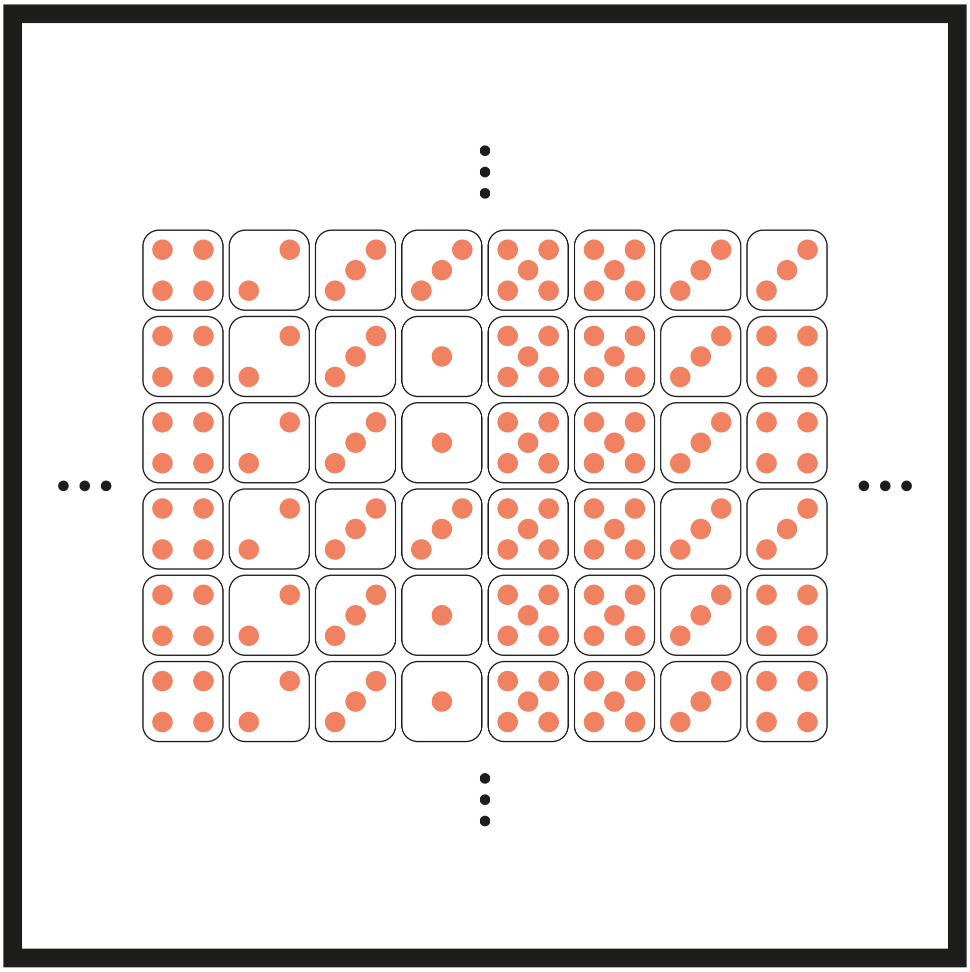
۳۸مین المپیاد ریاضی ایران



۱۳۹۹-۱۴۰۰

باشگاه دانش‌پژوهان جوان
وزارت آموزش و پرورش

سی و هشتمین المپیاد ریاضی ایران

سوالات و راه حل‌ها

اعضای تیم المپیاد ریاضی ایران
در شصت و دومین المپیاد ریاضی جهانی (روسیه)

از راست به چپ:

- سینا عزیزالدین
- ایلیا محروقی
- مهران طلایی خواجه‌روشنائی
- علیرضا رضایی مقدم
- متین یداللهی
- محمدرضا بدری

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

سی و هشتمین المپیاد ریاضی ایران تشکیل شده از چهار مرحله است. مرحلهٔ اول در بهمن ۱۳۹۸ و در سراسر کشور برگزار شد. امتحان شامل ۱۶ سوال پاسخ‌کوتاه و ۹ سوال پنج‌گزینه‌ای و زمان آن ۳ ساعت و نیم بود. در مجموع، حدود ۱۳۵۰۰ دانش‌آموز در این امتحان شرکت کردند و حدود ۷۰۰ نفر به مرحلهٔ دوم راه پیدا کردند.

مرحلهٔ دوم تحت تاثیر همه‌گیری کووید-۱۹ در تیر ۱۳۹۹ و در دو روز برگزار شد. شرکت‌کنندگان در هر روز سه سوال دریافت کردند و ۴ ساعت و نیم زمان داشتند. ۸۰ نفر اول این مرحله به دورهٔ تابستان راه پیدا کردند.

دورهٔ تابستان شامل چهار امتحان مجزا بود و در انتها ۱۴ دانش‌آموز مدال طلا و اکثر بقیهٔ دانش‌آموزان مدال نقره و برنز دریافت کردند. لیست زیر نام مدال‌آوران طلا را نشان می‌دهد:

۱. محمدرضا بدری
۲.امیرمحمد بندری ماسوله
۳. سام خانکی
۴. سید محمدرضا خسرویان
۵. علیرضا رضائی مقدم
۶. امیرحسین شجری
۷. مهران طلایی خواجه‌روشنائی
۸. متین عارف‌نیا
۹. سینا عزیزالدین
۱۰. امیرمحمد قوی
۱۱. اشکان مجیدی خامنه
۱۲. ایلیا محروقی
۱۳. پوریا محمودخان شیرازی
۱۴. متین یداللهی

انتخابی تیم در چهار روز و با ساختاری مشابه با المپیاد جهانی ریاضی (IMO) برگزار شد. در پایان ۶ نفر اول به عنوان اعضای تیم ایران در شصت و دومین المپیاد جهانی ریاضی انتخاب شدند.

در این دفترچه، ۶ مسئلهٔ مرحلهٔ دوم، ۱۶ مسئلهٔ دورهٔ تابستان و ۱۲ مسئلهٔ انتخابی تیم به همراه راه حل‌های مسائل ارائه می‌شود.

از همهٔ کسانی که در برگزاری سی و هشتمین المپیاد ریاضی ایران، شامل کمیتهٔ ملی المپیاد ریاضی، طراحان مسائل، گروه‌های انتخاب مسائل، گروه‌های آماده‌سازی امتحانات، مصححین، ویرایشگران، آموزشیاران و همهٔ کسانی که دانش

خود را به اشتراک گذاشتند و برای افزایش شوق ریاضی در کشور تلاش کردند و به روش‌های گوناگون به برگزاری این رویداد علمی کمک کردند، قدردانی و تشکر می‌کنیم.

مسائل

مرحله دوم

۱. فرض کنید S مجموعه‌ای n عضوی است. می‌خواهیم مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S را به m دسته افراز کنیم به نحوی که هرگاه A، B و $A \cup B$ در یک دسته باشند آن‌گاه $A = B$. حداقل مقدار m را بیابید. (منظور از افراز یک مجموعه به تعدادی دسته این است که هر عضو مجموعه در دقیقاً یک دسته قرار داشته باشد.)

(← ص.۱۵)

۲. اعداد حقیقی و مثبت x، y و z با شرط $x + y + z = ۱۳۹۹$ مفروض‌اند. بیش‌ترین مقدار عبارت

$$[x]\,y + [y]\,z + [z]\,x$$

چه‌قدر است؟ (منظور از $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بزرگ‌تر نیست.)

(← ص.۱۵)

۳. دایرهٔ $\omega_۱$ به مرکز $O_۱$ مفروض است. دایرهٔ $\omega_۲$ به مرکز $O_۲$ از نقطهٔ $O_۱$ می‌گذرد و $\omega_۱$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. خطی که از A می‌گذرد و بر $\omega_۱$ مماس است را ℓ می‌نامیم. دایره‌ای که از $O_۱$ و $O_۲$ می‌گذرد و مرکز آن روی ℓ قرار دارد، $\omega_۲$ را برای بار دوم در P قطع می‌کند. ثابت کنید قرینهٔ P نسبت به ℓ روی $\omega_۱$ قرار دارد.

(← ص.۱۶)

۴. دو دایرهٔ $\omega_۱$ و $\omega_۲$ در نقاط A و B تقاطع دارند. نقطهٔ X روی $\omega_۱$ و نقطهٔ Y روی $\omega_۲$ قرار دارد طوری‌که XY بر دو دایره مماس است و خط XY به B نزدیک‌تر از A است. اگر قرینهٔ B نسبت به X و Y را به ترتیب C و D بنامیم، ثابت کنید

$$\angle CAD < ۹۰^\circ$$

(← ص.۱۶)

۵. دوتایی (a, b) از اعداد طبیعی را مربع‌ساز گوییم هر گاه $ab + ۱$ مربع کامل باشد. تمام nهای طبیعی را بیابید که مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲n\}$ را بتوان به دوتایی‌های مربع‌ساز افراز کرد.

(← ص.۱۷)

۶. دایره‌ای را به $۲n$ قطاع مساوی تقسیم کرده‌ایم. می‌خواهیم روی هر یک از آن‌ها یکی از اعداد ۰، ۱، ...، $n - ۱$ را بنویسیم به طوری‌که

- هر عدد دقیقاً دو بار استفاده شود.

- برای هر عدد طبیعی i که $0 \leq i \leq n-1$، بین هر دو قطاع با شمارهٔ i، از یک طرف، دقیقاً i قطاع دیگر وجود داشته باشد.

ثابت کنید برای $n = 1399$ این کار امکان‌پذیر نیست. (← ص.۱۸)

دوره تابستان

جبر

۱. همهٔ توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(y - f(x)) = f(x) - ۲x + f(f(y)).$$

(← ص.۱۹)

۲. فرض کنید $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$، $b_۱, b_۲, \ldots, b_n$ و $c_۱, c_۲, \ldots, c_n$ اعداد حقیقی باشند. ثابت کنید

$$\sqrt{\sum_{i=۱}^{n} (۳a_i - b_i - c_i)^۲} + \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} (۳b_i - a_i - c_i)^۲} + \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} (۳c_i - a_i - b_i)^۲} \geq \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲} + \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} b_i^۲} + \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} c_i^۲}.$$

(← ص.۱۹)

۳. همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_k\}$ از اعداد صحیح را بیابید که یک تابع یک به یک $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یافت شود که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$\{f^n(x) - x \mid x \in \mathbb{R}\} = \{a_۱ + n, a_۲ + n, \ldots, a_k + n\}$$

(منظور از $f^n(x)$، nبار ترکیب تابع f با خودش است، مثلاً $f^۲(x) = f(f(x))$.)

(← ص.۱۹)

۴. چندجمله‌ای $x^{n_۱} + x^{n_۲} + \cdots + x^{n_{۱۳۹۸}} + ۱$ را ویژه گوییم هر گاه $n_۱, n_۲, \ldots, n_{۱۳۹۸}$ اعداد طبیعی متمایز باشند. آیا مجموعهٔ نامتناهی از چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی وجود دارد که ضرب هر دو عضوش ویژه شود؟

(← ص.۲۰)

ترکیبیات

۱. الف) یک گراف $۲n$ رأسی بدون برچسب (رأس‌های یکسان) داریم. ثابت کنید اگر این گراف $n + ۲$ یال داشته باشد، حتماً n راس مستقل می‌توان پیدا کرد (منظور از n رأس مستقل مجموعه‌ای از رئوس است که هیچ یالی بین آن‌ها وجود ندارد).

ب) تعداد گراف‌های $2n$ رأسی را بیابید که $n+3$ یال داشته باشد ولی هیچ مجموعهٔ مستقل nتایی نداشته باشد.
(← ص.۲۲)

۲. به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا n را دور دایره چید به طوری که اگر دو قطر واصل اعداد (a, b) و (c, d) با هم برخورد کرده بودند آنگاه داشته باشیم

$$a + b \not\equiv c + d \pmod{n}$$

(فرض کنید $n \geq 4$ و اگر دو چینش با دوران به هم تبدیل شوند یکسان به حساب می‌آیند.)

(← ص.۲۲)

۳. یک مربع لاتین $n \times n$ در اختیار داریم (منظور از مربع لاتین $n \times n$ مربعی است که خانه‌های آن با اعداد ۱ تا n پر شده است به طوری که هر کدام از این اعداد دقیقاً یک بار در هر سطر و هر ستون ظاهر شده‌اند). در هر حرکت می‌توانیم یک خانه از این جدول را انتخاب کرده و به آن خانه و تمامی خانه‌های هم‌سطر آن و تمامی خانه‌های هم‌ستون آن همگی یک واحد اضافه کنیم و یا از همگی یک واحد کم کنیم. ثابت کنید با استفاده از این حرکات، می‌توان به تمامی حالات مربع لاتین رسید (در مراحل میانی لزومی نیست که مربع، لاتین بماند. خانه‌ها هر کدام می‌توانند چند بار انتخاب شوند).
(← ص.۲۳)

۴. حداکثر چند زیرمجموعهٔ ۵ عضوی از $\{1, 2, \ldots, 20\}$ می‌توان انتخاب کرد که اشتراک هر دوتا از آن‌ها تک‌عضوی باشد؟

(← ص.۲۳)

هندسه

۱. لوزی $ABCD$ با دایره محاطی ω مفروض است. وسط ضلع AB را M می‌نامیم. نقطهٔ K داخل لوزی و روی ω قرار دارد به طوری که MK بر ω است. ثابت کنید نقاط M، K، D و C روی یک دایره قرار دارند.

(← ص.۲۴)

۲. مثلث ABC با دایره محیطی Γ داده شده است. نقاط D و E روی ضلع BC قرار دارند به طوری که $\angle BAD = \angle CAE$ و دایره‌ی ω در A بر AD مماس است و مرکز آن روی Γ قرار دارد. قرینه‌ی A نسبت به BC را A' می‌نامیم. فرض کنید خط $A'E$ دایره‌ی ω را در نقاط K و L قطع کند. ثابت کنید محل برخورد BK و CL، یا محل برخورد BL و CK روی دایره‌ی Γ قرار دارد.

(← ص.۲۵)

۳. دایره‌ی Ω به مرکز I_a، دایره محاطی خارجی نظیر رأس A در مثلث ABC است، که در E و F به ترتیب بر اضلاع AC و AB مماس است. فرض کنید نقطه‌ی D قرینه‌ی A نسبت به خط BI_a و نقطه‌ی K محل تقاطع خطوط DI_a و EF باشد. ثابت کنید مرکز دایره محیطی مثلث DKE، وسط BC و I_a همخط هستند.

(← ص.۲۵)

۴. مثلث ABC با مرکز دایره محیطی O و مرکز دایره محاطی I داده شده است. نقطه‌ی D پای نیمساز خارجی رأس A در مثلث ABC و نقطه‌ی I_a مرکز دایره محاطی خارجی نظیر رأس A در مثلث ABC است. نقطه‌ی K روی امتداد خط

IA از طرف A قرار دارد به طوری که $AK = ۲AI$. اگر پاره‌خط DF قطر دایره محیطی مثلث KDI_a باشد، ثابت کنید $OF = ۳OI$.

(← ص.۲۶)

نظریه اعداد

۱. تمام اعداد طبیعی n را بیابید که

$$\tau(n) \mid ۲^{\sigma(n)} - ۱$$

($\tau(n)$ و $\sigma(n)$ به ترتیب، تعداد مقسوم‌علیه‌ها و جمع مقسوم‌علیه‌های n هستند).

(← ص.۲۷)

۲. تمام چندجمله‌ای‌های ناثابت $P \in \mathbb{Z}[X]$ را بیابید که برای هر عدد طبیعی n، همه‌ی ریشه‌های $P^n(x)$ صحیح باشند (منظور از $P^n(x)$ همان $\underbrace{P(P(\ldots(P(x))\ldots))}_{n}$ است).

(← ص.۲۸)

۳. تمام توابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را بیابید که در دو شرط زیر صدق کند:

- $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) < f(n+۱) < f(n) + ۲۰۲۰$ و
- $\forall n \in \mathbb{N} : f(S(n)) = S(f(n))$.

(منظور از $S(n)$، جمع ارقام n در مبنای ۱۰ است)

(← ص.۲۹)

۴. a و b دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ هستند. ثابت کنید نامتناهی عدد طبیعی n موجود است به طوری که اعداد صحیح نامنفی k و t موجود نباشند که

$$\varphi(a^n - ۱) = b^k - b^t.$$

(← ص.۲۹)

امتحان انتخابی تیم

۱. (علیرضا حقی) مثلث حاده‌الزاویه ABC با اضلاع نابرابر داده شده است. X محل تقاطع نیمساز خارجی زاویه A با ضلع BC است. دو خط ℓ_b و ℓ_c را مماس به دایره محیطی ABC در نقاط B و C در نظر می‌گیریم. خطی گذرنده از X دو خط ℓ_b و ℓ_c را به ترتیب در Y و Z قطع می‌کند. نقطه برخورد دوم دایره محیطی مثلث‌های AYB و AZC را N می‌نامیم. اگر D محل تقاطع دو خط ℓ_b و ℓ_c باشد، ثابت کنید ND نیمساز $\angle YNZ$ است.

(← ص. ۳۲)

۲. (علی میرزایی) در گراف ساده و همبند G فرض کنید بزرگ‌ترین درجه $d > ۳$ باشد و همچنین

$$x_d \geq x_{d-۱} + ۲x_{d-۲} + \cdots + (d-۱)x_۱$$

که در آن x_i برابر با تعداد رئوس با درجه i است. ثابت کنید در G رأسی از درجه d وجود دارد که با حذف آن گراف همچنان همبند بماند.

(← ص. ۳۳)

۳. (نوید صفایی) a، b، c و d اعداد طبیعی و دوبه‌دو نسبت به هم اول هستند که همگی برابر با ۱ نیستند. $f, g : \mathbb{N} \to \{۰, ۱\}$ دو تابع ضربی هستند که برای هر $n \in \mathbb{N}$ می‌دانیم $f(an+b) = g(cn+d)$. ثابت کنید حداقل یکی از دو گزاره زیر برقرار است:

الف) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $f(an+b) = g(cn+d) = ۰$.

ب) عدد طبیعی D وجود دارد که برای همه اعداد طبیعی مانند n که $(n, D) = ۱$ داریم $f(n) = g(n) = ۱$.

(تابع $f : \mathbb{N} \to \{۰, ۱\}$ ضربی است اگر برای هر دو عدد طبیعی m و n داشته باشیم $f(mn) = f(m)f(n)$.)

(← ص. ۳۴)

۴. (علیرضا حقی) فرض کنید $\Omega(n)$ و $\omega(n)$ به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عامل اول n باشند. علیرضا و امین تصمیم گرفتند یک بازی انجام دهند. ابتدا علیرضا ۱۴۰۰ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح انتخاب می‌کند، سپس امین ۷۰۰ تا از آن‌ها را انتخاب می‌کند و مجموعه چندجمله‌ای‌های خود و علیرضا را به ترتیب A و B می‌نامد. امین در صورتی برنده می‌شود که برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم

$$\max_{P\in A}\left(\Omega(P(n))\right) \geq \min_{Q\in B}\left(\omega(Q(n))\right)$$

و در غیر این صورت علیرضا برنده می‌شود. کدام بازیکن استراتژی برد دارد؟

(← ص. ۳۶)

۵. (مرتضی ثقفیان) یک سه‌تایی از اعداد حقیقی را نایس گوییم اگر یکی از این سه عدد میانگین دوتای دیگر باشد. مجموعه A از $۲k+۱$ عدد حقیقی دارای حداقل $k^۲$ سه‌تایی نایس است. ثابت کنید می‌توان اعضای A را به دو تصاعد حسابی با قدر نسبت برابر افراز کرد.
(یک عدد تنها را می‌توان تصاعد حسابی به طول یک و با قدر نسبت دلخواه در نظر گرفت.)

