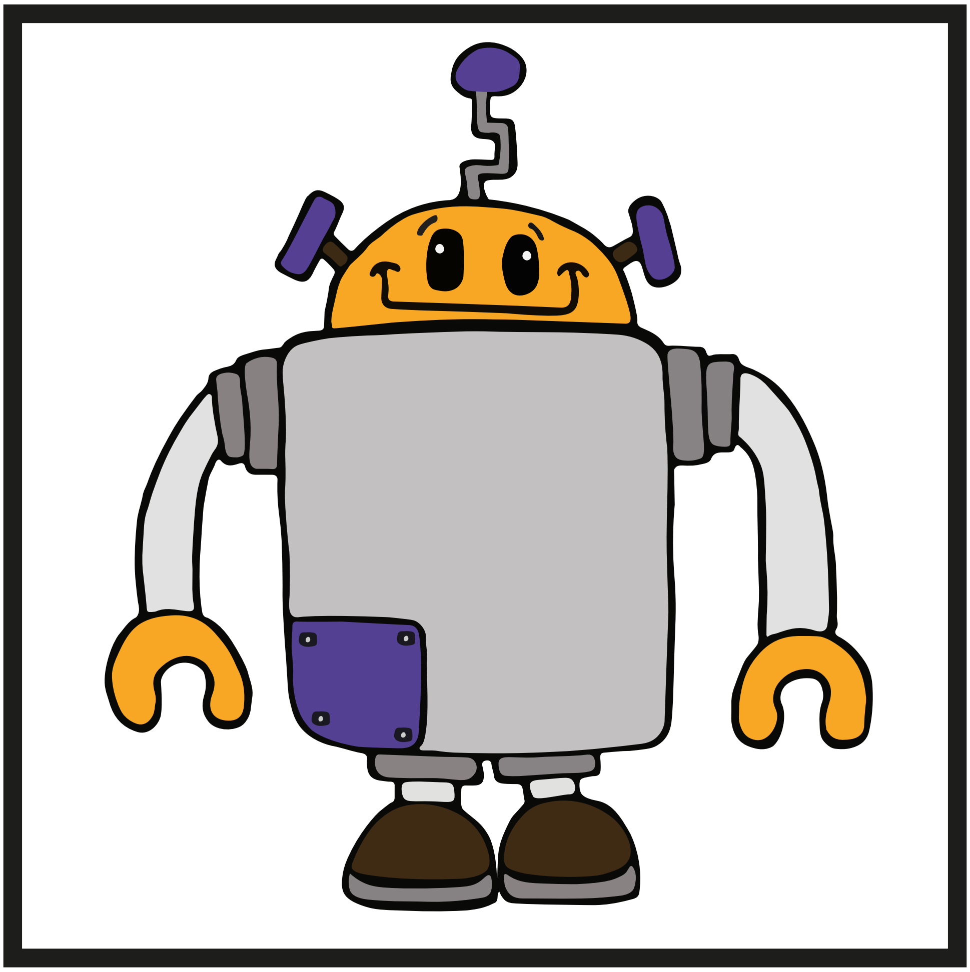
۳۹مین المپیاد ریاضی ایران



١٤٠٠-١٤٠١

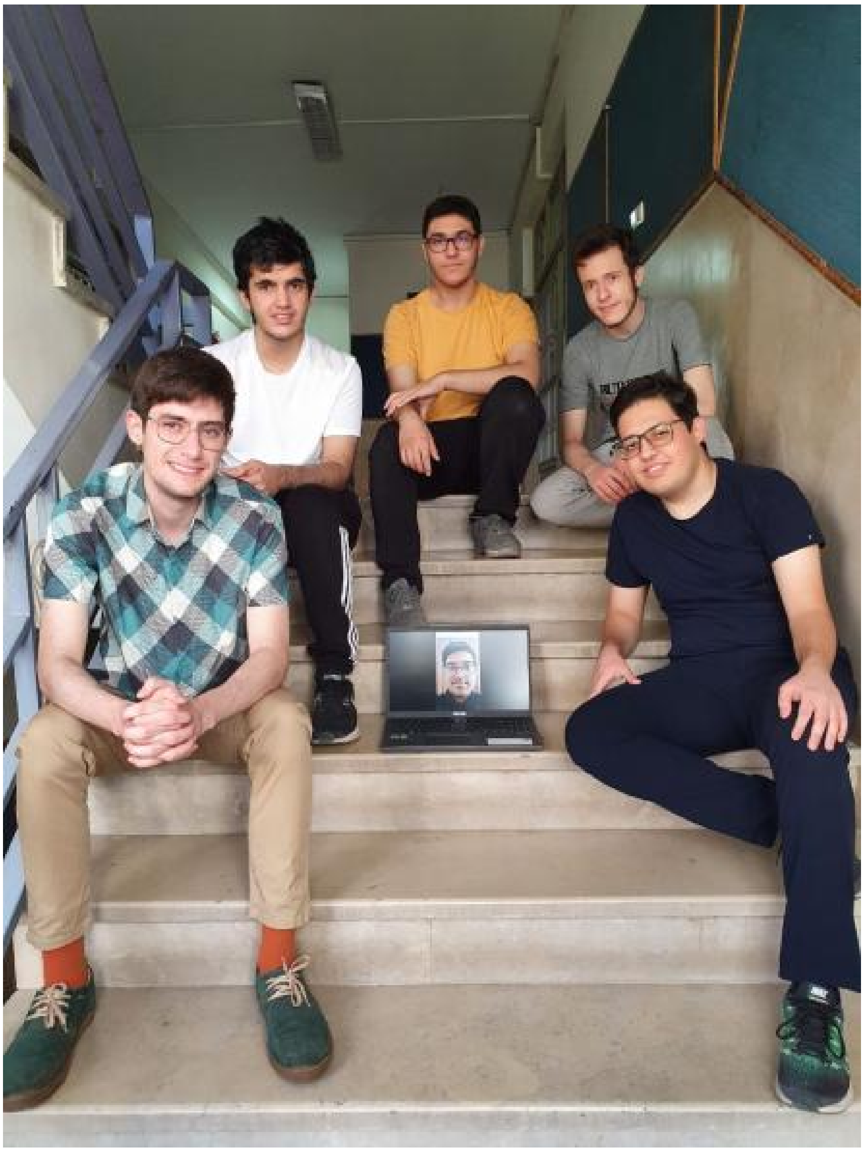
باشگاه دانش‌پژوهان جوان

وزارت آموزش و پرورش

سی و نهمین المپیاد ریاضی ایران

سوالات و راه حل‌ها

اعضای تیم المپیاد ریاضی ایران
در شصت و سومین المپیاد ریاضی جهانی (نروژ)



ردیف بالا از راست به چپ:

- امیرمحمد بندری ماسوله
- سید مبین رضوی
- سینا عزیزالدین

ردیف پایین از راست به چپ:

- دانیال پرنیان
- مهران طلایی خواجه‌روشنائی
- پوریا محمودخان شیرازی

فهرست مطالب

پیش‌گفتار ۳

مسائل

مرحله دوم ۶
دوره تابستان ۸
امتحان انتخابی تیم ۱۱

راه‌حل‌ها

مرحله دوم ۱۵
دوره تابستان ۱۹
امتحان انتخابی تیم ۳۳

پیش‌گفتار

سی و نهمین المپیاد ریاضی ایران تشکیل شده از چهار مرحله است. در این دوره همه‌ی مراحل تحت تاثیر همه‌گیری کووید-۱۹ قرار گرفتند. مرحله اول در اسفند ۱۳۹۹ و در سراسر کشور برگزار شد. به دلیل همه‌گیری امتحان شامل ۹ سوال پاسخ‌کوتاه و ۷ سوال پنج‌گزینه‌ای و زمان آن ۲ ساعت بود. در مجموع، حدود ۱۱۰۰۰ دانش‌آموز در این امتحان شرکت کردند و حدود ۷۰۰ نفر به مرحله دوم راه پیدا کردند.

مرحله دوم در اردیبهشت ۱۴۰۰ و در دو روز برگزار شد. شرکت‌کنندگان در هر روز سه سوال دریافت کردند و ۴ ساغت و نیم زمان داشتند. ۸۰ نفر اول این مرحله به دوره تابستان راه پیدا کردند.

دوره تابستان شامل پنج امتحان مجزا بود و در انتها ۱۴ دانش‌آموز مدال طلا و اکثر بقیهٔ دانش‌آموزان مدال نقره و برنز دریافت کردند. لیست زیر نام مدال‌آوران طلا را نشان می‌دهد:

۱. علی احمدوند
۲. عرشیا اسلامی
۳. دانیال پرنیان
۴. احسان حیدری
۵. ابوالفضل دانیالی
۶. محمد داودآبادی فراهانی
۷. پوریا رحمانی
۸. سید مبین رضوی
۹. پوریا زارعی
۱۰. مهران طلایی خواجه‌روشنائی
۱۱. امیرمحمد کرمی ابوالوردی
۱۲. متین محمدی
۱۳. محمد محمدیان بیشه
۱۴. پوریا محموخان شیرازی

انتخابی تیم در چهار روز و با ساختاری مشابه با المپیاد جهانی ریاضی (IMO) برگزار شد. در پایان ۶ نفر اول به عنوان اعضای تیم ایران در شصت و سومین المپیاد جهانی ریاضی انتخاب شدند.

در این دفترچه، ۶ مسئله‌ی مرحله دوم، ۱۶ مسئله‌ی دوره تابستان و ۱۲ مسئله‌ی انتخابی تیم به همراه راه حل‌های مسائل ارائه می‌شود.

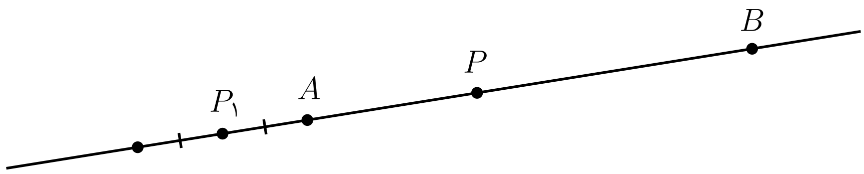
از همه‌ی کسانی که در برگزاری سی و هشتمین المپیاد ریاضی ایران، شامل کمیته‌ی ملی المپیاد ریاضی، طراحان مسائل،

گروه‌های انتخاب مسائل، گروه‌های آماده‌سازی امتحانات، مصححین، ویرایشگران، آموزشیاران و همه‌ی کسانی که دانش خود را به اشتراک گذاشتند و برای افزایش شوق ریاضی در کشور تلاش کردند و به روش‌های گوناگون به برگزاری این رویداد علمی کمک کردند، قدردانی و تشکر می‌کنیم.

مسائل

مرحله دوم

۱. روی خطی دو نقطه‌ی متمایز A و B قرار دارند. یکی از نقاط روی پاره‌خط AB، به غیر از نقاط A، B و وسط پاره‌خط AB، را قرمز می‌کنیم. در هر مرحله یک نقطه‌ی قرمز را نسبت به یکی از نقاط A و B قرینه می‌کنیم، سپس فاصله‌ی نقطه‌ی جدید تا همان نقطه را نصف می‌کنیم و نقطه‌ی حاصل را قرمز می‌کنیم. برای مثال در شکل زیر اگر P یک نقطه‌ی قرمز باشد می‌توانیم P را نسبت به A قرینه کنیم سپس فاصله‌ی نقطه‌ی حاصل تا A را نصف کنیم تا به نقطه‌ی $P_۱$ برسیم و آن را قرمز کنیم.



آیا ممکن است پس از متناهی مرحله نقطه‌ی وسط AB قرمز شود؟

(← ص. ۱۵)

۲. عدد طبیعی n را خوب می‌نامیم اگر رقم صفر نداشته باشد و بتوانیم یکی از ارقامش را حذف کنیم به طوری که عدد حاصل مقسوم علیه n شود. برای مثال ۲۵ یک عدد خوب است زیرا اگر رقم ۲ را حذف کنیم عدد حاصل برابر با ۵ می‌شود که مقسوم علیه ۲۵ است. ثابت کنید تعداد اعداد خوب متناهی است.

(← ص. ۱۵)

۳. چهارضلعی محیطی $ABCD$ با دایره محاطی ω مفروض است. ω در نقاط E و F بر BC و AD مماس است و DE برای بار دوم ω را در X قطع می‌کند. اگر دایره محیطی مثلث DXF بر خطوط AB و CD مماس باشد، ثابت کنید چهارضلعی $AFXC$ محاطی است.

(← ص. ۱۶)

۴. n نقطه روی محیط دایره‌ی ω قرار دارند. می‌دانیم دایره‌ای با شعاع کم‌تر از ω وجود دارد که همه‌ی n نقطه داخل یا روی آن باشند. ثابت کنید قطری از ω وجود دارد که دو سر آن جزء نقاط نباشند و همه‌ی نقاط در یک سمت آن قرار گیرند.

(← ص. ۱۷)

۵. ۱۴۰۰ عدد حقیقی داده شده‌اند. ثابت کنید حداقل سه‌تا از این اعداد مانند x، y و z وجود دارند که

$$\left|\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^۴+y^۴+z^۴+۱}\right| < \frac{۹}{۱۰۰۰}$$

(← ص. ۱۷)

۶. آیا چینشی از ۱۴۰۰ عدد طبیعی (نه لزوماً متمایز) دور دایره وجود دارد به طوری که حداقل یکی از اعداد ۲۰۲۱ باشد و هر عدد برابر با مجموع ب.م.م دو عدد بعدی و ب.م.م دو عدد قبلی خود باشد؟ برای مثال اگر a، b، c، d و e پنج عدد متوالی دور دایره باشند باید داشته باشیم $c = (a, b) + (d, e)$.

(← ص. ۱۸)

دوره تابستان

جبر

۱. اعداد حقیقی و مثبت a، b، c و d مفروض هستند به طوری که $a+b+c+d=4$. ثابت کنید

$$\frac{ab}{a^2-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}}+\frac{bc}{b^2-\frac{4}{3}b+\frac{4}{3}}+\frac{cd}{c^2-\frac{4}{3}c+\frac{4}{3}}+\frac{da}{d^2-\frac{4}{3}d+\frac{4}{3}}\le 4$$

(← ص. ۱۹)

۲. اگر a، b، c و d اعدادی مختلط و ناصفر با شرط

$$2|a-b|\le|b|,\ 2|b-c|\le|c|,\ 2|c-d|\le|d|,\ 2|d-a|\le|a|$$

باشند، ثابت کنید

$$\left|\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}\right|>\frac{7}{2}$$

(← ص. ۲۰)

۳. چندجمله‌ای P با ضرایب حقیقی و نامنفی و تابع $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ داده شده‌اند به طوری که برای هر $x,y\in\mathbb{R}^+$ داریم

$$f(x+P(x)f(y))=(y+1)f(x) \qquad (1)$$

الف) ثابت کنید درجه چندجمله‌ای P حداکثر یک است.

ب) همه توابع $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ و چندجمله‌ای‌های غیر ثابت P با ضرایب حقیقی و نامنفی را بیابید که در تساوی (۱) صدق کنند.

(← ص. ۲۱)

ترکیبیات

۱. فرض کنید S مجموعه‌ای نامتناهی از اعداد طبیعی باشد. می‌دانیم چهار عدد دوبه‌دو متمایز $a,b,c,d\in S$ وجود دارند به طوری که $\gcd(a,b)\neq\gcd(c,d)$. ثابت کنید سه عدد دوبه‌دو متمایز $x,y,z\in S$ وجود دارند به طوری که

$$\gcd(x,y)=\gcd(y,z)\neq\gcd(z,x).$$

(← ص. ۲۳)

۲. آیا می‌توان همه اعداد صحیح را در جدولِ از چهار طرف نامتناهی قرار داد (هر عدد دقیقاً یک‌بار) طوری که هر سطر از چپ به راست و هر ستون از بالا به پایین صعودی باشد؟

(← ص. ۲۳)

۳. فرض کنید $n \geq ۳$ عددی طبیعی باشد. نامتناهی تیله از رنگ‌های $C_۱, C_۲, \ldots, C_n$ داده شده است (از هر رنگ نامتناهی تیله داریم). به عدد طبیعی $m \geq n+۱$، n-رنگی گوییم اگر بتوان m تیله را دور دایره قرار داد به طوری که بین هر $n+۱$ تیله‌ی متوالی حداقل یک تیله به رنگ C_i، برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$، وجود داشته باشد.

الف) ثابت کنید تنها متناهی عدد طبیعی وجود دارند که n-رنگی نیستند.

ب) بزرگ‌ترین عددی که n-رنگی نیست را بیابید.

(← ص. ۲۴)

هندسه

۱. مثلث حاده‌زاویه ABC داده شده است. نقطه D پای ارتفاع نظیر راس A است. از D بر دایره‌های به قطر AB و AC مماس رسم می‌کنیم تا این دو دایره را به ترتیب در K و L قطع کنند. نقطه S در صفحه قرار دارد به طوری که $\angle ABC + \angle ABS = \angle ACB + \angle ACS = ۱۸۰^\circ$. ثابت کنید نقاط A، K، L و S روی یک دایره قرار دارند.
(← ص. ۲۴)

۲. در مثلث حاده‌زاویه ABC وسط AB را M می‌نامیم. نقطه K در طرف دیگر خط AC نسبت به B قرار دارد به طوری که $\angle KMC = ۹۰^\circ$ و $\angle KAC = ۱۸۰^\circ - \angle ABC$. از A بر دایره محیطی مثلث ABC مماس رسم می‌کنیم تا خط CK را در E قطع کند. ثابت کنید قرینه خط BC نسبت به CM از وسط پاره‌خط ME می‌گذرد.
(← ص. ۲۵)

۳. در مثلث ABC نقاط متغیر X و Y روی پاره‌خط‌های AB و AC قرار دارند. نقطه Z روی خط BC قرار دارد به طوری که $ZX = ZY$. دایره محیطی مثلث XYZ خط BC را برای بار دوم در T قطع می‌کند. نقطه P روی خط XY قرار دارد به طوری که $\angle PTZ = ۹۰^\circ$. نقاط Q و A در یک طرف خط XY قرار دارند به طوری که $\angle QXY = \angle ACP$ و $\angle QYX = \angle ABP$. ثابت کنید دایره محیطی مثلث QXY از یک نقطه ثابت می‌گذرد.
(← ص. ۲۶)

نظریه اعداد

۱. برای هر عدد طبیعی n، $f(n)$ برابر با تعداد اعداد طبیعی کمتر از n است که نسبت به n اول نیستند و مقسوم‌علیه‌ی از n نیز نیستند. به عنوان مثال $f(۱۲)$ برابر با ۳ است زیرا در میان اعداد کمتر از ۱۲ تنها اعداد ۸، ۹و ۱۰ خاصیت گفته‌شده را دارند.
ثابت کنید برای هر عدد طبیعی k، تنها متناهی عدد طبیعی n موجود است که $f(n)$ برابر با k باشد.
(← ص. ۲۶)

۲. تمام توابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را بیابید که برای هر دو عدد طبیعی a و b داشته باشیم

$$f^a(b) + f^b(a) \mid ۲(f(ab) + b^۲ - ۱)$$

منظور از $f^a(b)$ همان $\underbrace{f(f(\cdots f(b)\cdots))}_{a}$ است.

(← ص. ۲۷)

۳. x_1 عددی طبیعی و ثابت است. ثابت کنید عدد طبیعی $m > 2500$ موجود نیست که دنباله بازگشتی $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ با شرط $x_{n+1} = x_n^{S(n)} + 1$ از جایی به بعد به پیمانه m متناوب باشد. (یعنی اعداد طبیعی N و T یافت شوند که برای هر عدد طبیعی $n \geq N$، x_n و x_{n+T} به پیمانه m برابر باشند. همچنین منظور از $S(n)$ جمع ارقام عدد n در مبنای ۱۰ است.)

(← ص. ۲۸)

امتحان جامع

۱. آیا مي توان اعداد ۱ تا ۸ را روي رئوس یک مکعب قرار داد به گونه‌ای که هر عدد مجموع ۳ عدد مجاورش را عاد کند؟ (دقت کنید از هر عدد باید دقیقاً یک بار استفاده شود.)

