مجموعه تمرین های هندسه

+ چند آزمون

به قلم: میثم عقیقی

مقدمه

در سال‌های اخیر، با افزایش متقاضیان شرکت در المپیاد ریاضی، به تبع آن کلاس‌های آموزش المپیاد نیز افزایش چشم‌گیری داشته‌اند. بنده حقیر نیز افتخار این را داشته‌ام که از سال ۱۳۸۵ تا سال ۱۳۹۲ عهده‌دار بخش کوچکی از این آموزش باشم. اکنون که بنا به مقتضیات قصد کناره‌گیری از این وادی را دارم، در صدد شدم تا سوالات و تمریناتی را که در این سال‌ها گردآوری کرده بودم در قالب یک مجموعه منسجم درآورده و در اختیار علاقه‌مندان به هندسه اعم از دبیران و دانش‌آموزان قرار دهم.

بدیهی است مطالعه این مجموعه به تنهایی موثر نخواهد بود و استفاده بهینه از آن برای دانش‌آموزان زمانی میسر می‌شود که در کنار دیگر منابع آموزش هندسه و یا یک دبیر مسلط، به حل مسائل این مجموعه بپردازند.

در آخر لازم به ذکر است که اکثر مطالب این مجموعه در ابتدا فقط به نیت استفاده شخصی نویسنده در کلاس‌های آموزش هندسه بوده و از این رو، دارای بی‌نظمی و خلاصه‌نویسی فراوانی می‌باشد.

میثم عقیقی

بهار ۱۳۹۲

فهرست مطالب

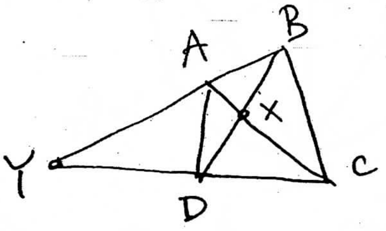
تمرین های درسی

- چهار ضلعی محاطی
- ~~ویژگی های مثلث~~ (رجوع شود به کتاب هندسه مسطحه)
- سوا
- ژرگون
- منلائوس
- کارنو
- انتقال
- نیم دور

- دوران
- تجانس
- تجانس مارپیچ
- ناهمساز
- همساز
- پاسکال
- قطب و قطبی
- انعکاس

چهارضلعی محاطی

مقدمه: هر ۳ نقطه غیر هم خط روی یک دایره هستند ولی ۴ تا خاص هستند و خواصی دارند



۱- چهارضلعی ABCD محاطی است $\iff$ $\hat{ABD}=\hat{ACD}$

۲- " $\iff$ $\hat{A}+\hat{C}=180^\circ$

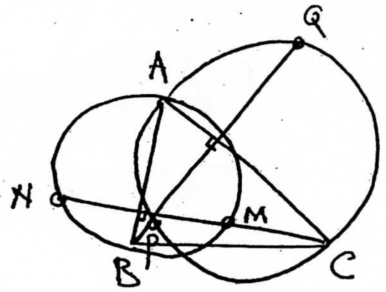
۳- " $\iff$ $XA\cdot XC=XB\cdot XD$

۴- " $\iff$ $YA\cdot YB=YD\cdot YC$

۵- " $\iff$ $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$ (قضیه بطلمیوس)

---

(۱)

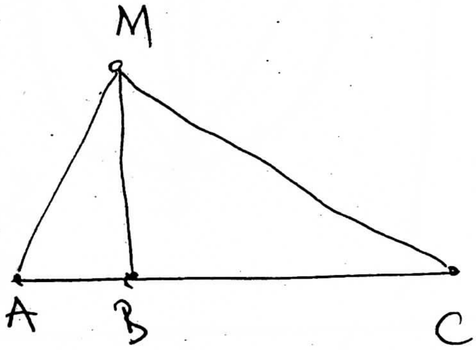


ارتفاع $\cap$ دایره به قطر ضلع

$\Longrightarrow$ NPMQ محاطی

(USAMO 90/5)

(۲)



$O_1=O_{MAB}$

$O_2=O_{MAC}$

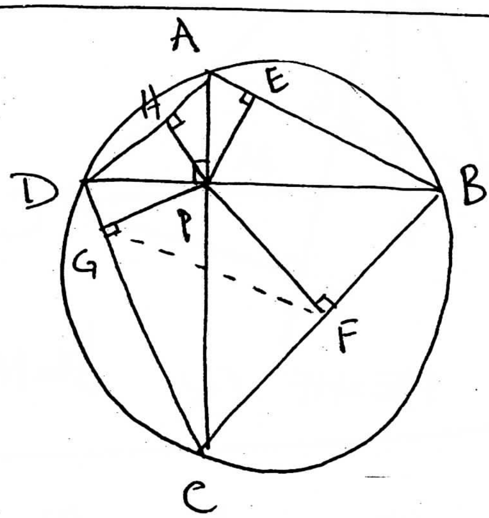
$O_3=O_{MBC}$

$\Downarrow$

$MO_1O_2O_3$ محاطی.

---

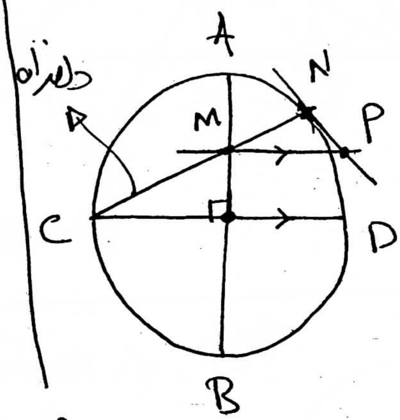
(۳)



الف) $\hat{PGF}=\hat{ACB}$

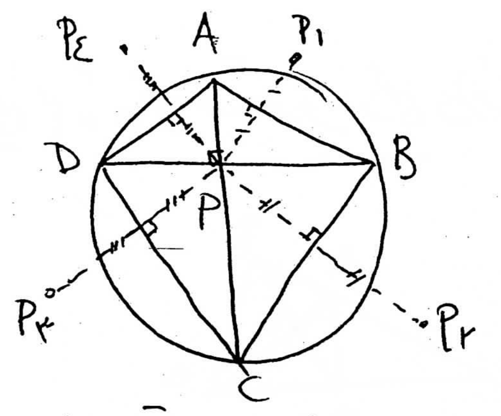
ب) EFGH محاطی

(۴)



PQ محاطی؟

۵

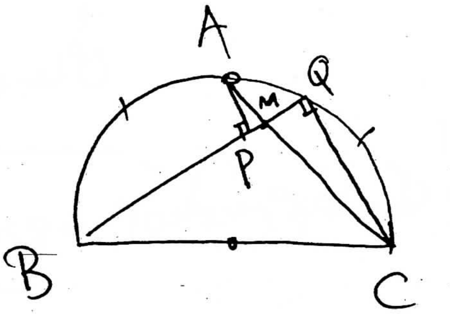


ABC
عمود قطر

(جبلی)

$P_1P_2P_3P_4$ محاطی $\Leftarrow$

۶

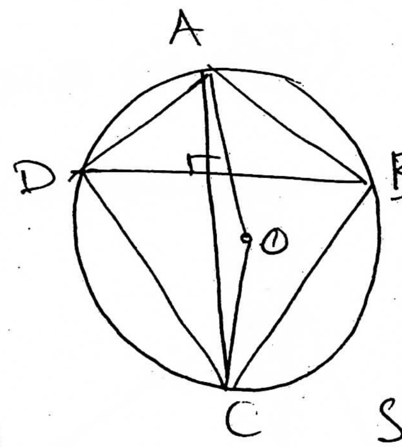


نیم‌دایره، A وسط

M وسط

$BP=PQ+QC \Leftarrow$

۷

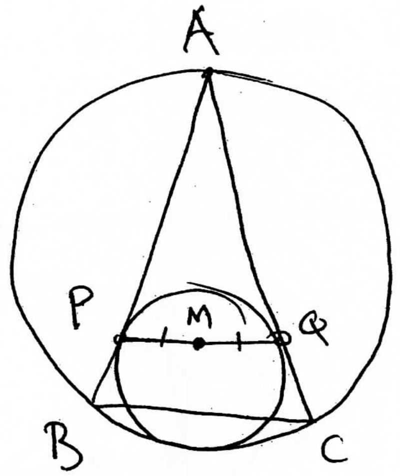


ABCD
عمود قطر

$\Downarrow$

$S_{AOCB} = S_{AOCD}$

۸

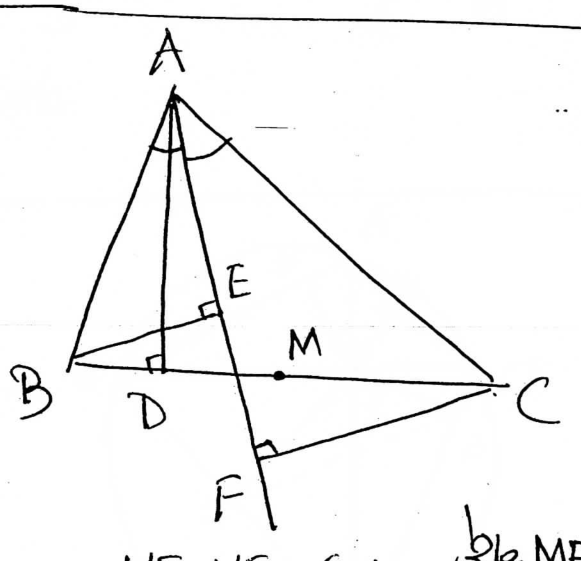


$AB=AC$

$\Downarrow$

$M=I_{\triangle ABC}$

۹

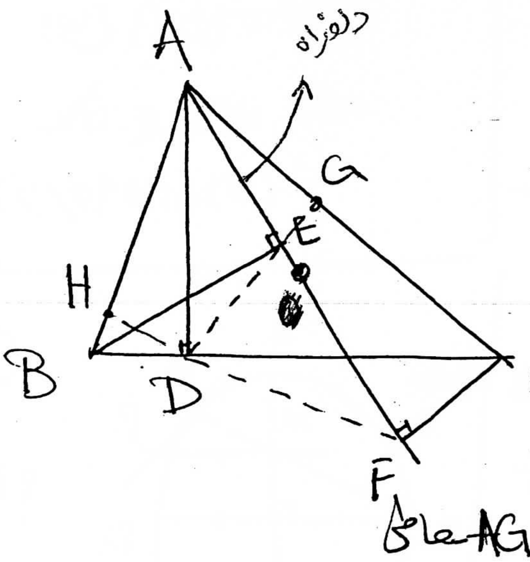


$\Downarrow$

الف) MEDF محاطی

ب) $ME=MF$

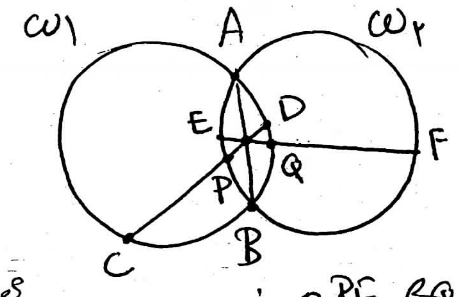
۱۰



AO ...