(← ص. ۳۶)

۶. (علیرضا دانایی) D نقطه‌ای دلخواه روی خط اویلر و داخل مثلث حاده‌الزاویه ABC است. نقاط E و F به ترتیب تقاطع BD با AC و CD با AB هستند. نقطه X روی خط AD قرار دارد به طوری که $\angle EXF = ۱۸۰^\circ - \angle A$ و A و X یک طرف EF قرار دارند. اگر دایره محیطی مثلث‌های BXE و CXF برای بار دوم در P متقاطع باشند، ثابت کنید EF، XP و ارتفاع A همرسند.

(← ص. ۳۷)

۷. (مرتضی ثقفیان و علیرضا علیپور) اعداد طبیعی در خانه‌های جدولِ از هر طرف نامتناهی قرار داده شده‌اند، به طوری که عدد هر خانه برابر است با تعداد خانه‌های مجاور رأسی آن خانه که عددشان با عدد آن خانه برابر است. بیش‌ترین تعداد ممکن برای اعداد متمایز در این جدول را بیابید.
(دو خانه را مجاور رأسی گوییم اگر حداقل یک رأس مشترک داشته باشند.)

(← ص. ۳۹)

۸. (محمدامین شریفی) تمام توابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را بیابید که برای هر دو عدد طبیعی m و n داشته باشیم

$$f(n) + ۱۴۰۰m^۲ \mid n^۲ + f(f(m)) .$$

(← ص. ۳۹)

۹. (نوید صفایی و علیرضا حقی) ثابت کنید چندجمله‌ای‌های نسبت به هم اول P و Q با ضرایب صحیح و عدد حقیقی $u>۰$ وجود دارند که هر گاه اعداد طبیعی a، b، c و d در نامساوی‌های

$$\left|\frac{a}{c}-۱\right|^{۲۰۲۱} \leq \frac{u}{bc^{۱۰۱۰}} \qquad \text{و} \qquad \left|\left(\frac{a}{c}\right)^{۲۰۲۰}-\frac{d}{b}\right| \leq \frac{u}{bc^{۱۰۱۰}}$$

صدق کنند داشته باشیم $bP\left(\frac{a}{c}\right) = dQ\left(\frac{a}{c}\right)$.

(← ص. ۴۰)

۱۰. (مجتبی زارع بیدکی) همه توابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ را بیابید که برای هر m، n و k طبیعی داشته باشیم

$$f(mk)+f(nk)-f(k)f(mn) \geq ۱$$

(← ص. ۴۳)

۱۱. (علیرضا دادگرنیا) نقطه X داخل چهارضلعی غیرذوزنقه $ABCD$ قرار دارد به طوری که $\angle AXD + \angle BXC = ۱۸۰^\circ$. فرض کنید نیمساز $\angle ABX$ عمود از D بر AX را در K و نیمساز $\angle DCX$ عمود از A بر DX را در L قطع کند. می‌دانیم $BK \perp CX$ و $CL \perp BX$. اگر KL از مرکز دایره محیطی مثلث AXD بگذرد، ثابت کنید $KL \perp AD$.

(← ص. ۴۴)

۱۲. (مرتضی ثقفیان و امیر جعفری) ثابت کنید می‌توان همه زیرمجموعه‌های n عضوی از یک مجموعه $3n$ عضوی را با ۸ رنگ رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ سه زیرمجموعه همرنگی یافت نشوند که اشتراک دوبه‌دوی آن‌ها حداکثر یک عضوی باشد.

(← ص. ۴۶)

راه حل‌ها

مرحله دوم

۱. جواب مسئله، $n+۱$ است.
ابتدا فرض کنید برای دو مجموعهٔ A و B داشته باشیم $A \subset B$. از آن‌جا که $A \cup B = B$، اگر A و B در یک دسته قرار داشته باشند طبق شرط سوال نتیجه می‌شود $B = A$ که تناقض است. در نتیجه هر دو مجموعهٔ A و B که $A \subset B$، باید در دو دستهٔ مختلف قرار داشته باشند. حال مجموعه‌های $\varnothing, \{۱\}, \{۱, ۲\}, \dots, \{۱, ۲, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که هیچ دوتایی از این مجموعه‌ها نمی‌توانند در یک دسته قرار داشته باشند زیرا هر دوتایی را در نظر بگیریم یکی زیرمجموعهٔ دیگری است.
ادعا می کنیم می‌توان مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S را به $n+۱$ دسته با شرط مسئله افراز کرد. دسته‌ها را با شماره‌های $۰, ۱, \dots, n$ نام‌گذاری می‌کنیم. برای هر i طبیعی که $۰ \le i \le n$، همهٔ زیرمجموعه‌های i عضوی از S را در دستهٔ i قرار می‌دهیم. واضح است که هر زیرمجموعه از S در حداقل یکی از دسته‌ها قرار می‌گیرد. اگر دو مجموعهٔ متمایز A و B در یک دسته قرار داشته باشند تعداد اعضای یکسانی دارند پس B عضوی دارد که A ندارد و $A \cup B$ حداقل یک عضو بیش‌تر از A دارد. این نتیجه می‌دهد که $A \cup B$ نمی‌تواند در همان دسته قرار داشته باشد پس شرط افراز برقرار است و ادعا ثابت می‌شود. ■

۲. جواب مسئله، ۶۵۲۴۰۰ است.
دقت کنید که

$$۳(xy+yz+zx) \le (x+y+z)^۲ \qquad (۱)$$

زیرا اگر همهٔ عبارات را به طرف مثبت نامساوی ببریم، می‌توانیم آن را به شکل زیر بنویسیم:

$$۰ \le \frac{۱}{۲}(x-y)^۲ + \frac{۱}{۲}(y-z)^۲ + \frac{۱}{۲}(z-x)^۲$$

که درستی آن واضح است. همچنین طبق تعریف $[x]$ داریم $[x] \le x$، در نتیجه

$$[x]\,y + [y]\,z + [z]\,x \le xy+yz+zx \overset{(۱)}{\le} \frac{(x+y+z)^۲}{۳} = ۶۵۲۴۰۰ + \frac{۱}{۳} \qquad (۲)$$

فرض کنید حداقل یکی از اعداد x، y و z صحیح نباشد. از آن‌جا که $x+y+z$ صحیح است مجموع جزء اعشاری x، y و z حداقل ۱ است پس جز اعشاری یکی از آن‌ها حداقل $\frac{۱}{۳}$ است. این نتیجه می‌دهد که

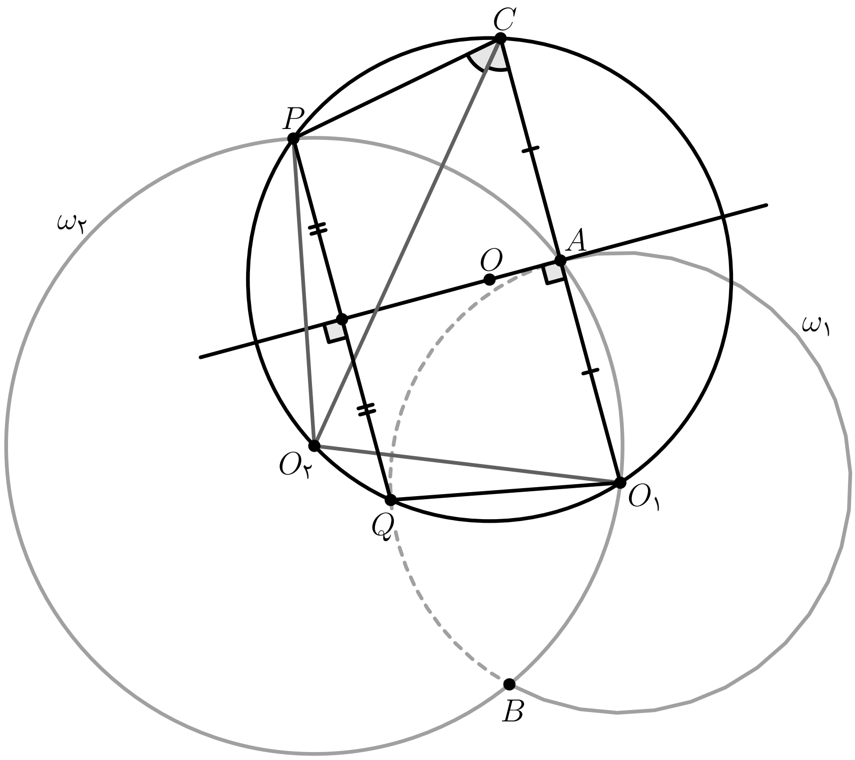
$$[x]\,y + [y]\,z + [z]\,x \le ۶۵۲۴۰۰ + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳} = ۶۵۲۴۰۰$$

اگر x، y و z هر سه اعداد صحیح باشند نیز طبق (۲) داریم

$$[x]\,y+[y]\,z+[z]\,x \le \left[۶۵۲۴۰۰+\frac{۱}{۳}\right] = ۶۵۲۴۰۰$$

از طرف دیگر برای $x=۴۶۶$، $y=۴۶۶$ و $z=۴۶۷$ حاصل برابر با ۶۵۲۴۰۰ می‌شود پس بیش‌ترین مقدار آن ۶۵۲۴۰۰ است. ■

۳. قرینهٔ نقاط P و O_1 نسبت به خط ℓ را Q و C می‌نامیم. از آن‌جا که $AO_1 \perp \ell$، C روی AO_1 قرار دارد همچنین C روی دایرهٔ محیطی PO_2O_1 قرار دارد زیرا خط ℓ از مرکز آن می‌گذرد. اگر نشان دهیم $CA=CP$ آن‌گاه نتیجه می‌شود $O_1A=O_1Q$ که همان حکم سوال است. از آن‌جا که $O_2P=O_2O_1$ نتیجه می‌شود $\angle PCO_2=\angle O_1CO_2$. دایرهٔ محیطی مثلث PCA را ω می‌نامیم. نقطهٔ O_2 از یک طرف روی نیمساز $\angle PCA$ و از طرف دیگر روی عمودمنصف PA قرار دارد، اگر $CA\neq CP$ آن‌گاه O_2 باید وسط کمان $\widehat{PA}$ از ω (کمانی که شامل راس C نیست) باشد یعنی چهارضلعی CPO_2A محاطی است که امکان ندارد زیرا A وسط CO_1 است و داخل دایرهٔ محیطی CPO_2 قرار دارد. پس فرض خلف غلط بوده و باید داشته باشیم $CP=CA$ که حکم را نتیجه می‌دهد.



■

۴. فرض کنید خط AB خطوط XY و CD را به ترتیب در M و N قطع کند. طبق قوت M نسبت به ω_1 و ω_2 داریم

$$MX^2 = MB\cdot MA = MY^2 \implies MX=MY$$

از طرف دیگر طبق عکس قضیهٔ تالس داریم $XY\parallel CD$. از آن‌جا که M وسط پاره‌خط XY است طبق قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود N نیز وسط پاره‌خط CD است. برای نشان دادن $\angle CAD<۹۰^\circ$ کافی است ثابت کنیم نقطهٔ A خارج از دایرهٔ

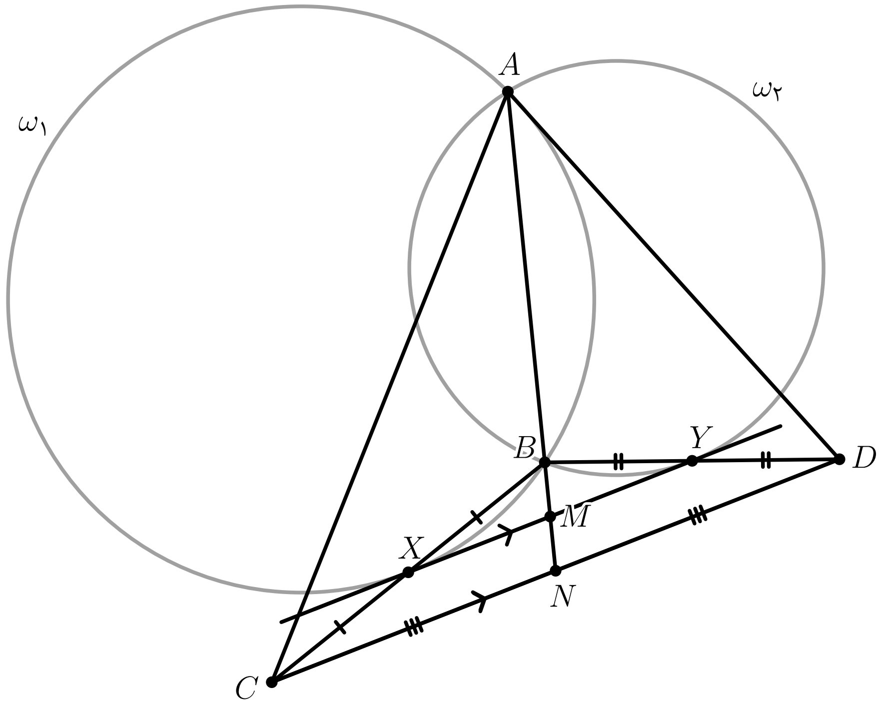
به قطر CD قرار دارد یا معادلاً $NA > NC$. از قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود

$$NA = NM + MA = MB + MA, \quad NC = ۲MX$$

پس باید نشان دهیم $MB + MA > ۲MX$. با استفاده از قوت M نسبت به دایرهٔ $\omega_۱$ و نامساوی حسابی-هندسی داریم

$$MX^۲ = MB \cdot MA \leq \left(\frac{MB + MA}{۲}\right)^۲ \implies MB + MA \geq ۲MX$$

دقت کنید که تساوی نامساوی حسابی-هندسی تنها زمانی رخ می‌دهد که $MB = MA$ اما در این‌جا واضح است که $MA > MB$ پس حالت تساوی نمی‌تواند اتفاق بیفتد و حکم ثابت می‌شود.



■

۵. جواب مسئله، nهای زوج است.
ابتدا نشان می‌دهیم اگر n زوج باشد می‌توان مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲n\}$ را به جفت‌های مربع‌ساز افراز کرد. فرض می‌کنیم $n = ۲m$. اکنون برای هر عدد صحیح $۰ \leq k \leq m - ۱$، دو زوج $(۴k + ۲, ۴k + ۴)$ و $(۴k + ۱, ۴k + ۳)$ را در نظر بگیرید. مجموعهٔ این زوج‌ها، اعداد $\{۱, ۲, \ldots, ۲n\}$ را افراز می‌کنند و هر زوج نیز مربع‌ساز است زیرا

$$(۴k + ۲)(۴k + ۴) + ۱ = (۴k + ۳)^۲, \quad (۴k + ۱)(۴k + ۳) + ۱ = (۴k + ۲)^۲$$

حال نشان می‌دهیم اگر n فرد باشد نمی‌توان مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲n\}$ را به دوتایی‌های مربع‌ساز افراز کرد.
فرض کنید a عددی باشد که باقی‌ماندهٔ آن بر ۴ برابر با ۲ باشد. در این صورت اگر (a, b) یک دوتایی مربع‌ساز باشد، عدد صحیح c وجود دارد که $ab + ۱ = c^۲$. از آن‌جا که a زوج است پس c فرد است. مثلاً فرض کنید $c = ۲d + ۱$ که d عددی صحیح است. در نتیجه

$$ab = c^۲ - ۱ = (۲d + ۱)^۲ - ۱ = ۴d^۲ + ۴d = ۴d(d + ۱)$$

از آن‌جا که عدد $d(d+1)$ همواره زوج است پس ab بر ۸ بخش‌پذیر است و چون a تنها یک عامل ۲ دارد، b باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

بنابراین نشان دادیم که اعدادی که بر ۴ باقی‌ماندهٔ ۲ دارند تنها با اعدادی که بر ۴ بخش‌پذیرند، می‌توانند دوتایی مربع‌ساز تشکیل دهند. حال فرض می‌کنیم $n = 2m+1$. توجه کنید که در بین اعداد $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ تعداد $m+1$ عدد هستند که بر ۴ باقی‌ماندهٔ ۲ دارند در حالی‌که تعداد m عدد هستند که بر ۴ بخش‌پذیرند. بنابراین نمی‌توان مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ را به دوتایی‌های مربع‌ساز افراز کرد. ■

۶. مسئله را در حالت کلی و برای عدد طبیعی دلخواه n حل می‌کنیم. فرض کنید برای n حداقل یک حالت که فرض‌های سوال را برآورده کند، وجود داشته باشد. به $2n$ قطاع اعداد ۰ تا $2n-1$ را به طور متوالی نسبت می‌دهیم. فرض کنید برای هر i طبیعی که $0 \le i \le n-1$، به دو قطاع با شمارهٔ i اعداد a_i و b_i را نسبت داده باشیم. از فرض سوال نتیجه می‌شود

$$a_i - b_i \overset{2n}{\equiv} \pm(i+1) \implies a_i - b_i \overset{2}{\equiv} i+1$$

دقت کنید که $a_i + b_i \overset{2}{\equiv} a_i - b_i$ پس داریم

$$i+1 \overset{2}{\equiv} a_i - b_i \overset{2}{\equiv} a_i + b_i \qquad (1)$$

اگر برای همهٔ iهای طبیعی از ۰ تا $n-1$ دو طرف رابطهٔ (۱) را با هم جمع کنیم نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}(i+1) \overset{2}{\equiv} \sum_{i=0}^{n-1}(a_i+b_i) = \sum_{i=0}^{2n-1} i \\
\implies &\frac{n(n+1)}{2} \overset{2}{\equiv} n(2n-1) \\
\implies &n(n+1) \overset{4}{\equiv} 2n(2n-1) \\
\implies &3n(n-1) \overset{4}{\equiv} 0
\end{aligned}$$

پس باقی‌ماندهٔ n بر ۴ باید برابر با ۰ یا ۱ باشد اما می‌دانیم باقی‌ماندهٔ ۱۳۹۹ بر ۴ برابر با ۳ است که حکم سوال را نتیجه می‌دهد. ■

دوره تابستان

جبر

۱. با قرار دادن $y = x + f(x)$ به دست می‌آید $f(f(x + f(x))) = ۲x$. بنابراین تابع f پوشا است و عدد حقیقی r وجود دارد به طوری که $f(r) = ۰$. سپس با قرار دادن $x = r$ نتیجه می‌شود

$$f(y) = -۲r + f(f(y)).$$

بنابر پوشا بودن تابع f، برای هر عدد حقیقی z، عدد حقیقی y وجود دارد به طوری که $f(y) = z$. در نتیجه

$$z = -۲r + f(z) \implies f(z) = z + ۲r, \quad z \in \mathbb{R}.$$

با قرار دادن این رابطه در معادله‌ی اصلی مسئله به دست می‌آید $r = ۰$. پس تنها جواب مسئله تابع همانی است. ■

۲. طبق نامساوی مینکوفسکی می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sum_{i=۱}^{n}(۳a_i - b_i - c_i)^۲} + \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} b_i^۲} + \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} c_i^۲} \geq \sqrt{\sum_{i=۱}^{n}(۳a_i)^۲}$$

$$\implies \sqrt{\sum_{i=۱}^{n}(۳a_i - b_i - c_i)^۲} \geq ۳\sqrt{\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲} - \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} b_i^۲} - \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} c_i^۲}. \qquad (۱)$$

پس به شکل مشابه

$$\sqrt{\sum_{i=۱}^{n}(۳b_i - c_i - a_i)^۲} \geq ۳\sqrt{\sum_{i=۱}^{n} b_i^۲} - \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} c_i^۲} - \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲}, \qquad (۲)$$

$$\sqrt{\sum_{i=۱}^{n}(۳c_i - a_i - b_i)^۲} \geq ۳\sqrt{\sum_{i=۱}^{n} c_i^۲} - \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲} - \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} b_i^۲}. \qquad (۳)$$

با جمع کردن نامساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) حکم مسئله نتیجه می‌شود. ■

۳. مجموعهٔ $\{a_۱, a_۲, \dots, a_k\}$ را A می‌نامیم و $\{a_۱ + n, a_۲ + n, \dots, a_k + n\}$ را با نماد $A + n$ نمایش می‌دهیم. فرض می‌کنیم حکم مسئله برای مجموعهٔ A درست باشد.