(← ص. ۲۹)

۲. در مثلث حاده‌الزاویه ABC، ارتفاع AD و مرکز ارتفاعی H مفروض است. قرینه‌ی H نسبت به رأس A را E می‌نامیم. نقطه‌ی X روی دایره محیطی مثلث BDE قرار دارد به طوری که $AC \parallel DX$ و نقطه‌ی Y روی دایره محیطی مثلث CDE قرار دارد به طوری که $AB \parallel DY$ است. ثابت کنید دایره محیطی مثلث AXY بر دایره محیطی مثلث ABC مماس است.

(← ص. ۳۰)

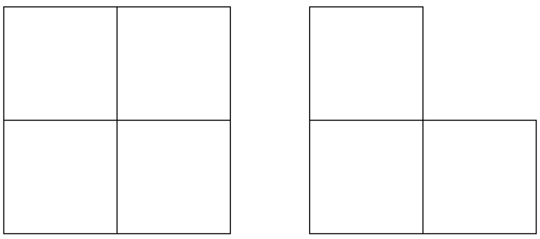
۳. تمام توابع $f : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ را بیابید که در دو شرط زیر صدق کنند:

- برای هر $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$: $f(P \circ Q) = f(Q \circ P)$.
- برای هر $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$ که $PQ \neq 0$: $f(PQ) = f(P) + f(Q)$.

(منظور از $P \circ Q$ ترکیب دو چندجمله‌ای P و Q است بدین معنی که $(P \circ Q)(x) = P(Q(x))$ و منظور از PQ هم ضرب این دو چندجمله‌ای است.)

(← ص. ۳۱)

۴. آرش و بابک به نوبت با هم بازی مقابل را بر روی یک جدول 1401×1400 انجام می‌دهند: آرش بازی را شروع می‌کند و در هر نوبت خود kتا کاشی L-شکل (کاشی شکل زیر و دوران‌های ۹۰، ۱۸۰ و ۲۷۰ درجه‌ی آن) از جدول را رنگ می‌کند. بابک نیز در هر نوبت خود یک کاشی 2×2 را رنگ می‌کند. هر خانه حداکثر یک بار می‌تواند رنگ شود و هر کس نتواند در نوبت خود کاشی‌ای را رنگ کند بازنده است. تمام اعداد طبیعی k را بیابید که آرش استراتژی برد داشته باشد.



کاشی بابک   کاشی آرش

(← ص. ۳۱)

امتحان انتخابی تیم

۱. (مرتضی ثقفیان) مرتضی ۱۰۰ مجموعه دارد. در هر گام مهدی می‌تواند دو مجموعه‌ی متفاوت از مجموعه‌های مرتضی را انتخاب کند و مرتضی اجتماع و اشتراک آن دو مجموعه را به مهدی می‌گوید. کم‌ترین تعداد گام‌ها را بیابید که مهدی بتواند همه‌ی مجموعه‌ها را شناسایی کند.

(← ص. ۳۳)

۲. (محمدامین شریفی) برای عدد طبیعی n، $\tau(n)$ و $\sigma(n)$ را به ترتیب تعداد مقسوم علیه‌های مثبت n و مجموع مقسوم علیه‌های مثبت n در نظر بگیرید. فرض کنید a و b اعدادی طبیعی باشند به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\sigma\left(a^{n}\right)$ بر $\sigma\left(b^{n}\right)$ بخش‌پذیر باشد. ثابت کنید $\tau(b)$ بر همه‌ی عوامل اول $\tau(a)$ بخش‌پذیر است.

(← ص. ۳۳)

۳. (مهدی اعتصامی فرد و علیرضا دادگرنیا) دایره محاطی داخلی مثلث ABC، به نام ω، بر اضلاع BC و AC به ترتیب در نقاط D و E مماس است. X قرینه‌ی D نسبت به B است. فرض کنید DE بر دایره محاطی خارجی نظیر رأس A در Z مماس است. دایره محیطی مثلث XZE، ω را برای بار دوم در K قطع می کند. ثابت کنید BK و AZ روی ω همرسند.

(← ص. ۳۴)

۴. (سید امیرپارسا حسینی نیری) چهارضلعی محاطی $ABCD$ با مرکز دایره محیطی O مفروض است. نقطه‌ی P محل برخورد قطرها و نقاط M و N به‌ترتیب وسط اضلاع AD و BC هستند. فرض کنید ω_1، ω_2 و ω_3 به ترتیب دایره محیطی مثلث های ADP، BCP و OMN باشند. تقاطعی از دو دایره‌ی ω_3 و ω_1 که روی کمان APD از دایره‌ی ω_1 نیست را E و تقاطعی از دو دایره‌ی ω_3 و ω_2 که روی کمان BPC از دایره‌ی ω_2 نیست را F می نامیم. ثابت کنید $OE = OF$.

(← ص. ۳۶)

۵. (نوید صفایی) همه‌ی اعداد حقیقی C را بیابید به طوری که هر دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد صحیح که از پایین کران‌دار باشد و برای هر $n \geq 2$ در رابطه‌ی

$$0 \leq a_{n-1} + Ca_n + a_{n+1} < 1$$

صدق کند متناوب باشد.

(← ص. ۳۶)

۶. (شایان غلامی) فرض کنید m، n و $a_1, a_2, \ldots, a_m$ اعداد طبیعی دل‌خواه باشند. علی و محمد این بازی را انجام می‌دهند. در هر گام، علی اعداد طبیعی $b_1, b_2, \ldots, b_m$ را انتخاب می‌کند. سپس محمد عدد طبیعی s را انتخاب می کند

و دنباله‌ی جدید $\{c_i = a_i + b_{i+s}\}_{i=۱}^{m}$ را تشکیل می‌دهد که

$$b_{m+۱} = b_۱,\ b_{m+۲} = b_۲, \dots, b_{m+s} = b_s.$$

هدف علی این است که در متناهی مرحله همه‌ی اعداد را بر n بخش‌پذیر کند.
همه‌ی اعداد طبیعی m و n را بیابید که علی، مستقل از انتخاب اولیه‌ی اعداد $a_۱, a_۲, \dots, a_m$، همواره استراتژی برد داشته باشد.

(← ص. ۳۷)

۷. (محمد احمدی) فرض کنید n عددی طبیعی باشد. یک $۲n$-ضلعی منتظم در صفحه‌ی مختصات داده شده است که یکی از بزرگ‌ترین قطرهای آن موازی محور طول‌هاست. کم‌ترین مقدار d را بیابید که یک چندجمله‌ای درجه d با ضرایب حقیقی یافت شود که نمودار آن تمام اضلاع این چندضلعی را در نقاطی غیر از رئوس چندضلعی قطع کند.
(← ص. ۳۸)

۸. (امیرمهدی محسنی) در مثلث ABC با شرط $AB < AC$، I مرکز دایره محاطی و E پای تماس دایره محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC است. نقطه‌ی F روی نیمساز خارجی رأس A به گونه‌ای قرار دارد که E و F در یک طرف AI قرار دارند و $\angle AIF = \angle AEB$. خط عمود از I بر AI، BC را در Q قطع می‌کند. دایره‌ی ω_b بر AB در B و بر FQ مماس است و دایره‌ی ω_c بر AC در C و بر FQ مماس است و هر دو دایره از داخل مثلث ABC می گذرند. اگر M وسط کمان BC از دایره محیطی ABC باشد که شامل A نیست، ثابت کنید M روی محور اصلی دوایر ω_b و ω_c قرار دارد.
(← ص. ۳۹)

۹. (مرتضی ثقفیان) $n \geq ۶$ نقطه‌ی $x_۱, x_۲, \dots, x_n$ در صفحه داریم که هیچ سه تایی هم‌خط نیستند. یک گراف با رئوس $x_۱, x_۲, \dots, x_n$ را یک شبکه‌ی بزرگ‌راهی گوییم هرگاه همبند باشد، هر یال آن پاره‌خطی بین دو تا از این نقاط باشد و هیچ دو یالی یکدیگر را در نقطه‌ای غیر از رئوس قطع نکنند. ثابت کنید سه شبکه‌ی بزرگ‌راهی وجود دارند که دوبه‌دو یال مشترکی ندارند.

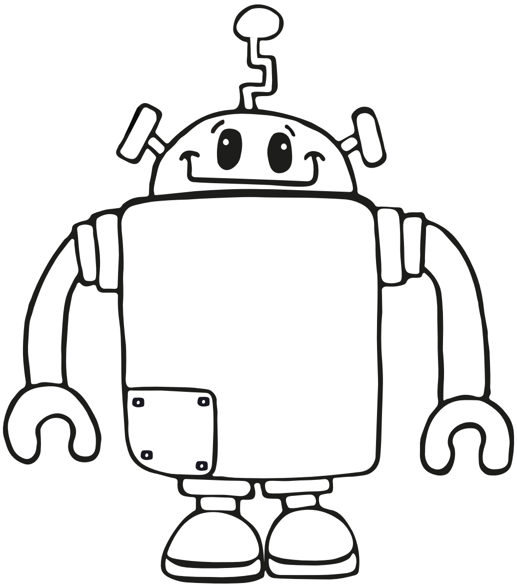
(← ص. ۴۰)

۱۰. (سید رضا حسینی دولت‌آبادی) به یک مجموعه‌ی نامتناهی $S \subseteq \mathbb{N}$ خوب می‌گوییم اگر برای هر سه تایی دوبه‌دو متمایز $a, b, c \in S$، همه‌ی مقسوم علیه‌های مثبت $\dfrac{a^c - b^c}{a - b}$ عضو S باشند. برای هر عدد طبیعی $n > ۱$، نشان دهید مجموعه‌ی خوب S وجود دارد به طوری که $n \notin S$.

(← ص. ۴۱)

۱۱. (سید محمد سیدجوادی و علیرضا توکلی) جدولی با n سطر و $۲n$ ستون مفروض است. می‌توانیم در برخی از خانه‌های جدول مانع قرار دهیم. پس از قرار دادن مانع‌ها، یک ربات در یکی از خانه‌ها قرار می‌دهیم و در یکی از چهار جهت راست، چپ، بالا یا پایین شروع به حرکت می‌کند. ربات تنها زمانی می‌تواند جهت حرکت خود را تغییر دهد که به خانه‌ای مانع‌دار یا انتهای جدول برسد (وارد خانه‌ی مانع‌دار نمی‌شود).
حداقل چه تعداد مانع در جدول باید قرار دهیم که ربات با شروع از خانه‌ای دلخواه بتواند از همه‌ی خانه‌های بدون مانع عبور کند؟

(← ص. ۴۱)



۱۲. (متین یوسفی) فرض کنید A مجموعه‌ی همه‌ی بازه‌های بسته‌ی $[a, b] \subset \mathbb{R}$ باشد. همه‌ی توابع $f : \mathbb{R} \to A$ را بیابید به طوری که

- $y \in f(x) \iff x \in f(y)$.
- $f(x) \cap f(y) = \varnothing \iff |x - y| > ۲$.
- برای هر عدد حقیقی $۰ \le r \le ۱$، داریم $f(r) = [r^۲ - ۱, r^۲ + ۱]$.

(← ص. ۴۳)

راه حل‌ها

مرحله دوم

۱. خط داده شده را محور اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم به طوری که A منطبق بر صفر و B منطبق بر ۲ باشد. فرض کنید پس از متناهی مرحله نقطه‌ی ۱ قرمز شود. دقت کنید عمل عکسِ عمل تعریف‌شده در صورت مسئله به این شکل است: یکی از دو نقطه‌ی A و B را نسبت به یکی از نقاط قرمز قرینه می‌کنیم، سپس نقطه‌ی حاصل را نسبت به همان نقطه قرینه می‌کنیم. نقطه‌ی حاصل نیز باید یک نقطه‌ی قرمز باشد. پس اگر نقطه‌ی x قرمز شده باشد طبق عمل عکس، در مرحله‌ی قبل باید یکی از نقاط $-2x$ و $6-2x$ قرمز شده باشند. از آنجا که ۱ قرمز شده است در مرحله‌ی قبل یکی از نقاط -2 و ۴ قرمز شده‌اند. حال نشان می‌دهیم اگر نقطه‌ی $x_1 \in (-\infty,-2]\cup[4,\infty)$ قرمز باشد نقاطی که در مراحل قبل از آن قرمز شده‌اند نیز همه باید در همین بازه قرار داشته باشند. طبق عمل عکس، در مرحله‌ی قبل از قرمز شدن x_1 یکی از دو نقطه‌ی $-2x_1$ و $6-2x_1$ قرمز شده‌اند. دقت کنید که

$$4 \le -2x_1 \ \text{یا}\ -2x_1 \le -8 \quad \text{و} \quad 10 \le 6-2x_1 \ \text{یا}\ 6-2x_1 \le -2$$

پس $-2x_1$ و $6-2x_1$ نیز هر دو در بازه‌ی $(-\infty,-2]\cup[4,\infty)$ قرار دارند. در نتیجه هیچ‌گاه نمی‌توانیم از این بازه خارج شویم که با انتخاب اولین نقطه‌ی قرمز در تناقض است. پس فرض اولیه غلط بوده و نقطه‌ی وسط AB پس از متناهی مرحله نمی‌تواند قرمز شود. ■

۲. فرض کنید n یک عدد خوب باشد. ارقام عدد طبیعی n را به شکل $\overline{abc}$ نشان می‌دهیم که b تنها یک رقم است که با حذف آن به یک مقسوم علیه n می‌رسیم اما a و c ممکن است از چند رقم تشکیل شده باشند. ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که $a \neq 0$. همچنین فرض کنید b از سمت راست رقم tاِم n باشد. پس در واقع داریم $n = 10^t a + 10^{t-1} b + c$ و اگر رقم b را حذف کنیم به عدد $10^{t-1}a + c$ می‌رسیم. در نتیجه

$$\left.\begin{array}{l} 10^{t-1}a + c \mid 10^t a + 10^{t-1} b + c \\ 10^{t-1}a + c \mid 10^t a + 10c \end{array}\right\} \Longrightarrow 10^{t-1}a + c \mid 10^{t-1} b - 9c$$

دقت کنید که $|10^{t-1}b - 9c|$ حداکثر t رقم دارد. حال اگر a حداقل دو رقم داشته باشد، $10^{t-1}a + c$ حداقل $t+1$ رقم دارد پس تنها حالت ممکن این است که $10^{t-1}b - 9c$ برابر با صفر باشد. این نیز نتیجه می‌دهد $10^{t-1} \mid c$ که امکان ندارد زیرا $c < 10^{t-1}$. در نتیجه a باید یک رقم داشته باشد. توجه کنید که

$$20\left(10^{t-1}a + c\right) = 2 \times 10^t a + 20c > 10^t a + 10^{t-1} b + c$$

پس اگر قرار دهیم $10^t a + 10^{t-1} b + c = k\left(10^{t-1}a + c\right)$، نتیجه می‌شود $k < 20$. از طرف دیگر می‌توان نوشت

$$10^{t-1}\left((10-k)a + b\right) = c(k-1) \Longrightarrow 10^{t-1} \mid c(k-1)$$

از آنجا که n رقم صفر ندارد c نسبت به حداقل یکی از دو عدد $۲^{t-۱}$ و $۵^{t-۱}$ اول است. اگر $(c, ۲^{t-۱}) = ۱$ آنگاه طبق لم اقلیدس نتیجه می‌شود

$$۲^{t-۱} \mid k - ۱ \Longrightarrow ۲^{t-۱} \leq k - ۱ < ۱۹ \Longrightarrow t \leq ۵$$

حالتی که $(c, ۵^{t-۱}) = ۱$ نیز به طور مشابه نتیجه می‌دهد $t \leq ۲$ پس n حداکثر ۶ رقمی است. حال به سراغ حالت $a = ۰$ می‌رویم. در این حالت داریم $n = ۱۰^{t-۱}b + c$ و با حذف b به عدد c می‌رسیم. در نتیجه

$$c \mid ۱۰^{t-۱}b + c \Longrightarrow c \mid ۱۰^{t-۱}b$$

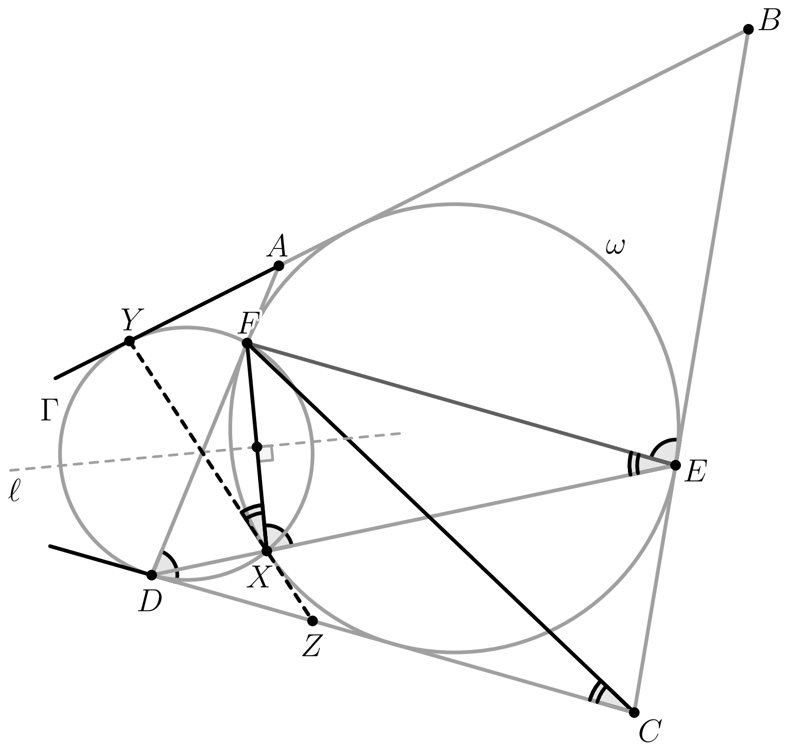
مشابه قبل دو حالت برای c داریم. اگر $(c, ۲^{t-۱}) = ۱$ طبق لم اقلیدس نتیجه می‌شود

$$c \mid ۵^{t-۱}b \Longrightarrow ۱۰^{t-۲} \leq c \leq ۵^{t-۱}b \leq ۵^{t-۱} \times ۹ \Longrightarrow ۲^{t-۲} \leq ۴۵ \Longrightarrow t \leq ۷$$

برای حالت $(c, ۵^{t-۱}) = ۱$ نیز مشابهاً نتیجه می‌شود $t \leq ۳$ پس n حداکثر ۷ رقم دارد و تعداد اعداد خوب متناهی است.

■

۳. دایره محیطی مثلث DXF را Γ و عمودمنصف FX را ℓ می‌نامیم. دقت کنید که خطوط AB و CD مماس مشترک‌های خارجی دوایر Γ و ω هستند، پس نسبت به ℓ قرینه یکدیگرند. فرض کنید Y در AB بر Γ مماس باشد و Z قرینه A نسبت به ℓ باشد. اگر خط FD را نسبت به ℓ قرینه کنیم به خط XY تبدیل می‌شود پس از آنجا که FD از A می‌گذرد، XY نیز از Z می‌گذرد.



