^2=9$$



مثال ۶: معادله دایره‌ای را بنویسید که $O\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.



حل: می‌دانیم عمودی که از مرکز دایره بر وتر آن رسم می‌شود آن وتر را نصف می‌کند.

$$AB=2\sqrt{2} \Rightarrow BH=\sqrt{2}$$

$$OH=\frac{|0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad OB^2=OH^2+BH^2 \Rightarrow R^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2=\frac{5}{2}$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=\frac{5}{2}$$

معادله گسترده دایره:

اگر معادله استاندارد دایره را باز کنیم معادله گسترده دایره بصورت زیر خواهد بود:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

که در آن:

مختصات مرکز $=O\begin{vmatrix}-\frac{a}{2}\\ -\frac{b}{2}\end{vmatrix}$ و شعاع $=R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

مثال مرکز و شعاع دایره به معادله $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ را بدست آورید

$a=-4$
$b=-4$
$c=7$

$O\left|\begin{array}{l}-\frac{a}{2}=-\frac{-4}{2}=2\\ -\frac{b}{2}=-\frac{-4}{2}=2\end{array}\right.$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-4)^2-4(7)}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$$

(شبیه دیماه ۹۷)

مثال ۲: گسترده دایره‌ای به شکل $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ است. مختصات مرکز این دایره و شعاع آن را پیدا کنید و معادله دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

$a=-2$
$b=-6$
$c=6$

$O\left|\begin{array}{l}-\frac{a}{2}=-\frac{-2}{2}=1\\ -\frac{b}{2}=-\frac{-6}{2}=3\end{array}\right.$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-6)^2-4(6)}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{16}=\frac{1}{2}\times 4=2$$

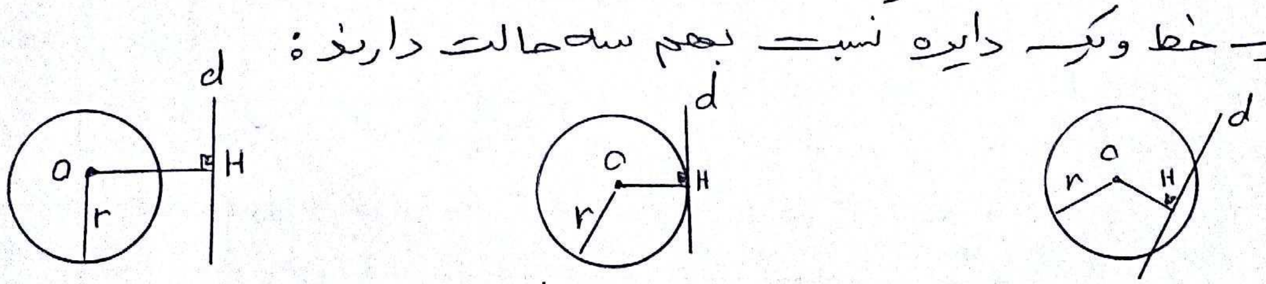
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=4$$

تذکر مهم:

شرط اینکه معادله $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله یک دایره باشد آن است که: $a^2+b^2-4c>0$ و برعکس (داخل رادیکال مثبت باشد)

اوضاع نسبی خط و دایره:

یک خط و یک دایره نسبت بهم سه حالت دارند:



خط با دایره متقاطع است — $OH<r$

خط بر دایره مماس است — $OH=r$

خط دایره را قطع نکند — $OH>r$

برای بررسی وضعیت یک خط و یک دایره کافی است فاصله مرکز دایره از خط را تعیین و با شعاع دایره مقایسه کنیم:

(هماهنگ شهریور ۹۸)

مثال ۱: وضعیت خط $x+y=3$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x-3=0$ مشخص کنید.

$O\left|\begin{array}{l}-\frac{a}{2}=1\\ -\frac{b}{2}=0\end{array}\right.$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+0^2-4(-3)}=\frac{1}{2}\times 4=2$$

$$OH=d=\frac{|1+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \qquad OH<r \Rightarrow$$ خط با دایره متقاطع است.