لم ۱. اعضای A همه نامنفی هستند.

برهان. به برهان خلف فرض کنید عدد طبیعی m یافت شود که $-m \in A$. طبق فرض $x \in \mathbb{R}$ یافت می‌شود که $f^m(x) - x = -m + m = ۰$ پس $f^m(x) = x$. در نتیجه برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $f^{km}(x) = x$. این یعنی $۰ \in A + km$ اما برای k به اندازهٔ کافی بزرگ

$$\min\{A + km\} = \min\{A\} + km > ۰$$

که تناقض است. □

لم ۲. $۰ \in A$.

برهان. عدد حقیقی $x_۰$ و دنبالهٔ $\{f^n(x_۰) - x_۰ - n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را در نظر بگیرید. جمله‌های این دنباله همه اعضای A هستند و چون A متناهی است، جملهٔ تکراری در این دنباله ظاهر می‌شود. پس عدد $a \in A$ و اعداد طبیعی $m < n$ یافت می‌شوند که $f^n(x_۰) - x_۰ = a + n$ و $f^m(x_۰) - x_۰ = a + m$. با کم کردن این دو عبارت از یک‌دیگر داریم $f^n(x_۰) - f^m(x_۰) = n - m$. بنابراین اگر $f^m(x_۰)$ را $y_۰$ بنامیم، می‌توان نوشت

$$f^{n-m}(y_۰) - y_۰ = n - m \in A + n - m,$$

پس A باید شامل صفر باشد. □

a را بزرگ‌ترین عضو A بگیرید. طبق تعریف $x_۱ \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $f(x_۱) = x_۱ + a + ۱$. حال به $f^n(x_۱)$ توجه کنید. می‌دانیم $f^n(x_۱) - x_۱ \in A + n$ و لذا $f^n(x_۱) - x_۱ \leq a + n$. اما از طرف دیگر، از آنجا که A عضو منفی ندارد داریم $f(x) - x \geq ۱$. در نتیجه می‌توان نوشت

$$f^n(x_۱) - x_۱ = \underbrace{\left(f^n(x_۱) - f^{n-۱}(x_۱)\right)}_{\geq ۱} + \cdots + \underbrace{\left(f^۲(x_۱) - f(x_۱)\right)}_{\geq ۱} + \underbrace{\left(f(x_۱) - x_۱\right)}_{\geq a+۱} \geq a + n.$$

پس در این نابرابری‌ها حالت تساوی برقرار است و لذا برای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم $f^n(x_۱) = x_۱ + a + n$. $y_۱$ را برابر با $x_۱ + a$ بگیرید. اگر $a > ۰$ آنگاه $y_۱ > x_۱$ و از سوی دیگر $y_۱ < f^n(x_۱)$ (برای هر $n \geq ۱$). در این صورت با فرض یک‌به‌یک بودن تابع f هیچ گزینه‌ای برای $f(y_۱)$ وجود ندارد، چرا که $f(y_۱)$ باید عددی صحیح و بزرگ‌تر از $y_۱$ باشد، اما همهٔ اعداد صحیح بزرگ‌تر از $y_۱$ به فرم $f^n(x_۱)$ هستند در حالی که $y_۱$ برابر با $x_۱$ یا $f^{n-۱}(x_۱)$ نیست.

این تناقض نشان می‌دهد برای وجود داشتن تابع یک‌به‌یک f، بزرگ‌ترین عضو مجموعه نمی‌تواند مثبت باشد و تنها $A = \{۰\}$ مقبول است. برای این مجموعه به وضوح تابع یک‌به‌یک $f(x) = x + ۱$ شرط مورد نظر را برآورده می‌کند. ■

۴. ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۱. فرض کنید $f(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط باشد به طوری که ضریب پیشروی آن گویا است. اگر عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که $f(x)^k \in \mathbb{Q}[x]$، آنگاه ضرایب $f(x)$ نیز گویا است.

برهان. قرار دهید $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_۱ x + a_۰$. سپس می‌توان نوشت

$$f(x)^k = b_{kn} x^{kn} + \cdots + b_۱ x + b_۰. \qquad (۱)$$

حال به طور استقرایی فرض کنید ضرایب $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-s}$ گویا هستند سپس نشان می‌دهیم a_{n-s-1} نیز گویا است (پایه‌ی استقرا فرض لم است). برای اثبات آن، ضریب x^{kn-s-1} را در دو طرف تساوی (۱) مقایسه می‌کنیم. به سادگی می‌توان مشاهده کرد که این ضریب در طرف چپ تساوی برابر است با $a_{n-s-1}a_n^{k-1} + S$ که S طبق فرض استقرا عددی گویا است. پس داریم $a_{n-s-1}a_n^{k-1} + S = b_{kn-s-1}$ که نتیجه می‌دهد a_{n-s-1} گویا است. این استقرا نشان می‌دهد تمام ضرایب $f(x)$ گویا هستند. □

به لم زیر نیز برای حل مسئله نیاز داریم.

لم ۲. فرض کنید $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب گویا باشند به طوری که $P(x)$ بر $Q(x)$ بخش‌پذیر است. سپس $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ نیز ضرایب گویا دارد.

برهان. بنابر الگوریتم تقسیم چندجمله‌ای‌ها درستی حکم واضح است. □

حال به سراغ حل مسئله‌ی اصلی می‌رویم. فرض کنید $R(x)$، $S(x)$ و $T(x)$ سه چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشند به طوری که حاصل ضرب دوبه‌دوی آن‌ها ویژه است. از آنجا که $R(x)S(x)$، $R(x)T(x)$ و $S(x)T(x)$ هر سه دارای ضرایب صحیح هستند، طبق لم ۲ داریم

$$R(x)^۲ = \frac{R(x)S(x)R(x)T(x)}{S(x)T(x)} \in \mathbb{Q}[x].$$

فرض کنید r، s و t به ترتیب ضرایب پیشروی $R(x)$، $S(x)$ و $T(x)$ باشند. از آنجا که ضرب دوبه‌دوی این سه چندجمله‌ای ویژه است، باید داشته باشیم $rs = st = tr = ۱$ که نتیجه می‌دهد $r = s = t = \pm ۱$. بنابراین طبق لم ۱ ضرایب $R(x)$، $S(x)$ و $T(x)$ گویا هستند و در نتیجه $R(۱)$، $S(۱)$ و $T(۱)$ نیز اعداد گویا هستند. از طرف دیگر داریم

$$R(۱)S(۱) = S(۱)T(۱) = T(۱)R(۱) = ۱۳۹۹ \implies R(۱) = S(۱) = T(۱) = \pm\sqrt{۱۳۹۹},$$

که تناقض است. پس مجموعه‌ای که ضرب هر دو عضوش ویژه است حداکثر دو عضو می‌تواند داشته باشد. ■

توضیح ۱. با استفاده از لم ۱ می‌توان نتایج جالب دیگری نیز به دست آورد. برای مثال اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط باشد به طوری که $P(x)^۲$ ضرایب گویا دارد، آنگاه واضح است که مربع ضریب پیشروی $P(x)$ نیز گویا است. حال فرض کنید $P(x) = c_d x^d + \cdots + c_۱ x + c_۰$. چندجمله‌ای $\frac{P(x)}{c_d}$ تکین است و $\frac{P(x)^۲}{c_d^۲}$ ضرایب گویا دارد. بنابراین $\frac{P(x)}{c_d}$ نیز ضرایب گویا دارد، که $c_d^۲$ عددی گویا است.

توضیح ۲. در لم ۱ اگر فرض کنیم $f(x)^k \in \mathbb{Z}[x]$ آنگاه می‌توان نشان داد ضرایب $f(x)$ نیز صحیح است. پس از اثبات گویا بودن ضرایب $f(x)$ ادامه‌ی اثبات را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:
دقت کنید که $f(x)^k = f(x)^{k-۱} \cdot f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. سپس لم گاوس نتیجه می‌دهد عدد گویای q وجود دارد که ضرایب $qf(x)$ و $q^{-۱}f(x)^{k-۱}$ صحیح هستند. فرض کنید $q = \frac{a}{b}$ که $\gcd(a,b) = ۱$. بنابراین می‌توان گفت که $af(x)$ و $bf(x)^{k-۱}$ نیز دارای ضرایب صحیح هستند. در نتیجه $a^{k-۱}f(x)^{k-۱} = (af(x))^{k-۱} \in \mathbb{Z}[x]$. طبق قضیه‌ی بزو اعداد صحیح s و t وجود دارند که $a^{k-۱}s + bt = ۱$، بنابراین

$$f(x)^{k-۱} = (a^{k-۱}s + bt)f(x)^{k-۱} = a^{k-۱}sf(x)^{k-۱} + btf(x)^{k-۱} \in \mathbb{Z}[x].$$

با ادامه دادن این روند می‌توان نتیجه گرفت که ضرایب $f(x)$ صحیح هستند.

ترکیبیات

۱. الف) گراف داده شده را G، بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مستقل از G را A و مجموعهٔ رئوس باقی‌مانده را B بنامید. فرض خلف می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم تعداد اعضای A حداکثر $n-۱$ باشد. در این صورت تعداد اعضای B حداقل $۲n-(n-۱)=n+۱$ است. همچنین از هر رأس B یالی به مجموعه‌ی رئوس A وجود دارد، وگرنه A بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مستقل نخواهد بود. پس حداقل $n+۱$ یال بین A و B وجود دارد. این نتیجه می‌دهد حداکثر $(n+۲)-(n+۱)=۱$ یال بین رئوس B وجود دارد. اگر هیچ یالی بین رئوس B وجود نداشته باشد آنگاه B خود یک مجموعه‌ی مستقل است که در تناقض با فرض خلف است زیرا $|A|>|B|$. اگر یک یال بین رئوس B، برای مثال بین u و v، وجود داشته باشد آنگاه $B-\{u\}$ مجموعه‌ای مستقل با اندازه‌ی n است که باز هم با فرض خلف تناقض دارد. پس فرض خلف باطل است و $|A|\geq n$.

ب) ادعا می‌کنیم تنها حالت ممکن اجتماع دو مثلث مجزا و $n-۳$ یال بین $n-۳$ جفت مجزا از رئوس است. فرض کنید A یک مجموعه مستقل ماکسیمال و B مکمل آن باشد. طبق فرض مسئله A حداکثر $n-۱$ عضو و B حداقل $n+۱$ عضو دارد. مشابه قسمت قبل می‌توان نتیجه گرفت حداقل $n+۱$ یال بین A و B و حداقل ۲ یال بین اعضای B وجود دارد. از آنجا که تعداد کل یال‌ها $n+۳$ است، A باید دقیقاً $n-۱$ عضو داشته باشد و دقیقاً ۲ یال بین اعضای B وجود داشته باشد. همچنین هر عضو B دقیقاً به یک عضو A متصل است.
حال اگر دو عضو B مانند u و v به عضوی از A مانند w متصل باشند آنگاه بین u و v نیز باید یال وجود داشته باشد. زیرا در غیر این صورت $(A-\{w\})\cup\{u,v\}$ یک مجموعه‌ی مستقل با اندازه‌ی n تشکیل می‌دهد که تناقض است. بنابراین از آنجا که بین اعضای B تنها ۲ یال وجود دارد، هیچ عضوی از A نمی‌تواند به سه عضو B یا بیشتر متصل باشد. همچنین از آنجا که $|A|=n-۱$ و $|B|=n+۱$ باید دو عضو $x_۱,x_۲\in A$ و دو جفت مجزای $y_۱,z_۱$ و $y_۲,z_۲$ در B وجود داشته باشد به طوری که x_i، y_i و z_i تشکیل یک مثلث می‌دهند $(i=۱,۲)$. همچنین یک تناظر یک به یک بین دو مجموعه‌ی $A-\{x_۱,x_۲\}$ و $B-\{y_۱,z_۱,y_۲.z_۲\}$ وجود دارد به طوری که اعضای متناظر به یکدیگر متصلند. یال‌های گفته شده مجموعاً $n+۳$ یال می‌شوند پس یال دیگری در گراف وجود ندارد. بنابراین ادعا ثابت می‌شود.

■

۲. جواب مسئله برابر با $\varphi(n)$ است.

لم ۱. اگر a، b و c سه عدد متوالی دور دایره باشند آنگاه $a+c\overset{n}{\equiv}۲b$.

برهان. اگر $a+c\overset{n}{\not\equiv}۲b$، آنگاه می‌توان عدد طبیعی $d\leq n$ را به شکلی انتخاب کرد که $d\overset{n}{\equiv}a+c-b$ و d از a، b و c متمایز است. واضح است که قطر (b,d) با قطر (a,c) تقاطع دارد اما داریم $a+c\overset{n}{\equiv}b+d$ که تناقض است. □

لم ۲. فرض کنید اعداد $n,\dots,۲,۱$ دور دایره چیده شده‌اند به طوری که برای هر سه عدد متوالی a، b و c می‌توان نوشت $a+c\overset{n}{\equiv}۲b$. آنگاه این اعداد شرایط مسئله را برقرار می‌سازند.

برهان. اعداد دور دایره را به ترتیب ساعتگرد با $a_{n-۱},\dots,a_۱,a_۰$ نشان می‌دهیم به طوری که $a_۰=۱$. با استفاده از لم ۱ و استقرا روی i به سادگی می‌توان مشاهده کرد که $a_i\overset{n}{\equiv}i(a_۱-۱)+۱$. حال فرض کنید قطر (a_i,a_j) با قطر (a_k,a_l)

تقاطع داشته باشد. بدون کاسته‌شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $i < k < j < l$. بنابراین

$$i + j < k + l < j + (n + i) \implies k + l \overset{n}{\not\equiv} i + j.$$

در نهایت به دست می‌آید

$$a_k + a_l \overset{n}{\equiv} (k + l)(a - ۱) + ۲ \overset{n}{\not\equiv} (i + j)(a - ۱) + ۲ \overset{n}{\equiv} a_i + a_j,$$

پس شرایط مسئله برقرار است. $\square$

همانطور که در اثبات لم ۲ مشاهده کردیم مقدار $a_۱$ کل دنباله را مشخص می‌کند. پس لازم و کافی است که مجموعه‌ی $\{i(a - ۱) + ۱ \ : \ ۰ \le i \le n - ۱\}$ تشکیل یک دستگاه کامل از مانده‌ها به پیمانه‌ی n دهد. می‌دانیم این تنها در صورتی اتفاق می‌افتد که $(a, n) = ۱$. بنابراین تعداد حالت‌های ممکن $\varphi(n)$ است. $\blacksquare$

۳. خانه‌ی سطر iام و ستون jام را با (i, j) و عدد آن خانه را با a_{ij} نشان دهید. برای هر چهارتایی $i, j, l, k \in \{۱, ۲, \dots, n\}$ با شرط $i \ne j$ و $k \ne l$، فرایند P_{ijlk} را به زیر شکل تعریف کنید:
به همه‌ی خانه‌های هم‌ستون و هم‌سطر با (i, j) یک واحد و به همه‌ی خانه‌های هم‌ستون و هم‌سطر با (l, k) یک واحد اضافه کنید. همچنین از همه‌ی خانه‌های هم‌ستون و هم‌سطر با (i, k) یک واحد و از همه‌ی خانه‌های هم‌ستون و هم‌سطر با (l, j) یک واحد کم کنید.
بعد از این فرایند a_{ik} و a_{lj} یک واحد افزایش پیدا می‌کنند، a_{ij} و a_{lk} یک واحد کاهش پیدا می‌کنند و بقیه‌ی خانه‌های جدول تغییری نمی‌کنند. بنابراین مربع حاصل نیز یک مربع لاتین است.
برای دو مربع لاتین A و B تعریف کنید

$$d(A, B) = \sum_{۱ \le i, j \le n} |a_{ij} - b_{ij}|.$$

می‌خواهیم از فرایند تعریف شده استفاده کنیم و مربع لاتین A را به مربع لاتین دیگری مانند A' تبدیل کنیم به طوری که $d(A', B) < d(A, B)$. اگر بتوان این کار را انجام داد، با تکرار کردن آن می‌توان در نهایت A را به B تبدیل کرد. از آنجا که مجموع اعداد هر سطر و ستون A و B برابر است، اعداد طبیعی $۱ \le i, j \le n$ وجود دارند به طوری که $a_{ij} > b_{ij}$ و دو عدد طبیعی $۱ \le k, l \le n$ وجود دارند به طوری که $a_{ik} < b_{ik}$ و $a_{lj} < b_{lj}$. حال اگر فرایند P_{ijlk} را روی A انجام دهیم به مربع A' می‌رسیم که $d(A', B) < d(A, B)$ و همچنین A' نیز مربع لاتین است. بنابراین با تکرار این عمل می‌توان در نهایت به B رسید. $\blacksquare$

۴. فرض کنید $A_۱, A_۲, \dots, A_k$ زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۲۰\}$ باشند به طوری که اشتراک هر دوتا از آن‌ها تک‌عضوی است. در ضمن فرض کنید $A_۱ = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $k \ge ۱۷$. برای هر $۲ \le i \le k$، A_i با $A_۱$ در دقیقاً یکی از اعداد $۱, ۲, \dots, ۵$ اشتراک دارد. پس طبق اصل لانه کبوتری $\lceil \frac{۱۶}{۵} \rceil = ۴$ تا از A_iها وجود دارند که در یک عضو یکسان، مثلاً ۱، با $A_۱$ اشتراک دارند. فرض کنید این ۴ مجموعه $A_{i_۱}$، $A_{i_۲}$، $A_{i_۳}$ و $A_{i_۴}$ باشند. در نتیجه

$$۱ \in A_۱ \cap A_{i_۱} \cap A_{i_۲} \cap A_{i_۳} \cap A_{i_۴}$$

و ۱ تنها عضو مشترک بین این ۵ مجموعه است. حال چون هرکدام از این مجموعه‌ها ۵ عضو دارند پس حداقل $۲۱ = ۱ + ۴ \times ۵$ عضو متمایز داریم که تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد $k \leq ۱۶$.
اکنون برای $k = ۱۶$ مثال زیر را درنظر بگیرید:

$\{۲, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۰\}$	$\{۲, ۷, ۱۱, ۱۵, ۱۹\}$	$\{۲, ۶, ۱۰, ۱۴, ۱۸\}$	$\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$
$\{۳, ۶, ۱۱, ۱۷, ۲۰\}$	$\{۳, ۹, ۱۲, ۱۴, ۱۹\}$	$\{۳, ۸, ۱۳, ۱۵, ۱۸\}$	$\{۱, ۶, ۷, ۸, ۹\}$
$\{۴, ۹, ۱۰, ۱۵, ۲۰\}$	$\{۴, ۶, ۱۳, ۱۶, ۱۹\}$	$\{۴, ۷, ۱۲, ۱۷, ۱۸\}$	$\{۱, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳\}$
$\{۵, ۷, ۱۳, ۱۴, ۲۰\}$	$\{۵, ۸, ۱۰, ۱۷, ۱۹\}$	$\{۵, ۹, ۱۱, ۱۶, ۱۸\}$	$\{۱, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷\}$

■

هندسه

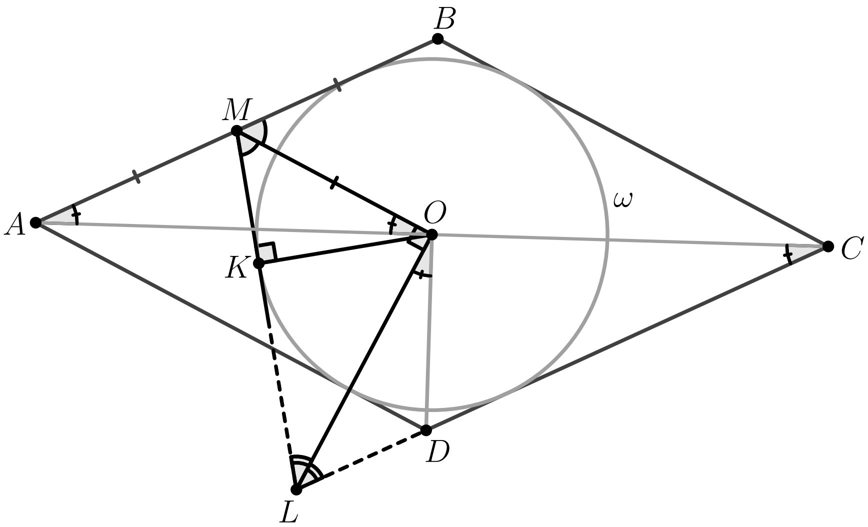
۱. فرض کنید L نقطه‌ی تقاطع KM و CD باشد. چهارضلعی $MLCB$ دارای دایره‌ی محاطی به مرکز O است. بنابراین OL و OM به ترتیب نیمساز زوایای $\angle MLC$ و $\angle BML$ هستند. به علاوه $BM \parallel CL$، این دو گزاره با هم نتیجه می‌دهند $\angle LOM = ۹۰^\circ$. در نتیجه LO بر دایره محیطی مثلث OKM مماس است، زیرا $\angle MKO = ۹۰^\circ$. همچنین $\angle LOM = \angle AOD$ که نتیجه می‌دهد

$$\angle LOD = \angle AOM = \angle BAC = \angle LCO.$$

بنابراین LO بر دایره محیطی مثلث DOC نیز مماس است. در نتیجه

$$LD \cdot LC = LO^۲ = LK \cdot LM,$$

پس $MKDC$ محاطی است.