واضح است که چهارضلعی $AFXZ$ ذوزنقه متساوی‌الساقین است پس چهار نقطه‌ی A، F، X و Z روی یک دایره قرار دارند و اگر نشان دهیم دایره محیطی مثلث FXZ از C می‌گذرد حکم ثابت می‌شود. دقت کنید که

$$\angle BEF = \angle FXE = \frac{\widehat{FXD}}{۲} = \angle FDC$$

پس چهارضلعی $FECD$ محاطی است. در نتیجه

$$\angle FCZ = \angle FCD = \angle FED = \angle FEX = \angle FXY = ۱۸۰^\circ - \angle FXZ$$

که محاطی بودن چهارضلعی $FXZC$ را نشان می‌دهد و حکم نتیجه می‌شود. $\blacksquare$

۴. فرض کنید O مرکز ω و O' مرکز دایره‌ی با شعاع کم‌تر باشد. از O خطی عمود بر OO' رسم می‌کنیم تا ω را در A و B قطع کند. نشان می‌دهیم AB قطر مورد نظر است. فرض کنید نقطه‌ی P طرف دیگر AB نسبت به O' یا روی آن قرار داشته باشد. واضح است که $\angle POO' \geq ۹۰^\circ$ در نتیجه $PO' > PO$. پس P نمی‌تواند یکی از n نقطه باشد زیرا فاصله‌ی هر یک از این نقاط از O' کم‌تر از فاصله‌ی آن از O است. این نتیجه می‌دهد همه‌ی نقاط همان طرف AB قرار دارند که O' قرار دارد و حکم ثابت می‌شود. $\blacksquare$

۵. قرار دهید $c = \frac{۹}{۱۰۰۰}$ و $n = ۱۴۰۰$. فرض خلف می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم برای هر سه عدد x، y و z که $z \geq y \geq x$ داشته باشیم

$$(z-y)(y-x)(z-x) \geq c\left(x^۴ + y^۴ + z^۴ + ۱\right). \tag{۱}$$

دقت کنید که برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم $(a+b)^۲ \geq ۴ab$، زیرا این نامساوی معادل است با $(a-b)^۲ \geq ۰$ که درستی آن واضح است. حال با استفاده از این نامساوی می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}(z-x)^۲ \geq ۴(z-y)(y-x) \Longrightarrow (z-x)^۳ &\geq ۴(z-y)(y-x)(z-x)\\ &\overset{(۱)}{\geq} ۴c\left(x^۴ + y^۴ + z^۴ + ۱\right)\\ &\geq ۴c\left(x^۴ + z^۴ + ۱\right)\end{aligned} \tag{۲}$$

توجه کنید که نامساوی آخر نتیجه می‌دهد

$$z - x \geq \sqrt[۳]{۴c} \tag{۳}$$

همچنین از طرف دیگر طبق (۲) می‌توان نوشت

$$\frac{(z-x)^۳}{x^۴ + z^۴} > ۴c \tag{۴}$$

دقت کنید که $(a+b)^۲ \leq ۲\left(a^۲ + b^۲\right)$ زیرا این نامساوی معادل است با $(a-b)^۲ \geq ۰$. با دو بار استفاده از این نامساوی نتیجه می‌شود

$$(z-x)^۴ \leq ۴\left(x^۲ + z^۲\right)^۲ \leq ۸\left(x^۴ + z^۴\right) \overset{(۴)}{\Longrightarrow} \frac{۸}{z-x} > ۴c \Longrightarrow z - x < \frac{۲}{c} \tag{۵}$$

حال فرض کنید اعداد داده شده $x_n \leq \cdots \leq x_۲ \leq x_۱$ باشند. از (۳) نتیجه می‌شود $x_{k+۲} - x_k > \sqrt[۳]{۴c}$ در نتیجه

$$\frac{۲}{c} > x_n - x_۱ > \left\lfloor \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor \sqrt[۳]{۴c} \Longrightarrow c < \frac{۲^{\frac{۱}{۴}}}{\left\lfloor \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor^{\frac{۳}{۴}}} \approx \frac{۸۷}{۱۰۰۰۰}$$

که تناقض است. پس فرض اولیه غلط بوده و حکم ثابت می‌شود. $\blacksquare$

۶. فرض کنید ب.م.م همه اعداد دور دایره برابر با k باشد. در این صورت اگر همه‌ی اعداد را بر k تقسیم کنیم چینش جدید نیز خواص مسئله را دارد و تنها تفاوت آن این است که حداقل یکی از اعداد برابر با یکی از مقسوم علیه‌های ۲۰۲۱ است. پس فرض می‌کنیم ب.م.م اعداد دور دایره برابر با ۱ است.

لم ۱. ب.م.م هر سه عدد متوالی برابر با ۱ است.

اثبات. فرض کنید a، b، c، d و e پنج عدد متوالی دور دایره باشند و سه عدد a، b و c عامل مشترک p را داشته باشند. از تساوی $c = (a,b) + (d,e)$ نتیجه می‌شود d و e نیز بر p بخش‌پذیرند و به همین ترتیب همه‌ی اعداد دور دایره بر p بخش‌پذیر می‌شوند، پس p باید برابر با ۱ باشد و این یعنی ب.م.م هر سه عدد متوالی ۱ است.

لم ۲. اگر a، b و c سه عدد متوالی دور دایره باشند آنگاه $c > (a,b)$.

اثبات. از شرط مسئله و این که ب.م.م همواره عددی مثبت است حکم نتیجه می‌شود.

فرض کنید m عدد بیشینه بین تمام اعداد دور دایره باشد و x، y، m، z و t به همین ترتیب دور دایره قرار داشته باشند. از آنجا که مجموع دو عدد طبیعی حداقل ۲ است، ۱ نمی‌تواند در بین اعداد دور دایره ظاهر شود. همچنین $m > ۴$ است زیرا ۲۰۲۱ بر هیچیک از اعداد ۲، ۳ و ۴ بخش‌پذیر نیست. طبق تساوی $m = (x,y) + (z,t)$ یکی از اعداد (x,y) و (z,t) باید حداقل $\frac{m}{۲}$ باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $(x,y) \geq \frac{m}{۲}$. اگر $x \neq y$ آنگاه یکی از دو عدد حداقل m است و از آنجا که m عدد بیشینه بود باید برابر با m باشد. طبق لم دوم، y نمی‌تواند برابر با m باشد پس باید داشته باشیم $y = \frac{m}{۲}$ و $x = m$. این نیز نتیجه می‌دهد $(z,t) = \frac{m}{۲}$. مشابه قبل z نمی‌تواند برابر با m باشد پس $z = \frac{m}{۲}$. اما از آنجا که y، m و z متوالی هستند طبق لم دوم به تناقض می‌رسیم. پس فرض $x \neq y$ باطل می‌شود و باید داشته باشیم $x = y \geq \frac{m}{۲}$. حال فرض کنید عدد قبل از x، w باشد. از لم اول نتیجه می‌شود $(w,x) = ۱$ پس می‌توان نوشت

$$x = (w,x) + (m,z) = ۱ + (m,z) \Longrightarrow x - ۱ \mid m$$

اگر m فرد باشد، از آنجا که $m \leq x \leq \frac{m+۱}{۲}$ باید داشته باشیم $\frac{m}{۲} \leq \frac{m-۱}{۲}$ که نتیجه می‌دهد $m \leq ۳$ و این با فرض $m > ۴$ در تناقض است. پس m باید زوج باشد و از آنجا که $\frac{m}{۲} \leq x \leq m$ تنها حالت ممکن $x = \frac{m}{۲} + ۱$ است. پس $(m,z) = \frac{m}{۲}$ که نتیجه می‌دهد $z = \frac{m}{۲}$. از طرف دیگر داریم

$$m = (x,x) + (z,t) = \frac{m}{۲} + ۱ + \left(\frac{m}{۲}, t\right) \Longrightarrow \frac{m}{۲} - ۱ \,\Big|\, \frac{m}{۲} \Longrightarrow \frac{m}{۲} - ۱ \,\Big|\, ۱ \Longrightarrow m = ۴$$

که این نیز با فرض $m > ۴$ در تناقض است. پس چنین چینشی وجود ندارد. ■

دوره تابستان

جبر

۱. **راه حل اول.** ابتدا نامساوی جزئی زیر را نشان می‌دهیم:

$$۳a^۲ - ۴a + ۴ \geq ۲a + ۱ \iff ۳(a-۱)^۲ \geq ۰.$$

پس به وضوح این نامساوی برقرار است. با استفاده از این نامساوی به دست می‌آید

$$\sum_{\text{دوری}} \frac{ab}{a^۲ - \frac{۴}{۳}a + \frac{۴}{۳}} \leq \sum_{\text{دوری}} \frac{۳ab}{۲a+۱}.$$

بنابراین کافی است نشان دهیم

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{دوری}} \frac{۳ab}{۲a+۱} \leq ۴ = \frac{۳}{۲}(b+c+d+a) - ۲ \\ \iff \quad & ۲ \leq \sum_{\text{دوری}} \left(\frac{۳}{۲}b - \frac{۳ab}{۲a+۱}\right) = \frac{۳}{۲}\sum_{\text{دوری}} \frac{b}{۲a+۱}. \end{aligned}$$

حال با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز به دست می‌آید

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\text{دوری}} \frac{b}{۲a+۱}\right)\left(\sum_{\text{دوری}} b(۲a+۱)\right) \geq (b+c+d+a)^۲ = ۱۶ \\ \implies \quad & \sum_{\text{دوری}} \frac{b}{۲a+۱} \geq \frac{۱۶}{\sum_{\text{دوری}} b(۲a+۱)} = \frac{۸}{۲ + \sum_{\text{دوری}} ab}. \end{aligned}$$

در نتیجه برای اثبات مسئله تنها کافی است نشان دهیم

$$\sum_{\text{دوری}} ab \leq ۴ \iff (a+c)(b+d) \leq \left(\frac{a+c+b+d}{۲}\right)^۲,$$

که نامساوی آخر طبق نامساوی حسابی-هندسی برقرار است. ■

راه حل دوم. با توجه به معادله‌ی خط مماس بر نمودار $f(a) = \frac{a}{a^۲ - \frac{۴}{۳}a + \frac{۴}{۳}}$ در نقطه‌ی $a = ۱$ می‌توان نشان داد

$$\frac{a}{a^۲ - \frac{۴}{۳}a + \frac{۴}{۳}} \leq \frac{a+۲}{۳}.$$

این رابطه با محاسبه‌ی جبری نیز قابل اثبات است. در واقع با طرفین وسطین و ساده کردن آن می‌توان به نامعادله‌ی $(a-۱)^۲(۳a+۸)\geq ۰$ رسید که به وضوح برقرار است. بنابراین می‌توان نوشت

$$\sum_{\text{دوری}} \frac{ab}{a^۲-\frac{۴}{۳}a+\frac{۴}{۳}} \leq \sum_{\text{دوری}} b\left(\frac{a+۲}{۳}\right) = \frac{۱}{۳}(a+c)(b+d)+\frac{۸}{۳}. \tag{۱}$$

مانند راه حل قبل می‌توان نشان داد $(a+c)(b+d)\leq ۴$ و با جایگذاری در (۱) حکم نتیجه می‌شود. ■

توضیح. صورت اصلی مسئله‌ی پیشنهاد شده به شکل زیر بود:

فرض کنید $\lambda\in[۱,۲]$ و a، b، c و d اعداد حقیقی مثبت باشند به طوری که $a+b+c+d=۴$. ثابت کنید

$$\frac{ab}{a^۲-\lambda a+\lambda}+\frac{bc}{b^۲-\lambda b+\lambda}+\frac{cd}{c^۲-\lambda c+\lambda}+\frac{da}{d^۲-\lambda d+\lambda}\leq ۴.$$

از آنجا که سمت چپ نامعادله یک تابع محدب نسبت به λ است بیشینه‌ی آن در نقاط انتهایی رخ می‌دهد. بنابراین کافی است مسئله را تنها برای حالت‌های $\lambda=۱,۲$ ثابت کنیم. هر دو حالت بسیار ساده هستند. به همین دلیل کارگروه انتخاب سوال حالت خاص مسئله به ازای $\lambda=\frac{۴}{۳}$ را برای امتحان انتخاب کردند.

۲. شرط‌های مسئله را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$\left|\frac{a}{b}-۱\right|\leq\frac{۱}{۲},\quad \left|\frac{b}{c}-۱\right|\leq\frac{۱}{۲},\quad \left|\frac{c}{d}-۱\right|\leq\frac{۱}{۲},\quad \left|\frac{d}{a}-۱\right|\leq\frac{۱}{۲}.$$

پس با قرار دادن $(x,y,z,t)=\left(\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{d},\frac{d}{a}\right)$ به دست می‌آید

$$|x-۱|\leq\frac{۱}{۲},\quad |y-۱|\leq\frac{۱}{۲},\quad |z-۱|\leq\frac{۱}{۲},\quad |t-۱|\leq\frac{۱}{۲},$$

و باید نشان دهیم

$$\left|\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{t}\right|>\frac{۷}{۲}.$$

تعریف کنید $x=u_x+iv_x$ که u_x و v_x اعداد حقیقی با شرط $u_x^۲+v_x^۲\leq ۲u_x-\frac{۳}{۴}$ (طبق شرط مسئله) هستند. از این نامعادله به سادگی نتیجه می‌شود $u_x\geq\frac{۳}{۸}$. از آنجا که

$$\frac{۱}{x}=\frac{u_x-iv_x}{u_x^۲+v_x^۲},$$

می‌توان نوشت

$$\left|\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{t}\right| = \left|\sum_{\text{دوری}}\frac{u_x-iv_x}{u_x^۲+v_x^۲}\right| \geq \left|\Re\left(\sum_{\text{دوری}}\frac{u_x-iv_x}{u_x^۲+v_x^۲}\right)\right| = \left|\sum_{\text{دوری}}\frac{u_x}{u_x^۲+v_x^۲}\right| \geq \sum_{\text{دوری}}\frac{u_x}{u_x^۲+v_x^۲}.$$

بنابر نامعادله‌ی $u_x\geq\frac{۱}{۲}\left(u_x^۲+v_x^۲+\frac{۳}{۴}\right)$ می‌توان نوشت

$$\sum_{\text{دوری}}\frac{u_x}{u_x^۲+v_x^۲}\geq\frac{۱}{۲}\sum_{\text{دوری}}\frac{u_x^۲+v_x^۲+\frac{۳}{۴}}{u_x^۲+v_x^۲}=۲+\frac{۳}{۸}\sum_{\text{دوری}}\frac{۱}{u_x^۲+v_x^۲}=۲+\frac{۳}{۸}\sum_{\text{دوری}}\frac{۱}{|x|^۲}.$$

دقت کنید که $xyzt = ۱$، پس با استفاده از نامساوی حسابی-هندسی به دست می‌آید

$$\sum_{\text{دوری}} \frac{۱}{|x|^۲} \geq ۴\sqrt[۴]{\frac{۱}{|x|^۲|y|^۲|z|^۲|t|^۲}} = ۴$$

در نتیجه

$$\left|\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{t}\right| \geq \sum_{\text{دوری}} \frac{u_x}{u_x^۲+v_x^۲} \geq ۲+۴\cdot\frac{۳}{۸}=\frac{۷}{۲},$$

که همان حکم مورد نظر است. با یک بررسی ساده نیز می‌توان مشاهده کرد که نامساوی حالت تساوی ندارد. ■

توضیح ۱. از آنجا که $\frac{۸u_x-۳}{۴} = ۲u_x - \frac{۳}{۴} \geq u_x^۲ + v_x^۲$، با استفاده از نامساوی حسابی-هندسی می‌توان نوشت

$$\left(\frac{\sum_{\text{دوری}}(۸u_x-۳)}{۴}\right)^۴ \geq \prod_{\text{دوری}}(۸u_x-۳) \geq ۴^۴\prod_{\text{دوری}}(u_x^۲+v_x^۲) = ۴^۴ \implies \sum_{\text{دوری}} u_x \geq \frac{۷}{۲}.$$

بنابراین

$$|x+y+z+t| \geq |\Re(x+y+z+t)| = |u_x+u_y+u_z+u_t| \geq \frac{۷}{۲}.$$

توضیح ۲. حکم مسئله‌ی پیشنهادی اصلی به شکل زیر بود:

$$\max\left\{\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\right|, \left|\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}\right|\right\} > ۲\sqrt{۳}.$$

۳. ابتدا نشان می‌دهیم درجه‌ی $P(x)$ حداکثر یک است. دقت کنید که f یک‌به‌یک است. زیرا اگر $f(y_۱) = f(y_۲)$ آنگاه می‌توان نوشت

$$(y_۱+۱)f(x) = f(x+P(x)f(y_۱)) = f(x+P(x)f(y_۲)) = (y_۲+۱)f(x) \implies y_۱ = y_۲.$$

حال با قرار دادن $x+P(x)f(z)$ به جای x در تساوی داده شده به دست می‌آید

$$f(x+P(x)f(z)+P(x+P(x)f(z))f(y)) = (y+۱)f(x+P(x)f(z)) = (y+۱)(z+۱)f(x).$$

با جابجا کردن y و z در تساوی بالا سمت راست تغییری نمی‌کند. پس با استفاده از یک‌به‌یکی تابع می‌توان نتیجه گرفت

$$P(x)(f(y)-f(z)) = f(y)P(x+P(x)f(z)) - f(z)P(x+P(x)f(y)).$$

فرض کنید $z \neq y$ و سپس قرار دهید $f(y) = A$ و $f(z) = B$. باز هم از یک‌به‌یکی تابع داریم $A \neq B$. در نتیجه

$$(A-B)P(x) = AP(x+BP(x)) - BP(x+AP(x)).$$

فرض کنید $d = \deg(P) > ۱$. اگر a_d ضریب پیشروی $P(x)$ باشد آنگاه ضریب $x^{d^۲}$ در طرف راست تساوی برابر با $a_d^{d+۱}AB(A^{d-۱}-B^{d-۱}) \neq ۰$ است. اما از آنجا که $d^۲ > d$ در طرف چپ تساوی این ضریب صفر است که تناقض است. بنابراین $d \leq ۱$.

قرار دهید $P(x) = ax + b$ که $a, b \geq 0$. بنابراین تساوی اصلی مسئله را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(x + (ax + b)f(y)) = (y + 1)f(x) \tag{1}$$

ادعا می‌کنیم $b = 0$. برای اثبات این ادعا فرض می‌کنیم $b > 0$ و آن را به تناقض می‌رسانیم. بنابر این فرض می‌توان در (۱) به جای x، $bf(x)$ را قرار داد که نتیجه می‌دهد

$$f(abf(x)f(y) + b(f(x) + f(y))) = (y + 1)f(bf(x))$$

با جابجا کردن x و y در تساوی بالا به دست می‌آید $\frac{f(bf(x))}{x+1} = c$ که c عددی ثابت است. همچنین اگر در این تساوی به جای x، $bf(x)$ را قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$c(bf(x) + 1) = f(bf(bf(x))) = f(bc(x + 1)). \tag{2}$$

حال ادعا می‌کنیم عدد حقیقی مثبت t وجود دارد که $f(t) = c$. فرض کنید این گونه نباشد. دقت کنید که اگر z در برد f باشد آنگاه $z(y + 1)$ نیز در برد f است و با تغییر y همه‌ی اعداد بزرگ‌تر از z ساخته می‌شوند. پس برد f شامل کل بازه‌ی $[z, +\infty)$ خواهد بود. در نتیجه طبق فرض خلف c عضوی از بازه‌ی $[f(bc), +\infty)$ نیست و باید داشته باشیم $f(bc) > c$. بنابراین عدد حقیقی مثبت x وجود دارد که $f(bc) = c(x + 1)$. از طرف دیگر می‌دانیم $f(bf(x)) = c(x + 1)$ پس از یک‌به‌یکی تابع نتیجه می‌شود $f(x) = c$ که خلاف فرض است. بنابراین وجود t ثابت می‌شود. می‌توان نوشت

$$c(x + (ax + b)f(y) + 1) = f(bf(x + (ax + b)f(y))) \stackrel{(1)}{=} f(bf(x)(y + 1)).$$

در رابطه‌ی بالا قرار دهید $x = t$. در این صورت به دست می‌آید

$$c(t + (at + b)f(y) + 1) = f(bc(y + 1)) \stackrel{(2)}{=} c(bf(y) + 1),$$

که نتیجه می‌دهد $f(y)$ عددی ثابت است. اما تابع ثابت در معادله‌ی (۱) صدق نمی‌کند. بنابراین فرض $b > 0$ غلط بوده و تنها حالت ممکن $b = 0$ است.