AGDH محاطی

۱۱

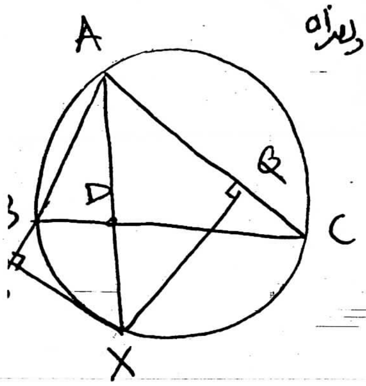


$\Downarrow$

AB، EQ، PF همرسند

عمود اصلی

۱۲

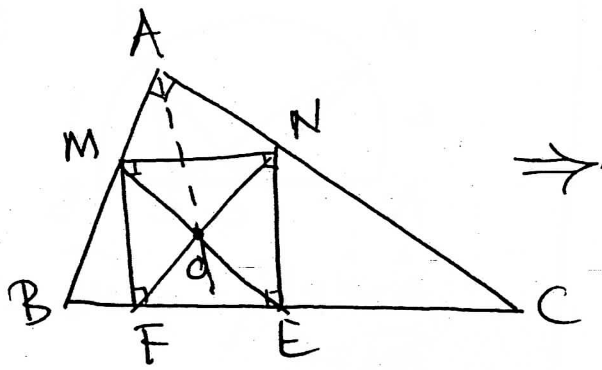


دایره به قطر $XD = \gamma$ و D دلخواه

$\Downarrow$

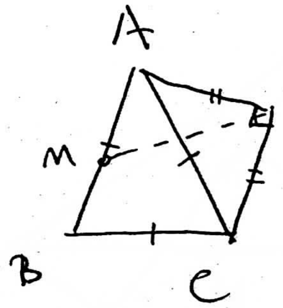
$AB=AC \Leftrightarrow$ PQ مماس بر γ

۱۳



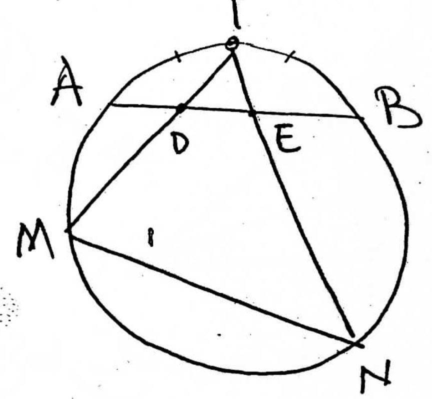
⟸ AO نیمساز $\hat{A}$ است

۱۴



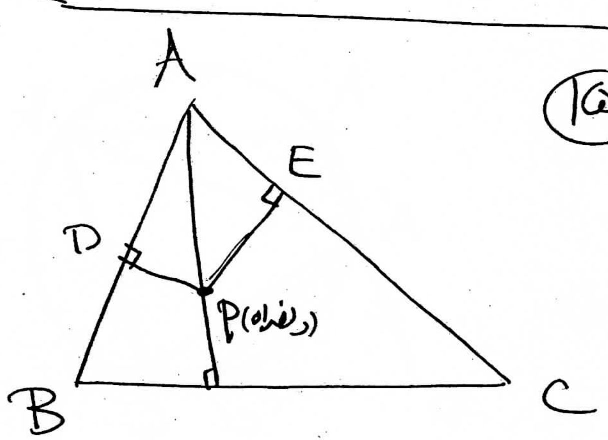
$\widehat{AMD} = ?$

۱۶



⟸ DENM محاطی

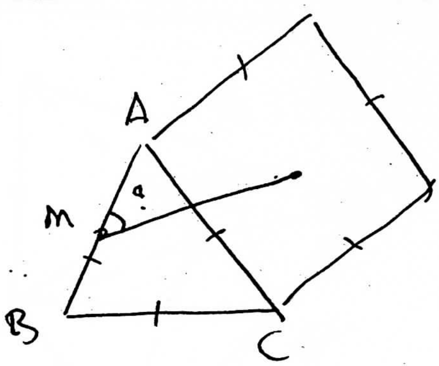
۱۵



BDEC محاطی ⟸

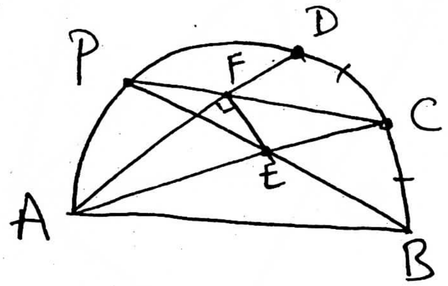
([illegible] > ۰/۲)

۱۸



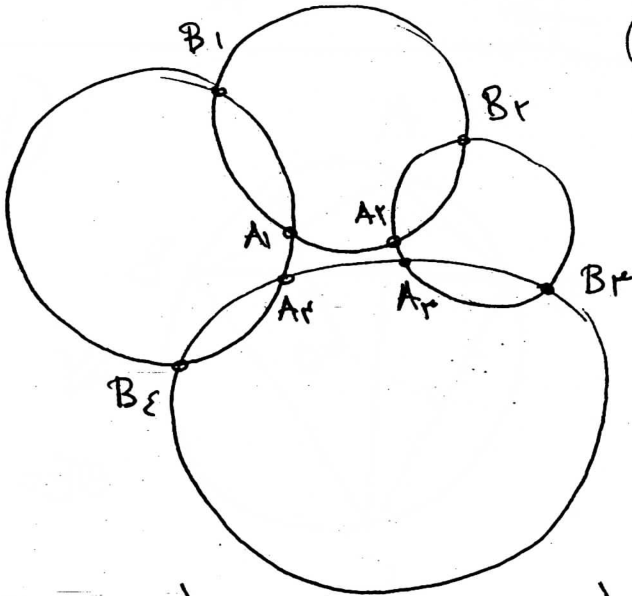
حل ؟ (۱۴)

۱۷



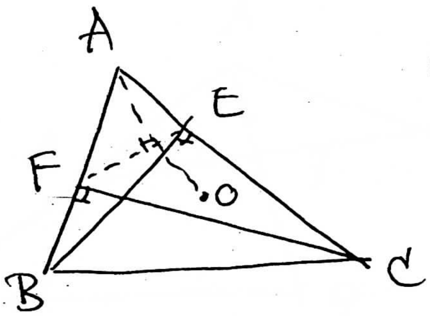
AD ⊥ EF ⟸

۲۰



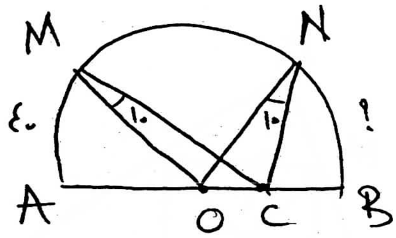
$B_1B_2B_3B_4$ محاطی ⟺ $A_1A_2A_3A_4$ محاطی

۱۹



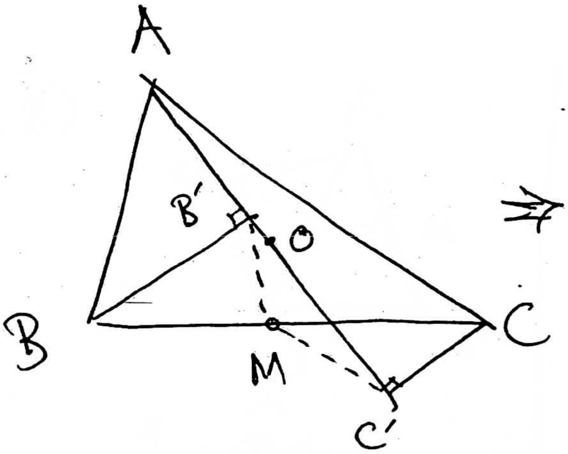
AO ⊥ EF

۲۱



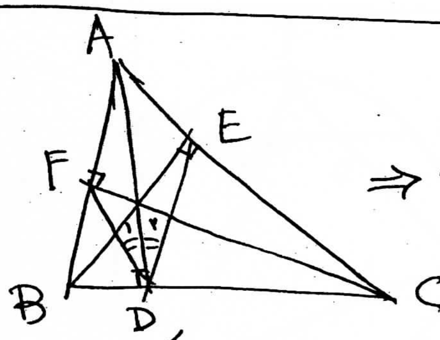
$\hat{M}=\hat{N}=10^\circ$, $\overset{\frown}{AM}=40$ $\Rightarrow$ $\overset{\frown}{NB}=?$