■

۲. فرض کنید F نقطه‌ی تقاطع دوم ω و Γ، و K' نقطه‌ی تقاطع دوم ω و BF باشد. برای اثبات حکم تنها نیاز است نشان دهیم که K' روی $A'E$ قرار دارد. فرض کنید O مرکز ω و P تقاطع دوم AD و Γ باشد. واضح است که $\angle OAP = ۹۰^\circ$، پس $\angle OFP = ۹۰^\circ$. این نتیجه می‌دهد PF بر ω در نقطه‌ی F مماس است و $AP = PF$. حال دقت کنید که

$$\angle AFK' = \angle AFB = \angle ACB = \angle ACE, \tag{۱}$$

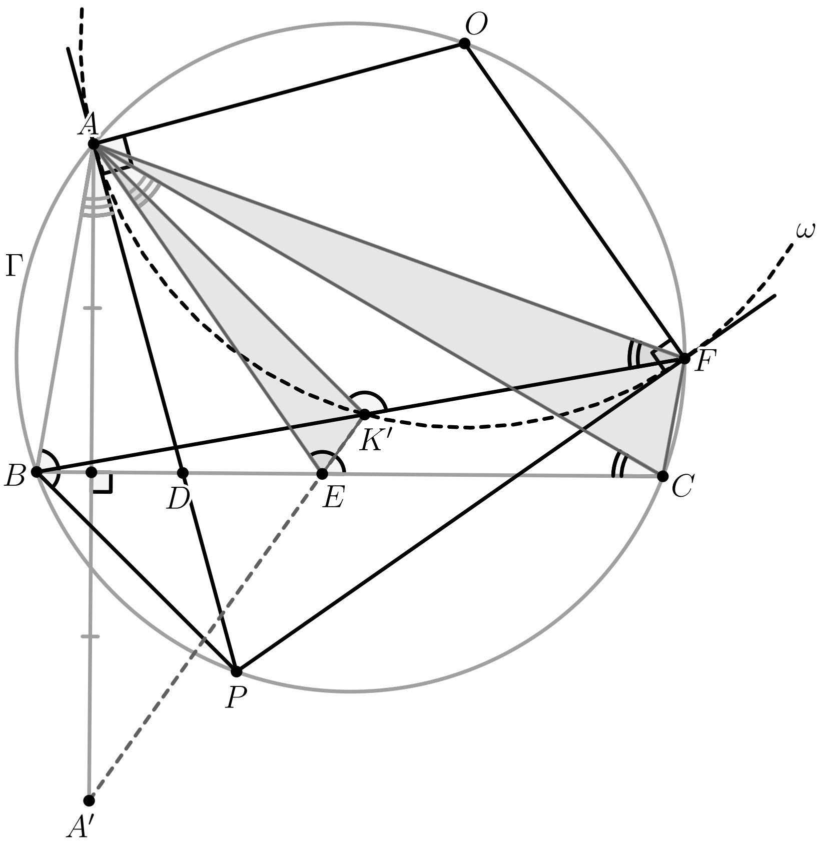
و

$$\angle AK'F = ۱۸۰^\circ - \angle PFA = \angle ABP = \angle AEC. \tag{۲}$$

تساوی‌های (۱) و (۲) با هم نتیجه می‌دهند مثلث‌های $AK'F$ و AEC متشابه‌اند. بنابراین مثلث‌های $AK'E$ و AFC نیز متشابه‌اند. در نهایت می‌توان نوشت

$$\angle AEK' = \angle ACF = \angle APF = ۱۸۰^\circ - ۲\angle AFP = ۱۸۰^\circ - ۲\angle AEB,$$

که حکم معادل را نتیجه می‌دهد.



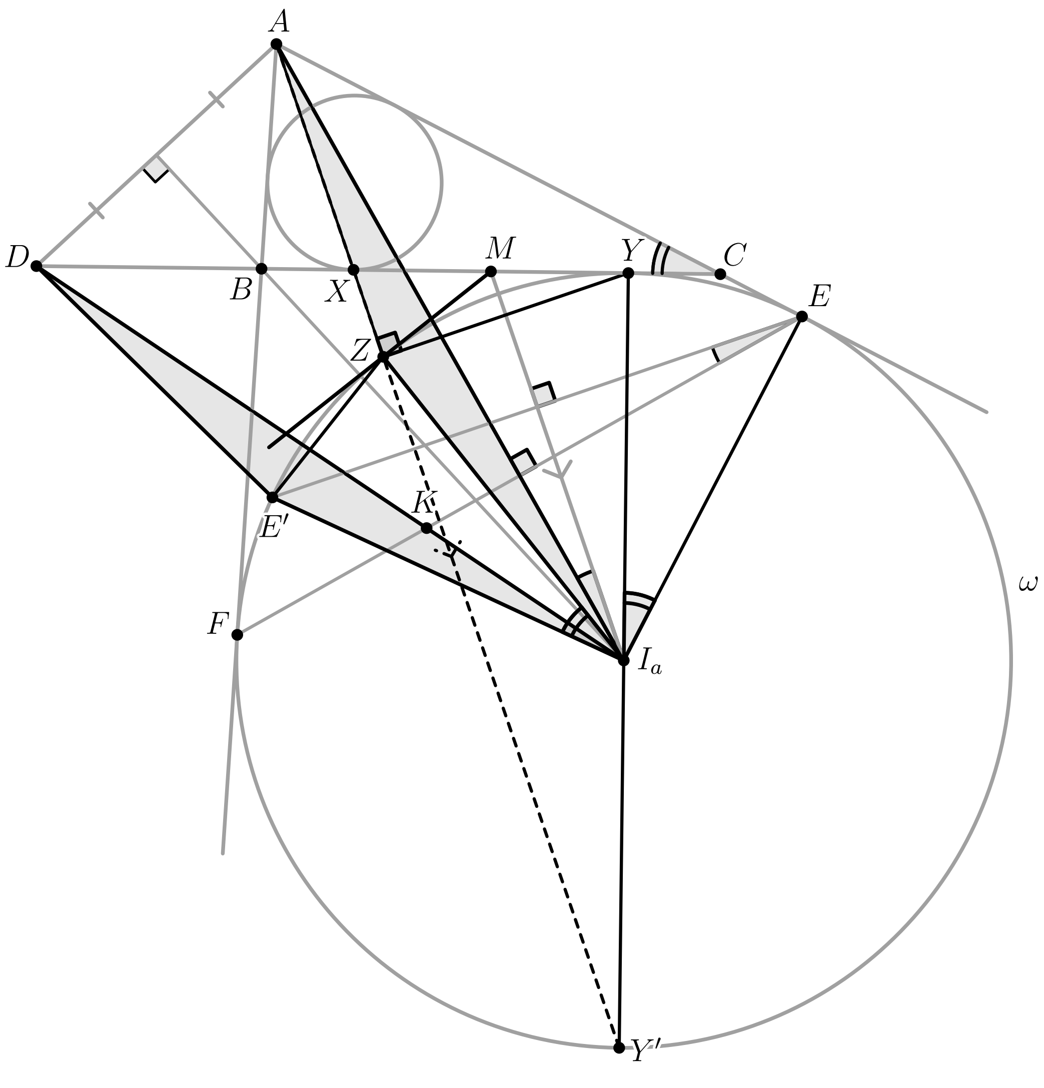
■

۳. قرینهٔ E نسبت به MI_a را E' و دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس A را ω می‌نامیم. واضح است که E' روی ω قرار دارد و حکم سوال معادل با محاطی بودن چهارضلعی $DE'KE$ است. برای این منظور نشان می‌دهیم $\angle E'DK = \angle E'EK$. دقت کنید که $EF \perp AI_a$ و $EE' \perp MI_a$ در نتیجه $\angle E'EK = \angle MI_aA$. حال فرض کنید X و Y به ترتیب نقطهٔ تماس دایره محاطی داخلی و ω با ضلع BC باشند. اگر قرینهٔ Y نسبت به I_a را Y' بنامیم آنگاه به سادگی می‌توان مشاهده

کرد که تجانس به مرکز A که دایرهٔ محاطی داخلی را به ω می‌برد X را به Y' می‌برد پس XY' از A می‌گذرد.
محل برخورد دوم XY' با ω را Z می‌نامیم. واضح است که $\angle YZX = ۹۰^\circ$ و از آنجا که M وسط XY است داریم $MZ = MY$ پس MZ نیز بر ω مماس است. در واقع Z قرینهٔ Y نسبت به MI_a است. این نتیجه می‌دهد $MI_a \perp YZ$، پس $AZ \parallel MI_a$. حال نشان می‌دهیم دو مثلث I_aZE' و I_aAD متشابه هستند. از آنجا که هر دو مثلث متساوی‌الساقین هستند کافی است نشان دهیم $\angle ZI_aE' = \angle AI_aD$. می‌توان نوشت

$$\angle ZI_aE' = \angle YI_aE = \angle C, \quad \angle AI_aD = ۲\angle AI_aB = \angle C$$

پس برابری برقرار است.



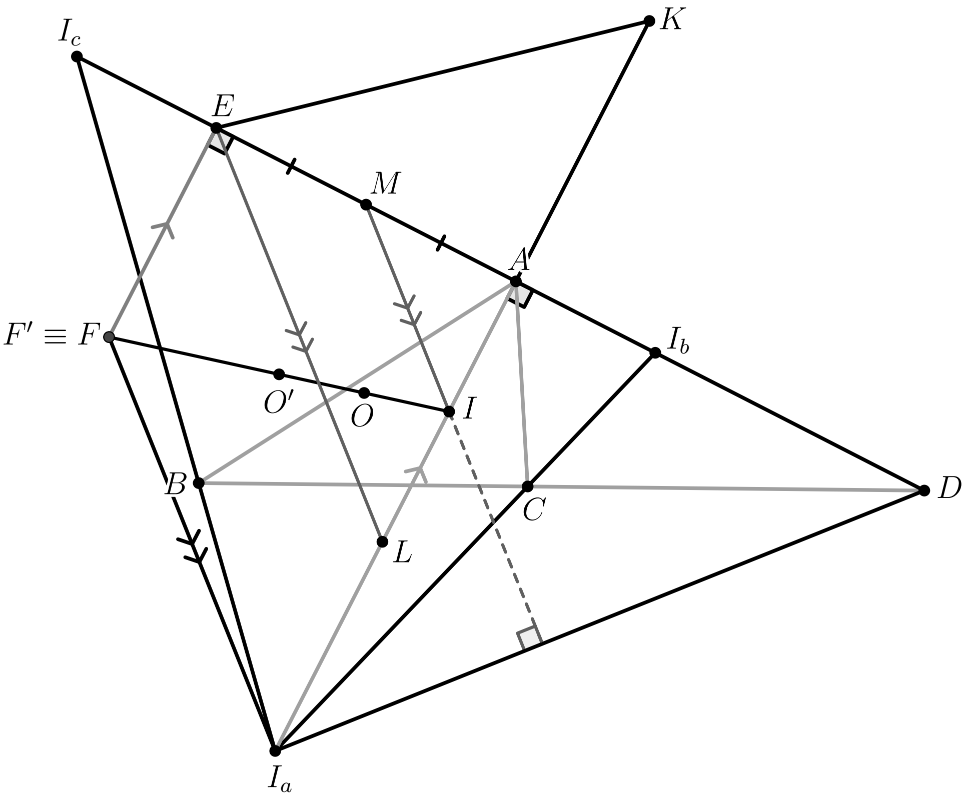
از تشابه مثلث‌های I_aZE' و I_aAD می‌توان تشابه I_aZA و $I_aE'D$ را نتیجه گرفت که از آن نیز به دست می‌آید

$$\angle E'DI_a = \angle ZAI_a = \angle MI_aA$$

و این همان حکم معادل سوال است. ■

۴. مرکز دایره محاطی خارجی نظیر رئوس B و C را به ترتیب I_b و I_c می‌نامیم. اگر مسئله را از مثلث $I_aI_bI_c$ نگاه کنیم I مرکز ارتفاعی و O مرکز دایرهٔ ۹ نقطه این مثلث است. فرض کنید O' مرکز دایره محیطی این مثلث و F' قرینهٔ I نسبت به

O' باشد. اگر پای عمود از O' و F' بر I_bI_c را به ترتیب M و E بنامیم آنگاه واضح است که M همزمان وسط پاره‌خط‌های I_bI_c و AE است.



نشان می‌دهیم F' همان F است. برای این منظور ابتدا محاطی بودن چهارضلعی $F'EKI_a$ و سپس محاطی بودن چهارضلعی $F'EDI_a$ را نشان می‌دهیم. فرض کنید L قرینهٔ A نسبت به I باشد. واضح است که A وسط پاره‌خط KL است. دقت کنید که $EF' = ۲O'M - IA$ زیرا در ذوزنقهٔ $AEF'I$، M و O' وسط قاعده‌ها هستند. از آنجا که O' مرکز دایره محیطی و I مرکز ارتفاعی مثلث $I_aI_bI_c$ است، طبق قضیه‌ای معروف می‌توان نوشت $۲O'M = I_aI$. در نتیجه $EF' = I_aI - IA = I_aL$ و از توازی EF' و I_aL به دست می‌آید که چهارضلعی $EF'I_aL$ متوازی‌الاضلاع است. پس $F'I_a = EL = EK$ که یعنی چهارضلعی $KEF'I_a$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین و در نتیجه محاطی است.

از قضیهٔ تالس واضح است که $EL \parallel MI$ و همچنین از مسئله‌ای معروف می‌دانیم $MI \perp I_aD$ پس $EL \perp I_aD$. این نیز نتیجه می‌دهد $\angle F'I_aD = ۹۰^\circ$ که یعنی چهارضلعی $EF'I_aD$ محاطی است و پنج نقطهٔ E، F'، I_a، D و K همه روی یک دایره به قطر DF' قرار دارند. در نتیجه F' همان F است و از آنجا که O وسط IO' است به دست می‌آید $OF = ۳OI$. ■

نظریه اعداد

۱. ابتدا لم زیر را نشان می‌دهیم.

لم. فرض کنید $L(n)$ کوچک‌ترین عامل اول n باشد. آنگاه $L(d(n)) \leq L(\sigma(n))$، برای هر عدد طبیعی n.

برهان. فرض کنید تجزیه‌ی n به عوامل اول به شکل $n = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \dots p_t^{\alpha_t}$ باشد. می‌دانیم

$$d(n) = (۱+\alpha_۱)(۱+\alpha_۲)\dots(۱+\alpha_t) \quad \text{و} \quad \sigma(n) = \frac{p_۱^{\alpha_۱+۱}-۱}{p_۱-۱} \cdot \frac{p_۲^{\alpha_۲+۱}-۱}{p_۲-۱} \dots \frac{p_t^{\alpha_t+۱}-۱}{p_t-۱}.$$

فرض کنید $1 \le i \le t$ عددی طبیعی و q کوچک‌ترین عامل اول $\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$ باشد. اگر d_i مرتبه‌ی p_i به پیمانه‌ی q باشد آنگاه واضح است که $d_i \mid \alpha_i + 1$. بنابراین اگر $d_i \neq 1$ آنگاه کوچک‌ترین عامل اول d_i، $\alpha_i + 1$ را نیز می‌شمارد که نتیجه می‌دهد $L(\alpha_i + 1) \le d_i$. از آنجا که d_i، $q - 1$ را نیز می‌شمارد داریم

$$L(\alpha_i + 1) \le d_i < q = L\left(\frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}\right).$$

حال اگر $d_i = 1$ آنگاه داریم $q \mid p_i - 1$ و از آنجا که $\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$ نیز بر q بخش‌پذیر است، نتیجه می‌شود $q \mid \alpha_i + 1$. بنابراین

$$L(\alpha_i + 1) \le q = L\left(\frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}\right).$$

پس در هر دو حالت نشان دادیم

$$L(\alpha_i + 1) \le L\left(\frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}\right).$$

با استفاده از این نامساوی درستی حکم واضح است. $\square$

به مسئله‌ی اصلی برمی‌گردیم. اگر $n > 1$، فرض کنید r کوچک‌ترین عامل اول $d(n)$ باشد. در این صورت طبق لم داریم $\gcd(r - 1, \sigma(n)) = 1$. از طرف دیگر می‌توان نوشت

$$2^{\sigma(n)} \overset{r}{\equiv} 1 \implies 2 \overset{r}{\equiv} 2^{\gcd(r-1,\sigma(n))} \overset{r}{\equiv} 1,$$

که تناقض است. بنابراین $n = 1$ تنها جواب مسئله است. $\blacksquare$

۲. نشان می‌دهیم $P(x)$ تنها یک ریشه‌ی صحیح دارد. فرض کنید $P(x)$ حداقل دو ریشه‌ی صحیح متمایز داشته باشد. آنگاه لم زیر را داریم.

لم. چندجمله‌ای $P^n(x)$ حداقل $n + 1$ ریشه‌ی صحیح متمایز دارد.