مثال ۲ : وضعیت خط $2x-y=4$ را نسبت به دایره $x^2+y^2+6x+4y+12=0$ مشخص کنید.

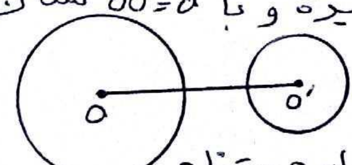
$$O\left|\begin{array}{l}-\frac{a}{2}=-3\\ -\frac{b}{2}=-2\end{array}\right.\qquad r=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+4^2-4(12)}=\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$$

$$OH=d=\frac{|2(-3)-(-2)-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$$

$OH>r \Rightarrow$ خط دایره را قطع نمی کند

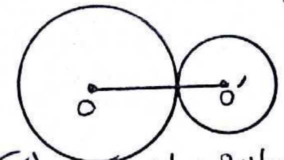
اوضاع نسبی دو دایره : خط المرکزین دو دایره : فاصله مراکز دو دایره را خط المرکزین دو دایره نامیده و با $d=OO'$ نشان می دهند.

دو دایره نسبت بهم ۶ حالت دارند:



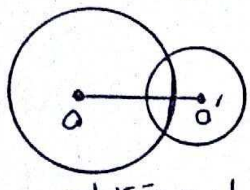
دو دایره متخارج

$d>r+r'$



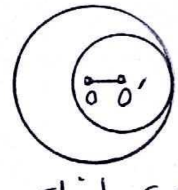
دو دایره مماس بیرون

$d=r+r'$



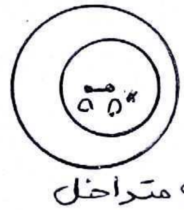
دو دایره متقاطع

$|r-r'|<d<r+r'$



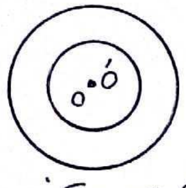
دو دایره مماس داخل

$d=|r-r'|$



دو دایره متداخل

$d<|r-r'|$



دو دایره هم مرکز

$d=0$

(هماهنگ خرداد ۹۸) وضعیت دو دایره به معادلات $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ و $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ را نسبت بهم مشخص کنید (۲ نمره)

$$O\left|\begin{array}{l}-1\\ 2\end{array}\right.,\ r=1\qquad,\qquad O'\left|\begin{array}{l}-\frac{a}{2}=1\\ -\frac{b}{2}=-2\end{array}\right.\qquad r'=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+4^2-4(1)}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$$

$$d=OO'=\sqrt{(-1-1)^2+(2-(-2))^2}=\sqrt{20}$$

$\sqrt{20}>1+2 \Rightarrow d>r+r' \Rightarrow$ دو دایره متخارج

مثال) وضعیت دو دایره $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ و $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ را نسبت بهم مشخص کنید.

$$x^2+y^2-2x-2y-2=0 \Rightarrow O\left|\begin{array}{l}-\frac{a}{2}=1\\ -\frac{b}{2}=1\end{array}\right.\ \text{و}\ r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-2)^2-4(-2)}=2$$

$$x^2+y^2-2x-8y+13=0 \Rightarrow O'\left|\begin{array}{l}-\frac{a}{2}=1\\ -\frac{b}{2}=4\end{array}\right.\ \text{و}\ r'=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-8)^2-4(13)}=2$$

$$d=OO'=\sqrt{(1-1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{9}=3$$

$|2-2|<3<2+2 \Rightarrow |r-r'|<d<r+r' \Rightarrow$ دو دایره متقاطع اند.

تمرینات مهم فصل ۷ (هندسه)

۱) در موارد زیر وضعیت خط و دایره را نسبت بهم مشخص کنید.