۲۲



$\Rightarrow MB'=MC'$

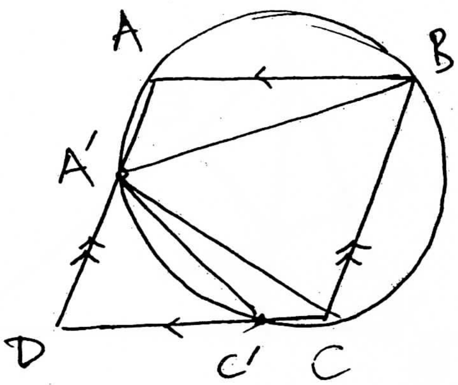
۲۳



$\Rightarrow \hat{D}_1=\hat{D}_2$

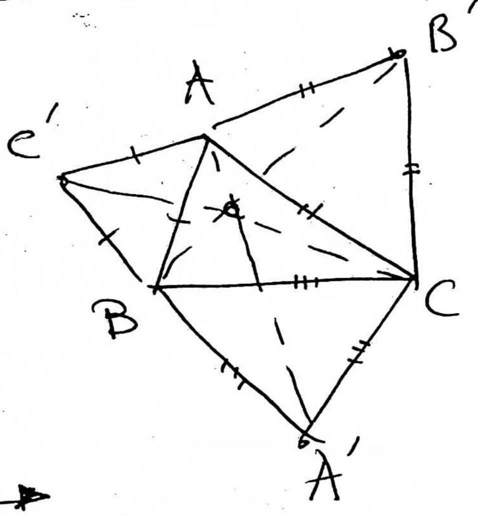
ارتفاع‌ها، مثلث نیمسازها را دارند

۲۴



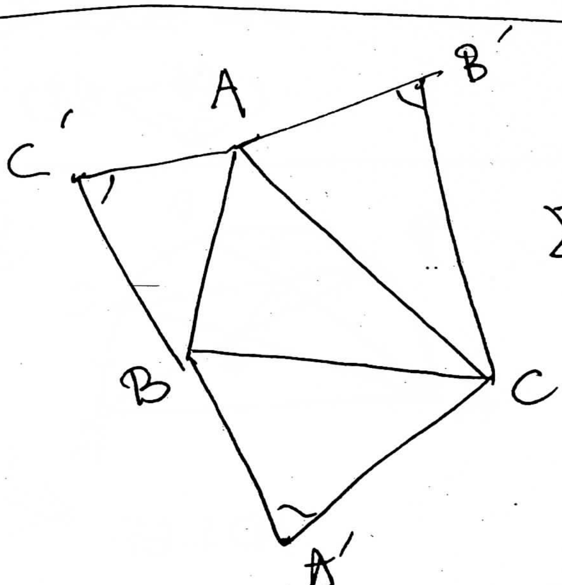
$\Rightarrow \frac{A'D}{A'C'}=\frac{A'C}{A'B}$

۲۵



AA' ها همرسند

۲۶

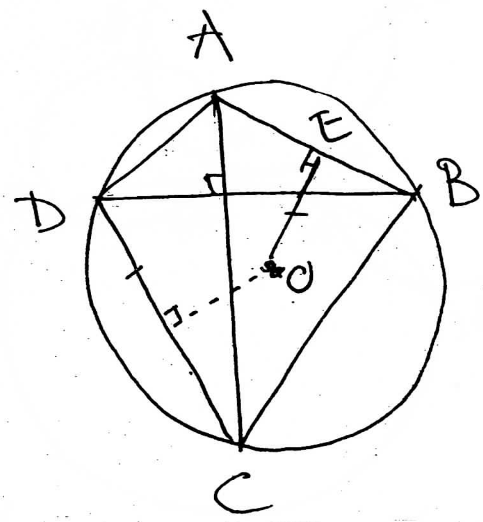


$\sum A'=180$

$\Downarrow$

$C_{ABC'}$ ها همرسند

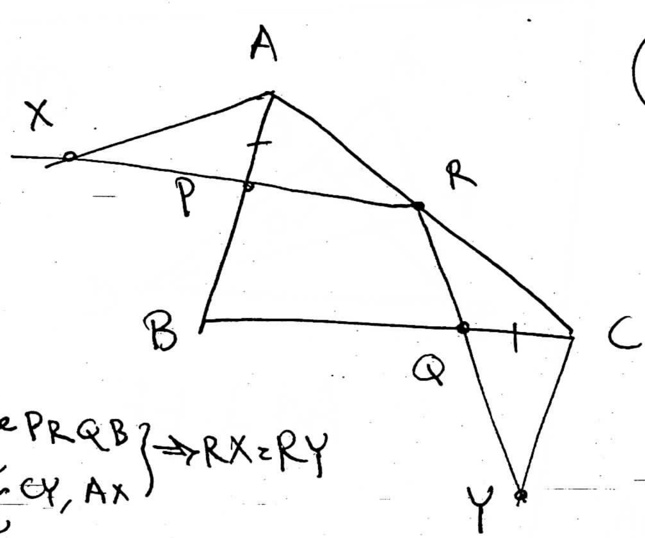
۲۷



$\Downarrow$

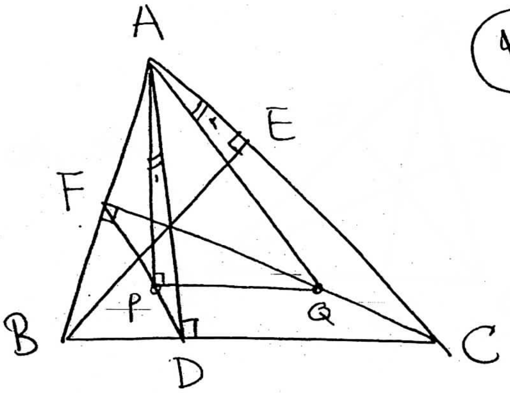
$OE=\frac{1}{2}CD$

۲۸



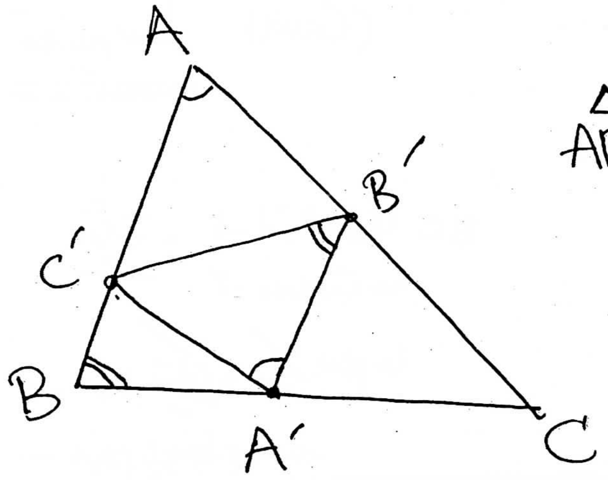
PRQB محاطی
CY, AX موازی
باشد
$\Rightarrow RX=RY$

۲۹



$\hat{A}_1=\hat{A}_2 \Leftarrow$ P دلخواه

۳۰

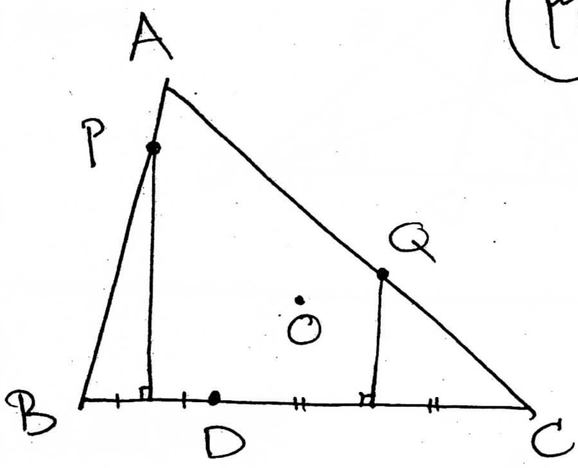


$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

$\Downarrow$

$H_{\triangle A'B'C'} = O_{\triangle ABC}$

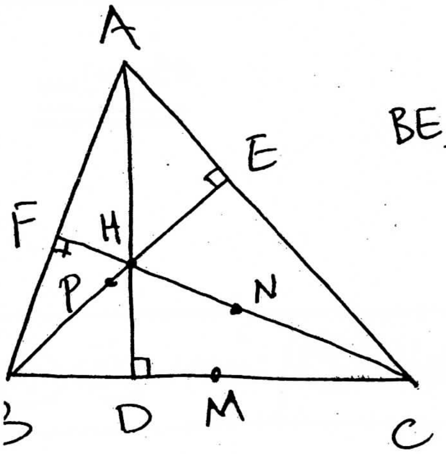
۳۱



D دلخواه

$\Longrightarrow$ OPAQ محاطی

۳۲



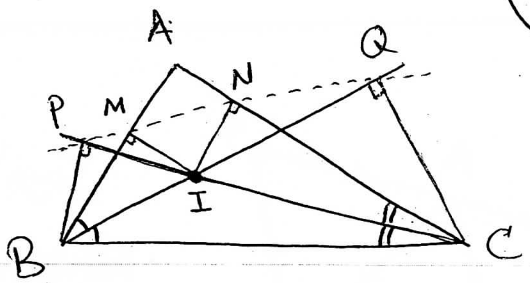
N و P وسط‌های BE و CF

$\Downarrow$

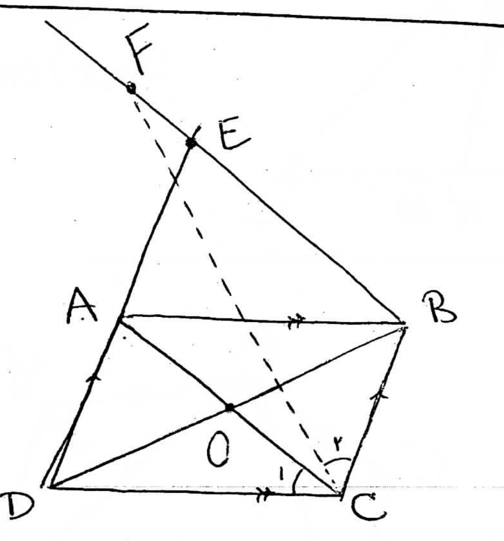
الف) M و N و H و P و D هم دایره‌اند

ب) $\overset{\triangle}{DPN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

۳۳



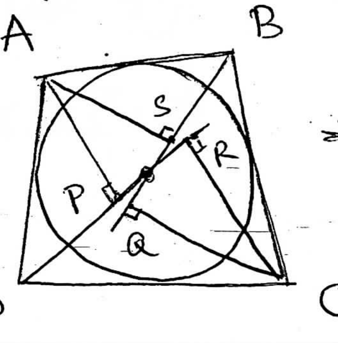
۳۴



AOBE محاطی

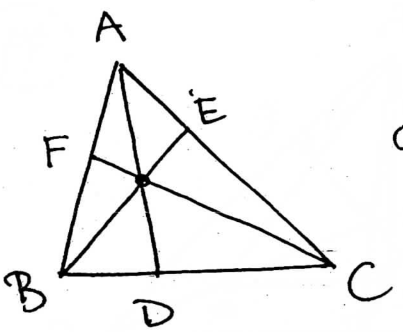
DOEF محاطی $\Longrightarrow \hat{C}_1=\hat{C}_2$

۳۵



$\Longrightarrow$ PQRS محاطی

قضیه سوا (Ceva)



$AD,\ldots$ همرس $\iff \prod \frac{BD}{DC}=1$

اثبات: ۱- از A موازی BC
۲- مساحت ها

- شهود فیزیکی و مرکز جرم ها

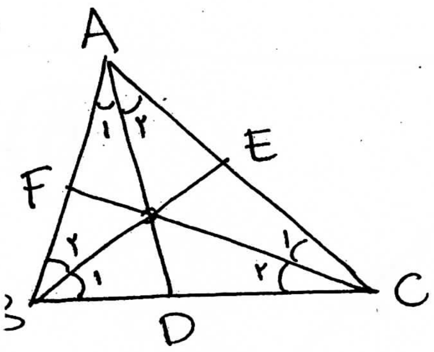
- مفهوم پاره خط جهت دار

---

۱) میانه ها همرسند.