برهان. اثبات را با استقرا روی n انجام می‌دهیم. برای پایه‌ی استقرا که حکم برقرار است و فرض کنید برای همه‌ی اعداد کوچک‌تر از n نیز حکم برقرار است. قرار دهید $P^{n-1}(x) = (x - r_1)^{\alpha_1}(x - r_2)^{\alpha_2} \dots (x - r_t)^{\alpha_t}$ که $t \ge n$ (طبق فرض سوال همه‌ی ریشه‌های $P^{n-1}(x)$ صحیح هستند). سپس

$$P^n(x) = P^{n-1}(P(x)) = (P(x) - r_1)^{\alpha_1} \dots (P(x) - r_t)^{\alpha_t}.$$

دقت کنید که $P(x) - r_i$ها، به ازای $i = 1, 2, \dots, t$، ریشه‌ی مشترک ندارند. به علاوه، حداقل یکی از آن‌ها حداقل دو ریشه‌ی متمایز دارد. زیرا در غیر این صورت اگر درجه‌ی $P(x)$، d باشد نتیجه می‌شود $P(x) - r_1 = a_d(x - s_1)^d$ و $P(x) - r_2 = a_d(x - s_2)^d$. از این نیز به دست می‌آید $P(x) = r_1 + a_d(x - s_1)^d = r_2 + a_d(x - s_2)^d$. طبق قانون ویت مجموع ریشه‌های $P(x)$ برابر است با قرینه‌ی ضریب x و با مقایسه‌ی ضریب x در دو طرف تساوی نتیجه می‌شود $s_1 = s_2$، که امکان ندارد. پس $P^n(x)$ حداقل $t + 1 \ge n + 1$ ریشه‌ی متمایز دارد و لم ثابت می‌شود. $\square$

طبق لم می‌توان قرار داد $P^n(x) = (x - s_1)^{\beta_1}(x - s_2)^{\beta_2} \dots (x - s_k)^{\beta_k}$ که $k \ge n + 1$. عدد طبیعی m را در نظر بگیرید به طوری که $P^n(m) \neq 0$. می‌توان نوشت

$$|P^n(m)| = \left|(m - s_1)^{\beta_1}(m - s_2)^{\beta_2} \dots (m - s_k)^{\beta_k}\right| \ge \left(\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor !\right)^2 \ge \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor !\right)^2.$$

زیرا به ازای هر $1 \leq j \leq \frac{k-1}{2}$، m حداکثر از دوتا از s_i ها $(i = 1, 2, \ldots, k)$ فاصله‌ی j دارد.
فرض کنید $t_1, t_2, \ldots, t_s$ ریشه‌های $P(x)$ باشند. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض کنید $t_1 \neq 0$. بنابراین همه‌ی ریشه‌های $P^n(x) - t_1$ صحیح هستند (ریشه‌های این چندجمله‌ای ریشه‌های $P^{n+1}(x)$ نیز هستند). فرض کنید R یکی از آن‌ها باشد. می‌توان نوشت

$$\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor !\right)^2 \leq |P^n(R)| = |t_1| \neq 0.$$

با بزرگ شدن n رابطه‌ی بالا نمی‌تواند برقرار باشد پس فرض اولیه غلط بوده و $P(x)$ تنها یک ریشه دارد.
با قرار دادن $P(x) = a_d(x-r)^d$ می‌توان به سادگی مشاهده کرد که تنها چندجمله‌ای‌های زیر خواص مسئله را دارا هستند:

$$a_d x^d,\ x - r,\ -x - r.$$

■

۳. به وضوح $f(n) = n$ یک جواب مسئله است. فرض کنید جواب دیگری نیز وجود داشته باشد. با توجه به اینکه $f(n)$ اکیداً صعودی است عدد طبیعی N وجود دارد که $f(N) > N$. حال با استفاده از شرط اول مسئله و استقرا روی n به سادگی نتیجه می‌شود

$$n < f(n) < 2020n + c \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N$$

که c عددی ثابت است. قرار دهید $n = 10^t - 1$ که $t > n$. از شرط دوم مسئله نتیجه می‌شود $S(f(10^t - 1)) = f(9t) > 9t.$ از طرف دیگر $f(10^t - 1) \geq 10^t$، پس باید داشته باشیم

$$f\left(10^t - 1\right) \geq \frac{19}{10} \cdot 10^t.$$

زیرا مجموع ارقام هر عدد طبیعی بین 10^t و $\frac{19}{10} \cdot 10^t$ حداکثر $9t$ است در حالی که مجموع ارقام $f(10^t - 1)$ بیش‌تر از $9t$ است. حال قرار دهید $n = 10^t - 1$ به طوری که $t = \frac{10^s - 1}{9}$ و $s > N$. مشابه قبل می‌توان نوشت

$$S\left(f\left(10^t - 1\right)\right) = f(9t) = f(10^s - 1) > \frac{19}{10} \cdot 10^s.$$

از آنجا که $S(n) \leq 9(1 + \log n)$ نتیجه می‌شود

$$\frac{19}{10} \cdot 10^s < 9\left(1 + \log f\left(10^t - 1\right)\right) < 9\left(1 + \log\left(2020 \times 10^t\right)\right) < 9(1 + 4 + t) = 45 + 10^s - 1.$$

اما این رابطه برای sهای بزرگ به وضوح برقرار نیست. تناقض به دست آمده نشان می‌دهد تنها جواب مسئله $f(n) = n$ است. ■

۴. ابتدا دو لم زیر را نشان می‌دهیم.

لم ۱. فرض کنید p عددی اول و $b > 1$ عددی صحیح باشد به طوری که $\gcd(p, b) = 1$. آنگاه برای هر عدد طبیعی n،

$$\nu_p(b^n - 1) \leq \nu_p(n) + c,$$

که c عددی طبیعی و ثابت است.

برهان. فرض کنید d مرتبه‌ی b به پیمانه‌ی p باشد. اگر n بر d بخش‌پذیر نباشد آنگاه $\nu_p(b^n-۱)=۰$ و نامساوی با قرار دادن $c=۱$ واضح است. از طرف دیگر اگر n بر d بخش‌پذیر باشد، آنگاه برای هر عدد اول فرد p طبق لم دو خط داریم

$$\nu_p(b^n-۱)=\nu_p(b^d-۱)+\nu_p(n)-\nu_p(d)<\nu_p(b^d-۱)+\nu_p(n).$$

پس با قرار دادن $c=\nu_p(b^d-۱)$ نامساوی برقرار می‌شود.
در نهایت اگر $p=۲$ باز هم از لم دو خط به دست می‌آید

$$\nu_۲(b^n-۱)=\nu_۲(b^d-۱)+\nu_۲(b^d+۱)+\nu_p(n)-\nu_p(d)<\nu_۲(b^d-۱)+\nu_۲(b^d+۱)+\nu_p(n).$$

پس با قرار دادن $c=\nu_۲(b^d-۱)+\nu_۲(b^d+۱)$ نامساوی برقرار می‌شود. در نتیجه با کنار هم قرار دادن همه‌ی حالات، کافی است قرار دهیم

$$c=\max\{۱,\nu_p(b^d-۱),\nu_۲(b^d-۱)+\nu_۲(b^d+۱)\},$$

و نامساوی ثابت می‌شود. $\square$

لم ۲. فرض کنید p عددی اول و $a>۱$ و $m>۱$ اعدادی صحیح باشند. هر عامل اول از $N_m=\frac{a^{p^m}-۱}{a^{p^{m-۱}}-۱}$ یا p است یا به فرم $p^mk+۱$. همچنین حالت اول تنها زمانی اتفاق می‌افتد که $a\equiv ۱\pmod p$.

برهان. قرار دهید $c=a^{p^{m-۱}}$ بنابراین $N_m=\frac{c^p-۱}{c-۱}$. سپس اگر q عامل اولی از N_m باشد آنگاه مرتبه‌ی c به پیمانه‌ی q برابر با p یا ۱ است.
اگر مرتبه‌ی c به پیمانه‌ی q برابر با p باشد، به دست می‌آید $c^p=a^{p^m}\equiv ۱\pmod q$. حال واضح است که مرتبه‌ی a به پیمانه‌ی q، p^m را می‌شمارد و توانی از p است. اگر برابر با p^m نباشد نتیجه می‌شود $c\equiv ۱\pmod q$ که در تناقض با فرض ما است. بنابراین باید برابر با p^m باشد که نتیجه می‌دهد $p^m\mid q-۱$. پس در این حالت q به فرم $p^mk+۱$ است.
اگر مرتبه‌ی c به پیمانه‌ی q برابر با ۱ باشد نتیجه می‌شود $c\equiv ۱\pmod q$. پس

$$۰\equiv N_m\equiv ۱+c+\cdots+c^{p-۱}\equiv p\pmod q\implies p=q.$$

به علاوه، این تنها زمانی رخ می‌دهد که

$$c=a^{p^{m-۱}}\equiv ۱\pmod q\implies ۱\equiv a^{p^{m-۱}}\equiv a\pmod p.$$

پس لم ثابت شد. $\square$

به مسئله‌ی اصلی برمی‌گردیم. عدد اول $p>b(a-۱)$ را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم حکم مسئله برای $n=p^r$، که r عددی طبیعی و به اندازه‌ی کافی بزرگ است، برقرار می‌شود. می‌توان نوشت

$$a^{p^r}-۱=(a^p-۱)\left(\frac{a^{p^۲}-۱}{a^p-۱}\right)\dots\left(\frac{a^{p^r}-۱}{a^{p^{r-۱}}-۱}\right)=(a^p-۱)N_۲\dots N_r.$$

با توجه به نحوه‌ی انتخاب p حالت اول در لم ۲ اتفاق نمی‌افتد و اعداد اول دوبه‌دو متمایز $q_۲,q_۳,\dots,q_r$ وجود دارند به طوری که برای هر $i=۲,۳,\dots,r$ داریم $N_i\mid q_i$. بنابراین

$$q_۲q_۳\dots q_r\mid a^{p^r}-۱\implies (q_۲-۱)(q_۳-۱)\dots(q_r-۱)\mid\varphi\left(a^{p^r}-۱\right).$$

از آنجا که به ازای هر $i = ۲, ۳, \dots, r$، $q_i - ۱$ بر p^i بخش‌پذیر است می‌توان نوشت

$$\nu_p\left(\varphi\left(a^{p^r} - ۱\right)\right) \geq ۲ + ۳ + \cdots + r \geq \frac{۱}{۲}r^۲.$$

با قرار دادن $s = k - t$، رابطه‌ی بالا نتیجه می‌دهد $b^s - ۱$ باید بر $p^{\frac{۱}{۲}r^۲}$ بخش‌پذیر باشد. از لم ۱ می‌دانیم $\nu_p(b^s - ۱) < s + C$، بنابراین

$$s > p^{\frac{۱}{۲}r^۲ - C}.$$

از طرف دیگر

$$a^{p^r} - ۱ > \varphi(a^{p^r} - ۱) = b^k - b^t = b^t(b^s - ۱) > b^s - ۱ > b^{p^{\frac{۱}{۲}r^۲ - C}} - ۱ \implies a^{p^r} > b^{p^{\frac{۱}{۲}r^۲ - C}}.$$

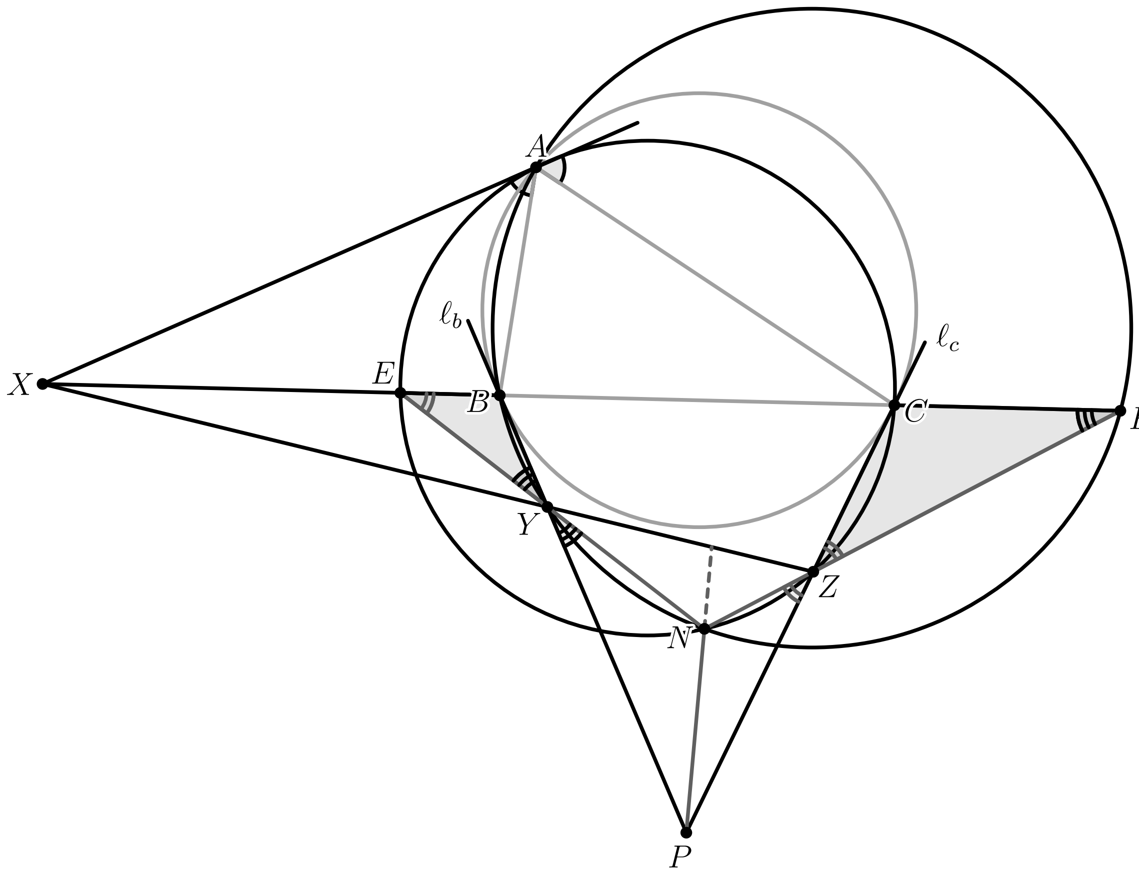
واضح است که رابطه‌ی آخر به ازای r به اندازه‌ی کافی بزرگ نمی‌تواند برقرار باشد. تناقض به دست آمده نشان می‌دهد چنین k و tای وجود ندارند و اثبات به پایان می‌رسد. ■

امتحان انتخابی تیم

۱. فرض کنید NY و NZ خط BC را به ترتیب در E و F قطع کنند. از آنجا که چهارضلعی‌های $ABYN$ و $ACZN$ محاطی هستند می‌توان نوشت

$$\angle NZY + \angle NYZ = \angle NAB + \angle NAC = \angle A \implies \angle ZNY = ۱۸۰^\circ - \angle A,$$

بنابراین پنج ضلعی $ACZNE$ محاطی است. به طور مشابه می‌توان نشان داد $ABYNF$ نیز محاطی است. حال به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که $\triangle BEY \sim \triangle CFZ$.



فرض کنید P نقطه‌ی تقاطع ℓ_b و ℓ_c باشد. با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها می‌توان نوشت

$$\frac{\sin \angle PNZ}{\sin \angle PNY} = \frac{PZ \cdot \sin \angle NZP}{PY \cdot \sin \angle NYP}.$$

برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $\sin\angle PNZ = \sin\angle PNY$ زیرا اگر $\angle PNY + \angle PNZ = ۱۸۰^\circ$ نتیجه می‌شود N روی YZ قرار دارد که امکان ندارد. بنابراین حکم معادل است با

$$\frac{PY}{PZ} = \frac{\sin\angle NZP}{\sin\angle NYP}.$$

دقت کنید که $\angle NZP = \angle CZF$ و $\angle NYP = \angle BYE = \angle CFZ$. پس داریم

$$\frac{\sin\angle NZP}{\sin\angle NYP} = \frac{\sin\angle CZF}{\sin\angle CFZ} = \frac{CF}{CZ}.$$

توجه کنید که دو مثلث ACF و ABY با هم متشابه‌اند زیرا $\angle ACF = ۱۸۰^\circ - \angle C = \angle ABY$ و $\angle AFC = \angle AFB = \angle AYB$. از نسبت تشابه این دو مثلث به دست می‌آید

$$CF = \frac{AC \cdot BY}{AB} = \frac{XC \cdot BY}{XB},$$

که در تساوی دوم از قضیه‌ی نیمساز استفاده شده است. بنابراین باید نشان دهیم

$$\frac{PY}{PZ} = \frac{XC}{XB} \cdot \frac{BY}{CZ} \iff ۱ = \frac{XC}{XB} \cdot \frac{BY}{PY} \cdot \frac{PZ}{CZ}.$$

رابطه‌ی آخر همان قضیه‌ی منلائوس برای مثلث BCP و خط XYZ است پس حکم ثابت شد. ■

۲. حکم مسئله را با استفاده از استقرا روی تعداد رئوس گراف نشان می‌دهیم. پایه‌ی استقرا به وضوح برقرار است. فرض کنید v رأسی از درجه‌ی d و $C_۱, C_۲, \ldots, C_k$ مؤلفه‌های همبندی $G - \{v\}$ باشند. همچنین فرض کنید v به گونه‌ای انتخاب شده است که $|C_۱|$ بین همه‌ی مؤلفه‌های همبندی که از حذف یک رأس با درجه‌ی d به وجود می‌آیند بیشینه باشد.

دقت کنید که اگر $G = C_۱ \cup \{v\}$، با حذف v گراف همبند باقی می‌ماند. پس فرض می‌کنیم $k \geq ۲$. فرض کنید G' زیرگراف القایی با رئوس $C_۱ \cup \{v\}$ و x'_i تعداد رئوس با درجه‌ی i در G' باشد.

دقت کنید که هیچ رأسی با درجه‌ی d در زیرگراف $D = C_۲ \cup C_۳ \cup \cdots \cup C_k$ وجود ندارد. زیرا اگر $w \in D$ درجه‌ی d داشته باشد آنگاه یکی از مؤلفه‌های همبندی $G - \{w\}$ شامل $C_۱ \cup \{v\}$ می‌شود که در تناقض با فرض بیشینه بودن $|C_۱|$ است. بنابراین $x'_d = x_d - ۱$ (توجه کنید که v حتماً در D همسایه دارد). برای هر $u \in G$ درجه‌ی u را با $d(u)$ و برای هر $u' \in G'$ درجه‌ی u' را با $d'(u')$ نشان می‌دهیم. به وضوح

$$\sum_{i=۱}^{d-۱}(d-i)x_i = \sum_{u\in G}(d - d(u)) \quad \text{و} \quad \sum_{i=۱}^{d-۱}(d-i)x'_i = \sum_{u\in G'}(d - d'(u)).$$

همچنین برای هر $u \in C_۱$ داریم $d(u) = d'(u)$. فرض کنید $d'(v) = d - s$ که $s \geq ۱$ و $l_۱, l_۲, \ldots, l_t$ درجه‌ی رئوس D باشد ($t := |D|$). حال می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{d-۱}(d-i)x'_i &= \sum_{w\in G'}(d - d'(w)) \\ &= \sum_{w\in G'}(d - d(w)) + s \\ &= \sum_{w\in G}(d - d(w)) + s - \sum_{j=۱}^{t}(d - l_j)\end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد $0 \leq s - t \leq \Delta := s - \sum_{j=1}^{t}(d-l_j)$ زیرا $\ell_j \leq d-1$ و v حداکثر به همه‌ی اعضای D متصل است یعنی $s \leq t$. فعلا فرض می‌کنیم حالت تساوی اتفاق نیفتد و داشته باشیم $\Delta \leq -1$. در این صورت می‌توان نوشت

$$\sum_{i=1}^{d-1}(d-i)x'_i = \sum_{w \in G}(d-d(w)) + \Delta \leq \sum_{i=1}^{d-1}(d-i)x_i - 1 \leq x_d - 1 = x'_d,$$

که در آخرین نامساوی از شرط مسئله روی گراف G استفاده کردیم. بنابراین همان شرط برای گراف G' نیز برقرار است. پس با استفاده از فرض استقرا می‌توان نتیجه گرفت رأسی مانند w با درجه‌ی d در G' وجود دارد که $G' - \{w\}$ همبند است (دقت کنید که $k \geq 2$ و $|G'| < |G|$). حال به سادگی می‌توان مشاهده کرد که $G - \{w\}$ نیز همبند است. پس در این حالت گام استقرا ثابت می‌شود.