الف) دایره $x^2+y^2+2x+2y-1=0$ و خط $x+y=1$

$O\left|\begin{array}{l}-\frac{a}{2}=-\frac{2}{2}=-1\\ -\frac{b}{2}=-\frac{2}{2}=-1\end{array}\right.$ $\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2-4(-1)}=\frac{1}{2}\sqrt{12}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

$x+y-1=0\ ,\ OH=d=\frac{|-1-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\quad d>r \Rightarrow$ خط و دایره نقطه مشترک ندارند

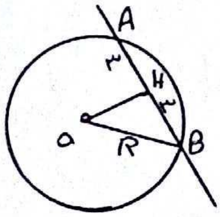
ب) $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ و خط $y=-1$

$O\left|\begin{array}{l}2\\-3\end{array}\right.\ ,\ r=2$ $\quad$ خط: $0x+1y+1=0$ $\quad d=\frac{|-3+1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=2$

$d=r \Rightarrow$ خط بر دایره مماس است

---

۲) مرکز دایره‌ای نقطه $O(2,-3)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ وتری به طول ۶ جدا می کند. معادله این دایره را بنویسید.



$OH=\frac{|3(2)-4(-3)+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4$ $\quad O\left|\begin{array}{l}2\rightsquigarrow\alpha\\-3\rightsquigarrow\beta\end{array}\right.$

$\overset{\triangle}{OBH}:\ R^2=OH^2+BH^2=4^2+3^2=25 \Rightarrow \boxed{R=5}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=25$

---

۳) در موارد زیر وضعیت دو دایره را نسبت بهم مشخص کنید.

الف) $\underbrace{x^2+y^2+2x-4y=0}$ و $\underbrace{x^2+y^2-2x+4y=0}$

$O\left|\begin{array}{l}1\\2\end{array}\right.\quad R=\frac{1}{2}\sqrt{4+16}=\sqrt{5}$ $\qquad O'\left|\begin{array}{l}-1\\2\end{array}\right.\quad R'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16}=\sqrt{5}$

$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(2-2)^2}=2\sqrt{5} \Rightarrow OO'=R+R' \Rightarrow$ دو دایره مماس خارجند

ب) $\underbrace{x^2+y^2-2x+4y+1=0}$ و $\underbrace{(x+1)^2+(y-2)^2=1}$

$O\left|\begin{array}{l}1\\-2\end{array}\right.\quad R=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4}=2$ $\qquad O'\left|\begin{array}{l}-1\\2\end{array}\right.\quad R'=1$

$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5} \Rightarrow OO'>R+R' \Rightarrow$ دو دایره متخارجند

۱۴) در حالتهای زیر معادله دایره را بنویسید:

الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(2,-1)$ باشد.

$O\,|\,{}^{0}_{0}$ $\qquad C\,|\,{}^{2}_{-1}$

$$R = OC = \sqrt{(2-0)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{5} \qquad (x-2)^2+(y+1)^2 = 5$$

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(2,3)$ و نقطه $(-3,-9)$ نقطه روی آن باشد.

$O\,|\,{}^{2}_{3}$ $\qquad A\,|\,{}^{-3}_{-9}$

$$R = OA = \sqrt{(2+3)^2+(3+9)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2 = 169$$

پ) دایره‌ای که نقاط $(0,3)$ و $(-4,-1)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشد.

$$O \left| \begin{array}{l} \dfrac{0-4}{2} = -2 \\[2mm] \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{array} \right. \qquad 2R = \sqrt{(-4-0)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2 = 8$$

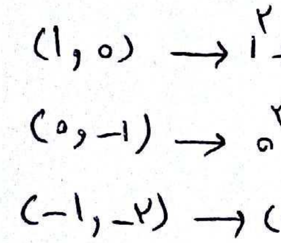
۱۵) وضعیت نقاط $(1,0)$ و $(0,-1)$ ، $(-1,-2)$ و $(0,0)$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ مشخص کنید.