تساوی (۱) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$f(x(1 + af(y))) = (1 + y)f(x).$$

اگر تعریف کنیم $g(x) = \frac{f(x)}{f(1)}$ آنگاه به دست می‌آید

$$g(x(1 + rg(y))) = (1 + y)g(x), \tag{3}$$

که $r = af(1)$ و $g(1) = 1$. با قرار دادن $x = 1$ نتیجه می‌شود $g(1 + rg(y)) = 1 + y$. از این نیز به دست می‌آید $g(x(1+rg(y))) = g(x)g(1+rg(y))$. دقت کنید که g نیز مانند f از جایی به بعد پوشا است بنابراین اگر تعریف کنیم $z = 1 + rg(y)$ آنگاه می‌توان گفت عدد حقیقی مثبت M وجود دارد که برای هر $z > M$ داریم $g(xz) = g(x)g(z)$. حال فرض کنید $z \leq M$ و y را به شکلی انتخاب کنید که هر دوی y و zy از M بزرگ‌تر باشند. آنگاه

$$g(xz)g(y) = g(xzy) = g(x)g(zy) = g(x)g(z)g(y) \implies g(xz) = g(x)g(z).$$

پس برای هر دو عدد حقیقی مثبت x و z داریم $g(xz) = g(x)g(z)$ که یعنی g ضربی است. از آنجا که g از پایین کران‌دار است نتیجه می‌شود $g(x) = x^s$ که s عددی حقیقی است (در اینجا از یکی از قضایای توابع کوشی استفاده کردیم). با قرار دادن این تساوی در (۳) به دست می‌آید $s = 1$ و به سادگی می‌توان مشاهده کرد که تنها جواب مسئله $P(x) = ax$ و $f(x) = \frac{1}{a}x$ است. ■

ترکیبیات

۱. دقت کنید که برای هر x طبیعی داریم $\gcd(a,x) \leq a$. از آنجا که S مجموعه‌ای نامتناهی است طبق اصل لانه کبوتری مجموعه‌ی نامتناهی $S' \subseteq S - \{a\}$ وجود دارد که برای هر دو عدد $x, y \in S'$ داریم $\gcd(a,x) = \gcd(a,y)$. می‌توان فرض کرد که اگر $z \in S - (S' \cup \{a\})$ و $x \in S'$ آنگاه $\gcd(a,z) \neq \gcd(a,x)$. اگر $x, y \in S'$ وجود داشته باشند که $\gcd(x,y) \neq \gcd(a,x)$ آنگاه x، a و y حکم مسئله را برقرار می‌کنند. پس فرض می‌کنیم برای هر $x, y \in S'$ داریم $\gcd(a,x) = \gcd(a,y) = \gcd(x,y)$. دقت کنید که هر سه عدد b، c و d نمی‌توانند عضو S' باشند زیرا در غیر این صورت

$$\gcd(a,b) = \gcd(a,c) = \gcd(a,d) = \gcd(c,d),$$

که در تناقض با فرض مسئله است. این نشان می‌دهد مجموعه‌ی $S - (S' \cup \{a\})$ ناتهی است و می‌توان عضوی از آن مانند s را انتخاب کرد.

مشابه قبل از آنجا که S' نامتناهی است مجموعه‌ی نامتناهی $S'' \subseteq S'$ وجود دارد که برای هر دو عدد $x, y \in S''$ داریم $\gcd(s,x) = \gcd(s,y)$. باز هم مشابه قبل می‌توانیم فرض کنیم برای هر $x, y \in S''$، $\gcd(s,x) = \gcd(s,y) = \gcd(x,y)$. بنابراین می‌توان نوشت (دقت کنید که $S'' \subseteq S'$)

$$\gcd(s,x) = \gcd(x,y) = \gcd(a,x).$$

از آنجا که فرض کردیم $s \notin S'$ داریم $\gcd(a,s) \neq \gcd(a,x)$ پس حکم مسئله ثابت می‌شود. ■

توضیح. این مسئله، سوال اول بخش ترکیبیات از لیست نهایی مسائل المپیاد جهانی ۲۰۲۱ بود.

۲. جواب مسئله بله است. ابتدا خانه‌ای از جدول را به عنوان مبدأ در نظر می‌گیریم و آن را با صفر پر می‌کنیم. سپس به طور استقرایی جدول $(۲k+۱) \times (۲k+۱)$ به مرکز مبدأ را با جایگشتی از اعداد

$$(-۲k^۲ - ۲k, -۲k^۲ - ۲k + ۱, \dots, ۰, \dots, ۲k^۲ + ۲k - ۱, ۲k^۲ + ۲k),$$

پر می‌کنیم به طوری که هر سطر و ستون آن به ترتیب از چپ به راست و از بالا به پایین صعودی باشد. برای پایه‌ی استقرا $(k = ۰)$ که حکم واضح است. حال فرض می‌کنیم جدول $(۲k+۱) \times (۲k+۱)$ به مرکز مبدأ با اعداد گفته شده پر شده است. قرار دهید $m = ۲k^۲ + ۲k$ و جدول $(۲k+۳) \times (۲k+۳)$ به شکل زیر را در نظر بگیرید.

$-(m+۴k+۴)$	$-(m+۴k+۳)$	$\cdots$	$-(m+۲k+۳)$	$m+۱$
$-(m+۲k+۲)$				$m+۲$
$-(m+۲k+۱)$		جدول $(۲k+۱) \times (۲k+۱)$		$\vdots$
$\vdots$				$m+۲k+۱$
$-(m+۲)$				$m+۲k+۲$
$-(m+۱)$	$m+۲k+۳$	$\cdots$	$m+۴k+۳$	$m+۴k+۴$

واضح است که در این جدول اعداد از چپ به راست و از بالا به پایین به ترتیب صعودی قرار دارند. پس به همین ترتیب می‌توان با جایگشتی از اعداد صحیح کل جدول را به شکل خواسته شده پر کرد. ■

۳. یک بلوک از n تیله به رنگ‌های $C_۱, C_۲, \ldots, C_n$ را بلوک زیبا می‌نامیم. نشان می‌دهیم هر عدد $m \geq n(n-۱)$ رنگی است. فرض کنید $m = nk + r$ که $۰ \leq r \leq n-۱$ و $k \geq n-۱$. دور دایره k بلوک زیبا قرار دهید سپس r بلوک متوالی را انتخاب کنید و انتهای هر بلوک، یک تیله به رنگ $C_۱$ قرار دهید (دقت کنید که $r \leq n-۱ \leq k$ پس r بلوک انتخاب شده متمایزند). به سادگی می‌توان مشاهده کرد که این تیله‌ها شرایط مسئله را برآورده می‌سازند.
حال نشان می‌دهیم عدد $n(n-۱)-۱$ رنگی نیست. خلاف آن را فرض کنید. بنابراین بنابر اصل لانه کبوتری رنگی وجود دارد که حداکثر $n-۲$ تیله از آن رنگ داریم. همچنین بنابر فرض مسئله بین هر دوتا از آن‌ها حداکثر n تیله وجود دارد. بنابراین تعداد کل تیله‌ها حداکثر $(n-۲)(n+۱)$ است. اما

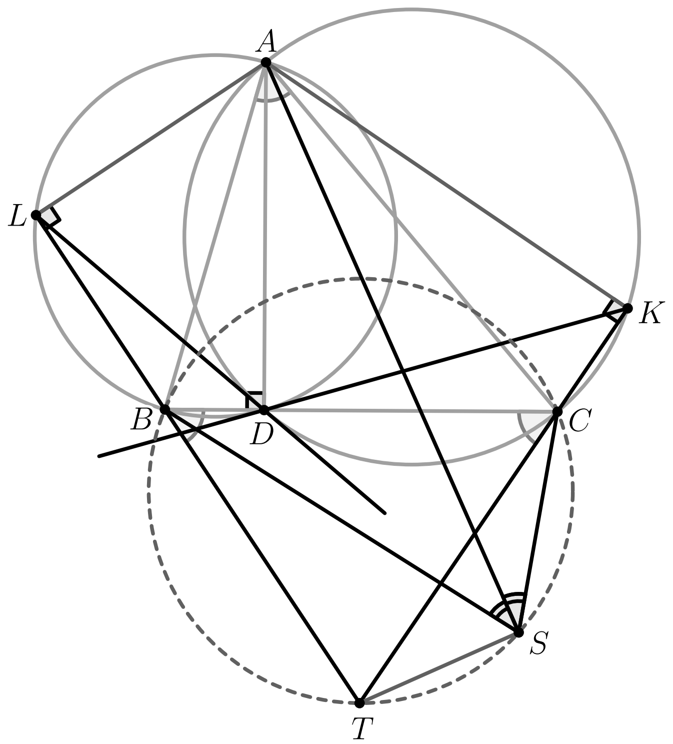
$$n(n-۱)-۱ = n(n-۲)+n-۱ > n(n-۲)+n-۲ = (n+۱)(n-۲),$$

که تناقض است. ■

توضیح. این مسئله، سوال دوم بخش ترکیبیات از لیست نهایی مسائل المپیاد جهانی ۲۰۲۱ بود.

هندسه

۱. طبق فرض سوال نقاط K و L به ترتیب روی دایره محیطی مثلث‌های ACD و ABD قرار دارند.



دقت کنید که $\angle LBA = \angle ADL = \angle ACB$. به طور مشابه $\angle KCA = \angle CBA$. فرض کنید T تقاطع BK و CL باشد. واضح است که K و L روی دایره‌ی به قطر AT قرار دارند بنابراین برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم S نیز روی همین دایره قرار دارد که معادل است با $\angle AST = ۹۰^\circ$. سپس

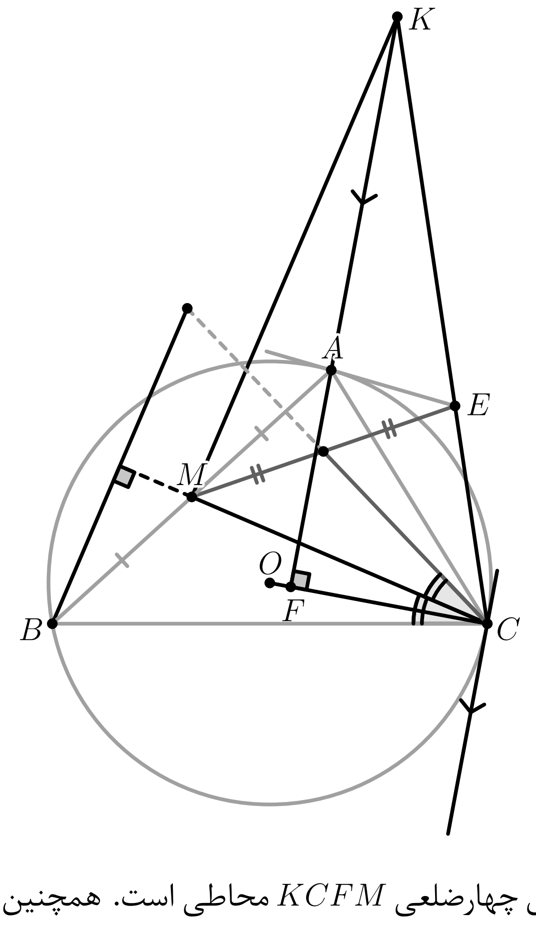
$$\angle TBC = ۱۸۰^\circ - \angle CBA - \angle ABL = ۱۸۰^\circ - \angle CBA - \angle ACB = \angle BAC.$$

به طور مشابه $\angle TCB = \angle BAC$. بنابراین TBC یک مثلث متساوی‌الساقین است و $\angle CTB = ۱۸۰^\circ - ۲\angle BAC$. طبق تعریف S واضح است که

$$\angle BSC = ۳۶۰^\circ - \angle ABS - \angle ACS - \angle BAC = \angle ABC + \angle ACB - \angle BAC = ۱۸۰^\circ - ۲\angle BAC.$$

در نتیجه چهارضلعی $BTSC$ محاطی است. از آنجا که T وسط کمان $\widehat{BSC}$ است، ST نیمساز خارجی $\angle BSC$ است. به سادگی می‌توان مشاهده کرد که طبق تعریف S، AB و AC به ترتیب نیمساز خارجی زوایای $\angle SBC$ و $\angle SCB$ هستند. بنابراین A مرکز دایره محاطی خارجی مثلث BSC است که نتیجه می‌دهد SA نیمساز زاویه‌ی $\angle BSC$ است. پس $\angle AST = ۹۰^\circ$ و حکم معادل ثابت می‌شود. ■

۲. دقت کنید که KA با خطی که از C مماس بر دایره محیطی مثلث ABC رسم می‌شود موازی است. بنابراین اگر O مرکز دایره محیطی ABC باشد آنگاه $CO \perp KA$. پس اگر تقاطع KA و CO را F بنامیم، داریم $\angle KFC = ۹۰^\circ$.



از طرف دیگر $\angle KMC = ۹۰^\circ$ پس چهارضلعی $KCFM$ محاطی است. همچنین به وضوح $\angle AFO = \angle AMO = ۹۰^\circ$ که نتیجه می‌دهد چهارضلعی $OFAM$ نیز محاطی است. بنابراین

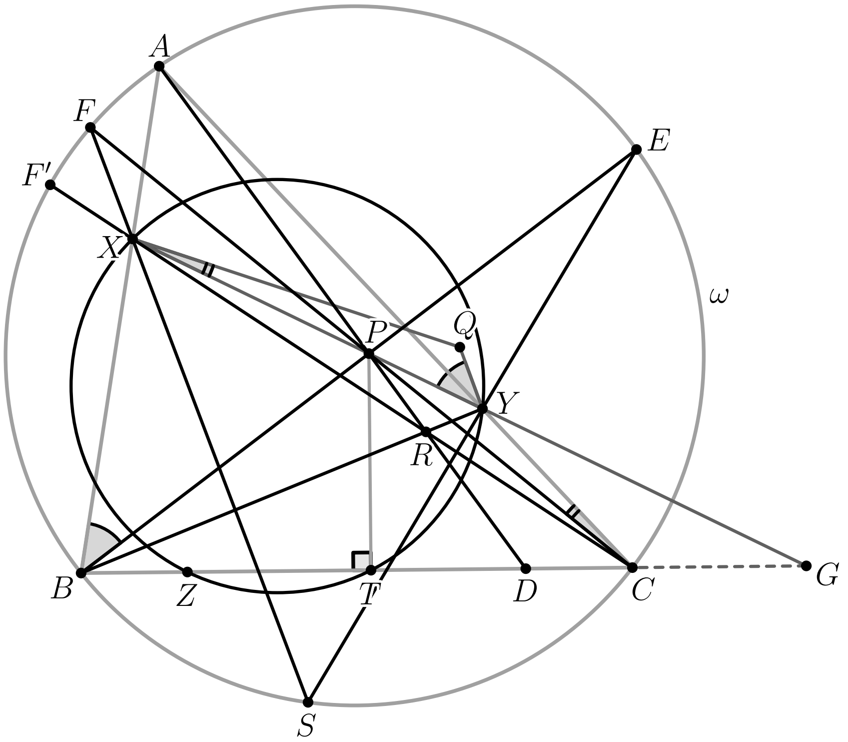
$$\angle MCE = \angle MCK = \angle MFK = \angle MFA = \angle MOA = \angle BCA.$$

همچنین داریم $\angle MAE = \angle BAE = ۱۸۰^\circ - \angle BCA$ پس چهارضلعی $AECM$ محاطی است.
حال دقت کنید که $\angle CEM = \angle CAM = \angle CAB$. بنابراین $\triangle MCE \sim \triangle BCA$. فرض کنید D وسط پاره‌خط ME باشد. بنابر تشابه گفته شده M و D اجزای نظیر دو مثلث هستند و $\angle BCM = \angle MCD$. پس قرینه‌ی خط BC نسبت به CM از D می‌گذرد و حکم ثابت می‌شود. ■

۳. دایره محیطی مثلث ABC را ω می‌نامیم. فرض کنید E و F تقاطع دوم ω با خطوط BP و CP باشند. همچنین اگر تقاطع EY و FX را S بنامیم، بنابر قضیه‌ی پاسکال در شش‌ضلعی $ABESFC$ نتیجه می‌شود S روی ω قرار دارد. دقت کنید که

$$\angle XSY = \angle FSE = \angle ABP + \angle ACP = \angle QYX + \angle QXY = ۱۸۰^\circ - \angle XQY,$$

پس چهارضلعی $QXSY$ محاطی است. در ادامه نشان می‌دهیم S نقطه‌ای ثابت است.



فرض کنید F' نقطه تقاطع دوم CX با ω و G نقطه تقاطع XY و BC باشد. طبق فرض‌های مسئله TZ نیمساز خارجی زاویه‌ی $\angle XTY$ است و $\angle ZTP = ۹۰^\circ$. پس $(GP, XY) = -۱$ که نتیجه می‌دهد خطوط BY، CX و AP همرسند. فرض کنید R نقطه‌ی همرسی این خطوط و D نقطه تقاطع AP و BC باشد. می‌توان نوشت

$$-۱ = B(GP, XY) = C(DP, AR) = X(BF, AF') = (AS, BC),$$

بنابراین S محل برخورد زیرمیانه‌ی نظیر رأس A با ω است که نقطه‌ای ثابت است. ■

نظریه اعداد

۱. واضح است که برای اعداد اول مانند p داریم $f(p) = -۱$. پس معادلهٔ $f(n) = k$ تنها به ازای اعداد مرکب n می‌تواند برقرار شود. حال لم زیر را برای اعداد مرکب اثبات می‌کنیم:

لم. برای هر n مرکب نامساوی $n - \varphi(n) \geq \sqrt{n}$ برقرار است، که منظور از $\varphi(n)$ تعداد اعداد طبیعی کم‌تر از n است که نسبت به n اول هستند.

اثبات. فرض کنید $p_۱$ کوچک‌ترین عامل اول n و تجزیهٔ n به عوامل اول به شکل $p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \dots p_t^{\alpha_t}$ باشد. طبق فرمول محاسبهٔ $\varphi(n)$ می‌توان نوشت

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{p_۱ - ۱}{p_۱} \cdot \frac{p_۲ - ۱}{p_۲} \dots \frac{p_t - ۱}{p_t} \leq \frac{p_۱ - ۱}{p_۱}.$$

بنابراین $n-\varphi(n)\geq \frac{n}{p_۱}$. فرض کردیم n مرکب است و $p_۱$ کوچک‌ترین عامل اول n است پس $p_۱\leq\sqrt{n}$ و در نتیجه $n-\varphi(n)\geq\sqrt{n}$.

فرض کنید k عددی طبیعی و ثابت و n عددی مرکب باشد که $f(n)=k$. کوچک‌ترین عامل اول n را q بنامید. دقت کنید که n بر هیچ‌یک از اعداد بین $\frac{n}{q}$ و n بخش‌پذیر نیست پس $f(n)$ حداقل برابر با تعداد اعداد بین $\frac{n}{q}$ و n است که نسبت به n اول نیستند. اگر این عدد را با T_n نشان دهیم آنگاه واضح است که

$$T_n=n-\frac{n}{q}-\left(\varphi(n)-\varphi\left(\frac{n}{q}\right)\right)\geq\left(۱-\frac{۱}{q}\right)(n-\varphi(n))\overset{\text{لم}}{\geq}\frac{\sqrt{n}}{۲}.$$

در نامساوی‌های بالا از این که $\varphi\left(\frac{n}{q}\right)\geq\frac{\varphi(n)}{q}$ و $q\geq ۲$ استفاده شده است. پس باید داشته باشیم

$$k=f(n)\geq T_n\geq\frac{\sqrt{n}}{۲}\implies n\leq ۴k^۲,$$

که این یعنی n متناهی حالت می‌تواند داشته باشد و حکم نتیجه می‌شود. $\blacksquare$

۲. با قرار دادن $b=۱$ به دست می‌آید $f^a(۱)+f(a)\mid ۲f(a)$ از آنجا که $f^a(۱)+f(a)>f(a)$ تنها حالت ممکن $f^a(۱)+f(a)=۲f(a)$ است که نتیجه می‌دهد $f(a)=f^a(۱)$. بنابراین

$$f^a(b)=f^{a-۱}(f(b))=f^{a-۱}\left(f^b(۱)\right)=f^{a+b-۱}(۱)=f(a+b-۱).$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد $f^b(a)=f(a+b-۱)$. پس فرض مسئله را می‌توان به شکل $f(a+b-۱)\mid f(ab)+b^۲-۱$ نوشت. با جابجا کردن a و b می‌توان نتیجه گرفت $f(a+b-۱)\mid f(ab)+a^۲-۱$. پس اگر این دو بخش‌پذیری را از هم کم کنیم به دست می‌آید

$$f(a+b-۱)\mid b^۲-a^۲. \qquad (۱)$$

اگر f یک‌به‌یک باشد آنگاه از تساوی $f(f(n))=f^۲(n)=f(n+۱)$ به دست می‌آید $f(n)=n+۱$ که یک جواب مسئله است. حال فرض کنید f یک‌به‌یک نباشد بنابراین اعداد طبیعی $r\neq s$ وجود دارند که $f(r)=f(s)$. این نتیجه می‌دهد $f^r(۱)=f^s(۱)$. بنابراین

$$f(m+r)=f^{m+r}(۱)=f^m\left(f^r(۱)\right)=f^m\left(f^s(۱)\right)=f^{m+s}(۱)=f(m+s),$$

پس f تابعی متناوب است که نتیجه می‌دهد برد f تنها شامل متناهی مقدار است. در نتیجه عدد طبیعی M وجود دارد که برای هر n طبیعی، $f(n)<M$. عدد اول $p>M$ را در نظر بگیرید. با قرار دادن $b=\frac{p+۱}{۲}$ و $a=\frac{p-۱}{۲}$ در (۱) به دست می‌آید $p\mid f(p-۱)$ و از آنجا که $f(p-۱)<M<p$ تنها حالت ممکن $f(p-۱)=۱$ است.
فرض کنید d کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که $f(d)=f^d(۱)=۱$. طبق قضیه‌ی تقسیم اعداد صحیح نامنفی u و v وجود دارند که $p-۱=du+v$ و $v<d$. می‌توان نوشت

$$۱=f(p-۱)=f^{p-۱}(۱)=f^{du+v}(۱)=f^v\left(f^{du}(۱)\right)=f^v(۱).$$

از آنجا که $v<d$ باید داشته باشیم $v=۰$. این یعنی $d\mid p-۱$. از آنجا که این رابطه برای هر $p>M$ برقرار است تنها حالت ممکن $d\in\{۱,۲\}$ است. پس در هر صورت $f(f(۱))=۱$. این نتیجه می‌دهد $f(۲k)=f^{۲k}(۱)=۱$،

برای هر عدد طبیعی k. همچنین $f(۲k+۱) = f(f(۲k)) = f(۱)$. در نهایت با قرار دادن $a = b = ۲$ در رابطه‌ی $f(a+b-۱) \mid f(ab) + b^۲ - ۱$ به دست می‌آید $f(۱) \in \{۱, ۲, ۴\}$. به سادگی می‌توان بررسی کرد که هر کدام از این حالت‌ها یک جواب معتبر برای مسئله را می‌سازند پس همه‌ی جواب‌های ممکن به دست آمد. ■

۳. اثبات را با یک لم آغاز می‌کنیم.