تنها حالتی باقی می‌ماند که $\Delta = 0$. بنابراین برای نامساوی‌های استفاده شده باید حالت تساوی رخ دهد. این نتیجه می‌دهد $s = t$ و $\ell_j = d-1$ برای هر $1 \leq j \leq t$. یعنی v به همه‌ی رئوس D متصل است و از آنجا که درجه‌ی v، d است، تنها حالت ممکن $s = t = d-1$ است. مشابه قبل می‌توان نوشت

$$\sum_{i=1}^{d-1}(d-i)x'_i = \sum_{w \in G}(d-d(w)) + \Delta = \sum_{i=1}^{d-1}(d-i)x_i + 0 \leq x_d = x'_d + 1.$$

دقت کنید که درجه‌ی v در G' یک است پس طرف چپ نامساوی حداقل $d-1$ است که نتیجه می‌دهد $x'_d \geq d-2 \geq 2$. بنابراین G' حداقل دو رأس با درجه‌ی d دارد. فرض کنید G'' گرافی باشد که از حذف v در G' به وجود آمده است. از آنجا که G' حداقل دو رأس با درجه‌ی d دارد، G'' حداقل یک رأس با درجه‌ی d دارد. همچنین G'' همبند است زیرا درجه‌ی v یک بود. حال درجه‌ی رئوس G'' را با $d''(u)$ و تعداد رئوس با درجه‌ی i را با x''_i نشان می‌دهیم که $1 \leq i \leq d$. اگر همسایه‌ی v در G' رأسی با درجه‌ی d باشد آنگاه داریم $x''_d = x'_d - 1$، $x''_{d-1} = x'_{d-1} + 1$، $x''_1 = x'_1 - 1$ و برای هر $2 \leq i \leq d-2$، $x''_i = x'_i$. بنابراین می‌توان نوشت

$$\sum_{i=1}^{d-1}(d-i)x''_i = \sum_{i=1}^{d-1}(d-i)x'_i - d + 2 \leq x'_d - d + 3 = x''_d - d + 4 \leq x''_d.$$

پس شرط سوال برای G'' برقرار است و رأسی مانند w با درجه‌ی d دارد که $G'' - \{w\}$ همبند است. از آنجا که w همسایه‌ی v نیست $G' - \{w\}$ نیز همبند است و مانند قبل حکم سوال نتیجه می‌شود.

در نهایت اگر همسایه‌ی v رأسی با درجه‌ی کم‌تر از d باشد مانند قبل می‌توان نوشت

$$\sum_{i=1}^{d-1}(d-i)x''_i = \sum_{i=1}^{d-1}(d-i)x'_i - d + 2 \leq x'_d - d + 3 = x''_d - d + 3 \leq x''_d.$$

بقیه‌ی اثبات نیز مانند حالت قبل است. پس در همه‌ی حالات گام استقرا ثابت شد. ■

۳. فرض کنید گزاره‌ی الف غلط باشد و درستی گزاره‌ی دوم را نشان می‌دهیم. با قرار دادن $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ نتیجه می‌شود $f(n) = f(p_1)f(p_2)\dots f(p_t)$. بنابراین مقدار f تنها به مقدار آن برای اعداد اول بستگی دارد. پس کافی است برای اعداد اول به اندازه‌ی کافی بزرگ مانند p نشان دهیم $f(p) = 1$. مجموعه‌ی A را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = \{an + b : f(an+b) = 1,\ n \in \mathbb{N}\}$$

از آنجا که فرض کردیم گزاره‌ی الف غلط است مجموعه‌ی A ناتهی است. نشان خواهیم داد که هر عدد اولِ به اندازه‌ی کافی بزرگ، مضربی در این مجموعه دارد. فرض کنید $ak+b\in A$ و اعداد طبیعی $n_۰$ و $m_۰$ را به گونه‌ای انتخاب کنید که $(ak+b)^{\varphi(a)}=an_۰+۱$ و $(ck+d)^{\varphi(c)}=cm_۰+۱$. از تساوی $f(ak+b)=g(ck+d)=۱$ نتیجه می‌شود $f(an_۰+۱)=g(cm_۰+۱)=۱$. حال اگر $an+b\in A$ می‌توان نوشت

$$۱=f((an+b)(an_۰+۱))=f(a(ann_۰+bn_۰+n)+b)=g(c(ann_۰+bn_۰+n)+d).$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
۱&=g(c(ann_۰+n+bn_۰)+d)g(cm_۰+۱)\\
&=g(c(cm_۰(ann_۰+n+bn_۰)+(ann_۰+n+bn_۰)+dm_۰)+d)\\
&=f(a((cm_۰+۱)(ann_۰+n+bn_۰)+dm_۰)+b)\\
&=f((cm_۰+۱)(an_۰+۱)(an+b)+(ad-bc)m_۰).
\end{aligned}$$

این تساوی نتیجه می‌دهد اگر $x\in A$ اعداد ثابت $s_۰$ و t وجود دارند که $s_۰x+t$ هم عضو A است (طبق فرض سوال $t\neq ۰$). اگر همین فرایند را با یک $n_۰$ دیگر انجام دهیم نتیجه می‌شود عدد $s_۱\neq s_۰$ وجود دارد که برای هر $x\in A$، $s_۱x+t$ نیز عضو A است (دقت کنید که با تغییر $n_۰$ مقدار t تغییر نمی‌کند).

حال عدد اول $p>\max\{t,|s_۱-s_۰|\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $b_۱,b_۲,\dots,b_l$ همه‌ی باقی‌مانده‌های اعضای A به پیمانه‌ی p باشند. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
&\{s_۰b_۱+t,s_۰b_۲+t,\dots,s_۰b_l+t\}\overset{p}{\equiv}\{s_۱b_۱+t,s_۱b_۲+t,\dots,s_۱b_l+t\}\overset{p}{\equiv}\{b_۱,b_۲,\dots,b_l\}\\
\Longrightarrow\ & s_۰\left(\sum_{i=۱}^{l}b_i\right)+tl\overset{p}{\equiv}s_۱\left(\sum_{i=۱}^{l}b_i\right)+tl\overset{p}{\equiv}\sum_{i=۱}^{l}b_i.
\end{aligned}$$

از همنهشتی اول و دوم نتیجه می‌شود $\sum_{i=۱}^{l}b_i$ بر p بخش‌پذیر است. سپس با استفاده از این نتیجه و همنهشتی دوم و سوم نتیجه می‌شود l بر p بخش‌پذیر است پس $l=p$. بنابراین عددی مانند $ar+b$ در A وجود دارد که بر p بخش‌پذیر است و از آنجا که $f(ar+b)=۱$ نتیجه می‌شود $f(p)=۱$. با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد برای p به اندازه‌ی کافی بزرگ $g(p)=۱$. پس عدد N وجود دارد که برای هر عدد اول $p\geq N$ داریم $f(p)=g(p)=۱$. در نهایت تنها کافی است D را برابر با حاصل ضرب همه‌ی اعداد اول کوچک‌تر از N قرار دهیم و حکم نتیجه می‌شود. ■

توضیح ۱. همانطور که در اثبات مشاهده کردیم شرط کلی‌تر $ad\neq bc$ برای اثبات حکم کافی است و می‌توان شرط نسبت به هم اول بودن a، b، c و d را با این شرط جایگزین کرد.

توضیح ۲. می‌توان نشان داد عدد طبیعی D وجود دارد به طوری که برای هر دو عدد طبیعی n و m به طوری که $\gcd(nm,D)=۱$ داریم $f(n)=g(m)=۱$. در اینجا خلاصه‌ای از اثبات این حکم را ارائه می‌دهیم. در اینجا فرض می‌کنیم $\gcd(a,b)=\gcd(c,d)=۱$. برای یک n طبیعی، فرض کنید $f(an+b)=g(cn+d)=۱$ عامل اولی از $an+b$ مانند p را در نظر بگیرید. به وضوح $\gcd(p,a)=۱$ در نتیجه $P_t:=p^{t\varphi(a)}=aT_t+۱$ و $f(P_t)=۱$. بنابراین می‌توان نوشت

$$۱=g(cn+d)=f(an+b)=f(P_t)f(an+b)=f(a(nP_t+bT_t)+b)=g(c(nP_t+bT_t)+d),\quad (۱)$$

قرار دهید $S_f = \{m:\ f(m) = ۱\}$ و $S_g = \{m:\ g(m) = ۱\}$. طبق (۱) می‌توان نتیجه گرفت $c(nP_t + bT_t) + d \in S_g$. حال می‌توانیم لم جذاب زیر را بیان کنیم که با روش‌هایی که بالاتر دیدیم می‌توان آن را ثابت کرد.

لم. فرض کنید a، b، c و d اعدادی صحیح باشند به طوری که $a, c > ۰$ و $ad \neq bc$. مجموعه‌ی S را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

- اگر $x, y \in S$ و $\gcd(x, y) = ۱$ آنگاه $xy \in S$.
- اگر $x \in S$، $y \mid x$ و $\gcd\left(\frac{x}{y}, y\right) = ۱$ آنگاه $y \in S$.
- $an + b \in S$ اگر و تنها اگر $cn + d \in S$.

فرض کنید عدد طبیعی n وجود دارد که $cn + d \in S$. اگر r عددی اول باشد که ac را نمی‌شمارد و m عددی طبیعی باشد که $\{r^m, r^{m+1}, \dots\}$ زیرمجموعه‌ای از S است آنگاه عدد اول q وجود دارد که ac را نمی‌شمارد، $\{۱, q, q^۲, \dots\} \subseteq S$ و همه‌ی اعداد صحیح که نسبت به $D = (ad - bc)\gcd(a, c)$ اول هستند در S قرار دارند.

بنابر لم اگر تعریف کنیم $N_t := \{m \in \mathbb{N}:\ \gcd(m, c(ad - bc)T_t) = ۱\}$ آنگاه $N_t \subseteq S_g$. حال با استفاده از قضیه‌ی باقیمانده چینی $m_۰$ را به شکلی انتخاب می‌کنیم که $\gcd(am_۰ + ۱, (ad - bc)T_۱) = ۱$ و $\gcd(m_۰, T_۱) = ۲$. بنابراین $\{m \in \mathbb{N}:\ \gcd(m, c(ad - bc)m_۰) = ۱\} \subseteq S_g$ که نتیجه می‌دهد $\{m \in \mathbb{N}:\ \gcd(m, ۲c(ad - bc)) = ۱\} \subseteq S_g$. به همین ترتیب می‌توان نشان داد $\{m \in \mathbb{N}:\ \gcd(m, ۲a(ad - bc)) = ۱\} \subseteq S_f$ و بقیه‌ی اثبات واضح است.

۴. زیرمجموعه‌های ۷۰۰ عضوی مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \dots, ۱۴۰۰\}$ را با $A_۱, A_۲, \dots, A_N$ نشان می‌دهیم که $N = \binom{۱۴۰۰}{۷۰۰}$. ۱۴۰۰ چندجمله‌ای $P_۱, P_۲, \dots, P_{۱۴۰۰}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_i(x) = ۱ + ۱۰^{۱۰} \prod_{\substack{۱ \leq j \leq N \\ i \in A_j}} (x - j).$$

ادعا می‌کنیم اگر علیرضا این چندجمله‌ای‌ها را انتخاب کند حتماً برنده می‌شود. فرض کنید امین ۷۰۰ چندجمله‌ای $P_{i_۱}, P_{i_۲}, \dots, P_{i_{۷۰۰}}$ را انتخاب کند. همچنین مجموعه‌ی $\{i_۱, i_۲, \dots, i_{۷۰۰}\}$ را با A_l نشان می‌دهیم. دقت کنید که برای هر $i \in A_l$ داریم $P_i(l) = ۱$ پس $\Omega(P_i(l)) = ۱$. اگر $i \notin A_l$ آنگاه $P_i(l) = ۱ + ۱۰^{۱۰} K_i$ که نتیجه می‌دهد $|P_i(l)| > ۲$ و $\omega(P_i(l)) \geq ۲ > ۱$. در نتیجه

$$۱ = \max_{i \in A_l}(\Omega(P_i(l))) < \min_{i \notin A_l}(\omega(P_i(l))).$$

بنابراین علیرضا همواره استراتژی برد دارد. ■

۵. فرض کنید اعداد داده شده به ترتیب صعودی $a_۱ < a_۲ < \dots < a_{۲k+۱}$ باشند. ابتدا توجه کنید که اعداد $a_۱, a_۲, \dots, a_k, a_{k+۱}, a_{k+۲}, \dots, a_{۲k+۱}$ به ترتیب می‌توانند عضو وسط $۰, ۱, \dots, k - ۱, k, k - ۱, \dots, ۰$ سه‌تایی نایس باشند. پس در مجموع حداکثر

$$۰ + ۱ + \dots + k - ۱ + k + k - ۱ + \dots + ۰ = k^۲,$$

سه‌تایی نایس داریم و از آنجا که حالت تساوی حاصل شده است همه‌ی کران بالاها نیز باید تساوی باشند. پس a_{k+1} باید عضو وسط دقیقاً k سه‌تایی نایس باشد که نتیجه می‌دهد کل مجموعه نسبت به a_{k+1} متقارن است.
با استفاده از استقرا حکمی قوی‌تر را ثابت می‌کنیم. در واقع نشان می‌دهیم مجموعه‌ی داده شده را می‌توان به دو دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت برابر افراز کرد به طوری که هر دو دنباله نسبت به a_{k+1} متقارن باشند. برای $k = ۱$ دو زیرمجموعه‌ی $\{a_۱, a_۳\}$ و $\{a_۲\}$ در شرایط مورد نظر صدق می‌کنند.
حال برای اعداد $a_۱ < a_۲ < \cdots < a_{۲k+۱}$ با $k^۲$ سه‌تایی نایس می‌دانیم $a_۱, a_{k+۱}, a_{۲k+۱}$ یک سه‌تایی نایس را تشکیل می‌دهند. پس $a_۱$ در حداکثر k سه‌تایی نایس ظاهر می‌شود (عضو وسط آن‌ها نمی‌تواند از $a_{k+۱}$ بزرگ‌تر باشد) همچنین $a_{۲k+۱}$ نیز در حداکثر k سه‌تایی نایس ظاهر می‌شود (عضو وسط آن‌ها نمی‌تواند از $a_{k+۱}$ کوچک‌تر باشد)، با یک سه‌تایی نایس مشترک. بنابراین در مجموع حداکثر $k + k - ۱ = ۲k - ۱$ سه‌تایی نایس وجود دارد که شامل حداقل یکی از $a_۱$ و $a_{۲k+۱}$ است. در نتیجه حداقل $k^۲ - (۲k - ۱) = (k - ۱)^۲$ سه‌تایی نایس در مجموعه‌ی $\{a_۲, a_۳, \ldots, a_{۲k}\}$ وجود دارد. پس فرض استقرا برای این مجموعه برقرار است و می‌توان آن را به دو دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت d افراز کرد که هر دو نسبت به $a_{k+۱}$ متقارن‌اند.
حال سه‌تایی نایس $a_k, a_{k+۱}, a_{k+۲}$ را در نظر بگیرید. حداقل دوتا از آن‌ها دو جمله‌ی متوالی در یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت d هستند. اگر a_k و $a_{k+۲}$ باشند آنگاه $a_{k+۱} - a_k = \frac{d}{۲}$ زیرا $a_k, a_{k+۱}, a_{k+۲}$ خود یک دنباله‌ی حسابی تشکیل می‌دهند. در دو حالت دیگر نیز به سادگی نتیجه می‌شود $a_{k+۱} - a_k = d$. دقت کنید که اگر $a_{k+۱} - a_k = d$ آنگاه اعداد $a_۲, a_۳, \ldots, a_{۲k}$ یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت d را تشکیل می‌دهند.
از طرف دیگر $a_۱$ یک سه‌تایی نایس را با $a_{k+۱}$ و $a_{۲k+۱}$ و همچنین یک سه‌تایی نایس دیگر را با a_k و عددی دیگر مانند a_t تشکیل می‌دهد $(t > k)$. پس اختلاف $a_{۲k+۱} - a_t$ دو برابر اختلاف $a_{k+۱} - a_k$ است که نشان دادیم برابر با $\frac{d}{۲}$ یا d است. در حالت اول نتیجه می‌شود $a_{۲k+۱} - a_t = d$ که یعنی $a_{۲k+۱}$ عضو بعدی دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت d و شامل a_t، است. از آنجا که این دنباله نسبت به $a_{k+۱}$ متقارن است، $a_۱$ نیز عضو آن است و در این حالت اثبات گام استقرا کامل می‌شود. در حالت دوم همانطور که اشاره کردیم $a_۲, a_۳, \ldots, a_{۲k}$ یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت d را تشکیل می‌دهند و $a_{۲k+۱} - a_t = ۲d$. بنابراین تنها حالت ممکن $t = ۲k$ است. پس دو زیرمجموعه‌ی $\{a_۱, a_۲, a_۴, \ldots, a_{۲k-۲}, a_{۲k}, a_{۲k+۱}\}$ و $\{a_۳, a_۵, \ldots, a_{۲k-۱}\}$ تشکیل دنباله‌های حسابی با قدر نسبت $۲d$ می‌دهند و هر دو نسبت به $a_{k+۱}$ متقارن نیز هستند.
پس در هر دو حالت گام استقرا ثابت شد و حکم نتیجه می‌شود. ■

توضیح. اگر اندازه‌ی مجموعه عددی زوج مانند $۲k$ باشد، آنگاه تعداد سه‌تایی‌های نایس حداکثر $۲(۰ + ۱ + \cdots + (k - ۱)) = k(k - ۱)$ است و تساوی تنها برای یک دنباله‌ی حسابی رخ می‌دهد.