$(1,0) \longrightarrow 1^2+0^2-2(1)+4(0)+1 = 0$ روی دایره

$(0,-1) \longrightarrow 0^2+(-1)^2-2(0)+4(-1)+1 = -2<0$ داخل دایره

$(-1,-2) \longrightarrow (-1)^2+(-2)^2-2(-1)+4(-2)+1 = 0$ روی دایره

$(0,0) \longrightarrow (0)^2+(0)^2-2(0)+4(0)+1 = 1>0$ خارج دایره



۱۶) شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره‌ای شکل به شعاع ۱۳۰۰ متر دو مسیر پیاده روی مطابق شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره $(13,13)$ و هر واحد برابر ۱۰۰ متر باشد؛

الف) معادله دایره چیست؟

$$1300 \div 100 = 13 = R$$

$$(x-13)^2+(y-13)^2 = 169$$

ب) دو مسیر در چه نقطه‌ای با یکدیگر متقاطع‌اند؟

$$x=18 \Rightarrow (18-13)^2+(y-13)^2 = 169 \Rightarrow (y-13)^2 = 144 \Rightarrow \begin{cases} y-13=12 \Rightarrow y=25 \Rightarrow A(18,25) \\ y-13=-12 \Rightarrow y=1 \Rightarrow B(18,1) \end{cases}$$

۷) معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2+y^2+2x+2y-8=0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنید و معادله آن را به شکل استاندارد بنویسید.

$$O\left|\begin{array}{l} -\frac{a}{2}=-1 \\ -\frac{b}{2}=-1 \end{array}\right.$$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+4+32}=\frac{1}{2}\sqrt{40}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}=\sqrt{10}$$

$$(x+1)^2+(y+1)^2=10$$

---

۸) وضع خطهای زیر را نسبت به دایره مشخص کنید

الف) $6x+4y=0$ و $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

$$O\left|\begin{array}{l} -\frac{a}{2}=2 \\ -\frac{b}{2}=2 \end{array}\right.$$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{16+16-28}=1 \qquad d=\frac{|6(2)+4(2)|}{\sqrt{6^2+4^2}}=\frac{20}{\sqrt{52}}$$

$d>R \Rightarrow$ خط و دایره نقطه مشترک ندارند

ب) $y=-x-2$ و $x^2+y^2=2$

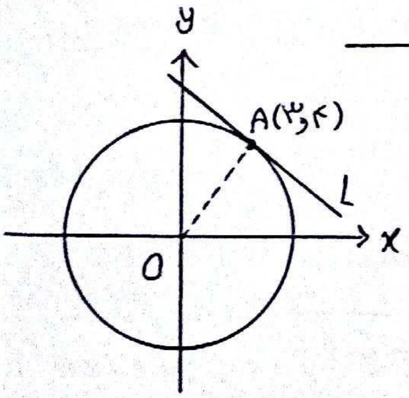
$$O\left|\begin{array}{l} -\frac{a}{2}=0 \\ -\frac{b}{2}=0 \end{array}\right.$$

$$R=\sqrt{2}$$

$$x-y+2=0$$

$$d=\frac{|0+0+2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$d=R=\sqrt{2} \Rightarrow$ خط بر دایره مماس است



۹) اگر بدانیم خط L در نقطه $(3,4)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس باشد معادله خط مماس چیست؟

$$m_{OA}=\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3} \Rightarrow OA\perp L \Rightarrow m_L=-\frac{3}{4}$$

$$m_L=-\frac{3}{4} \qquad A\left|\begin{array}{l}3\\4\end{array}\right.$$

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$$

$$\Rightarrow 3x+4y-25=0$$

۱۰) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه (۰،۳) و بر خط $3x-4y=3$ مماس باشند.

$O\begin{vmatrix}0\\3\end{vmatrix}$　　خط مماس: $3x-4y-3=0$

$$(x-0)^2+(y-3)^2=3^2$$

$$OH=R=\frac{|3(0)-4(3)-3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{15}{5}=3$$

$$\Rightarrow x^2+(y-3)^2=9$$

---

۱۱) مشخص کنید در حالتهای زیر دو دایره نسبت بهم چه وضعی دارند؟

الف) $\underbrace{x^2+y^2-2x+4y=4}$ و $\underbrace{x^2+y^2+2x-4y=9}$

$O\begin{vmatrix}-\frac{a}{2}=1\\-\frac{b}{2}=-2\end{vmatrix}$　$R=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+16}=3$

$O'\begin{vmatrix}-\frac{a}{2}=-1\\-\frac{b}{2}=2\end{vmatrix}$　$R'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+36}=\sqrt{14}$