لم ۱. فرض کنید $m \geq ۳$ عددی طبیعی باشد که توانی از ۲ نیست. $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دو دنباله از اعداد طبیعی هستند به طوری که $x_{n+۱} = x_n^{y_n} + ۱$، برای هر n طبیعی. اگر دنباله‌ی x_n از جایی به بعد به پیمانه‌ی m متناوب شود آنگاه اعداد طبیعی b، d و T وجود دارند به طوری که $۲ \leq d \leq m-۱$ و دنباله‌ی $\{y_{b+kT}\}_{k=۰}^{\infty}$ به پیمانه‌ی d ثابت است.

برهان. از آنجا که m توانی از ۲ نیست، عامل اول فردی مانند p دارد. طبق شرط لم دنباله‌ی x_n از جایی به بعد به پیمانه‌ی p نیز متناوب است. بنابراین عدد طبیعی T وجود دارد که برای هر n به اندازه‌ی کافی بزرگ $x_{n+T} - x_n$ بر p بخش‌پذیر است. عدد طبیعی b را به اندازه‌ی کافی بزرگ و به شکلی در نظر بگیرید که $x_b \overset{p}{\equiv} a$ و $a \neq ۰, ۱$. از آنجا که اگر x_n به پیمانه‌ی p صفر باشد آنگاه $x_{n+۱}$ به پیمانه‌ی p یک و $x_{n+۲}$ به پیمانه‌ی p دو خواهد بود چنین bای وجود دارد. طبق شرط تناوب واضح است که $x_{b+kT} \overset{p}{\equiv} a$. از این به دست می‌آید

$$p \mid a^{y_{b+kT}} - a^{y_b} \overset{(p,a)=۱}{\Longrightarrow} p \mid a^{|y_{b+kT} - y_b|} - ۱,$$

بنابراین اگر مرتبه‌ی a به پیمانه‌ی p را d در نظر بگیریم آنگاه $|y_{b+kT} - y_b|$ بر d بخش‌پذیر است. پس دنباله‌ی $\{y_{b+kT}\}_{k=۰}^{\infty}$ به پیمانه‌ی d ثابت است. □

لم ۲. فرض کنید b، T و d اعدادی طبیعی باشند. اگر دنباله‌ی $\{S(b+kT)\}_{k=۰}^{\infty}$ به پیمانه‌ی d ثابت باشد آنگاه T بر d بخش‌پذیر است و $d \in \{۱, ۳, ۹\}$.

برهان. قرار دهید $k = ۱۰^r s$ که $۱۰^r > b$. آنگاه می‌توان نوشت

$$S(b) \overset{d}{\equiv} S(۱۰^r sT + b) = S(۱۰^r sT) + S(b) = S(sT) + S(b),$$

بنابراین $d \mid S(sT)$. می‌توان فرض کرد $(۱۰, T) = ۱$، زیرا اگر $T = ۲^{\alpha}۵^{\beta}T'$ که $(۱۰, T') = ۱$ آنگاه داریم $S(sT') = S\left(\left(s۲^{\gamma-\alpha}۵^{\gamma-\beta}\right)T\right)$، به ازای عدد طبیعی و به اندازه‌ی کافی بزرگ γ.
حال عدد طبیعی $s_۰$ وجود دارد که $s_۰T \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱$. همچنین اگر $۱۰^{\ell} > s_۰T$ عدد طبیعی $s_۱$ را طوری انتخاب کنید که $s_۱T \overset{۱۰^{\ell+۱}}{\equiv} ۹$. به سادگی می‌توان مشاهده کرد که $S((s_۰+s_۱)T) = S(s_۰T) + S(s_۱T) - ۹$. از آنجا که $S(s_۰T)$، $S(s_۱T)$ و $S((s_۰+s_۱)T)$ هر سه بر d بخش‌پذیرند نتیجه می‌شود $d \mid ۹$. در نهایت دقت کنید که $S(T) \overset{۹}{\equiv} T$، بنابراین T نیز بر d بخش‌پذیر است. □

فرض کنید p عامل اول فردی از m و T کوچک‌ترین دوره تناوب دنباله باشد. دقت کنید که عدد طبیعی و به اندازه‌ی کافی بزرگ i وجود دارد که $S(i)$ بر $p-۱$ بخش‌پذیر است. اگر $p \mid x_i$ آنگاه $x_{i+۲} \overset{p}{\equiv} ۲$ و اگر $p \nmid x_i$ آنگاه $x_{i+۱} \overset{p}{\equiv} ۲$. بنابراین در هر صورت عضوی از دنباله وجود دارد که به پیمانه‌ی p برابر با ۲ شود. فرض کنید d مرتبه‌ی ۲ به پیمانه‌ی p باشد و در اثبات لم ۱ قرار دهید $a = ۲$. این نتیجه می‌دهد دنباله‌ی $\{S(i+kT)\}_{k=۰}^{\infty}$ به پیمانه‌ی d ثابت است. پس طبق لم ۲ باید داشته باشیم $d \mid ۹$. از این نیز به دست می‌آید $p \mid ۲^۹ - ۱ = ۵۱۱$.

حال فرض کنید 2^c بزرگ‌ترین توان دو در m باشد. j را عددی طبیعی و به اندازه‌ی کافی بزرگ در نظر بگیرید. اگر x_j فرد باشد آنگاه مرتبه‌ی x_j به پیمانه‌ی 2^c توانی از دو است. اما از طرف دیگر برای متناوب شدن دنباله طبق لم‌های ۱ و ۲ مرتبه‌ی x_j باید ۹ را نیز بشمارد. پس تنها حالت ممکن ۱ $\stackrel{2^c}{\equiv} x_j$ است که نتیجه می‌دهد ۲ $\stackrel{2^c}{\equiv} x_{j+1}$. از آنجا که x_{j+2} نیز عددی فرد است باید داشته باشیم ۱ $\stackrel{2^c}{\equiv} x_{j+2}$ و به همین ترتیب برای هر عدد صحیح $k \geq 0$ داریم

$$1 \stackrel{2^c}{\equiv} x_{j+2k} \stackrel{2^c}{\equiv} 2^{S(j+2k-1)} + 1 \implies S(j+2k-1) \geq c.$$

اگر j زوج باشد آنگاه عدد طبیعی k وجود دارد که $S(j+2k-1) = 2$ و اگر j فرد باشد می‌توان k را به شکلی یافت که $S(j+2k-1) = 1$. بنابراین در هر دو حالت داریم $c \leq 2$. پس $m \leq 2^2 \times 511 = 2044 < 2500$ که در تناقض با فرض سوال است. ■

توضیح ۱. دقت کنید که $511 = 7 \times 73$. می‌توان همه‌ی اعدادی که مرتبه‌ی آن‌ها به پیمانه‌ی ۷ یا ۷۳ عضو مجموعه‌ی $\{1, 3, 9\}$ است، را پیدا کرد و با بررسی حالت‌های ممکن به این نتیجه رسید که m نمی‌تواند عامل اول فرد داشته باشد. پس تنها حالت‌های ممکن برای متناوب شدن دنباله $m = 1, 2, 4$ است.

توضیح ۲. مسئله‌ی زیر مسئله‌ای است که ابتدا توسط طراح پیشنهاد شده بود و کمیته‌ی انتخاب سوال این مسئله را به مسئله‌ای چالش‌برانگیزتر تبدیل کرد.

فرض کنید x_1 عددی صحیح باشد. همه‌ی اعداد طبیعی $m \geq 3$ را بیابید که دنباله‌ی

$$x_{n+1} = x_n^{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor} + 1,$$

از جایی به بعد به پیمانه‌ی m متناوب باشد.

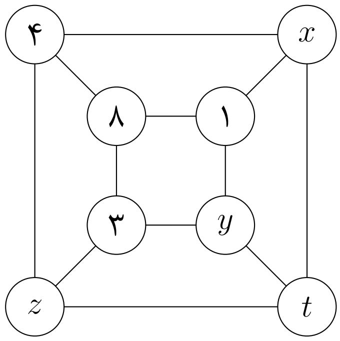
امتحان جامع

۱. جواب مسئله خیر است. فرض کنید این کار امکان‌پذیر باشد و برای هر $1 \leq i \leq 8$، N_i مجموعه‌ی اعدادی باشد که با i مجاورند. طبق فرض مسئله مجموع اعضای N_i بر i بخش‌پذیر است. از آنجا که مجموع سه عدد طبیعی کوچک‌تر از ۸ حداکثر $18 = 7 + 6 + 5$ است، مجموع اعضای N_8 تنها می‌تواند ۸ یا ۱۶ باشد. با بررسی حالات مختلف به سادگی می‌توان مشاهده کرد که N_8 برابر با یکی از مجموعه‌های $\{3, 6, 7\}$، $\{4, 5, 7\}$، $\{1, 2, 5\}$ یا $\{1, 3, 4\}$ است. در ادامه هر چهار حالت را بررسی می‌کنیم.

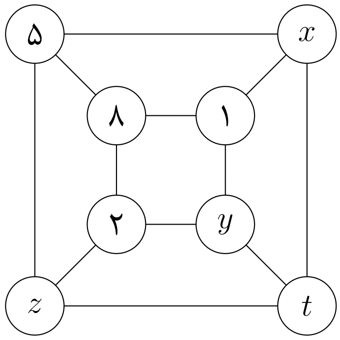
- اگر $N_8 = \{3, 6, 7\}$ آنگاه $8 \in N_6$ پس می‌توان قرار داد $N_6 = \{x, y, 8\}$. به وضوح $N_6 \cap N_8 = \varnothing$. حال با توجه به فرض مسئله $x + y + 8$ بر ۶ بخش‌پذیر است. اما $11 = 1 + 2 + 8 \leq x + y + 8 \leq 4 + 5 + 8 = 17$ که نتیجه می‌دهد باید داشته باشیم $x + y + 8 = 12$. از این نیز به دست می‌آید $N_6 = \{1, 3, 8\}$ که در تناقض با شرط $N_6 \cap N_8 = \varnothing$ است.

- حالت $N_8 = \{4, 5, 7\}$ مشابه حالت قبل است، تنها کافی است به جای N_6 این بار N_7 را در نظر بگیریم.

- اگر $N_8 = \{1, 3, 4\}$، فرض کنید اعداد x، y، z و t مانند شکل زیر قرار داشته باشند. واضح است که $x + y + z + t = 20$ و $t \mid x + y + z$. بنابراین $t \mid 20$ که نتیجه می‌دهد $t = 5$. از طرف دیگر $y \mid 1 + 3 + t = 9$ پس y باید ۱ یا ۳ باشد که امکان ندارد.

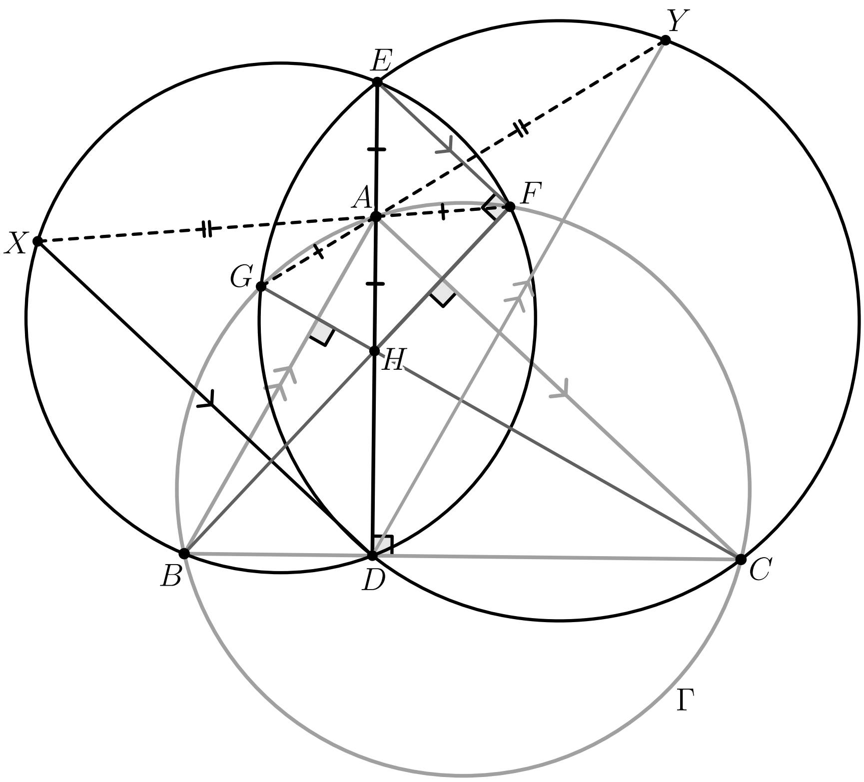


- اگر $N_۸ = \{۱, ۲, ۵\}$، فرض کنید اعداد x، y، z و t مانند شکل زیر قرار داشته باشند. مشابه حالت قبل به دست می‌آید $t = ۴$. اما از طرف دیگر $۱ + ۵ + t = ۱۰$ | x پس x باید ۱ یا ۲ یا ۵ باشد که امکان ندارد.



از آنجا که در همه‌ی حالات به تناقض رسیدیم نتیجه می‌شود که چنین کاری امکان‌پذیر نیست. ■

۲. دایره محیطی مثلث ABC را Γ بنامید. فرض کنید F و G به ترتیب قرینه‌ی H نسبت به AC و AB باشند. می‌دانیم F و G روی Γ قرار دارند.



همچنین از آنجا که A وسط EH است نتیجه می‌شود $EF \parallel AC$. بنابراین $\angle EFB = ۹۰^\circ$ و پنج‌ضلعی $EFDBX$ محاطی است. حال دقت کنید که

$$\angle XFB = \angle XDB = \angle ACB = \angle AFB,$$

بنابراین خط FX از A می‌گذرد. سپس از آنجا که $AF = AH = AE$ نتیجه می‌شود $AD = AX$. به طور مشابه داریم $AG = AH$ و $AD = AY$ پس $AX = AY$ و $AF = AG$. طبق عکس قضیه‌ی تالس به دست می‌آید $XY \parallel GF$ و

$$\angle XAG = \angle AYX + \angle AXY = \angle AYX + \angle AFG.$$

این تساوی معادل با مماس بودن دایره محیطی مثلث‌های AXY و AFG است بنابراین اثبات تمام است. ■

۳. تساوی اول را با $A(P(x), Q(x))$ و تساوی دوم را با $B(P(x), Q(x))$ نشان می‌دهیم. از $B(P(x), ۱)$ نتیجه می‌شود $f(۱) = ۰$ سپس از $A(a, ۱)$، که a عددی ثابت است، به دست می‌آید $f(a) = f(۱) = ۰$. همچنین از $B(b, P(x))$ می‌توان به دست آورد $f(bP(x)) = f(P(x))$، که b نیز عددی ثابت است. سپس از $A\left(bx, \frac{x}{b} + ۱\right)$ به دست می‌آید $f(x + b) = f(x + ۱)$ برای هر $b \neq ۰$. حال فرض کنید c و d دو عدد گویای دلخواه باشند که $cd \neq ۰$. با استفاده از نتایج به دست آمده می‌توان نوشت

$$f(x + ۱) = f\left(x + \frac{d}{c}\right) = f\left(c\left(x + \frac{d}{c}\right)\right) = f(cx + d).$$

در نهایت از $A\left(cx + ۱, x - \frac{۱}{c}\right)$، که $c \neq ۰, ۱$، نتیجه می‌شود

$$f(x) = f(cx) = f\left(cx + ۱ - \frac{۱}{c}\right) = f(x + ۱).$$

پس اگر $P(x)$ چندجمله‌ای با درجه‌ی ۱ باشد $f(P(x))$ مقداری ثابت مانند C دارد. ادعا می‌کنیم برای هر چندجمله‌ای $P(x)$ با درجه‌ی r داریم $f(P(x)) = Cr$. در ادامه این ادعا را با استفاده از استقرا روی r ثابت می‌کنیم. برای پایه‌ی استقرا ($r = ۰, ۱$) که درستی ادعا را نشان دادیم. حال فرض کنید ادعا برای اعداد کوچک‌تر از r درست باشد. عدد گویای ناصفر مانند s را به شکلی در نظر بگیرید که $P(s) \neq ۰$. قرار دهید $R(x) = \frac{s}{P(s)}P(x + s)$. واضح است که $R(۰) = s$ بنابراین چندجمله‌ای S با ضرایب گویا و درجه‌ی $d - ۱$ وجود دارد که $R(x) = s + xS(x)$. از $A(R(x), x - s)$ به دست می‌آید $f(R(x) - s) = f(R(x - s))$. پس می‌توان نوشت

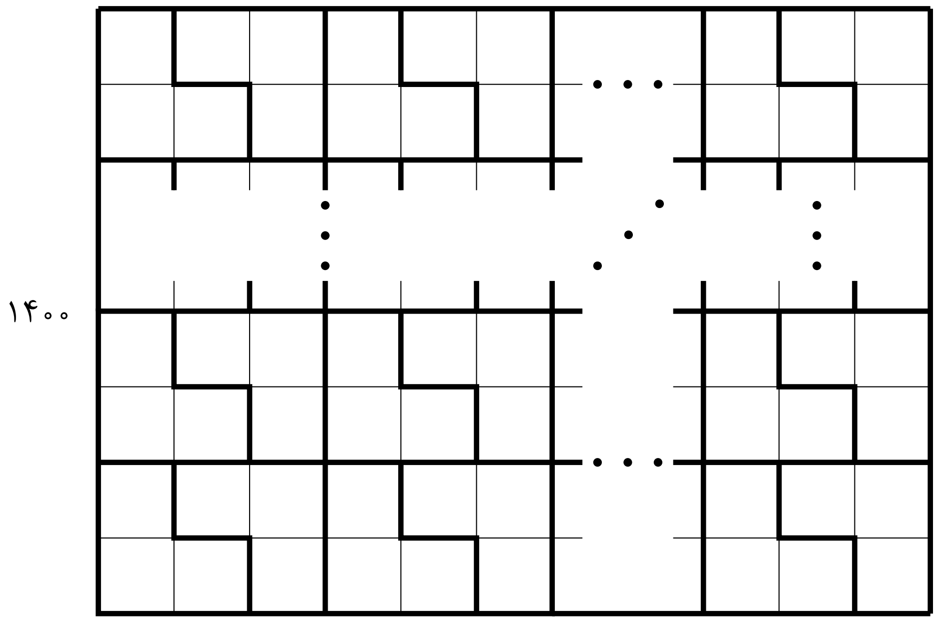
$$\begin{aligned} f(P(x)) = f\left(\frac{s}{P(s)}P(x)\right) &= f(R(x - s)) = f(R(x) - s) = f(xS(x)) \\ &= f(x) + f(S(x)) = C + C(r - ۱) = Cr \end{aligned}$$

که در تساوی یکی مانده به آخر از فرض استقرا و پایه‌ی استقرا استفاده کردیم. بنابراین ادعا ثابت می‌شود. همچنین به سادگی می‌توان بررسی کرد که تابع به دست آمده در شرایط مسئله صدق می‌کند. ■

۴. ادعا می‌کنیم آرش استراتژی برد دارد اگر و تنها اگر $k \leq \frac{۱۴۰۰ \times ۱۴۰۱}{۳} = ۱۴۰۰ \times ۴۶۷$.
ابتدا واضح است که اگر $k > ۱۴۰۰ \times ۴۶۷$ آنگاه آرش نمی‌تواند kتا کاشی L-شکل که با هم اشتراک ندارند را انتخاب

کند و در همان مرحله‌ی اول می‌بازد.