۶. ابتدا نشان می‌دهیم

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{\sin(\angle A - \angle ABD)}{\sin(\angle A - \angle ACD)} = \frac{\cos \angle B}{\cos \angle C}. \qquad (\heartsuit)$$

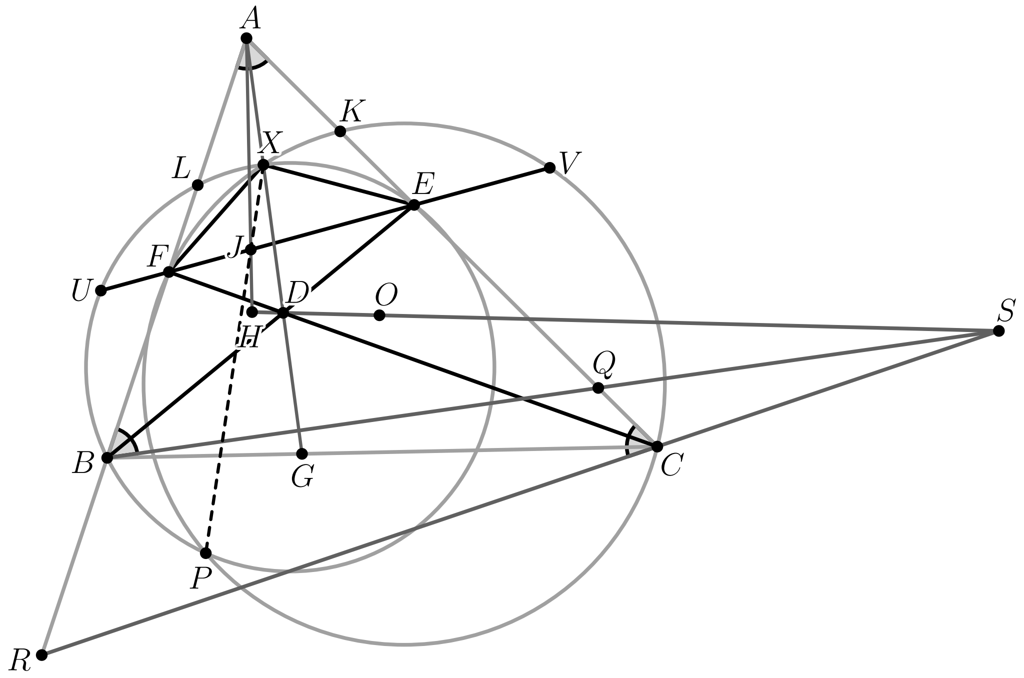
فرض کنید R و Q به ترتیب نقطه‌ی تقاطع عمودمنصف AC و AB با AB و AC باشند. می‌دانیم CR و BQ روی OH یکدیگر را قطع می‌کنند و فرض کنید S نقطه‌ی تقاطع آن‌ها باشد.
واضح است که $\angle A - \angle ACD = ۱۸۰^\circ - \angle DCS$ و $\angle A - \angle ABD = \angle SBD$. بنابراین با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها می‌توان نوشت

$$\frac{\sin \angle DSB}{\sin \angle DSC} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{\sin \angle DBS}{\sin \angle DCS} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{\sin(\angle A - \angle ABD)}{\sin(\angle A - \angle ACD)}, \qquad (۱)$$

و

$$\frac{\sin\angle OSB}{\sin\angle OSC}=\frac{BO}{CO}\cdot\frac{\sin\angle OBS}{\sin\angle OCS}=\frac{\cos\angle B}{\cos\angle C}. \tag{۲}$$

از تساوی‌های (۱) و (۲)، (♡) نتیجه می‌شود.



فرض کنید دایره محیطی مثلث BXE خطوط AB و EF را برای بار دوم در L و U قطع کند. همچنین دایره محیطی مثلث CXF خطوط AC و EF را برای بار دوم در K و V قطع کند. فرض کنید AH و AD خطوط EF و BC را به ترتیب در J و G قطع کنند. باید نشان دهیم J روی محور اصلی دو دایره است که معادل است با

$$\frac{JE}{JV}=\frac{JF}{JU}\iff\frac{JE}{EV}=\frac{JF}{FU}.$$

دقت کنید که

$$\angle KXE=\angle KXF-\angle EXF=(۱۸۰^\circ-\angle ACD)-(۱۸۰^\circ-\angle A)=\angle A-\angle ACD.$$

حال طبق قضیه‌ی سینوس‌ها می‌توان نوشت

$$\frac{EK}{EX}=\frac{\sin\angle KXE}{\sin\angle XKE}=\frac{\sin(\angle A-\angle ACD)}{\sin\angle XFC}.$$

به طور مشابه

$$\frac{FL}{FX}=\frac{\sin(\angle A-\angle ABD)}{\sin\angle XEB}.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\frac{EK}{FL}&=\frac{EX}{FX}\cdot\frac{\sin\angle XEB}{\sin\angle XFC}\cdot\frac{\sin(\angle A-\angle ACD)}{\sin(\angle A-\angle ABD)}\\&=\frac{\sin\angle EDA}{\sin\angle FDA}\cdot\frac{\sin(\angle A-\angle ACD)}{\sin(\angle A-\angle ABD)}\\&=\frac{BG}{CG}\cdot\frac{CD}{BD}\cdot\frac{\sin(\angle A-\angle ACD)}{\sin(\angle A-\angle ABD)}\overset{(\heartsuit)}{=}\frac{BG}{CG}\cdot\frac{\cos\angle C}{\cos\angle B},\end{aligned} \tag{۳}$$

از طرف دیگر طبق قضیه‌ی سوا داریم

$$\frac{EK}{FL}=\frac{\frac{EV\cdot EF}{CE}}{\frac{FU\cdot EF}{BF}}=\frac{EV}{FU}\cdot\frac{BG}{CG}\cdot\frac{AF}{AE}$$
$$\overset{(3)}{\Longrightarrow}\ \frac{EV}{FU}=\frac{AE}{AF}\cdot\frac{\cos\angle C}{\cos\angle B}=\frac{JE}{JF},$$

که همان حکم معادل است. ■

۷. جواب مسئله ۵ است. برای مثال جدول زیر را در نظر بگیرید (عکس روی جلد دفترچه را ببینید):

$$a_{ij}=\begin{cases} 2 & i\overset{8}{\equiv}1\\ 5 & i\overset{8}{\equiv}4,5\\ 4 & i\overset{8}{\equiv}0 \text{ یا } i\overset{8}{\equiv}7 \text{ و } j\overset{6}{\not\equiv}2,5\\ 1 & i\overset{8}{\equiv}3 \text{ و } j\overset{6}{\not\equiv}2,5\\ 3 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

که a_{ij} عدد نوشته شده در خانه‌ی (i,j) جدول است.

حال نشان می‌دهیم ۵ بیشینه است. اگر جدول شامل عدد ۸ باشد کل اعداد جدول باید برابر با ۸ باشند و تنها ۱ عدد منحصربه‌فرد داریم. پس فرض می‌کنیم جدول شامل ۸ نیست. اگر جدول شامل عدد ۷ باشد آنگاه همسایه‌ای مانند a دارد که برابر با ۷ نیست. همچنین a نیز همسایه‌ای مانند b دارد که برابر با ۷ نیست. دقت کنید که a و b نمی‌توانند همسایه‌ای مشترک و برابر با ۷ داشته باشند اما به سادگی می‌توان مشاهده کرد که چنین همسایه‌ی مشترکی دارند و این تناقض است. پس ۷ نیز نمی‌تواند در جدول ظاهر شود.

فرض کنید همه‌ی اعداد $\{1,2,3,4,5,6\}$ در جدول ظاهر شده‌اند. فاصله‌ی بین دو خانه‌ی (i,j) و (i',j') را $|i-i'|+|j-j'|$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید $a_{i'j'}=5$ و (i,j) خانه‌ای با عدد ۶ باشد که کمترین فاصله را تا خانه‌ی (i',j') دارد. ادعا می‌کنیم این دو خانه ضلع مشترک دارند. اگر $i\neq i'$ و $j\neq j'$ آنگاه بنابر تقارن می‌توان فرض کرد $i>i'$ و $j>j'$. دقت کنید که در حداقل یکی از سه خانه‌ی $(i+1,j)$، $(i,j+1)$ و $(i+1,j+1)$ عدد ۶ قرار داده شده است اما این خانه‌ها فاصله‌ی کوچک‌تری تا خانه‌ی (i',j') نسبت به (i,j) دارند و این تناقض است. پس هر خانه با عدد ۶ که کوچک‌ترین فاصله را تا خانه‌ی (i',j') دارد حتماً سطر یا ستونی مشترک با آن دارد. باز هم بنابر تقارن می‌توان فرض کرد $j=j'$ و $i<i'$. باز هم می‌توان فهمید که در حداقل یکی از سه خانه‌ی $(i+1,j)$، $(i+1,j+1)$ و $(i+1,j-1)$ عدد ۶ قرار داده شده است اما هر سه حالت غیرممکن است. زیرا خانه‌ی $(i+1,j)$ که فاصله‌ی کوچک‌تری تا (i',j') دارد و خانه‌های $(i+1,j+1)$ و $(i+1,j-1)$ کوچک‌ترین فاصله را تا (i',j') دارند اما با آن در یک سطر یا ستون نیستند. بنابراین تنها حالت ممکن این است که (i,j) و (i',j') ضلع مشترک داشته باشند و ادعا ثابت می‌شود. حال دو خانه‌ی مجاور با اعداد ۵ و ۶ را در نظر بگیرید. این دو خانه در مجموع ۱۰ همسایه دارند. ۶ تا از آن‌ها باید برابر با ۶ و ۵ تا از آن‌ها برابر با ۵ باشند که تناقض است. پس بیشینه‌ی تعداد اعداد متمایز جدول ۵ است و اثبات کامل می‌شود. ■

۸. مجموعه‌ی همه‌ی nهایی که $f(n)\geq n^{\sqrt{2}}$ را T می‌نامیم.

لم. مجموعه‌ی T نامتناهی است.

برهان. در رابطه‌ی اصلی مسئله $n=f(m)$ را قرار دهید که نتیجه می‌دهد $f(f(m))+۱۴۰۰m^۲ \mid f(m)^۲+f(f(m))$. از این نیز به دست می‌آید $f(m)>m$. سپس با قرار دادن $n=۱$ به دست می‌آید $f(۱)+۱۴۰۰m^۲ \mid ۱+f(f(m))$ پس $f(f(m))>m^۲$. حال فرض خلف می‌کنیم. در واقع فرض می‌کنیم عدد طبیعی N وجود دارد که برای هر $n\geq N$ داریم $f(n)\leq n^{\sqrt{۲}}$. اگر n را بزرگ‌تر یا مساوی N در نظر بگیریم، از آنجا که $f(n)>n\geq N$ نتیجه می‌شود

$$n^۲<f(f(n))\leq f(n)^{\sqrt{۲}} \implies f(n)>n^{\sqrt{۲}},$$

که تناقض است. پس فرض خلف غلط بوده و لم ثابت می‌شود. □

فرض کنید $t\in T$ و a یک عدد ثابت طبیعی باشد. با قرار دادن $(m,n)=(t,۱)$ و $(m,n)=(t,a)$ به دست می‌آید

$$t^۲+c_۱=k_۱(f(t)+۱۴۰۰) \quad \text{و} \quad t^۲+c_۲=k_۲(f(t)+۱۴۰۰a^۲)$$

که $c_۱=f(f(۱))$، $c_۲=f(f(a))$ و $k_۱$ و $k_۲$ اعدادی طبیعی‌اند. اگر t را به اندازه‌ی کافی بزرگ انتخاب کنیم به وضوح داریم $k_۱,k_۲\leq t^{۲-\sqrt{۲}}$. از دو تساوی قبل می‌توان به دست آورد

$$۱۴۰۰k_۱k_۲(۱-a^۲)-(c_۱k_۲-c_۲k_۱)=t^۲(k_۲-k_۱).$$

اگر $k_۱\neq k_۲$ دقت کنید که طرف چپ تساوی بالا حداکثر از مرتبه‌ی $t^{۲(۲-\sqrt{۲})}<t^{\frac{۱۲}{۱۰}}$ و طرف راست از مرتبه‌ی $t^۲$ است که برای tهای بزرگ نمی‌تواند برقرار باشد. پس باید داشته باشیم $k_۱=k_۲$. در نتیجه

$$k_۱=\frac{c_۲-c_۱}{۱۴۰۰(a^۲-۱)} \quad \text{و} \quad f(t)=\frac{t^۲+c_۱-۱۴۰۰k_۱}{k_۱}.$$

دقت کنید که مقدار $k_۱$ تنها به t بستگی دارد و به a بستگی ندارد. پس برای هر دو عدد طبیعی a و b داریم

$$\frac{f(f(a))-f(f(۱))}{۱۴۰۰(۱-a^۲)}=\frac{f(f(b))-f(f(۱))}{۱۴۰۰(۱-b^۲)}.$$

این نتیجه می‌دهد $f(f(a))=ra^۲+s$ که r و s اعداد صحیح و ثابت هستند. با جایگذاری این تساوی در رابطه‌ی اصلی مسئله به دست می‌آید

$$f(n)+۱۴۰۰m^۲\mid n^۲+rm^۲+s \implies f(n)+۱۴۰۰m^۲\mid ۱۴۰۰n^۲-rf(n)+۱۴۰۰s.$$

سمت راست بخش‌پذیری به m بستگی ندارد پس با زیاد کردن m طرف چپ از قدر مطلق طرف راست بزرگ‌تر می‌شود. بنابراین تنها حالت ممکن صفر بودن طرف راست است. این نتیجه می‌دهد

$$f(n)=\frac{۱۴۰۰n^۲+۱۴۰۰s}{r},$$

اما در این صورت $f(f(n))$ باید یک چندجمله‌ای درجه ۴ برحسب n باشد که در تناقض با نتایجی که به دست آوردیم است. پس چنین تابعی وجود ندارد. ■

۹. قرار دهید $k=۲۰۲۰$. برای حل سوال به لم‌های زیر نیاز داریم.

لم ۱. اگر چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x-1)^n$ بخش‌پذیر باشد آنگاه $P(x)$ حداقل $n+1$ ضریب ناصفر دارد.

برهان. این حکم را هم با استقرا و هم با قانون علامت دکارت[1] می‌توان ثابت کرد که به خواننده واگذار می‌شود. $\square$

لم ۲. چندجمله‌ای‌های نسبت به هم اول $P(x)$ و $Q(x)$ با درجه‌ی ۱۰۱۰ و ضرایب صحیح وجود دارند به طوری که چندجمله‌ای $P(x)-x^kQ(x)$ در نقطه‌ی ۱ ریشه‌ای با تکرر ۲۰۲۱ دارد.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم برای هر سه‌تایی (m,n,k) از اعداد صحیح نامنفی به طوری که $n<k$، چندجمله‌ای‌های $P(x)=P_{(m,n,k)}(x)$ و $Q(x)=Q_{(m,n,k)}(x)$ به ترتیب از درجه‌های n و m و با ضرایب گویا وجود دارند به طوری که $P_{(m,n,k)}(x)-x^kQ_{(m,n,k)}(x)$ بر $(x-1)^{m+n+1}$ بخش‌پذیر است. با استقرا روی $m+n$ این حکم را نشان می‌دهیم. اثبات برای پایه‌ی استقرا یعنی حالتی که یکی از m و n صفر باشد به خواننده واگذار می‌شود. پس حالتی را در نظر می‌گیریم که $m,n>0$. فرض کنید حکم برای اعداد کوچک‌تر از $m+n$ درست باشد و درستی آن را برای $m+n$ نشان می‌دهیم. اگر عبارت

$$P_{(m-1,n,k)}(x)-x^kQ_{(m-1,n,k)}(x)$$

بر x^{m+n+1} بخش‌پذیر باشد گام استقرا با استفاده از همین دو چندجمله‌ای نتیجه می‌شود پس فرض می‌کنیم این گونه نیست. عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$(x-1)\left(P_{(m-1,n-1,k)}(x)-x^kQ_{(m-1,n-1,k)}(x)\right)+r\left(P_{(m-1,n,k)}(x)-x^kQ_{(m-1,n,k)}(x)\right). \qquad (1)$$

از آنجا که هر دو عبارت طبق فرض استقرا بر $(x-1)^{m+n}$ بخش‌پذیر هستند عدد گویای r وجود دارد که عبارت بالا بر $(x-1)^{m+n+1}$ بخش‌پذیر شود. زیرا اگر تعریف کنیم

$$T_{(m,n,k)}(x)=\frac{P_{(m,n,k)}(x)-x^kQ_{(m,n,k)}(x)}{(x-1)^{m+n+1}}$$

و عبارت (۱) را بر $(x-1)^{m+n}$ تقسیم کنیم آنگاه کافی است داشته باشیم

$$T_{(m-1,n-1,k)}(1)+rT_{(m-1,n,k)}(1)=0,$$

که به وضوح جواب گویا دارد (طبق فرضی که کردیم $T_{(m-1,n,k)}(1)\neq 0$). پس با قرار دادن

$$P_{(m,n,k)}(x)=(x-1)P_{(m-1,n-1,k)}(x)+rP_{(m-1,n,k)}(x)$$

و

$$Q_{(m,n,k)}(x)=(x-1)Q_{(m-1,n-1,k)}(x)+rQ_{(m-1,n,k)}(x)$$

گام استقرا ثابت می‌شود.

حال نشان می‌دهیم چندجمله‌ای‌های $P_{(m,n,k)}(x)$ و $Q_{(m,n,k)}(x)$ نسبت به هم اولند. فرض کنید این دو چندجمله‌ای عاملی مشترک مانند $D(x)$ با درجه‌ی d داشته باشند. چندجمله‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{P_{(m,n,k)}(x)}{D(x)}-x^k\frac{Q_{(m,n,k)}(x)}{D(x)}.$$

[1] Descartes' rule of sign

دقت کنید که این چندجمله‌ای حداکثر $(n-d+۱)+(m-d+۱)=m+n-۲d+۲$ ضریب ناصفر دارد. زیرا توان جمله‌های $x^k\frac{Q_{(m,n,k)}(x)}{D(x)}$ حداقل k است که بیشتر از n است. از طرف دیگر این چندجمله‌ای حداقل بر $(x-۱)^{m+n-d+۱}$ بخش‌پذیر است. بنابراین طبق لم ۱ حداقل $m+n-d+۲$ ضریب ناصفر دارد. پس تنها حالت ممکن $d=۰$ است که نشان می‌دهد دو چندجمله‌ای عامل مشترک ندارند.

دقت کنید که ما نشان دادیم ضرایب چندجمله‌ای‌های ساخته شده گویا است اما به سادگی و با ضرب کردن یک عدد صحیح مناسب در هر دوی $P_{(m,n,k)}(x)$ و $Q_{(m,n,k)}(x)$ می‌توان به چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح رسید. پس حکم لم ثابت می‌شود.

با استفاده از مشتق‌گیری نیز می‌توان این لم را ثابت کرد که به خواننده واگذار می‌شود. $\square$

قرار دهید $t=۱۰۱۰$. لم ۲ نشان می‌دهد چندجمله‌ای‌های نسبت به هم اول $P(x)$ و $Q(x)$ با درجه‌ی t وجود دارند به طوری که $P(x)-x^kQ(x)$ بر $(x-۱)^{۲t+۱}$ بخش‌پذیر است. اگر عدد حقیقی u را کوچک‌تر از ۱ در نظر بگیریم با استفاده از شرط سوال و نامساوی مثلث به دست می‌آید

$$\left|\frac{a-c}{c}\right|^{۲t+۱}\leq\frac{u}{bc^t}<۱\implies|c|>|a-c|\geq|a|-|c|\implies\left|\frac{a}{c}\right|<۲. \tag{۲}$$

تعریف می‌کنیم $R(x)=P(x)-x^kQ(x)$. دقت کنید که $c^t\left(bP\left(\frac{a}{c}\right)-dQ\left(\frac{a}{c}\right)\right)$ عددی صحیح است بنابراین اگر $bP(\frac{a}{c})\neq dQ(\frac{a}{c})$ آنگاه

$$\begin{aligned}۱\leq\left|c^t\left(bP\left(\frac{a}{c}\right)-dQ\left(\frac{a}{c}\right)\right)\right|&=\left|bc^tR\left(\frac{a}{c}\right)+\left(a^kb-c^kd\right)c^{t-k}Q\left(\frac{a}{c}\right)\right|\\&\leq\left|bc^tR\left(\frac{a}{c}\right)\right|+\left|\left(a^kb-c^kd\right)c^{t-k}Q\left(\frac{a}{c}\right)\right|.\end{aligned}$$

قرار دهید $R(x)=(۱-x)^{۲t+۱}S(x)$. می‌توان نوشت

$$bc^tR\left(\frac{a}{c}\right)=bc^t\left(۱-\frac{a}{c}\right)^{۲t+۱}S\left(\frac{a}{c}\right)=c^{-t-۱}b(c-a)^{۲t+۱}S\left(\frac{a}{c}\right).$$

در نتیجه

$$|b||c-a|^{۲t+۱}\left|c^{-t-۱}\right|\left|S\left(\frac{a}{c}\right)\right|+\left|a^kb-c^kd\right|\left|c^{t-k}\right|\left|Q\left(\frac{a}{c}\right)\right|\geq ۱.$$

با استفاده از شرط مسئله می‌توان نتیجه گرفت $u\left|S\left(\frac{a}{c}\right)\right|+u\left|Q\left(\frac{a}{c}\right)\right|\geq ۱$.