$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}$　　$|R-R'|<OO'<R+R' \Rightarrow$ متقاطع‌اند

ب) $\underbrace{(x-2)^2+(y+3)^2=7}$ و $\underbrace{x^2+(y-5)^2=5}$

$O\begin{vmatrix}2\\-3\end{vmatrix}$ و $R=\sqrt{7}$　　$O'\begin{vmatrix}0\\5\end{vmatrix}$　$R'=\sqrt{5}$

$OO'=\sqrt{(2-0)^2+(-3-5)^2}=2\sqrt{17}$　　$OO'>r+r' \Rightarrow$ دو دایره متخارجند

---

۱۲) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1,-1)$ و با دایره $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس درون باشد.

$x^2+y^2-4x-6y-3=0$　　$O\begin{vmatrix}-\frac{a}{2}=2\\-\frac{b}{2}=3\end{vmatrix}$　　$R=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-6)^2-4(-3)}=4$

$O'\begin{vmatrix}-1\\-1\end{vmatrix}$　　$d=OO'=\sqrt{(-1-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

شرط مماس درون: $d=|R-R'| \Rightarrow 5=|4-R'| \Rightarrow \begin{cases}4-R'=5 \Rightarrow R'=-1 & \text{غ ق}\\ 4-R'=-5 \Rightarrow R'=9 & \text{ق ق}\end{cases}$

$O'\begin{vmatrix}-1\\-1\end{vmatrix}$, $R'=9$ $\Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=81$

فصل ۷ : احتمال

یادآوری مطالب سالهای قبل :

۱) پدیده تصادفی : پدیده یا آزمایشی است که نتیجه آنرا نتوان قبل از انجام، به طور قطعی پیش بینی کرد.

۲) فضای نمونه : مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه آن پدیده می نامیم و معمولاً آنرا با S نشان می دهیم.

۳) پیشامد تصادفی : هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه‌ای می نامند.

۴) پیشامد $A\cup B$ زمانی رخ می دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد

۵) پیشامد $A\cap B$ زمانی رخ می دهد که هردو پیشامد A و B رخ دهد.

۶) پیشامد $A-B$ زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد

۷) پیشامد A' زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد $P(A')=1-P(A)$

۸) قانون جمع احتمالات :
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

۹) دو پیشامد A و B را ناسازگار می گوییم هرگاه باهم رخ ندهند به عبارت دیگر $A\cap B=\emptyset$ در اینصورت :

A و B ناسازگار $\Leftrightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

۱۰) احتمال شرطی :

احتمال وقوع پیشامد A به شرط B را با علامت $P(A|B)$ نشان داده و عبارت است از احتمال وقوع پیشامد A به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است و داریم :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad (P(B)\neq 0) \Rightarrow P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)$$

۱۱) پیشامدهای مستقل :

دو پیشامد A و B را از هم مستقل می نامند هرگاه وقوع یکی بر احتمال وقوع دیگری تاثیری نداشته باشد

A و B مستقل اند $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

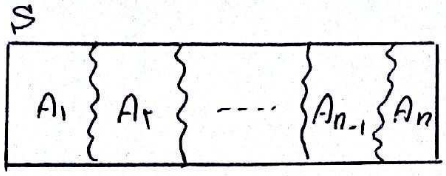
افراز یک مجموعه:

فرض کنیم A_1 ، A_2 و ... و A_n زیر مجموعه‌هایی ناتهی از مجموعه S باشند این مجموعه‌ها را یک افراز روی S می‌نامند هرگاه:

۱) اجتماع همه آنها برابر S باشد. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

۲) اشتراک دو به دوی آنها برابر تهی باشد.