۲) نیمسازها همرسند.

سوا سینوسی



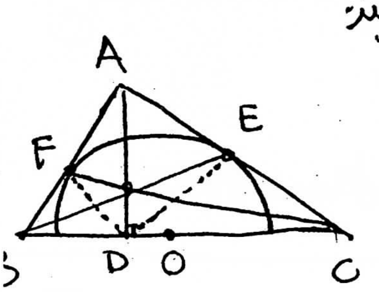
همرس $\iff \prod \frac{\sin A_1}{\sin A_2}=1$

---

۳) ارتفاع ها همرسند

۴) خطوط هم‌زاویه و نقاط همزاد

۶)



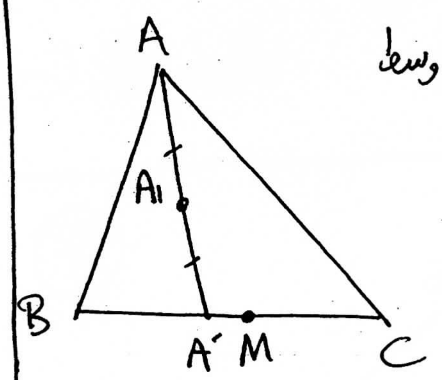
الف) AD، BE، CF همرسند

ب) $\hat{ADF}=\hat{ADE}$

۵) 'AA ها همرسند، M وسط

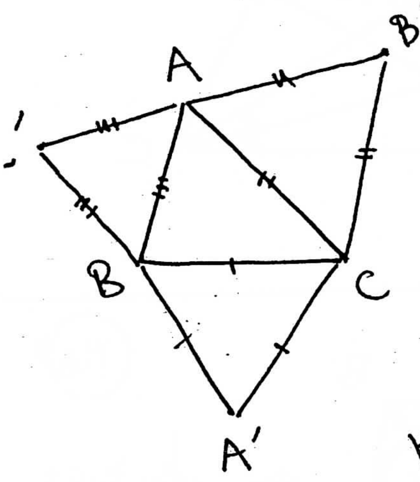
$\Downarrow$

MA_1 ها همرسند



---

۸)



الف) 'AA ها همرسند

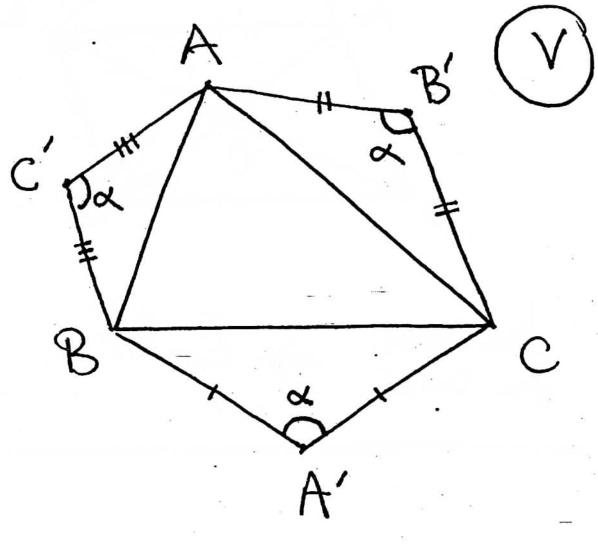
ب) $AA'=BB'=CC'$

ج) زاویه بین ۶۰ درجه

د) محل همرسی (فرما F):

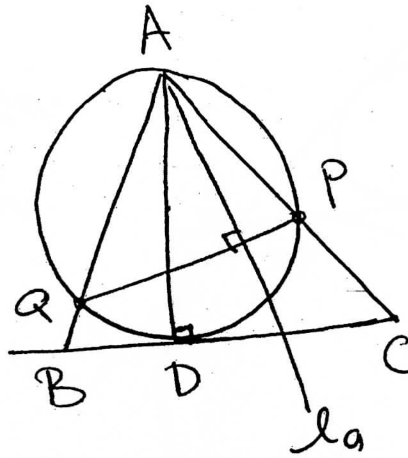
$\forall X: \sum XA \geq \sum FA$

۷)

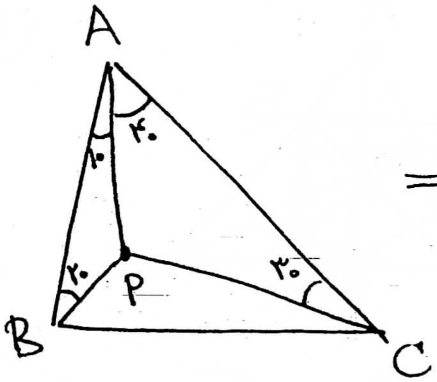


$\Leftarrow$ 'AA ها همرسند

۹



۱۰

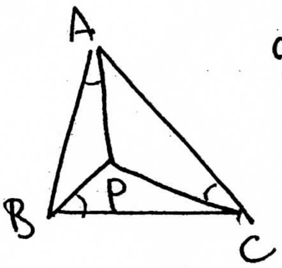


$\Rightarrow$ $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی الساقین

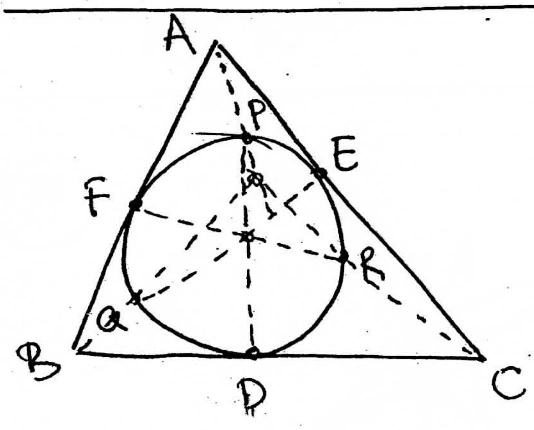
۱۱) الف) $\sin x \sin y \sin z \leq \sin^3 \frac{1}{3}(x+y+z)$

ب) ثابت کنید یکی از ۳ زاویه

روبه‌رو کمتر از ۳۰ درجه است.



۱۲



AP و ... همرسند

$\Updownarrow$

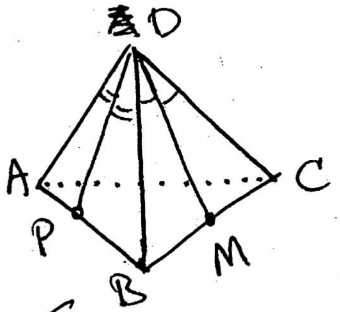
DP و ... همرسند

۱۳

P, N, M

پای نیمسازهای

$\hat{ADB}$ ، $\hat{CDA}$ ، $\hat{BDC}$:



$\Leftarrow$ صفحه‌های ADM و ... یک فصل مشترک دارند

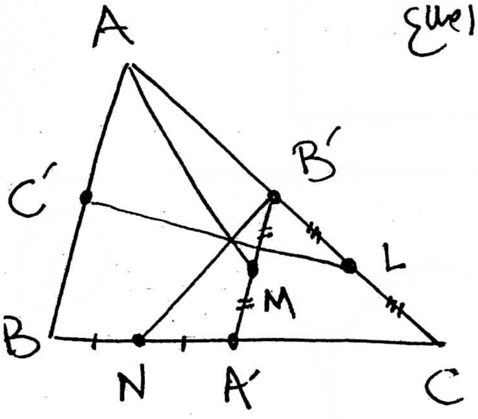
۱۴

A' و ... وسط اضلاع

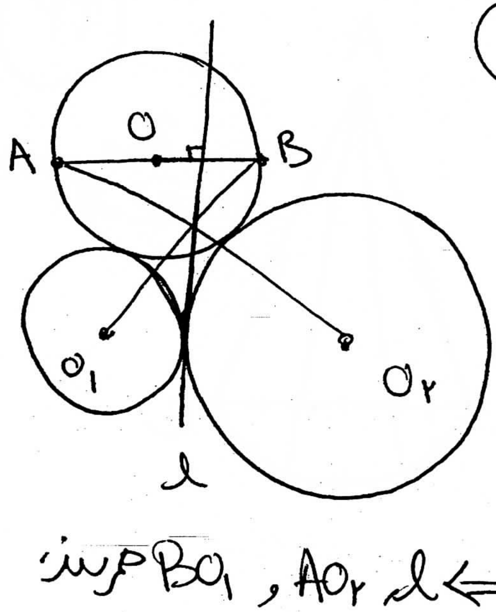
$\Downarrow$

AM و B'N و

C'L همرسند

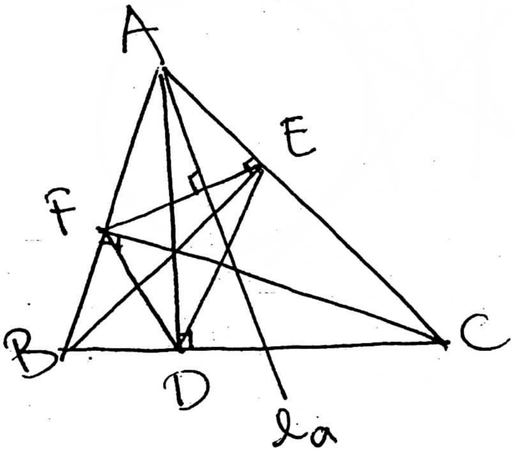


۱۵

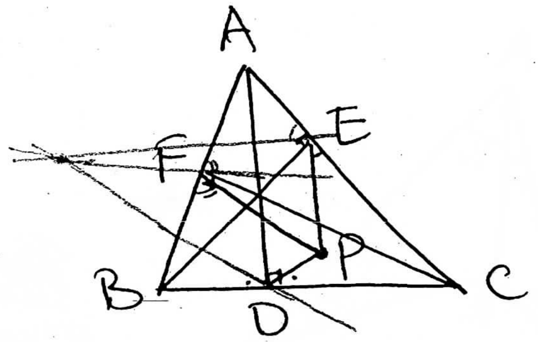


$\Leftarrow$ l و AO_2 و BO_1 همرسند

۱۶

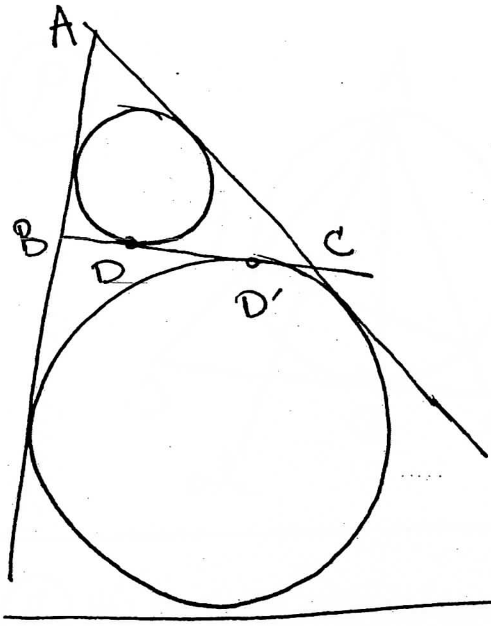


۱۷



P دلخواه ⟸ قرینه‌های PDها نسبت به
اضلاع رسم کنید.

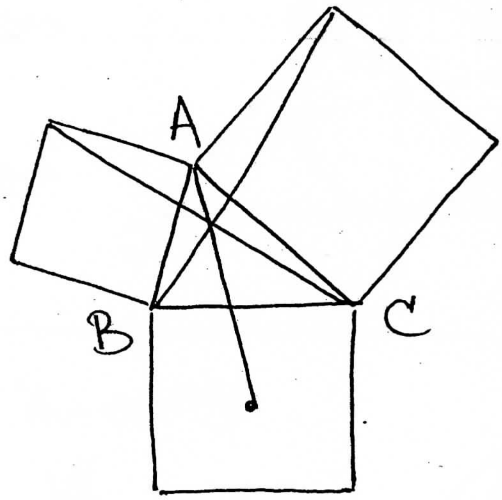
۱۸



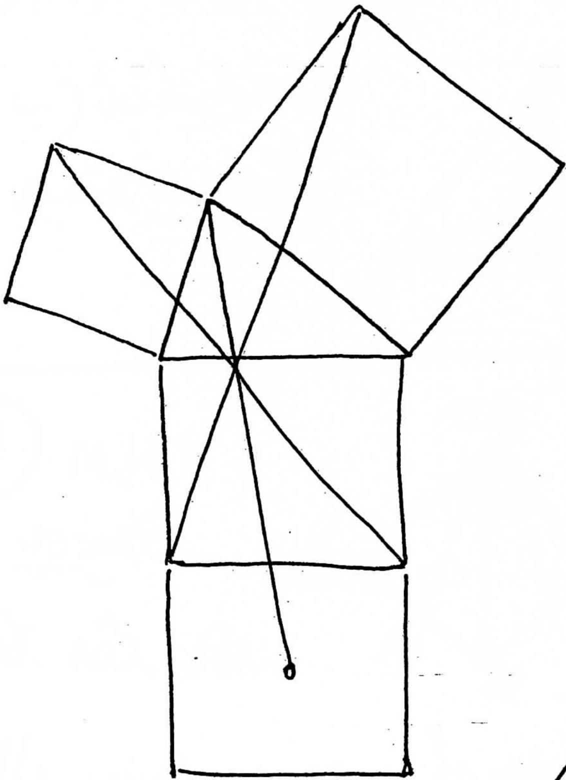
الف) AD را رسم کنید.

ب) AD′ را رسم کنید.

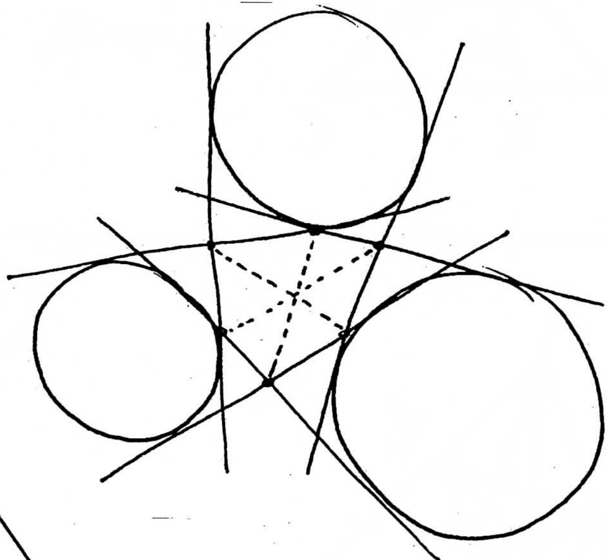
۱۹



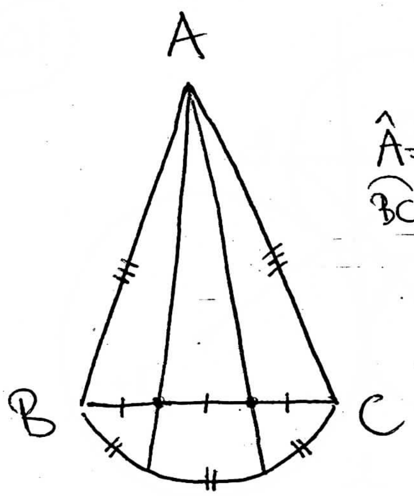
۲۰



۲۱

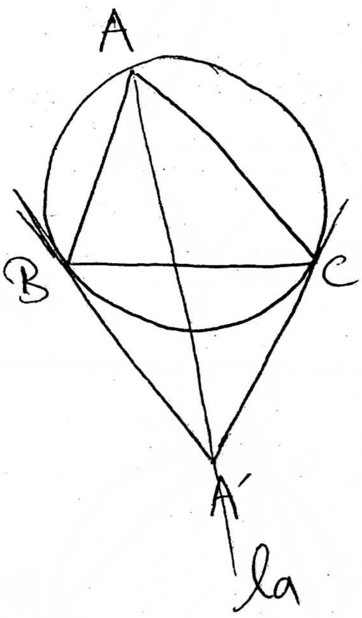


۲۲

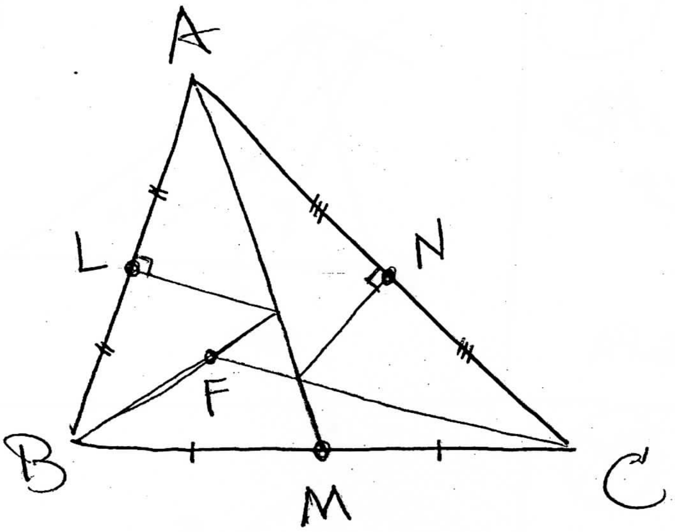


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\alpha\\ \widehat{BC}=\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=?$$

۲۳



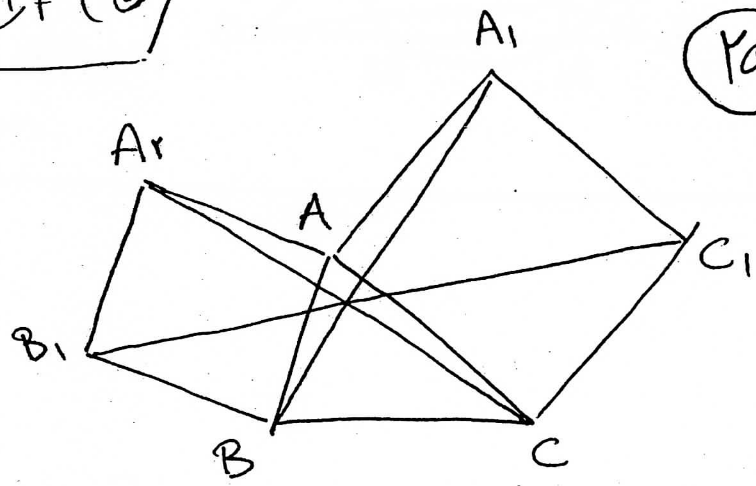
۲۴



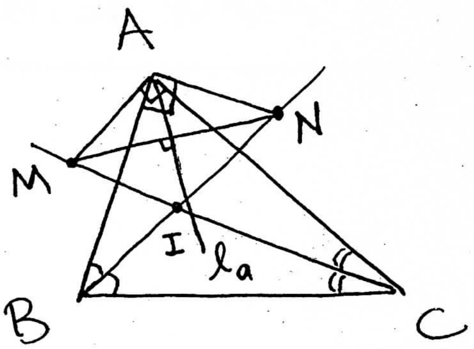
الف) ALFN محاطی ب) AF میانه‌ی متساوی (زاویه‌ای)

ج) F را A_1 بنامید (متناظر با A) $\Leftarrow$ $A_1B_1C_1O$ محاطی

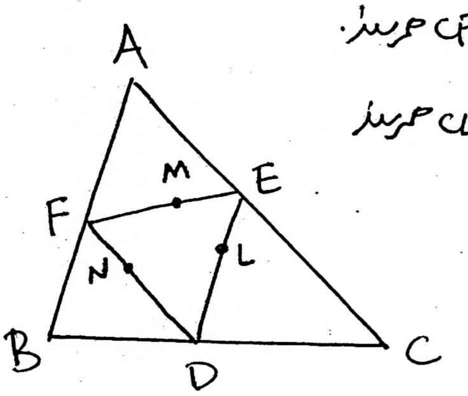
۲۵



۲۶



۲۷



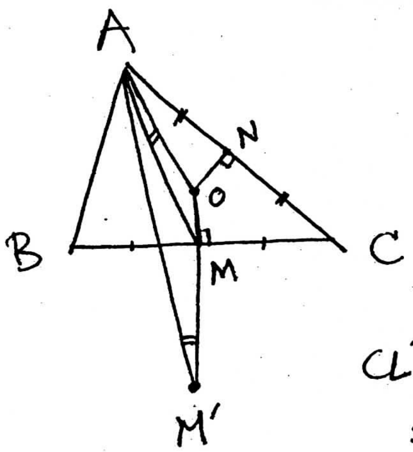
AD ، BE ، CF همرسند.