در ادامه نشان می‌دهیم اگر $k \leq ۱۴۰۰ \times ۴۶۷$ آرش استراتژی برد دارد. مانند شکل ۱ جدول را به مستطیل‌های ۳×۲ تقسیم می‌کنیم و همینطور هر مستطیل را به دو کاشی L-شکل تقسیم می‌کنیم. کاشی سمت چپ در هر مستطیل را نوع اول و کاشی سمت راست را نوع دوم می‌نامیم. همچنین مستطیل‌ها را از بالا به پایین و از راست به چپ شماره‌گذاری می‌کنیم. به این شکل که مستطیل‌هایی که دو سطر اول را می‌پوشانند را با ۱، ۲، . . .، ۴۶۷، مستطیل‌هایی که دو سطر بعدی را می‌پوشانند با ۴۶۸، ۴۶۹، . . .، ۹۳۴ و به همین ترتیب تا انتهای جدول شماره‌گذاری می‌کنیم.



شکل ۱

حال اگر $k \geq ۷۰۰ \times ۴۶۷$، آرش کاشی‌های L-شکل نوع اول همه‌ی مستطیل‌ها را رنگ می‌کند. سپس اگر قرار دهیم $k' = k - ۷۰۰ \times ۴۶۷$ همه‌ی کاشی‌های نوع دوم مستطیل‌های ۱، ۲، . . .، k' را رنگ می‌کند. به سادگی می‌توان مشاهده کرد که با این کار از هر کاشی ۲×۲ حداقل یک خانه رنگ می‌شود پس بابک نمی‌تواند هیچ کاشی ۲×۲ای را رنگ کند و آرش برنده می‌شود.

اگر $k \leq ۷۰۰ \times ۴۶۷$، آرش در حرکت اول خود همه‌ی کاشی‌های L-شکل نوع اول مستطیل‌های ۱، ۲، . . .، k را رنگ می‌کند. بابک در نوبت خود یک کاشی ۲×۲ را رنگ می‌کند و سپس دوباره نوبت آرش می‌شود. اگر آرش بتواند k کاشی L-شکل بیابد که با مستطیل‌های ۱، ۲، . . .، k تقاطع ندارند آن‌ها را رنگ می‌کند و به همین شکل بازی ادامه پیدا می‌کند تا زمانی که آرش نتواند چنین کاشی‌هایی بیابد. فرض کنید k' بیش‌ترین تعداد کاشی L-شکل باشد که با مستطیل‌های ۱، ۲، . . .، k تقاطع ندارند. در این مرحله آرش آن k' کاشی را رنگ می‌کند و سپس $k - k'$ کاشی نوع دوم در مستطیل‌های ۱، ۲، . . .، $k - k'$ را رنگ می‌کند. پس از این مرحله هیچ مربع ۲×۲ای که همه‌ی خانه‌هایش بی‌رنگ باشند پیدا نمی‌شود پس بابک بازی را می‌بازد. ■

امتحان انتخابی تیم

۱. فرض کنید مجموعه‌های مرتضی $A_۱, A_۲, \dots, A_{۱۰۰}$ باشند. ادعا می‌کنیم مهدی به ۱۰۰ گام نیاز دارد. ابتدا نشان می‌دهیم مهدی با ۱۰۰ گام می‌تواند همه‌ی مجموعه‌ها را شناسایی کند. اگر مهدی مجموعه‌های $(A_۱, A_۲)$، $(A_۲, A_۳)$ و $(A_۳, A_۱)$ را در سه گام اول انتخاب کند آنگاه هر سه مجموعه را می‌تواند شناسایی کند. زیرا

$$A_۱ = ((A_۱ \cup A_۲) - (A_۲ \cup A_۳)) \cup (A_۱ \cap A_۲) \cup (A_۱ \cap A_۳).$$

سپس با انتخاب $(A_i, A_۳)$ برای هر $۴ \leq i \leq ۱۰۰$، می‌تواند بقیه‌ی مجموعه‌ها را شناسایی کند.
حال نشان می‌دهیم مرتضی می‌تواند به شکلی مجموعه‌هایش را انتخاب کند که مهدی به حداقل ۱۰۰ گام نیاز داشته باشد. گرافی با ۱۰۰ رأس در نظر بگیرید که هر کدام نشانگر یکی از مجموعه‌های مرتضی هستند. در هر گام اگر مهدی مجموعه‌های A_i و A_j را انتخاب کرد رئوس i و j را در گراف به هم وصل می‌کنیم. بعد از ۹۹ گام گراف ۹۹ یال خواهد داشت. پس حداقل یکی از مؤلفه‌های همبندی گراف درخت است. آن درخت را در نظر بگیرید و از یکی از رأس‌هایش آویزان کنید. اگر برای هر دو رأس این درخت مانند i و j که به هم وصل هستند داشته باشیم $A_i \cup A_j = \{۱\}$ و $A_i \cap A_j = \varnothing$ آنگاه دو حالت برای رئوس این درخت وجود دارد. یا همه‌ی رئوس با عمق فرد برابر با $\{۱\}$ و رئوس با عمق زوج برابر با تهی هستند یا همه‌ی رئوس با عمق فرد برابر با تهی و رئوس با عمق زوج برابر با $\{۱\}$ هستند. پس مهدی نمی‌تواند به طور یکتا مجموعه‌های مرتضی را حدس بزند و ادعا ثابت می‌شود. ■

۲. برای اثبات مسئله ابتدا دو لم را اثبات می‌کنیم.

لم ۱. برای هر $a, b \in \mathbb{N}$ دنباله‌ی $\{a^{nb+۱}\}_{n=۱}^{\infty}$ نامتناهی شمارنده‌ی اول دارد.

برهان. با استفاده از قضیه‌ی کوبایاشی به سادگی قابل اثبات است که به خواننده واگذار می‌شود. □

لم ۲. برای هر p اول و عدد طبیعی $a > ۱$، که $(a, p) = ۱$، عددی ثابت مانند c وجود دارد که

$$\nu_p\left(a^n - ۱\right) \leq c + \nu_p(n),$$

برای هر عدد طبیعی n.

برهان. فرض کنید d مرتبه‌ی a به پیمانه‌ی p باشد. اگر n بر d بخش‌پذیر نباشد آنگاه $\nu_p(a^n - ۱) = ۰$ و نامساوی با قرار دادن $c = ۱$ واضح است. از طرف دیگر اگر n بر d بخش‌پذیر باشد، آنگاه برای هر عدد اول فرد p طبق لم دو خط داریم

$$\nu_p(a^n - ۱) = \nu_p(a^d - ۱) + \nu_p(n) - \nu_p(d) < \nu_p(a^d - ۱) + \nu_p(n).$$

پس با قرار دادن $c=\nu_p(a^d-1)$ نامساوی برقرار می‌شود.
در نهایت اگر $p=2$ باز هم از لم دو خط به دست می‌آید

$$\nu_2(a^n-1)=\nu_2(a^d-1)+\nu_2(a^d+1)+\nu_p(n)-\nu_p(d)<\nu_2(a^d-1)+\nu_2(a^d+1)+\nu_p(n).$$

پس با قرار دادن $c=\nu_2(a^d-1)+\nu_2(a^d+1)$ نامساوی برقرار می‌شود. در نتیجه با کنار هم قرار دادن همه‌ی حالات، کافی است قرار دهیم

$$c=\max\{1,\nu_p(a^d-1),\nu_2(a^d-1)+\nu_2(a^d+1)\},$$

و نامساوی ثابت می‌شود. $\square$

حال به سراغ اثبات مسئله می‌رویم. قرار دهید

$$b=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}q_3^{\beta_3}\dots q_t^{\beta_t} \quad \text{و} \quad a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\dots p_s^{\alpha_s}.$$

می‌دانیم که $\tau(a)=(\alpha_1+1)\dots(\alpha_s+1)$ و $\tau(b)=(\beta_1+1)\dots(\beta_t+1)$ بنابراین برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم برای هر $1\le i\le s$ عدد طبیعی $1\le j\le t$ وجود دارد که $\alpha_i=\beta_j$.
فرض کنید عدد طبیعی $1\le i\le s$ وجود داشته باشد که $\alpha_i\notin\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t\}$. طبق لم 1 دنباله‌ی $\{p_i^{n\alpha_i+1}\}_{n=1}^{\infty}$ نامتناهی عامل اول دارد. بنابراین عدد اول $p>\max\{\alpha_i,|\alpha_i-\beta_1|,|\alpha_i-\beta_2|,\dots,|\alpha_i-\beta_t|\}$ و عدد طبیعی n_0 وجود دارند که $p\mid p_i^{n_0\alpha_i+1}-1$. فرض کنید ℓ عددی طبیعی باشد. از آنجا که $(\alpha_i,p)=1$ عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $p^\ell(n_0\alpha_i+1)\mid n\alpha_i+1$. در این صورت طبق لم دو خط داریم

$$\begin{aligned}\nu_p\left(\sigma\left(a^n\right)\right)=\nu_p\left(\frac{p_1^{n\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\times\frac{p_2^{n\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\times\dots\times\frac{p_s^{n\alpha_s+1}-1}{p_s-1}\right)&\ge\nu_p\left(\frac{p_i^{n\alpha_i+1}-1}{p_i-1}\right)\\&\ge\nu_p\left(\frac{n\alpha_i+1}{n_0\alpha_i+1}\right)\ge\ell.\end{aligned}$$

از طرف دیگر بنابر لم 2 می‌دانیم برای هر $1\le j\le t$، عدد طبیعی c_j وجود دارد که

$$\nu_p\left(\frac{q_j^{n\beta_j+1}-1}{q_j-1}\right)\le c_j+\nu_p(n\beta_j+1).$$

از آنجا که $p>|\alpha_i-\beta_j|\neq 0$ و $p\mid n\alpha_i+1$ داریم $p\nmid n\beta_j+1$. بنابراین می‌توان نوشت

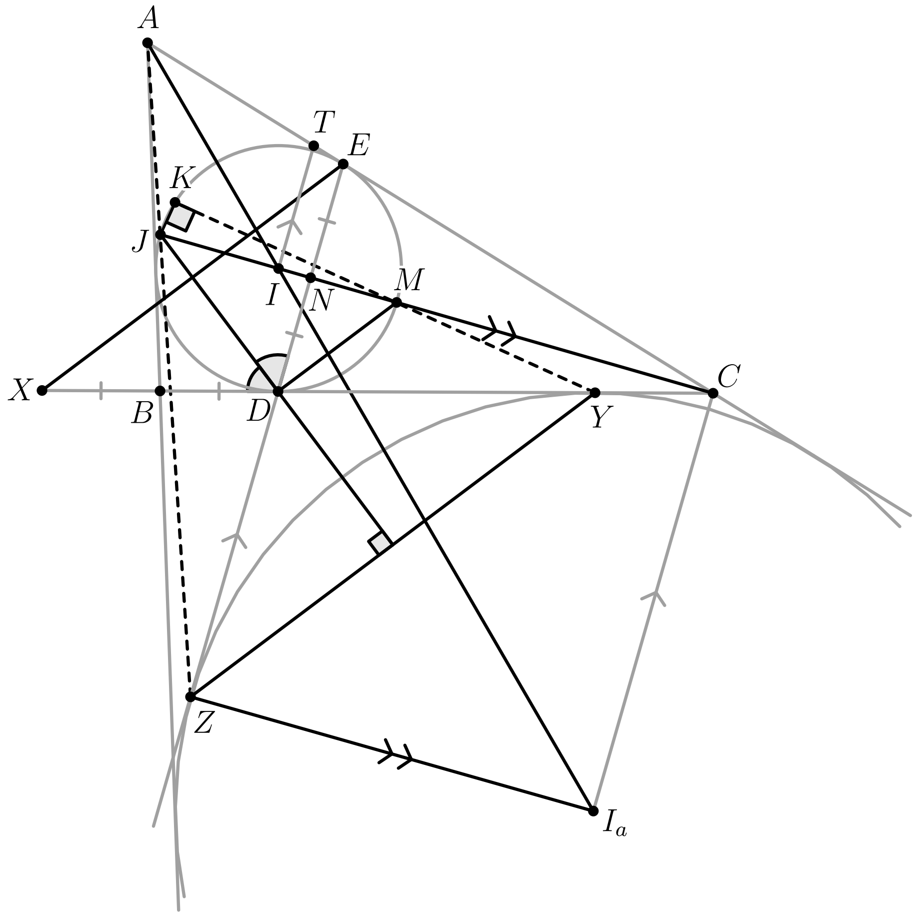
$$\ell\le\nu_p\left(\sigma\left(a^n\right)\right)\le\nu_p\left(\sigma\left(b^n\right)\right)\le c_1+c_2+\dots+c_t,$$

اما ℓ عددی دلخواه بود و این تناقض است. پس فرض اولیه غلط بوده و حکم ثابت می‌شود. $\blacksquare$

3. دایره محاطی خارجی نظیر رأس A در مثلث ABC را ω_a می‌نامیم. فرض کنید I مرکز ω و I_a مرکز ω_a باشد. همچنین J را مرکز دایره محاطی خارجی نظیر رأس C در مثلث CDE در نظر بگیرید. J روی ω قرار دارد زیرا

$$\angle EJD=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ECD=\angle CDE.$$

ادعا می‌کنیم نقاط A، J و Z روی یک خط قرار دارند. نقطه‌ی T روی AC قرار دارد به طوری که $IT\parallel DE$.



برای اثبات ادعا کافی است نشان دهیم $\frac{IJ}{IT} = \frac{I_aZ}{I_aC}$ زیرا در این صورت A مرکز تجانس مثلث‌های TIJ و CI_aZ می‌شود (دقت کنید که $IT \parallel CI_a$ و $IJ \parallel I_aZ$). می‌توان نوشت

$$\angle ITE = \angle DEC = \angle EDC = \angle I_aCY \Longrightarrow \triangle IET \sim \triangle I_aYC \Longrightarrow \frac{IE}{IT} = \frac{I_aY}{I_aC},$$

بنابراین از آنجا که $IE = IJ$ و $I_aY = I_aZ$ نتیجه می‌شود $\frac{IJ}{IT} = \frac{I_aZ}{I_aC}$. پس ادعا ثابت شد. فرض کنید BC در نقطه‌ی Y بر ω_a مماس باشد. امتداد اضلاع چهارضلعی $AEDB$ بر ω_a مماس است بنابراین

$$AE + ED = AB + BD \Longrightarrow ED = ۲BD \Longrightarrow DX = DE. \qquad (۱)$$

همچنین واضح است که $DY = DZ$ پس چهارضلعی $YZXE$ ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است و Y روی دایره محیطی مثلث XZE قرار دارد. سپس می‌توان نوشت

$$\angle EKY = \angle EZY = \frac{۱}{۲}\angle EDY = \angle EDM,$$

که M وسط کمان ED (کمانی که شامل J نیست) است. بنابراین KY از M می‌گذرد. فرض کنید N وسط پاره‌خط ED باشد. دقت کنید که $\triangle CDI \sim \triangle CND$، در نتیجه

$$\frac{DN}{CD} = \frac{ID}{IC} \overset{(۱)}{\Longrightarrow} \frac{BD}{CD} = \frac{IJ}{IC} \Longrightarrow JB \parallel ID.$$

پس $\angle JBC = ۹۰^\circ$. از طرف دیگر داریم $\angle JKY = \angle JKM = ۹۰^\circ$ که نتیجه می‌دهد چهارضلعی $YKJB$ محاطی است. دقت کنید که

$$\angle BJD = ۹۰^\circ - \angle JDB = \angle MJD = \angle YKD.$$

حال از آنجا که $\angle BJY = \angle BKY$ به دست می‌آید $\angle YJD = \angle BKD$. طبق تعریف، J روی نیمساز $\angle YDZ$ قرار دارد و $YD = DZ$. بنابراین JD عمودمنصف YZ است و $\angle YJD = \angle ZJD$. در نهایت به دست می‌آید $\angle BKD = \angle ZJD$ که معادل حکم مسئله است. ■

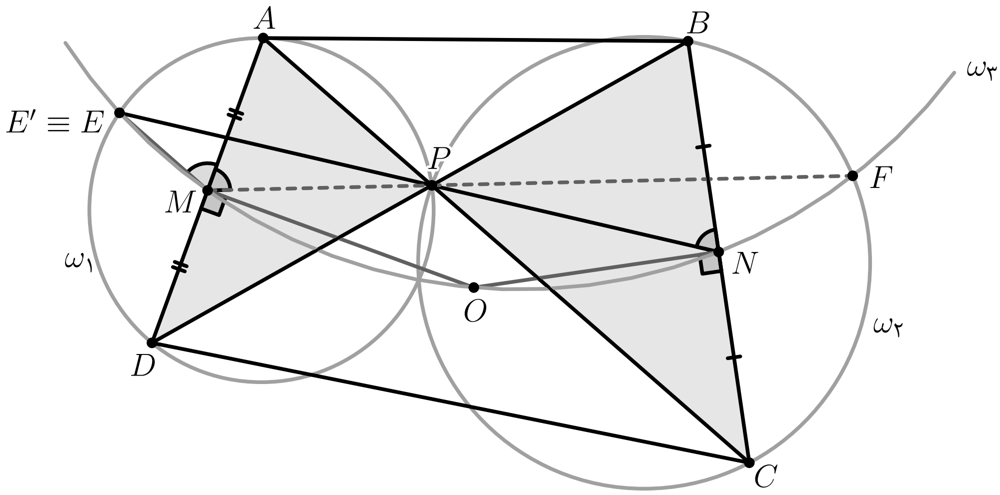
۴. محل برخورد دوم NP با $\omega_۱$ را E' می‌نامیم. از آنجا که $\triangle BPC \sim \triangle APD$ داریم $\angle MPD = \angle NPC = \angle APE'$. بنابراین چهارضلعی $APDE'$ یک چهارضلعی همساز است. سپس می‌توان نوشت

$$\angle E'MA = \angle PMA = \angle PNB \implies \angle E'MO = \angle E'MA + ۹۰^\circ = \angle PNB + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ - \angle PNO,$$

که نتیجه می‌دهد چهارضلعی $E'NOM$ محاطی است و E' همان E است. به طور مشابه می‌توان ثابت کرد M، P و F نیز همخط هستند. در نهایت

$$\angle ENO = ۹۰^\circ - \angle PNB = ۹۰^\circ - \angle PMA = \angle FMO \implies OE = OF.$$

پس حکم سوال ثابت شد.