$A_1 \cap A_2 = \emptyset \;,\; A_1 \cap A_3 = \emptyset \;,\; \dots \;,\; A_1 \cap A_n = \emptyset \;,\; A_2 \cap A_3 = \emptyset \;,\; \dots \;,\; A_i \cap A_j = \emptyset \quad 1 \le i, j \le n ,\; i \ne j$

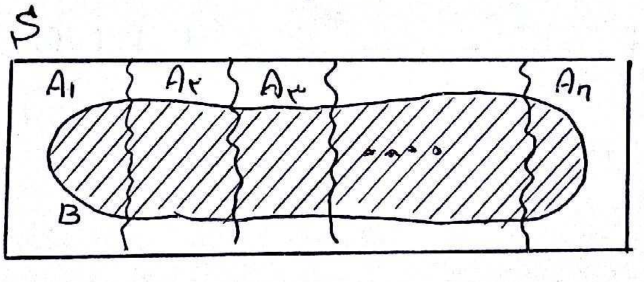


مثال) استانها افرازهایی از ایران هستند.

مثال) اعداد گویا و گنگ افرازهایی از اعداد حقیقی هستند.

قانون احتمال کل:

فرض کنید A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n مطابق شکل زیر یک افراز روی فضای نمونه‌ای S و B یک پیشامد دلخواه باشد.



$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$

$$\Rightarrow P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + \dots + P(B \cap A_n)$$

$$\xrightarrow[\text{شرطی}]{\text{احتمال}} P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$$

رابطه فوق را قانون احتمال کل می‌نامند که می‌توان آنرا با نماد $\sum$ (سیگما) که برای جمع چند عبارت مورد استفاده قرار می‌گیرد بصورت زیر نمایش داد:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

مثال ۱: ۵۲٪ جمعیت کشوری را زنان و ۴۸٪ بقیه را مردان تشکیل می‌دهند اگر ۶۰٪ زنان و ۶۸٪ مردان باسواد باشند چند درصد افراد این جامعه باسوادند؟

روش I:

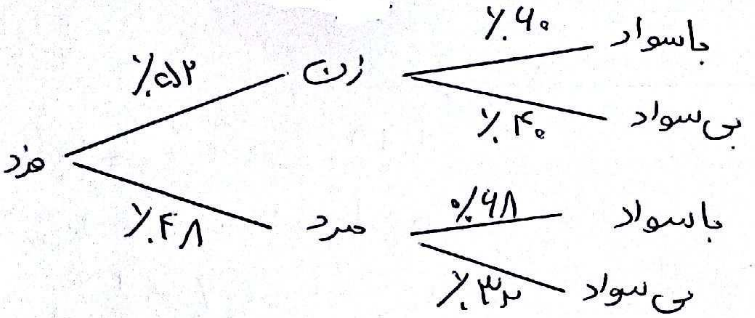
$A =$ زنان جامعه $\Rightarrow P(A) = \frac{52}{100}$ $\qquad B =$ مردان جامعه $\Rightarrow P(B) = \frac{48}{100}$ $\qquad M =$ باسواد بودن $\Rightarrow P(M) = ?$

P(باسواد بودن) = P(زن و باسواد بودن) + P(مرد و باسواد بودن)

$$\Rightarrow P(M) = P(A \cap M) + P(B \cap M) = P(A) \cdot P(M|A) + P(B) \cdot P(M|B)$$

$$= \frac{52}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{48}{100} \times \frac{68}{100} = 0/312 + 0/3264 = 0/6384 = 63/84\%$$

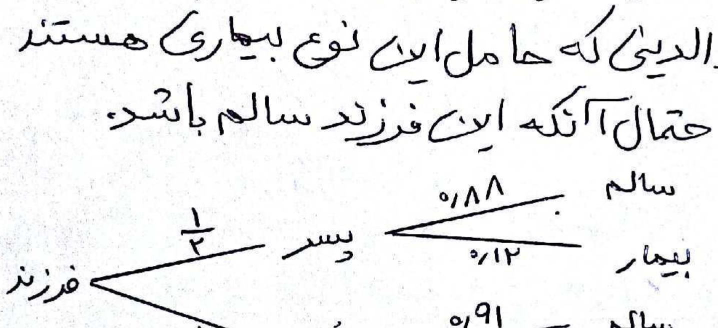
روش II: استفاده از نمودار درختی:



P(باسواد) $= \frac{52}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{48}{100} \times \frac{68}{100}$