حال فرض کنید $S(x)=c_{k-t-۱}x^{k-t-۱}+\cdots+c_۱x+c_۰$. می‌توان نوشت

$$\left|S\left(\frac{a}{c}\right)\right|\leq\sum_{i=۰}^{k-d-۱}|c_i|\left|\frac{a}{c}\right|^i\overset{(۲)}{\leq}\sum_{i=۰}^{k-d-۱}|c_i|۲^i=C_۱.$$

دقت کنید که $C_۱$ عددی ثابت است (به a، b، c و d بستگی ندارد). به طور مشابه می‌توان نتیجه گرفت عدد ثابت $C_۲$ وجود دارد که $\left|Q\left(\frac{a}{c}\right)\right|\leq C_۲$. بنابراین

$$u(C_۱+C_۲)\geq ۱.$$

پس اگر u را کوچک‌تر از $\frac{۱}{C_۱+C_۲}$ در نظر بگیریم این نامساوی نقض می‌شود. از آنجا که این نامساوی از فرض $bP(\frac{a}{c})\neq dQ(\frac{a}{c})$ به دست آمده بود این فرض نیز نقض می‌شود و حکم ثابت می‌شود. ■

توضیح. حکمی قوی‌تر را در ادامه نشان می‌دهیم.

گزاره. فرض کنید k عددی طبیعی باشد. آنگاه عدد طبیعی N و عدد حقیقی $\epsilon > ۰$ وجود دارد که برای هر زوج (c, d) که $|c|$ و $|d|$ اعداد اول هستند، تعداد زوج‌های صحیح (a, b) که در نامساوی‌های

$$|b||a-c|^{۲۰۲۱} \leq u|c|^{۱۰۱۱} \quad \text{و} \quad |a^k b - c^k d| \leq u|c|^{k-۱۰۱۰}.$$

صدق می کنند حداکثر N باشد، به ازای هر $u < \epsilon$.

اگر $k \leq ۱۰۱۰$ آنگاه $a^k b = c^k d$ که حداکثر چهار جواب برای a و b دارد. بنابراین فرض می‌کنیم $k > ۱۰۱۰$. مانند راه حل مسئله‌ی اصلی چندجمله‌ای‌های نسبت به هم اول $P(x)$ و $Q(x)$ با درجه‌ی $t = ۱۰۱۰$ را به شکلی انتخاب می‌کنیم که $P(x) - x^k Q(x)$ بر $(x-۱)^{۲t+۱}$ بخش‌پذیر باشد. همچنین اگر قرار دهیم $\epsilon = \frac{۱}{C_۱ + C_۲}$، که $C_۱$ و $C_۲$ مانند راه حل مسئله‌ی اصلی تعریف می‌شوند، آنگاه $bP(\frac{a}{c}) = dQ(\frac{a}{c})$. پس با داشتن مقدار a مقدار b به طور یکتا از این تساوی تعیین می‌شود. از آنجا که $P(x)$ و $Q(x)$ نسبت به هم اول هستند چندجمله‌ای‌های $A(x)$ و $B(x)$ با ضرایب صحیح و با شرط $\deg(A) = \deg(B) \leq t$ وجود دارند به طوری که

$$A(x)P(x) + B(x)Q(x) = r,$$

که r عددی ثابت است. در نتیجه

$$\begin{aligned} & c^t A\left(\frac{a}{c}\right) c^t P\left(\frac{a}{c}\right) + c^t B\left(\frac{a}{c}\right) c^t Q\left(\frac{a}{c}\right) = c^{۲t} r \\ \Longrightarrow\ & c^t P\left(\frac{a}{c}\right)\left(dc^t A\left(\frac{a}{c}\right) + bc^t B\left(\frac{a}{c}\right)\right) = c^{۲t} dr. \end{aligned} \tag{۳}$$

دقت کنید که اگر $\gcd(a, c) > ۱$ آنگاه c باید a را بشمارد ($|c|$ عددی اول است) اما دیدیم که $\left|\frac{a}{c}\right| < ۲$ پس تنها حالت ممکن $a = c$ است و در این حالت تنها یک جواب داریم.

حال فرض کنید $\gcd(a, c) = ۱$. می‌توان نوشت

$$\gcd\left(c^t P\left(\frac{a}{c}\right), c\right) = \gcd\left(c, b_t a^t\right) = \gcd(c, b_t) \leq |b_t|,$$

که b_t ضریب پیشروی $P(x)$ است. اگر تعریف کنیم $g = \gcd(c, b_t)$، با قرار دادن $c = gf$ به دست می‌آید

$$\left(c^t P\left(\frac{a}{c}\right), f\right) = ۱ \overset{(۳)}{\Longrightarrow} c^t P\left(\frac{a}{c}\right) \Big| g^{۲t} dr.$$

از آنجا که $|d|$ عددی اول است تعداد مقسوم علیه‌های $g^{۲t}dr$ حداکثر $۴|r|b_t^{۲t} \leq ۴|r|g^{۲t}$ است. همچنین چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه‌ی t است پس برای هر مقسوم علیه، حداکثر t مقدار متفاوت برای a می‌تواند وجود داشته باشد. پس مجموعاً حداکثر $۴t|r|b_t^{۲t} = ۴۰۴۰|r|b_{۱۰۱۰}^{۲۰۲۰}$ مقدار متمایز برای a وجود دارد. پس می‌توان قرار داد $N = ۴۰۴۰|r|b_{۱۰۱۰}^{۲۰۲۰} + ۱$. دقت کنید که مقدار $b_{۱۰۱۰}$ و r تنها به چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ بستگی دارد پس N عددی ثابت است و حکم گزاره ثابت می‌شود.

۱۰. با قرار دادن $k = m = n = ۱$ نتیجه می‌شود $f(۱) = ۱$. سپس با قرار دادن $k = ۱,\ n = m$ و $k = n,\ m = ۱$ می‌توان به دست آورد $۲f(n) - f(n^۲) \geq ۱$ و $f(n^۲) + f(n) - f(n)^۲ \geq ۱$. با جمع کردن این دو رابطه به دست می‌آید

$$(f(n) - ۱)(f(n) - ۲) \leq ۰ \implies f(n) \in [۱, ۲].$$

فرض کنید n طبیعی وجود داشته باشد که $f(n) = a > ۱$. از آنجا که $f(n^۲) \geq f(n)^۲ - f(n) + ۱$ می‌توان نتیجه گرفت

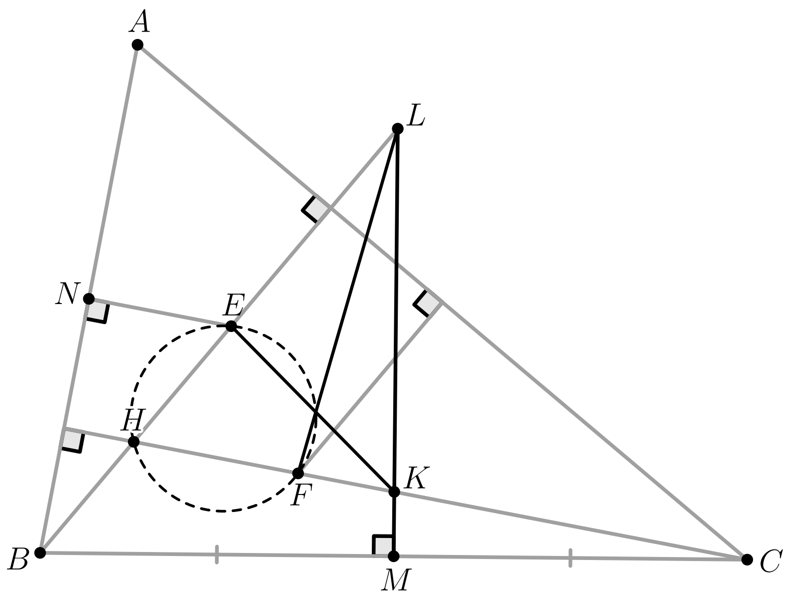
$$f(n^۲) \geq a^۲ - a + ۱ = \underbrace{\left(۱ + \frac{(a-۱)^۲}{a}\right)}_{b} f(n) = bf(n) \geq a,$$

بنابراین $f(n^۲) \geq bf(n) = ba$ و به طور مشابه با استقرا روی k می‌توان نشان داد $f\left(n^{۲^k}\right) \geq b^k a$. می‌توان k را طوری در نظر گرفت که $b^k a > ۲$ و این تناقض است (با توجه به اینکه $b > ۱$ این کار امکان‌پذیر است). بنابراین فرض $f(n) > ۱$ غلط بوده و برای هر n طبیعی داریم $f(n) = ۱$. ■

.۱۱

لم. در مثلث ABC فرض کنید H مرکز ارتفاعی و E و F به ترتیب محل برخورد عمودمنصف AB و AC با خطوط BH و CH باشند. اگر Q محل برخورد مماس از E و F بر دایره محیطی مثلث HEF باشد آنگاه $BQ = CQ$.

برهان. محل برخورد عمودمنصف BC با CH و BH را به ترتیب K و L بنامید. برای اثبات مسئله کافی است نشان دهیم محل برخورد FL و EK روی دایره محیطی مثلث HEF است و طبق قضیهٔ پاسکال حکم لم نتیجه می‌شود. این همرسی نیز معادل با برابری زوایای $\angle BEK$ و $\angle CFL$ است. برای اثبات این برابری، تشابه مثلث‌های BEK و CFL را نشان می‌دهیم.



طبق تقارن واضح است که $\angle EBK = \angle FCL$ و در ادامه نشان می‌دهیم $\frac{BE}{BK} = \frac{CF}{CL}$. فرض کنید M و N و به ترتیب وسط اضلاع BC و AB باشند. در این صورت داریم

$$\left.\begin{aligned} BE &= \frac{BN}{\cos\angle EBA} = \frac{AB}{۲\sin\angle A} \\ BK &= \frac{CM}{\cos\angle KCB} = \frac{BC}{۲\sin\angle B} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{BE}{BK} = \frac{AB\sin\angle B}{BC\sin\angle A}$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد $\frac{CF}{CL}=\frac{AC\sin\angle C}{BC\sin\angle A}$ و طبق قضیهٔ سینوس‌ها واضح است که این دو نسبت با هم برابرند. $\square$

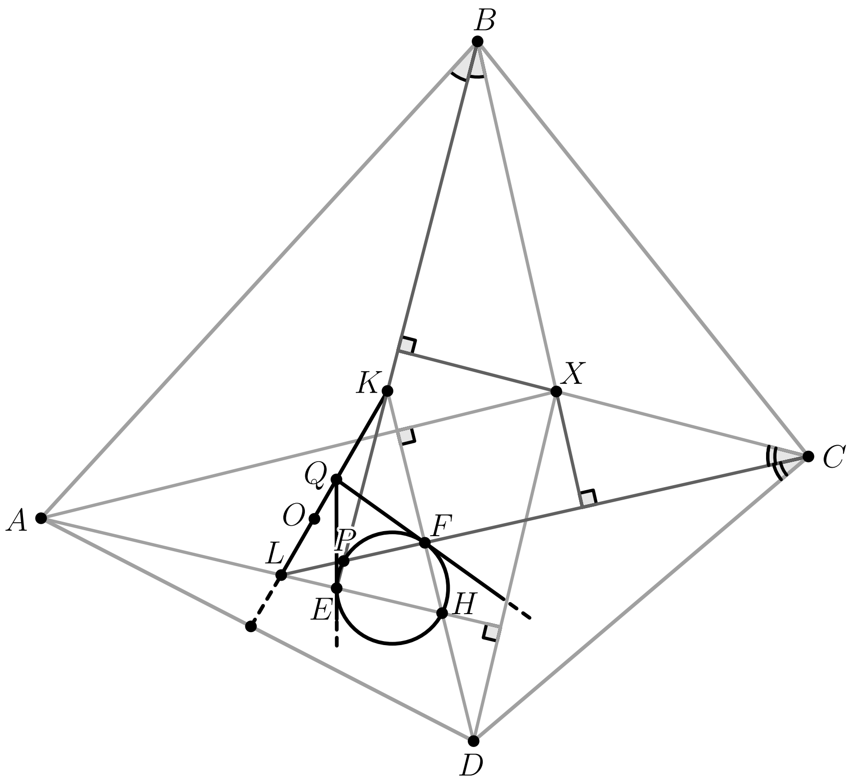
حال به سراغ اثبات مسئله می‌رویم. فرض کنید H مرکز ارتفاعی مثلث AXD و E و F به ترتیب نقطهٔ تقاطع AH با BK و BH با CL باشند. از آنجا که $BE\perp CX$ و $\angle AXD+\angle BXC=۱۸۰^\circ$ نتیجه می‌شود

$$\angle EBX=\angle BXC-۹۰^\circ=۹۰^\circ-\angle AXD=\angle EAX.$$

پس چهارضلعی $AEXB$ محاطی است و $AE=EX$. به طور مشابه چهارضلعی $CXFD$ نیز محاطی است و $DF=FX$. محل برخورد BE و CF را P می‌نامیم. می‌توان نوشت

$$\angle AEB=\angle AXB=۱۸۰^\circ-\angle DXC=۱۸۰^\circ-\angle DFC=\angle HFP.$$

که نتیجه می‌دهد چهارضلعی $HEPF$ نیز محاطی است. از E و F بر این دایره مماس رسم می‌کنیم تا یک‌دیگر را در Q قطع کنند. بنابر قضیهٔ پاسکال Q روی خط KL است و طبق لم در مثلث AXD داریم $AQ=DQ$. پس اگر Q بر O منطبق نباشد به دست می‌آید $QO\perp AD$ و حکم ثابت می‌شود.



در نتیجه تنها حالتی باقی می‌ماند که $Q\equiv O$. واضح است که $HF\parallel OE$ پس $\angle EHF=\angle OEF=\angle EFH$. به طور مشابه نتیجه می‌شود $\angle EHF=\angle FEH$ پس مثلث EHF متساوی‌الاضلاع است و $\angle EHF=۶۰^\circ$. این نتیجه می‌دهد $\angle AXD=۶۰^\circ$ و

$$\angle ABX=۱۸۰^\circ-\angle AEX=۲\angle EAX=۶۰^\circ.$$

مشابهاً داریم $\angle DCX=۶۰^\circ$. در نهایت می‌توان نوشت

$$\angle ABX+\angle DCX=۱۲۰^\circ=۱۸۰^\circ-\angle AXD=\angle BXC,$$

که یعنی $AB\parallel CD$ و این خلاف فرض مسئله است. $\blacksquare$

۱۲. فرض کنید F خانواده‌ای از همه‌ی زیرمجموعه‌های n-عضوی $\{۱, ۲, \ldots, ۳n\}$ باشد. برای هر $S \subseteq \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ تعریف می‌کنیم

$$F_S = \{A \in F | A \cap \{۱, ۲, ۳, ۴\} = S\}.$$

حال اعضای F را به شکل زیر رنگ می‌کنیم:

- همه‌ی اعضای $F_\varnothing$ با رنگ $c_۱$.
- همه‌ی اعضای $F_{\{۱\}}$ با رنگ $c_۲$.
- همه‌ی اعضای $F_{\{۲\}}$ با رنگ $c_۳$.
- همه‌ی اعضای $F_{\{۳\}}$ با رنگ $c_۴$.
- همه‌ی اعضای $F_{\{۴\}}$ با رنگ $c_۵$.
- همه‌ی اعضای $F_{\{۱,۲,۳\}} \cup F_{\{۱,۳\}} \cup F_{\{۱,۲\}}$ با رنگ $c_۶$.
- همه‌ی اعضای $F_{\{۱,۲,۳,۴\}} \cup F_{\{۲,۳,۴\}} \cup F_{\{۳,۴\}} \cup F_{\{۲,۳\}}$ با رنگ $c_۷$.
- همه‌ی اعضای $F_{\{۱,۳,۴\}} \cup F_{\{۱,۲,۴\}} \cup F_{\{۲,۴\}} \cup F_{\{۱,۴\}}$ با رنگ $c_۸$.

نشان می‌دهیم این رنگ‌آمیزی شرایط مورد نظر را دارد، یعنی هیچ سه زیرمجموعه‌ی همرنگی یافت نمی‌شود که اشتراک دوبه‌دوی آن‌ها حداکثر یک عضوی باشد. چنین سه‌تایی از زیرمجموعه‌ها را یک سه‌تایی بد می‌نامیم.

- $c_۱$: اگر یک سه‌تایی بد با رنگ $c_۱$ داشته باشیم اجتماع آن‌ها حداقل $۳n - ۳$ عضو دارد که امکان ندارد زیرا هیچ‌کدام از سه مجموعه شامل ۱، ۲، ۳ و ۴ نیستند.
- $c_۲$: اگر یک سه‌تایی بد با رنگ $c_۲$ داشته باشیم آنگاه هر سه مجموعه شامل ۱ هستند پس اشتراک دوبه‌دوی آن‌ها تک‌عضوی است. بنابراین اجتماع آن‌ها $۳n - ۲$ عضو دارد که امکان ندارد زیرا هیچ‌کدام از سه مجموعه شامل ۲، ۳ و ۴ نیستند.
- $c_۳$: مشابه اثبات برای $c_۲$.
- $c_۴$: مشابه اثبات برای $c_۲$.
- $c_۵$: مشابه اثبات برای $c_۲$.
- $c_۶$: اگر یک سه‌تایی بد از $F_{\{۱,۲,۳\}} \cup F_{\{۱,۳\}} \cup F_{\{۱,۲\}}$ داشته باشیم آنگاه هر سه شامل ۱ هستند. به علاوه، حداقل دوتا از آن‌ها شامل ۲ یا حداقل دوتا از آن‌ها شامل ۳ هستند که تناقض است.
- $c_۷$: اگر یک سه‌تایی بد از $F_{\{۱,۲,۳,۴\}} \cup F_{\{۲,۳,۴\}} \cup F_{\{۳,۴\}} \cup F_{\{۲,۳\}}$ داشته باشیم آنگاه هر سه شامل ۳ هستند. همچنین حداقل دوتا از آن‌ها شامل ۲ یا حداقل دوتا از آن‌ها شامل ۴ هستند که تناقض است.

- c_8: اگر یک سه‌تایی بد از $F_{\{1,4\}} \cup F_{\{2,4\}} \cup F_{\{1,2,4\}} \cup F_{\{1,3,4\}}$ داشته باشیم آنگاه هر سه شامل ۴ هستند. همچنین حداقل دوتا از آن‌ها شامل ۱ یا حداقل دوتا از آن‌ها شامل ۲ هستند که تناقض است.

بنابراین هیچ رنگی شامل یک سه‌تایی بد نیست و رنگ‌آمیزی معرفی شده شرایط مسئله را دارد. $\blacksquare$