■

۵. شرط مسئله را می‌توان به شکل $a_{n+۱} + a_{n-۱} = -\lfloor Ca_n \rfloor$ بازنویسی کرد. ادعا می‌کنیم برای $C \leq -۲$ حکم مسئله درست نیست. قرار دهید $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = ۲$. با استقرا روی n نشان می‌دهیم $a_{n+۱} > a_n > ۰$. برای پایه‌ی استقرا که حکم واضح است. فرض کنید $a_n > a_{n-۱} > ۰$. در این صورت می‌توان نوشت

$$a_{n+۱} + a_n > a_{n+۱} + a_{n-۱} = -\lfloor Ca_n \rfloor \geq -Ca_n \implies a_{n+۱} > (-C-۱)a_n \geq a_n.$$

پس گام استقرا ثابت شد. از آنجا که دنباله اکیداً صعودی است نمی‌تواند متناوب باشد و ادعا ثابت می‌شود.
حال فرض کنید $C > -۲$ و در ادامه نشان می‌دهیم حکم سوال برای هر $C > -۲$ درست است. از آنجا که دنباله از پایین کران‌دار است عدد صحیح M وجود دارد که برای هر n طبیعی داریم $a_n > M$. اگر $C \geq ۰$ آنگاه داریم $a_{n+۱} < -Ca_n - a_{n-۱} < -(C+۱)M$ پس دنباله هم از بالا هم از پایین کران‌دار است. این نتیجه می‌دهد دنباله متناوب است. بنابراین تنها حالتی می‌ماند که $-۲ < C < ۰$.

لم. اگر نامتناهی k طبیعی وجود داشته باشد که a_k و $a_{k+۱}$ هر دو نامثبت باشند آنگاه دنباله متناوب است.

برهان. دقت کنید که زوج مرتب $(a_k, a_{k+۱})$ حداکثر $M^۲$ حالت مختلف می‌تواند داشته باشد. بنابراین طبق اصل لانه کبوتری اعداد طبیعی k و l وجود دارند که $(a_k, a_{k+۱}) = (a_l, a_{l+۱})$ و این نتیجه می‌دهد دنباله متناوب است. □

اگر دنباله نامتناهی بار علامت عوض کند، یعنی نامتناهی n طبیعی وجود داشته باشد که $a_{n-۱} > ۰$ و $a_n \leq ۰$ آنگاه نتیجه می‌شود $a_{n+۱} \leq ۰$. پس طبق لم دنباله متناوب می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم عدد طبیعی N وجود دارد که برای هر $n > N$ داریم $a_n > ۰$. از آنجا که $-\lfloor Ca_n \rfloor < ۲a_n$ نتیجه می‌شود $a_{n+۱} - a_n < a_n - a_{n-۱}$. از آنجا که دنباله از اعداد صحیح تشکیل شده است این نامساوی نتیجه می‌دهد دنباله از جایی به بعد اکیداً نزولی است که در تناقض با مثبت بودن دنباله برای هر $n > N$ است. تناقض به وجود آمده نشان می‌دهد دنباله باید متناوب باشد و حکم مسئله ثابت می‌شود. ■

۶. هر زوج مرتب (m, n) که برای آن‌ها علی همواره استراتژی برد دارد را یک زوج خوب می‌نامیم. ادعا می‌کنیم همه‌ی زوج‌های خوب به شکل $(m, n) = (p^\alpha, p^\beta)$ هستند که p عددی اول و α و β اعداد صحیح نامنفی هستند. ابتدا نشان می‌دهیم زوج مرتب‌هایی که به این شکل نیستند، نمی‌توانند خوب باشند.

لم ۱. اگر (m, n) یک زوج مرتب خوب باشد و $d \mid n$ آنگاه (m, d) نیز یک زوج مرتب خوب است.

برهان. از آنجا که (m, n) خوب است، علی استراتژی بردی دارد که همه‌ی اعداد را بر n بخش‌پذیر می‌کند که به وضوح بر d نیز بخش‌پذیر می‌شوند. پس (m, d) نیز خوب است. □

لم ۲. اگر (m, n) یک زوج مرتب خوب باشد و $d \mid m$ آنگاه (d, n) نیز یک زوج مرتب خوب است.

برهان. قرار دهید $m = dk$ و فرض کنید اعداد $a_۱, a_۲, \ldots, a_d$ داده شده‌اند. بازی‌ای که با این دنباله شروع می‌شود را بازی dتایی می‌نامیم. از روی این دنباله، دنباله‌ای m عضوی به شکل زیر می‌سازیم.

$$\forall ۱ \leq i \leq m: \; a'_i = \begin{cases} a_{\frac{i}{k}} & k \mid i \\ ۰ & k \nmid i \end{cases}$$

حال علی حرکاتش را مطابق با حرکات بازی‌ای که با دنباله‌ی $a'_۱, a'_۲, \ldots, a'_m$ شروع می‌شود، انتخاب می‌کند. این بازی را بازی mتایی می‌نامیم. در هر مرحله اگر علی در بازی mتایی دنباله‌ی $b_۱, b_۲, \ldots, b_m$ را انتخاب کرد، در بازی dتایی دنباله‌ی $b_k, b_{۲k}, \ldots, b_{dk}$ را انتخاب می‌کند. سپس اگر محمد عدد s را انتخاب کرد در بازی mتایی عدد ds را انتخاب می‌کنیم. به این شکل هر دو بازی همزمان پیش می‌روند. از آنجا که علی در بازی mتایی استراتژی برد دارد و در نهایت همه‌ی اعداد بر n بخش‌پذیر می‌شوند در بازی dتایی نیز همین اتفاق رخ می‌دهد. بنابراین لم ثابت می‌شود. □

لم ۳. اگر $(m, n) = ۱$ و $m, n > ۱$ آنگاه زوج (m, n) خوب نیست.

برهان. دقت کنید که اگر دنباله‌ی $a_۱, a_۲, \ldots, a_m$ را پس از یک مرحله بتوان بر n بخش‌پذیر کرد آنگاه دنباله‌ی اولیه به پیمانه‌ی n باید ثابت باشد. زیرا در غیر این صورت به ازای هر دنباله‌ی $b_۱, b_۲, \ldots, b_m$ اندیس‌های $۱ \leq i, j \leq m$ وجود دارند به طوری که $a_i + b_j \overset{n}{\not\equiv} ۰$ و محمد می‌تواند $s = j - i$ را انتخاب کند. به همین ترتیب اگر بتوان دنباله را در دو

مرحله بر n بخش‌پذیر کرد، دنباله‌ی اولیه باید به پیمانه‌ی n تشکیل یک تصاعد حسابی دوری دهد. زیرا در غیر این صورت محمد می‌تواند s را به شکلی انتخاب کند که دنباله‌ی $(a_i + b_{i+s})$ به پیمانه‌ی n ثابت نباشد. اما دقت کنید که در مورد یک تصاعد حسابی دوری به پیمانه‌ی n داریم

$$\begin{aligned} & a_1 - a_2 \overset{n}{\equiv} a_2 - a_3 \overset{n}{\equiv} \ldots \overset{n}{\equiv} a_{m-1} - a_m \overset{n}{\equiv} a_m - a_1 \overset{n}{\equiv} t \\ \Longrightarrow\ & 0 \overset{n}{\equiv} \sum_{i=1}^{m}(a_i - a_{i+1}) \overset{n}{\equiv} mt \end{aligned}$$

از آنجا که $(m,n) = 1$ باید داشته باشیم $n \mid t$. پس دنباله‌ی $a_1, a_2, \ldots, a_m$ به پیمانه‌ی n ثابت است. بنابراین برای این که محمد استراتژی برد داشته باشد باید دنباله‌ی اولیه به پیمانه‌ی n ثابت باشد که در تناقض با دلخواه بودن دنباله‌ی اولیه است. این نتیجه می‌دهد زوج (m,n) خوب نیست. $\square$

حال فرض کنید یک زوج مرتب خوب (m,n) داریم که حداقل یکی از m و n حداقل دو عامل اول داشته باشد. فرض کنید مثلاً m دو عامل اول مانند p و q دارد (حالت دیگر مشابه است). عامل اولی از n مانند r در نظر بگیرید. r حداقل با یکی از p و q برابر نیست. بنابر تقارن فرض کنید $p \neq r$. طبق لم‌های ۱ و ۲ زوج مرتب (p,r) خوب است اما طبق لم ۳ خوب نیست که تناقض است.

در ادامه نشان می‌دهیم هر زوج مرتب (p^α, p^β) خوب است.

لم ۴. اگر زوج‌های (m, n_1) و (m, n_2) خوب باشند آنگاه $(m, n_1 n_2)$ نیز خوب است.

برهان. علی می‌تواند ابتدا استراتژی برد برای (m, n_1) را پیاده کند تا همه‌ی اعداد بر n_1 بخش‌پذیر شوند. سپس همه‌ی اعداد را بر n_1 تقسیم کند و استراتژی برد برای (m, n_2) را پیاده کند تا همه بر n_2 نیز بخش‌پذیر شوند. بنابراین $(m, n_1 n_2)$ نیز خوب است. $\square$

طبق لم ۴ تنها کافی است حکم مسئله را برای زوج مرتب (p^α, p) ثابت کنیم. استراتژی برد علی انتخاب $b_i = -a_i$ در هر مرحله است. دقت کنید که طبق قضیه‌ی لوکا داریم

$$\binom{x}{p^\alpha - 1} \overset{p}{\equiv} \begin{cases} 1 & x \overset{p^\alpha}{\equiv} -1 \\ 0 & x \overset{p^\alpha}{\not\equiv} -1 \end{cases}$$

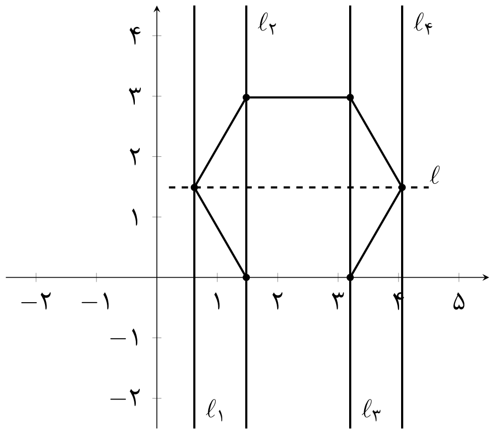
پس اگر چندجمله‌ای

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p^\alpha} \binom{x-(i+1)}{p^\alpha - 1} a_i$$

را در نظر بگیریم برای هر عدد طبیعی $1 \leq i \leq p^\alpha$ داریم $Q(i) \overset{p}{\equiv} a_i$ و همچنین برای هر x صحیح $Q(x+p^\alpha) \overset{p}{\equiv} Q(x)$. حال داریم $c_i = a_i + b_{i+s} \overset{p}{\equiv} Q(i) - Q(i+s)$. دقت کنید که چندجمله‌ای $Q(x) - Q(x+s)$ درجه‌ش یکی کم‌تر از درجه‌ی Q است. پس با تکرار این عمل در نهایت به چندجمله‌ای ثابت صفر می‌رسیم. $\blacksquare$

۷. قطر گفته شده را ℓ بنامید. ابتدا نشان می‌دهیم d باید حداقل n باشد. رئوس چندضلعی روی $n+1$ خط عمودی مانند $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{n+1}$ قرار دارند به طوری که بین هر دو خط متوالی دقیقا دو ضلع چندضلعی وجود دارد که یکی از آن‌ها بالای ℓ و دیگری زیر ℓ قرار دارد. در شکل ۲ این خطوط برای $n = 3$ نشان داده شده‌اند. فرض کنید خط ℓ دارای معادله

خط $y=a$ باشد. اگر یک چندجمله‌ای مانند $P(x)$ همه‌ی اضلاع چندضلعی را قطع کند آنگاه طبق قضیه‌ی مقدار میانی $P(x)$ حداقل n بار خط ℓ را قطع می‌کند (حداقل یک بار بین هر دو خط عمودی متوالی). بنابراین معادله‌ی $P(x)=a$ حداقل n ریشه‌ی متمایز دارد که نشان می‌دهد درجه‌ی $P(x)$ حداقل n است.



شکل ۲

حال نشان می‌دهیم چندجمله‌ای از درجه‌ی n وجود دارد که همه‌ی اضلاع چندضلعی را قطع کند. برای هر kی طبیعی که $1\leq 2k-1\leq n+1$ نقطه‌ای روی ℓ_{2k-1} که از همه‌ی رئوس چندضلعی پایین‌تر است انتخاب کنید. همچنین برای هر kی طبیعی که $1\leq 2k\leq n+1$ نقطه‌ای روی ℓ_{2k} که از همه‌ی رئوس چندضلعی بالاتر است انتخاب کنید. طبق فرمول درون‌یابی لاگرانژ چندجمله‌ای از درجه‌ی n وجود دارد که از همه‌ی این $n+1$ نقطه می‌گذرد و باز هم طبق قضیه‌ی مقدار میانی می‌توان به سادگی مشاهده کرد که چندجمله‌ای ساخته شده همه‌ی اضلاع چندضلعی را قطع می‌کند. بنابراین جواب مسئله $d=n$ است. ■

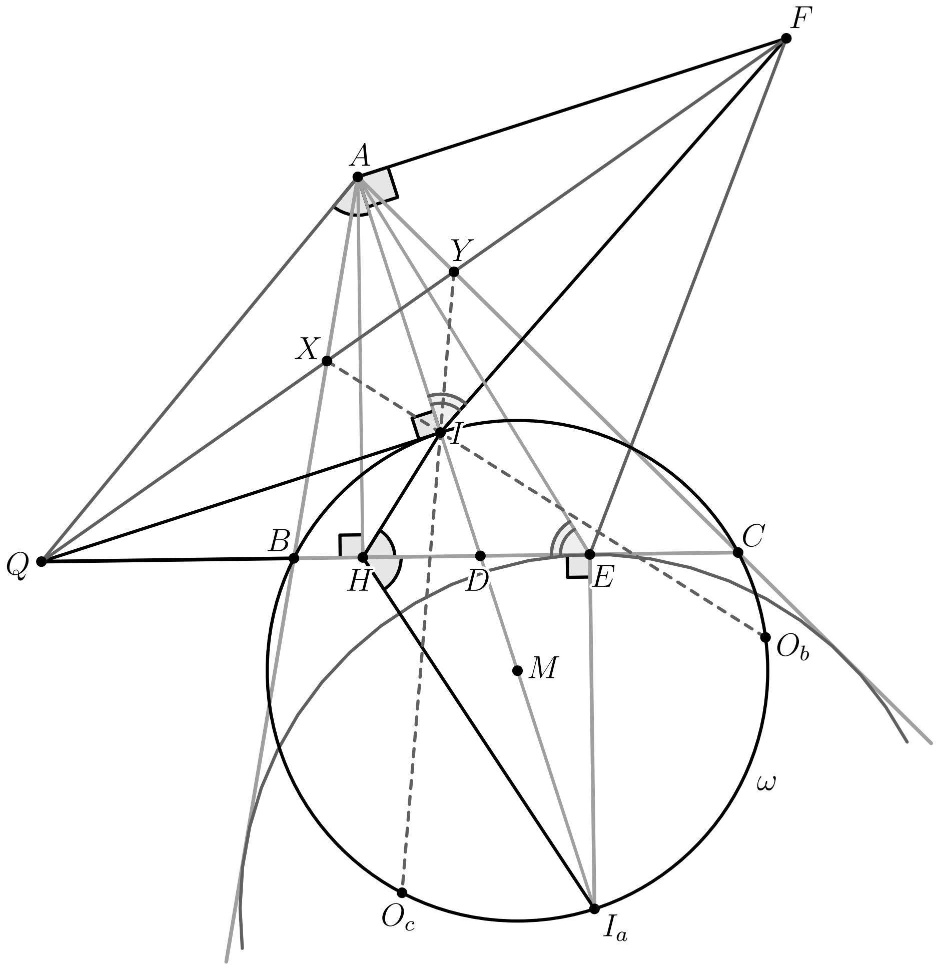
۸. فرض کنید I_a، H و D به ترتیب مرکز دایره محاطی خارجی نظیر رأس A، پای ارتفاع A و پای نیمساز A در مثلث ABC باشند. از آنجا که $(AD,II_a)=-1$ و $\angle AHD=90^\circ$ داریم $\angle IHD=\angle DHI_a$. به علاوه، چهارضلعی $AIHQ$ محاطی است بنابراین $\angle QAI=\angle IHD$ که نتیجه می‌دهد $\angle QAI=\angle DHI_a$. پس مثلث‌های QAI و I_aHE متشابه‌اند. از طرف دیگر واضح است که $\triangle AHE\sim\triangle FAI$ بنابراین دو چهارضلعی $AFIQ$ و $HAEI_a$ متشابه‌اند. از این نیز به دست می‌آید $\triangle QIF\sim\triangle I_aEA$. حال می‌توان نوشت

$$\angle FQI=\angle AI_aE=\angle IQB,$$

که در تساوی آخر از محاطی بودن چهارضلعی $QIEI_a$ استفاده شده است. فرض کنید ω دایره‌ی به مرکز M و شعاع MB باشد. می‌دانیم I و I_a نیز روی این دایره قرار دارند. نقاط X و Y را به ترتیب تقاطع خط FQ با AB و AC در نظر بگیرید. از آنجا که I روی نیمساز زوایای $\angle YQB$ و $\angle YCQ$ قرار دارد، IY نیز نیمساز زاویه‌ی $\angle QYC$ است. بنابراین اگر مرکز ω_c را O_c بنامیم آنگاه Y، I و O_c روی یک خط قرار دارند. سپس می‌توان نوشت

$$\angle IO_cC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle QYC=\frac{1}{2}(\angle YQC+\angle YCQ)=\angle IQB+\angle ICB=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)+\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{2}\angle B.$$

پس O_c روی ω قرار دارد. به طور مشابه اگر مرکز ω_b را O_b بنامیم آنگاه O_b نیز روی ω قرار دارد.



دقت کنید که I مرکز دایره محاطی خارجی نظیر رأس A در مثلث AXY است بنابراین داریم

$$\angle O_bIO_c = \angle YIX = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\angle A = \angle BI_aC,$$

در نتیجه $BO_b = CO_c$. در نهایت می‌توان نوشت

$$P^M_{\omega_b} = MO_b^۲ - O_bB^۲ = MO_c^۲ - O_cC^۲ = P^M_{\omega_c},$$

پس M روی محور اصلی ω_b و ω_c قرار دارد و حکم ثابت می‌شود. ■

۹. برای $n = ۶$ شانزده حالت که از نظر ترکیبیاتی متفاوت هستند وجود دارد. به سادگی می‌توان بررسی کرد که در همه‌ی این حالت‌ها می‌توان سه درخت فراگیر یال‌مجزا (هر پاره‌خط بین دو نقطه را یک یال می‌گوییم) در صفحه ساخت.
فرض کنید $n > ۶$ و S را مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه در نظر بگیرید. دو نقطه مانند r و b در S وجود دارند که دقیقاً ۴ نقطه در یک طرف خط rb قرار دارند. مجموعه‌ی این ۴ نقطه به همراه r و b را S' می‌نامیم. همچنین یال بین r و b را با e نشان می‌دهیم. همان‌طور که در ابتدای اثبات بیان شد مجموعه‌ی S' شامل سه درخت فراگیر یال‌مجزا است. یال‌های این درخت‌ها را به ترتیب با قرمز، آبی و سبز رنگ می‌کنیم. دقت کنید که هر درخت فراگیر ۵ یال دارد و تعداد کل یال‌های ممکن $۱۵ = \binom{۶}{۲}$ است پس همه‌ی یال‌های ممکن در این درخت‌ها ظاهر می‌شوند. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض کنید e قرمز باشد. نقطه‌ی r را به همه‌ی نقاط $S\backslash S'$ وصل می‌کنیم و رنگ همه‌ی یال‌ها را قرمز می‌کنیم. همچنین نقطه‌ی b را به همه‌ی نقاط $S\backslash S'$ وصل می‌کنیم و رنگ همه‌ی یال‌ها را آبی می‌کنیم. واضح است که مجموعه‌ی یال‌های

قرمز و آبی هر کدام یک درخت فراگیر را در S تشکیل می‌دهند.

در ادامه درخت فراگیر سبز را با یال‌های باقیمانده می‌سازیم. نقطه‌ای مانند q در S' وجود دارد که هیچ نقطه‌ی دیگری داخل مثلث qrb وجود ندارد. اگر نقطه‌ای مانند q' در $S\backslash S'$ وجود داشته باشد که یال qq' یال e را قطع کند آنگاه واضح است که qq' هیچ یال سبزی را قطع نمی‌کند. بنابراین اگر نقاط $S\backslash(S' \cup \{q'\})$ را به q' وصل کنیم و با سبز رنگ کنیم درخت فراگیر سبز نیز کامل می‌شود. حال اگر چنین نقطه‌ای وجود نداشته باشد یالی مانند e' از پوش محدب S وجود دارد که یک سرش عضوی از $S'\backslash\{r, b\}$ و سر دیگرش عضوی از $S\backslash S'$ مانند p است. در این صورت e' و همه‌ی یال‌هایی که از p به اعضای $S\backslash(S' \cup \{p\})$ وصل می‌شوند را سبز می‌کنیم. بنابراین درخت فراگیر سبز کامل می‌شود و واضح است که سه درخت ساخته شده هیچ یال مشترکی ندارند. ■

۱۰. فرض کنید کوچک‌ترین عامل اول عدد طبیعی m را با $L(m)$ نشان دهیم.