$= 0/312 + 0/3264 = 0/6384$

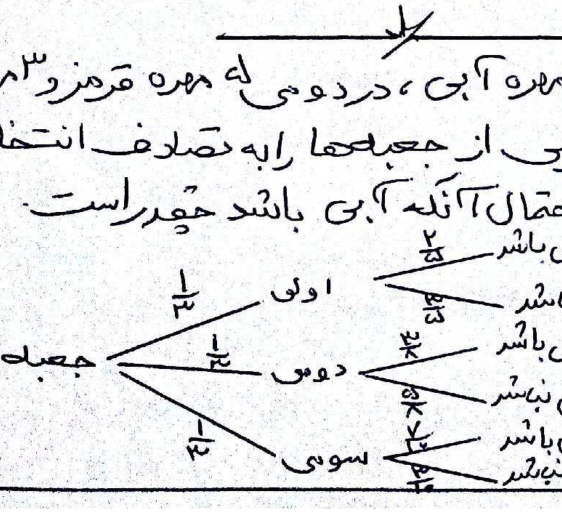
مثال ۲: فرض کنیم انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰٫۱۲ و انتقال به فرزند دختر ۰٫۰۹ باشد. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند انتظار فرزندی را دارند. مطلوبست احتمال آنکه این فرزند سالم باشد.



P(سالم بودن) $= \frac{1}{2} \times 0/88 + \frac{1}{2} \times 0/91$

$= 0/895$

مثال ۳: سه جعبه داریم. در اولی ۳ مهره قرمز و ۲ مهره آبی، در دومی ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و در سومی ۳ مهره قرمز و ۷ مهره آبی داریم. یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و یک مهره به تصادف از آن خارج می‌کنیم. احتمال آنکه آبی باشد چقدر است.

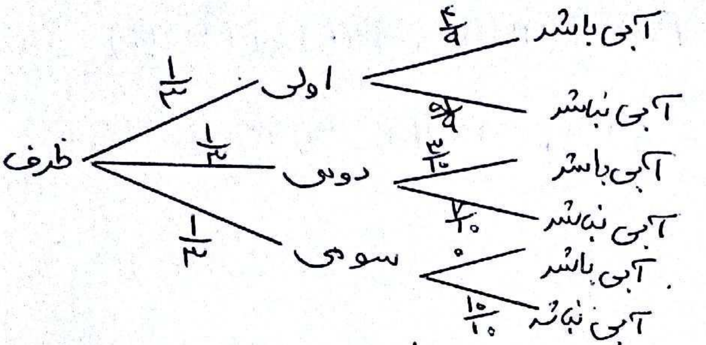


P(آبی باشد) $= (\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}) + (\frac{1}{3} \times \frac{3}{8}) + (\frac{1}{3} \times \frac{7}{10})$

$= \frac{2}{15} + \frac{3}{24} + \frac{7}{30} = \frac{16+15+28}{120} = \frac{59}{120}$

(هماهنگ خرداد ۹۸)

سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۷ مهره سبز و ۳ مهره آبی و ظرف سوم شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرفها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟ (۱/۷۵ نمره)



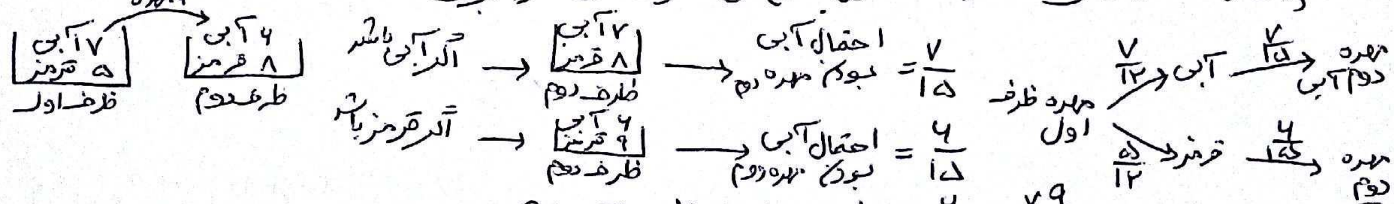
$$P(\text{آبی باشد}) = \frac{1}{3}\times\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\times\frac{3}{10} + \frac{1}{3}\times 0$$

$$= \frac{4}{27} + \frac{1}{10} = \frac{40+27}{270} = \frac{67}{270}$$

(هماهنگ شهریور ۹۸)

دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۷ مهره آبی و ۵ مهره قرمز و ظرف دوم شامل ۶ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره آبی است. (۱/۵ نمره)

حل: چون رنگ مهره‌ای را که از ظرف اول خارج می‌شود نمی‌دانیم برای مهره اول دو حالت در نظر می‌گیریم:



$$P(\text{ب آ}) = \frac{7}{12}\times\frac{7}{15} + \frac{5}{12}\times\frac{6}{15} = \frac{79}{180}$$

(هماهنگ دی ماه ۹۷)

یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را باهم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود، چقدر است؟ (۰/۵ نمره)

رو $= R$ پشت $= P$

$$S = \{R, PPPP, PPPR, PPRP, PRPP, PRRP, PRPR, PPRR, PRRR\}$$

$$A = \{R, PPPR, PPRP, PRPP\}$$ دقیقاً یک سکه رو

$$P(A) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times 3 = \frac{11}{16}$$

مثال) دو ظرف یکسان داریم. در اولی ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و در دومی ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه داریم. یک مهره به تصادف از ظرف اول خارج می کنیم و بدون آن که به آن نگاه کنیم در ظرف دوم قرار می دهیم سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم خارج می کنیم. با کدام احتمال مهره دوم خارج شده، سفید است؟

حل: چون رنگ مهره ای را که از ظرف اول خارج می شود نمی دانیم برای مهره خارج شده اول دو حالت در نظر می گیریم:

$\boxed{\text{۳ سفید، ۵ سیاه}} \xrightarrow{\text{۱ مهره}} \boxed{\text{۶ سفید، ۳ سیاه}}$

اگر سفید باشد $\rightarrow \boxed{\text{۷ سفید، ۳ سیاه}} \Rightarrow$ احتمال سفید بودن مهره دوم $= \frac{7}{10}$

اگر سیاه باشد $\rightarrow \boxed{\text{۶ سفید، ۴ سیاه}} \Rightarrow$ احتمال سفید بودن مهره دوم $= \frac{6}{10}$

مهره ظرف اول $\xrightarrow{\frac{3}{8}}$ سفید $\xrightarrow{\frac{7}{10}}$ مهره دوم سفید

مهره ظرف اول $\xrightarrow{\frac{5}{8}}$ سیاه $\xrightarrow{\frac{6}{10}}$ مهره دوم سفید

$$P(\text{سفید}) = \left(\frac{3}{8} \times \frac{7}{10}\right) + \left(\frac{5}{8} \times \frac{6}{10}\right) = \frac{51}{80}$$

مثال) در یک جامعه نسبت کودکان، بزرگسالان و سالمندان به ترتیب ۵۰ و ۳۰ و ۲۰ درصد است و این سه دسته به ترتیب با احتمال ۲۰ و ۱۰ و ۵ درصد به یک بیماری مبتلا می شوند. اگر یک فرد از جامعه را به تصادف انتخاب کنیم با کدام احتمال مبتلا به این بیماری است؟

فرد $\xrightarrow{\frac{50}{100}}$ کودک $\xrightarrow{\frac{20}{100}}$ بیمار

فرد $\xrightarrow{\frac{30}{100}}$ بزرگسال $\xrightarrow{\frac{10}{100}}$ بیمار

فرد $\xrightarrow{\frac{20}{100}}$ سالمند $\xrightarrow{\frac{5}{100}}$ بیمار

$$P(\text{بیمار}) = \left(\frac{50}{100} \times \frac{20}{100}\right) + \left(\frac{30}{100} \times \frac{10}{100}\right) + \left(\frac{20}{100} \times \frac{5}{100}\right) = \frac{14}{100}$$