ثابت کنید: AH ، BN و CL همرسند

$\Updownarrow$

DM ، EN ، FL همرسند.

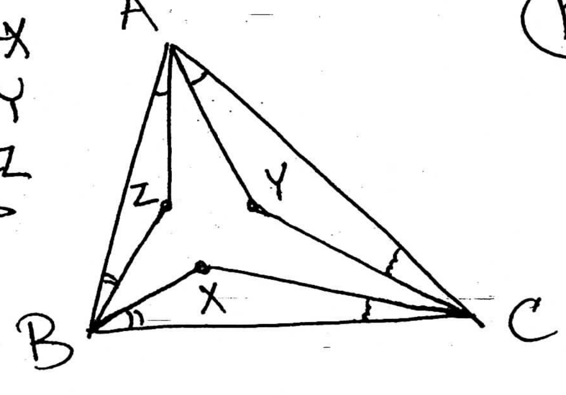
۲۸



$\Downarrow$

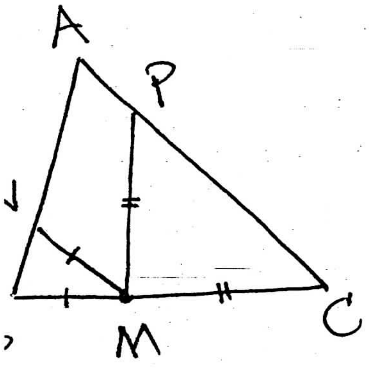
AM′ ، BN′ ، CL′ همرسند.

۲۹



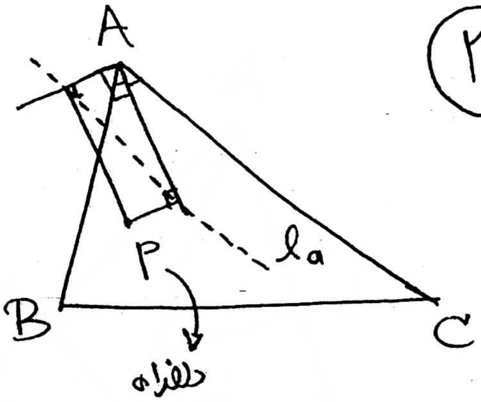
AX ، BY ، CZ همرسند.

۳۰

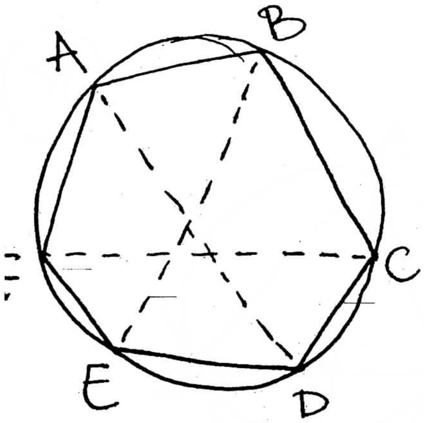


M کجا باشد تا AM ، BP ، CN همرس شوند؟

۳۱



۳۲



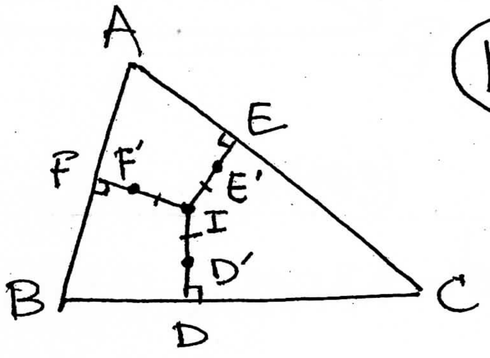
CF, BE, AB

همرسند

$\Updownarrow$

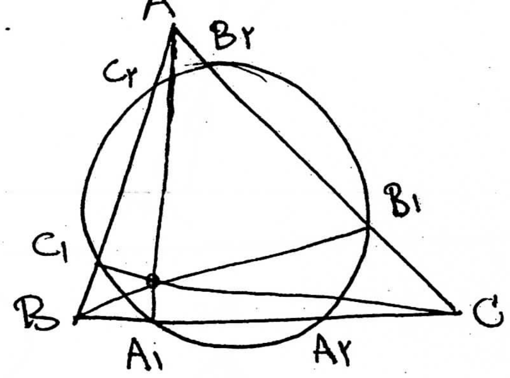
$AB.CD.EF = BC.DE.FA$

۳۳



CF′, BE′, AD′ همرسند

۳۴



CC_1, BB_1, AA_1

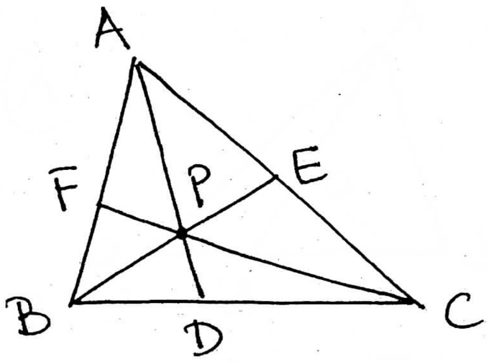
همرسند

$\Updownarrow$

CC_2, BB_2, AA_2

همرسند

رابطهٔ ژرگون



$$\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$$

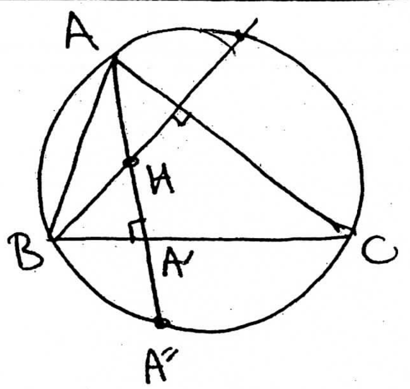
اثبات: مساحت‌ها.

۱

نابرابری ژرگون

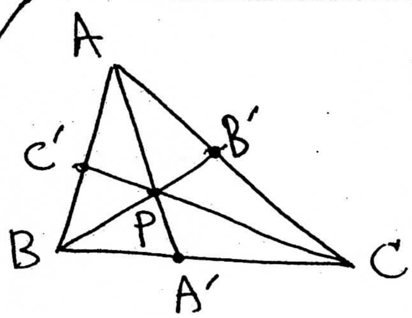
$$\sum \frac{PA}{PD} \geq 6$$

۲



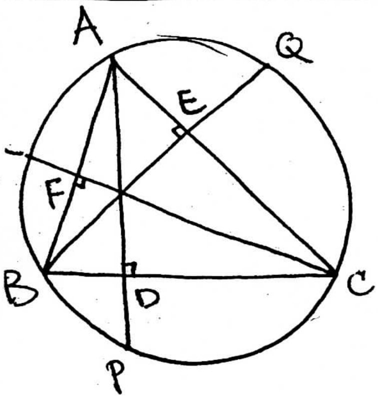
$$\sum \frac{AA''}{AA'} = 4$$

۳



$$\Rightarrow PA'+PB'+PC' \leq \max\{a,b,c\}$$

۴



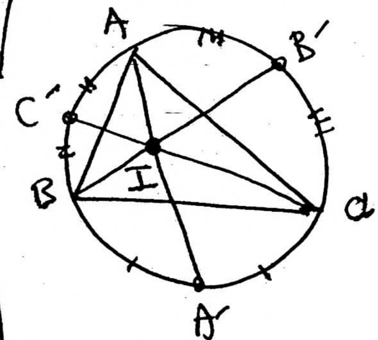
$\overset{\Delta}{ABC}$ حاده الزاویه

$$h=\max\{AD,BE,CF\}$$

$$s=\min\{AP,BQ,CR\}$$

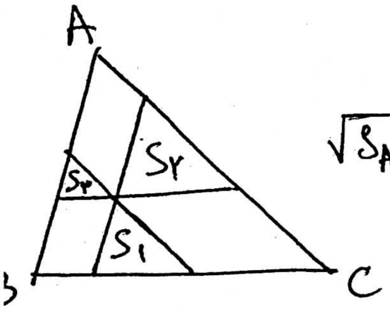
$$\Rightarrow \frac{h}{s} > \frac{1367}{1989}$$