لم. برای هر سه عدد طبیعی a، b و c که $a \neq b$ داریم

$$L\left(\frac{a^c - b^c}{a - b}\right) \geq L(abc).$$

برهان. فرض کنید p کوچک‌ترین عامل اول $\frac{a^c-b^c}{a-b}$ باشد. اگر $p \mid b$ آنگاه واضح است که $p \geq L(abc)$ پس فرض می‌کنیم $p \nmid b$. در این صورت b به پیمانه‌ی p وارون ضربی دارد که آن را با $b^{-۱}$ نشان می‌دهیم. می‌توان نوشت

$$a^c \overset{p}{\equiv} b^c \implies \left(ab^{-۱}\right)^c \overset{p}{\equiv} \left(bb^{-۱}\right)^c \overset{p}{\equiv} ۱.$$

قرار دهید $d = \operatorname{ord}_p\left(ab^{-۱}\right)$ که نتیجه می‌دهد $d \mid c$ و $d \mid p-۱$. اگر $d \neq ۱$ آنگاه $d \geq L(c)$ و از این به دست می‌آید

$$p > p - ۱ \geq d \geq L(c) \geq L(abc),$$

که همان حکم لم است. پس فرض می‌کنیم $d = ۱$. می‌توان نوشت

$$ab^{-۱} \overset{p}{\equiv} ۱ \implies a \overset{p}{\equiv} b \implies \frac{a^c - b^c}{a - b} = a^{c-۱} + a^{c-۲}b + \cdots + b^{c-۱} \overset{p}{\equiv} cb^{c-۱},$$

پس $p \mid bc$ که نتیجه می‌دهد $p \geq L(abc)$. بنابراین در همه‌ی حالات حکم لم ثابت شد. □

حال با استفاده از این لم مجموعه‌ی خوب S را برای هر عدد طبیعی n می‌سازیم. فرض کنید k عددی طبیعی باشد که $L(n) < k$. تعریف کنید $S = \{m \in \mathbb{N} | \ L(m) \geq k\}$. به وضوح داریم $n \notin S$. اگر $a, b, c \in S$ و d شمارنده‌ای از $\frac{a^c-b^c}{a-b}$ باشد آنگاه طبق لم می‌توان نوشت

$$L(d) \geq L\left(\frac{a^c - b^c}{a - b}\right) \geq L(abc) \geq k.$$

پس $d \in S$ که نشان می‌دهد مجموعه‌ی S خوب است. ■

۱۱. نشان می‌دهیم برای هر $n > ۱$ جواب مسئله برابر با $\left\lceil \frac{n-۳}{۲} \right\rceil$ است. واضح است که برای $n = ۱$ به هیچ مانعی نیاز نداریم. ابتدا ثابت می‌کنیم حداقل به $\left\lceil \frac{n-۳}{۲} \right\rceil$ مانع نیاز داریم. فرض کنید با $m < \left\lceil \frac{n-۳}{۲} \right\rceil$ مانع نیز بتوان حکم مسئله را برقرار کرد. آنگاه لم زیر را می‌توان ثابت کرد:

لم. در هر سطر حداقل یک حرکت افقی توسط ربات باید انجام شود.

برهان. اگر سطری وجود داشته باشد که هیچ حرکت افقی در آن انجام نشده باشد، ربات از تمام خانه‌های بدون مانع آن سطر باید به صورت عمودی گذشته باشد. پس حداقل $۲n - m$ حرکت عمودی باید داشته باشیم. از طرف دیگر هر ستونی که ربات در آن به صورت عمودی حرکت کرده باشد یا چپ‌ترین یا راست‌ترین ستون است، یا ستونی که از آن حرکت را آغاز کرده است و یا ستونی که سمت چپ یا سمت راست آن مانع قرار دارد. تعداد این ستون‌ها حداکثر $۲m + ۳$ است بنابراین باید داشته باشیم

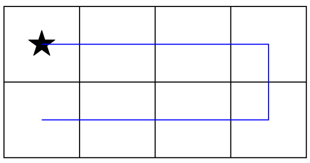
$$۲n - m \leq ۲m + ۳ \implies ۲n \leq ۳m + ۳ < ۳ \times \frac{n - ۲}{۲} + ۳ = \frac{۳n}{۲}.$$

نامساوی آخر نتیجه می‌دهد $n < ۰$ که تناقض است. $\square$

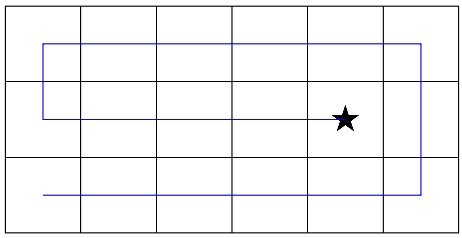
طبق لم هر سطر حداقل یک بار به صورت افقی طی شود که یعنی حداقل n حرکت افقی داریم. مشابه اثبات لم می‌توان نشان داد حداکثر $۲m + ۳$ حرکت افقی داریم پس می‌توان نوشت

$$n \leq ۲m + ۳ \implies \left\lceil \frac{n - ۳}{۲} \right\rceil \leq m,$$

که تناقض است. تناقض به دست آمده نشان می‌دهد حداقل به $\lceil \frac{n-۳}{۲} \rceil$ مانع نیاز داریم. در ادامه نشان می‌دهیم این تعداد مانع کافی نیز است.
دقت کنید که برای $n = ۲, ۳$ می‌توان به شکل زیر عمل کرد ($\bigstar$ نقطه‌ی شروع است):

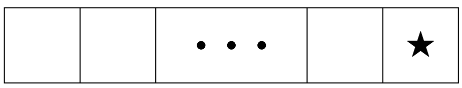


$n = ۲$

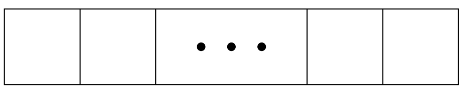


$n = ۳$

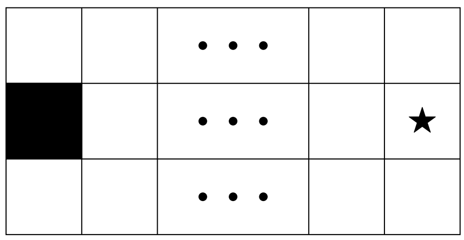
حال فرض کنید $n > ۳$. جدولی با $۲n$ ستون را یک بلوک می‌نامیم و مثال را با قرار دادن تعدادی بلوک روی هم می‌سازیم. ابتدا چند بلوک را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:



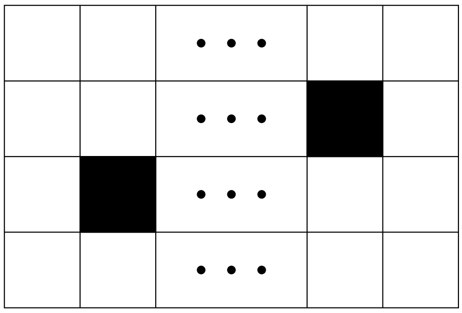
۱



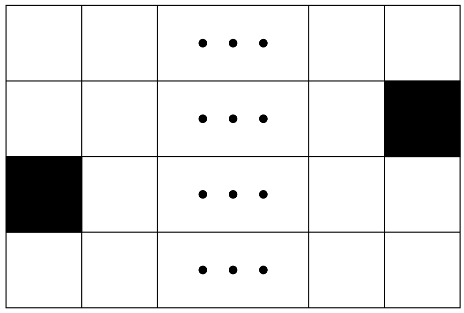
۲



۳

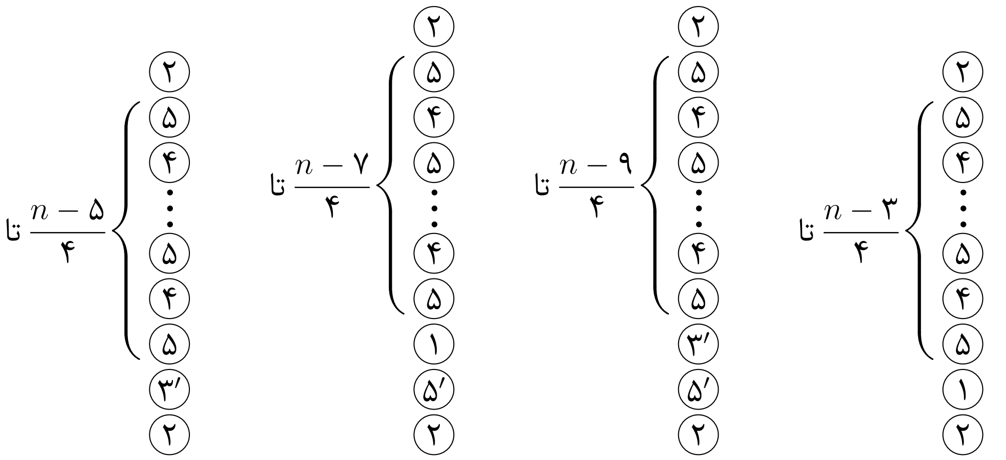


۴



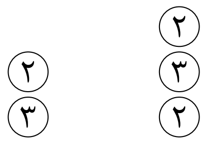
۵

همچنین ۳′ و ۵′ را به ترتیب بلوکی تعریف می‌کنیم که از قرینه کردن بلوک ۳ و ۵ نسبت به محور تقارن عمودی به دست می‌آید. حال برای حالت‌های مختلف n به پیمانه‌ی ۸ جدول را با استفاده از بلوک‌های تعریف شده می‌سازیم (فرض می‌کنیم $n > ۵$):



$n \overset{۸}{\equiv} ۱$ $n \overset{۸}{\equiv} ۳$ $n \overset{۸}{\equiv} ۵$ $n \overset{۸}{\equiv} ۷$

همچنین به ازای هر $۰ \leq i \leq ۳$، اگر $n \overset{۸}{\equiv} ۲i$ برای ساختن جدول آن، سطر انتهایی جدول حالت $n \overset{۸}{\equiv} ۲i + ۱$ را حذف می‌کنیم. پس برای همه‌ی حالت‌های n مثالی ارائه دادیم (بررسی این که ربات به چه طریقی در این جدول‌ها باید حرکت کند تا از همه‌ی خانه‌های بدون مانع عبور کند را به خواننده واگذار می‌کنیم). تنها حالت‌های $n = ۴, ۵$ باقی می‌ماند که برای آن‌ها می‌توان به شکل زیر عمل کرد:



$n = ۴$ $n = ۵$

■

۱۲. اثبات را با چند لم آغاز می‌کنیم.

لم ۱. برای هر عدد حقیقی r طول بازه‌ی $f(r)$ حداکثر ۲ است.

برهان. اگر $x, y \in f(r)$ آنگاه از شرط اول مسئله نتیجه می‌شود $r \in f(x) \cap f(y)$. سپس از شرط دوم به دست می‌آید $|x-y| \leq ۲$ که حکم لم را نتیجه می‌دهد. $\square$

لم ۲. اگر I بازه‌ای به طول ۲ باشد آنگاه عدد حقیقی r وجود دارد که $f(r) = I$.

برهان. قرار دهید $I = [x, x+۲]$. از شرط دوم نتیجه می‌شود عدد حقیقی r وجود دارد که $r \in f(x) \cap f(x+۲)$. بنابراین طبق شرط اول مسئله $x, x+۲ \in f(r)$. اما طبق لم ۱ طول $f(r)$ حداکثر ۲ است پس باید داشته باشیم $f(r) = [x, x+۲] = I$. $\square$

لم ۳. تابع f یک‌به‌یک است و برای هر عدد حقیقی r طول $f(r)$ دقیقاً ۲ است.

برهان. فرض کنید $x \neq y$ و $f(x) \subseteq f(y)$. همچنین I را بازه‌ای به طول ۲ در نظر بگیرید که $x \in I$ و $y \notin I$. طبق لم ۲ عدد حقیقی r وجود دارد که $I = f(r)$. پس طبق شرط اول مسئله $r \in f(x)$ و $r \notin f(y)$ که در تناقض با فرض $f(x) \subseteq f(y)$ است. این به وضوح یک‌به‌یک بودن تابع را نتیجه می‌دهد.
حال اگر عدد حقیقی x وجود داشته باشد که طول $f(x)$ از ۲ کم‌تر باشد آنگاه بازه‌ای به طول ۲ مانند I وجود دارد که $f(x) \subset I$. همچنین باز هم طبق لم ۲ عدد حقیقی $x \neq r$ وجود دارد که $f(r) = I$. پس $f(x) \subset f(r)$ که نشان دادیم امکان ندارد. پس طول $f(x)$ باید دقیقاً ۲ باشد. $\square$

تابع $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به شکلی تعریف کنید که برای هر عدد حقیقی r، $g(r)$ نقطه‌ی وسط بازه‌ی $f(r)$ باشد. از آنجا که طول هر بازه‌ی $f(x)$ دو است می‌توانیم شرط‌های مسئله را برحسب g بازنویسی کنیم و از اینجا به بعد تنها با تابع g کار کنیم. پس باید تابع پوشا و یک‌به‌یک g را بیابیم که

- $|x - g(y)| \leq ۱ \iff |y - g(x)| \leq ۱$.
- $|g(x) - g(y)| \leq ۲ \iff |x - y| \leq ۲$.
- برای هر عدد حقیقی $۰ \leq r \leq ۱$، $g(r) = r^۲$.

لم ۴. تابع g اکیداً صعودی است.

برهان. ابتدا این گزاره را نشان می‌دهیم که اگر $g(x) > g(x-۲)$ آنگاه برای هر $x < y \leq x+۲$ داریم $g(y) > g(x)$.
دقت کنید که $y - (x-۲) > ۲$ بنابراین طبق شرط دوم سوال می‌توان نوشت

$$|g(y) - g(x-۲)| > ۲, \quad |g(y) - g(x)| \leq ۲, \quad |g(x) - g(x-۲)| \leq ۲.$$

روابط بالا نتیجه می‌دهد $g(x-۲) \in [g(x)-۲, g(x)]$. حال اگر $g(y) \leq g(x)$ آنگاه خواهیم داشت $g(y) \in [g(x)-۲, g(x)]$. بنابراین $|g(y) - g(x-۲)| \leq ۲$ که تناقض است. پس گزاره‌ی گفته شده ثابت می‌شود. به طور مشابه می‌توان نشان داد اگر $g(x) < g(x+۲)$ آنگاه برای هر $x-۲ \leq z < x$ داریم $g(z) < g(x)$.
حال برای هر $x \geq ۰$ نشان می‌دهیم $g(x) > g(x-۲)$. این کار را با استقرا روی $[x]$ نشان می‌دهیم. گام استقرا طبق

گزاره‌ی بیان‌شده واضح است. زیرا اگر $g(x-۴) < g(x-۲)$ آنگاه $g(x-۲) < g(x)$. پس تنها کافی است پایه‌ی استقرا را نشان دهیم. دقت کنید که طبق شرط دوم و از آنجا که $g(۰)=۰$ داریم

$$|g(-۲)-g(۲)| > ۲, \quad |g(-۲)| \leq ۲, \quad |g(۲)| \leq ۲.$$

این نتیجه می‌دهد علامت $g(۲)$ و $g(-۲)$ متفاوت است زیرا در غیر این صورت فاصله‌ی این دو عدد حداکثر ۲ خواهد بود. به طور مشابه روابط بالا را برای $g(۱)$ به جای $g(۲)$ نیز می‌توان نوشت که نتیجه می‌دهد علامت $g(۱)$ و $g(-۲)$ نیز متفاوت است. اما می‌دانیم $g(۱) = ۱$ پس $g(۲) > ۰$. در ادامه به طور مشابه نشان می‌دهیم برای هر $-۲ \leq x < ۰$ داریم $g(x) < ۰$. دقت کنید که

$$|g(x)-g(۲)| > ۲, \quad |g(x)| \leq ۲, \quad |g(۲)| \leq ۲,$$

و مشابه قبل نتیجه می‌شود علامت $g(x)$ و $g(۲)$ متفاوت است که نتیجه می‌دهد $g(x) < ۰$. پس برای هر $x \in [۰,۱]$ داریم $g(x) > g(x-۲)$. حال اگر عدد حقیقی $y \in [۱,۲)$ را در نظر بگیریم طبق گزاره‌ی بیان شده داریم

$$g(y) > g(x) \geq ۰ > g(y-۲).$$

پس پایه‌ی استقرا نیز ثابت شد. به طور مشابه می‌توان برای هر $x < ۰$ نشان داد $g(x) < g(x+۲)$.
در نهایت دو عدد حقیقی $x < y$ را در نظر بگیرید. عدد طبیعی k وجود دارد که $y-۲k > x \geq y-۲(k+۱)$ بنابراین می‌توان نوشت

$$g(y) > g(y-۲) > \cdots > g(y-۲k) > g(x).$$

رابطه‌ی آخر از این که $g(x) > g(x-۲)$ و $x < y-۲k \leq x+۲$ نتیجه شده است. پس حکم لم ثابت شد. $\square$

لم ۵. برای هر x حقیقی داریم $g(x+۱) = g^{-۱}(x)+۱$.

برهان. کافی است نشان دهیم $g(g(x)+۱) = x+۱$ و آنگاه بنابر پوشا و یک‌به‌یک بودن تابع با قرار دادن $g^{-۱}(x)$ به جای x می‌توان به حکم لم رسید. عدد حقیقی r وجود دارد که $g(r) = x+۱$. بنابراین از شرط اول g نتیجه می‌شود $|r-g(x)| \leq ۱$. پس $g(x)-۱ \leq r \leq g(x)+۱$. حال اگر $r' > r$ آنگاه طبق لم ۴ داریم $g(r') > g(r) = x+۱$ و باز هم از شرط اول به دست می‌آید $|r'-g(x)| > ۱$ دقت کنید از آنجا که $r' > r \geq g(x)-۱$ باید r' بزرگ‌تر از $g(x)$ باشد که نتیجه می‌دهد $r' > g(x)+۱$. بنابراین از آنجا که $g(x)+۱$ در برد g قرار دارد باید داشته باشیم $r = g(x)+۱$ و این همان حکم معادل لم است. $\square$

دقت کنید که از لم ۵ به سادگی نتیجه می‌شود $g(x-۱) = g^{-۱}(x)-۱$. از آنجا که مقدار تابع در بازه‌ی $[۰,۱]$ مشخص است با استفاده از این دو تساوی می‌توان مقدار g در بازه‌های دیگر را به طور یکتا مشخص کرد. بنابراین تنها یک جواب برای مسئله وجود دارد و این جواب به شکل زیر است:

$$g(x) = \begin{cases} (x-\lfloor x \rfloor)^۲ + \lfloor x \rfloor & \lfloor x \rfloor \equiv ۰ \pmod{۲}; \\ \sqrt{x-\lfloor x \rfloor} + \lfloor x \rfloor & \lfloor x \rfloor \equiv ۱ \pmod{۲}. \end{cases}$$

به سادگی می‌توان درستی این جواب را با بررسی شرط‌های مسئله نشان داد و اثبات تمام است. $\blacksquare$

توضیح. اگر شرط سوم مسئله را با $f(۰) = [-۱, ۱]$ و $f(۱) = [۰, ۲]$ جایگزین کنیم باز هم می‌توان تمام جواب‌های مسئله را به دست آورد. در این صورت جواب مسئله به شکل $f(x) = [g(x) - ۱, g(x) + ۱]$ است که

$$g(x) = \begin{cases} h(x - \lfloor x \rfloor) + \lfloor x \rfloor & \lfloor x \rfloor \equiv ۰ \pmod{۲}; \\ h^{-۱}(x - \lfloor x \rfloor) + \lfloor x \rfloor & \lfloor x \rfloor \equiv ۱ \pmod{۲}. \end{cases}$$

و $h : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ تابعی صعودی، پوشا و یک‌به‌یک است.