۵



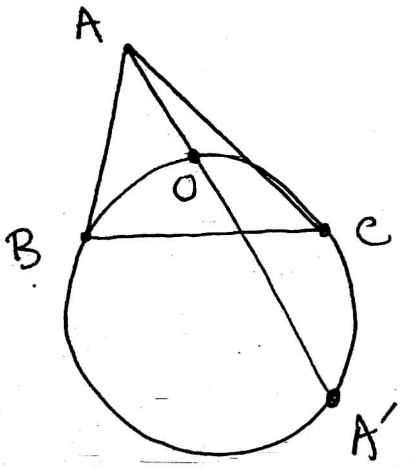
$$\sum \frac{IA'}{IA} \geq 3$$

۶



$$\sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$$

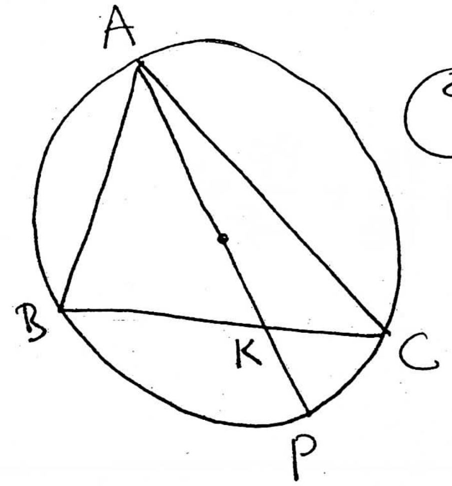
۷



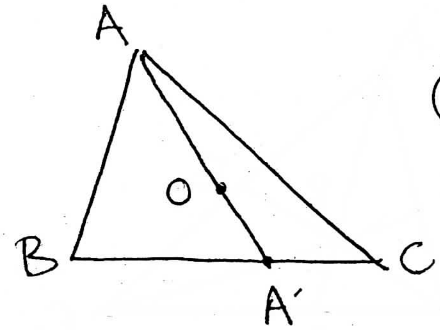
$$OA'\cdot OB'\cdot OC' \geq 8R^3 \Longleftarrow$$

۹

$$\sum \frac{KP}{AK} = 1$$

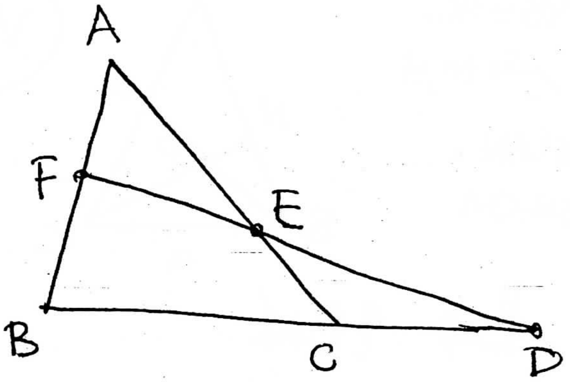


۸



$$\sum \frac{1}{AA'} = \frac{۲}{R}$$

قضیه منلائوس



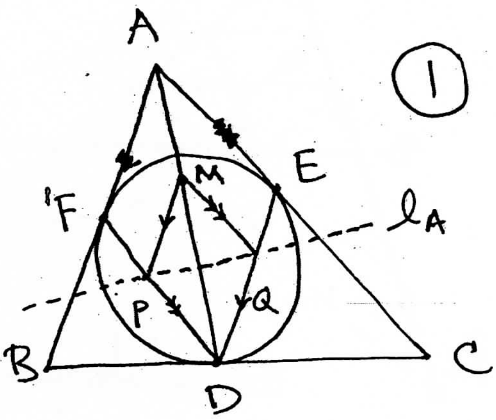
D، E، F هم‌خطند

$\Updownarrow$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=-1$$

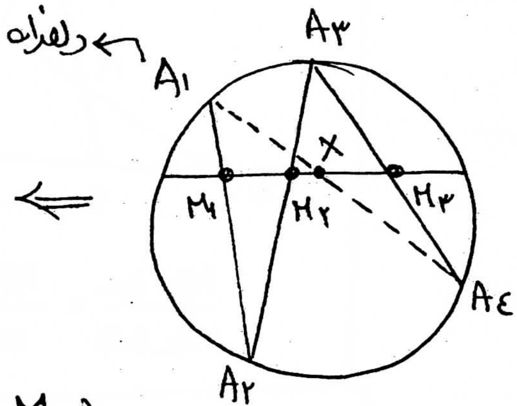
- پاره‌خط جهت‌دار
- شرح ۳ مرکز تشابه

۱



$MD=2AM$

۲



$\Leftarrow$ X ثابت

(M_k ها ثابتند آ)

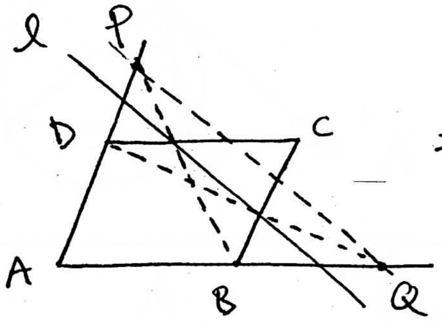
---

۳ ۴ ضلع یک ۴ ضلعی فضایی بر یک کره مماس است.

$\Downarrow$

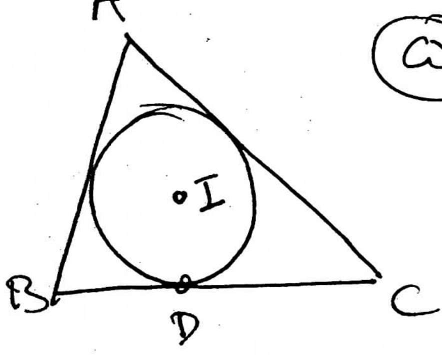
نقاط تماس هم صفحه‌اند

۴



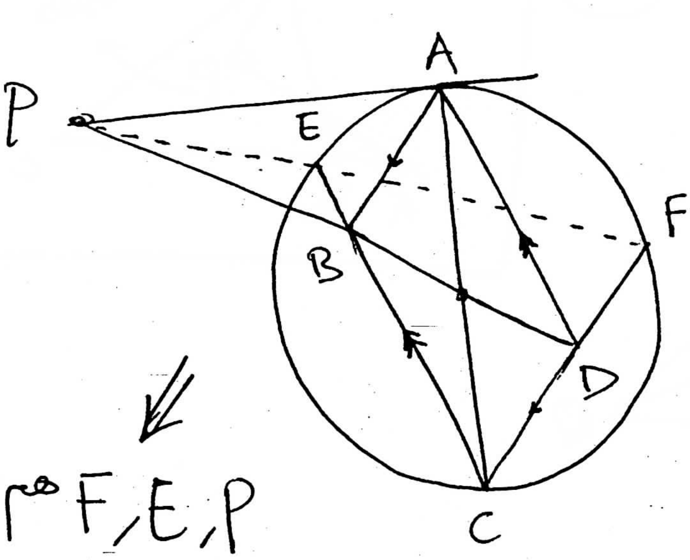
$\Rightarrow PQ \parallel l$

۵



$A'=O_{\triangle AID}$ و ...

۶



$\Downarrow$

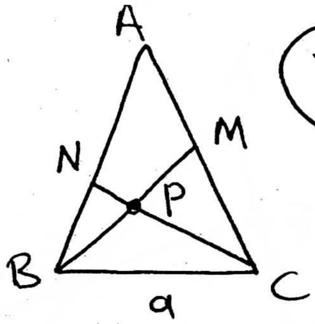
F، E، P هم‌خطند

۷

$AB=AC$

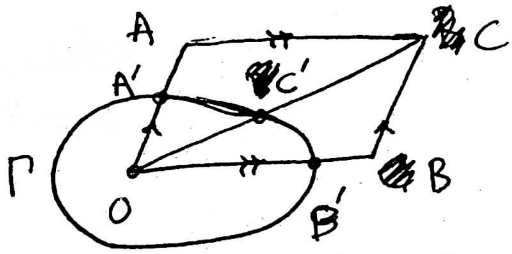
متغیر M,N

$a^2.AM.AN = b^2.BN.CM$



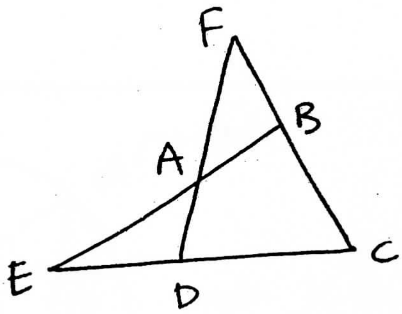
مکان P ؟

۸



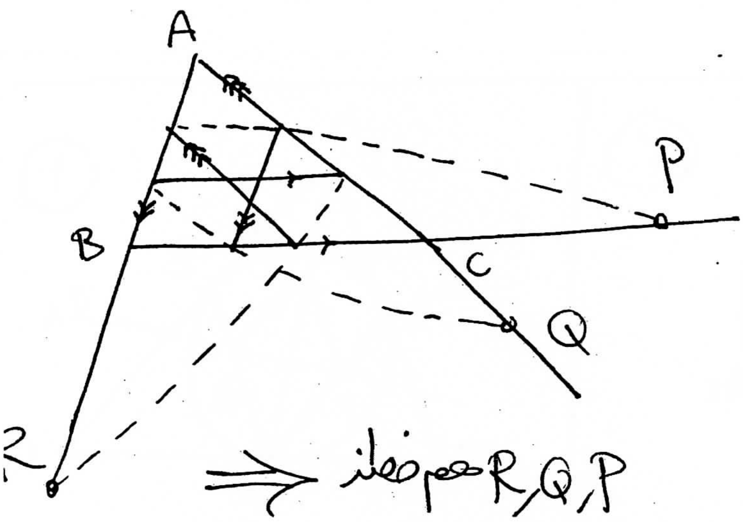
Γ بیضی به مرکز O $\Rightarrow \frac{OA}{OA'}+\frac{OB}{OB'} \geq \frac{OC}{OC'}$

۹



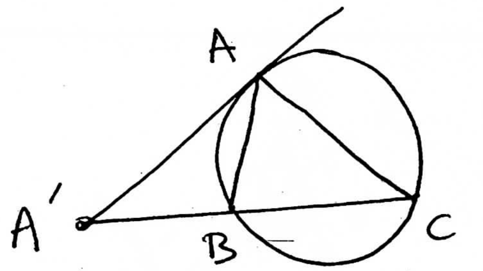
$\frac{AE.EC}{DE.EB}=\frac{AF.FC}{DF.FB}$

۱۰

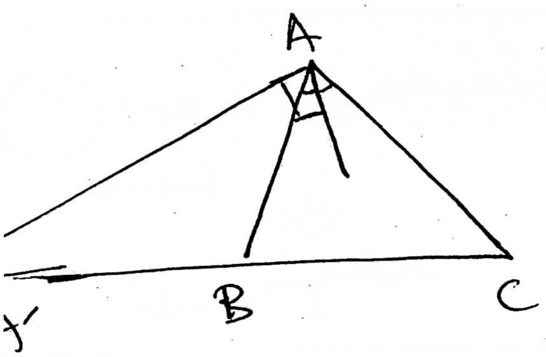


$\Rightarrow$ R,Q,P هم‌خط

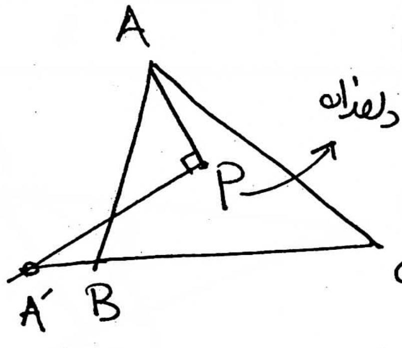
۱۱



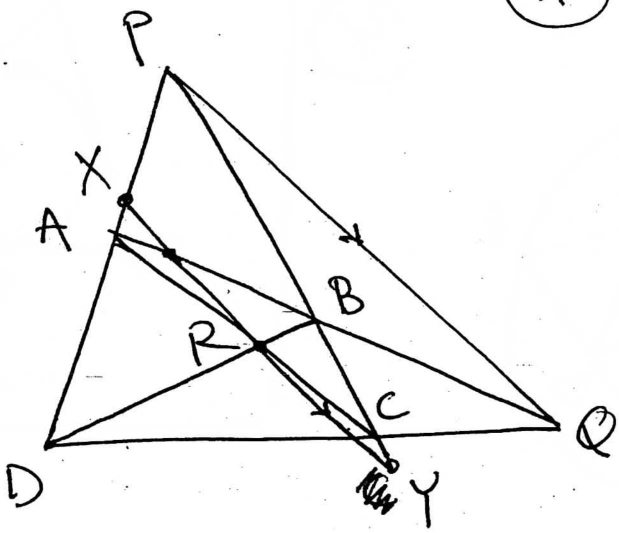
۱۲



۱۳

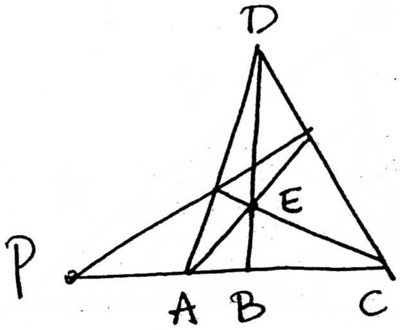


۱۴



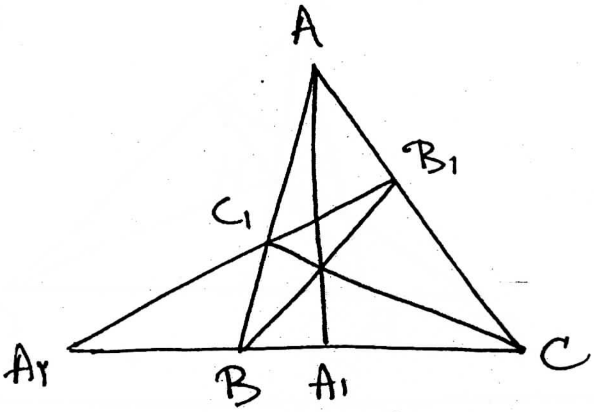
$RX=RY \Leftarrow$

۱۵



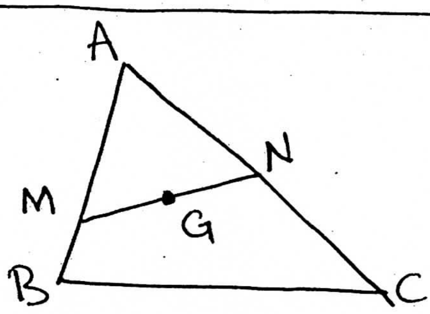
A, B, C ثابت
E, D دلخواه $\Rightarrow$ P ثابت!

۱۶



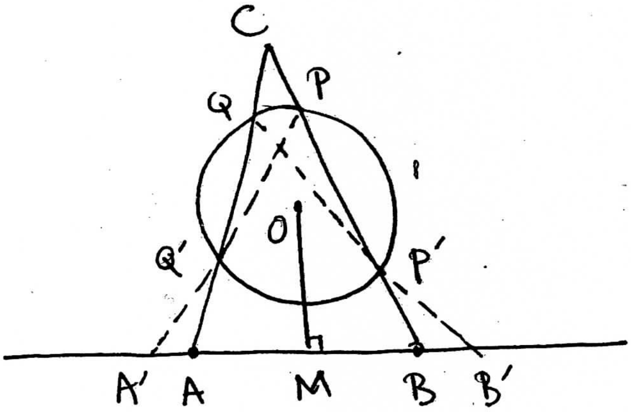
$\Rightarrow$ اوساط A_1A_2) هم خطند

۱۷



$\Rightarrow AN \cdot MB + AM \cdot NC = AM \cdot AN$

۱۸

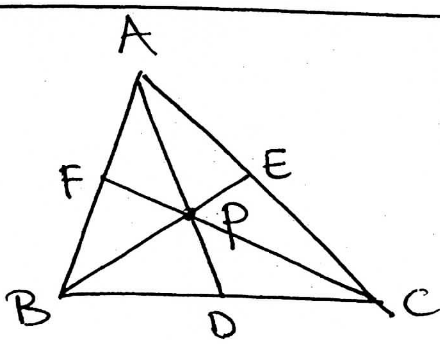


$MA = MB \Rightarrow MA' = MB'$

۱۹

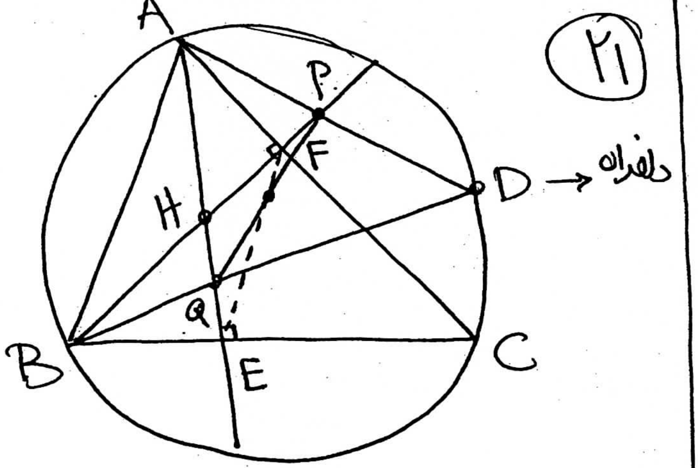
اوساط اقطار ۴ ضلعی کامل هم خطند.

۲۰



$$\Rightarrow \frac{AP}{PD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}$$

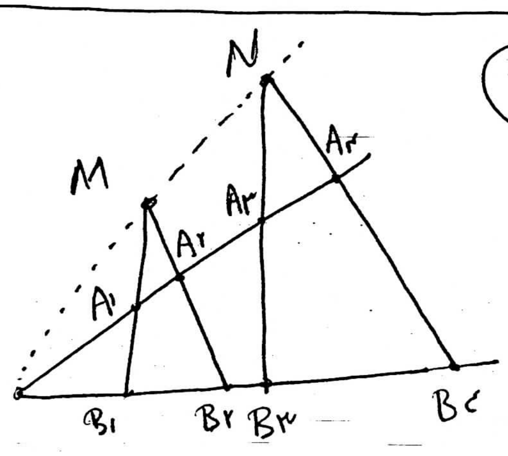
۲۱



$D \rightarrow$ دلخواه

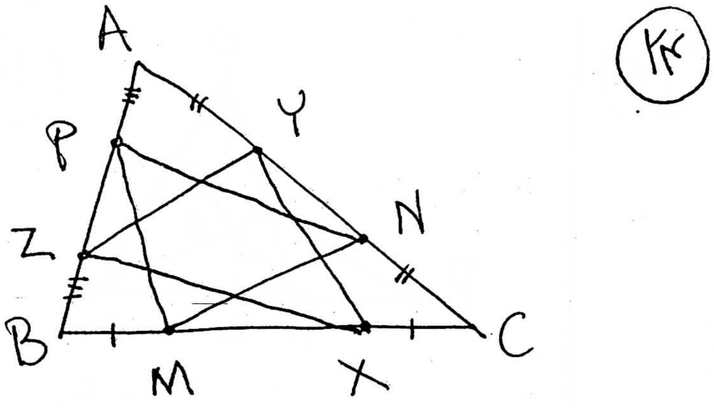
$\Rightarrow$ EF از وسط PQ می‌گذرد.

۲۲

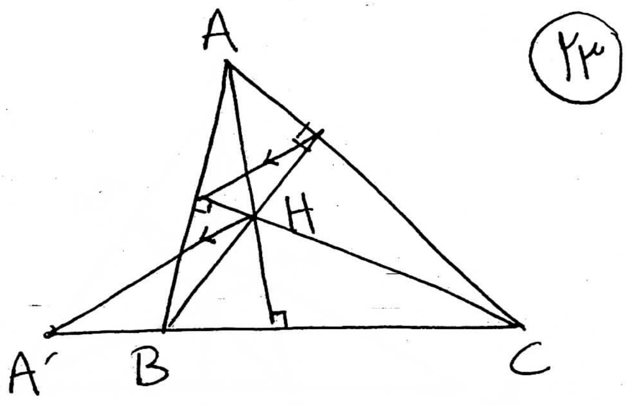


$$\frac{OB_1}{OB_3} \cdot \frac{OB_2}{OB_4} \cdot \frac{B_3B_4}{B_1B_2} = \frac{OA_1}{OA_3} \cdot \frac{OA_2}{OA_4} \cdot \frac{A_3A_4}{A_1A_2} \Longleftrightarrow$$

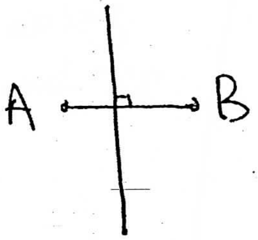
N, M, O هم خطند



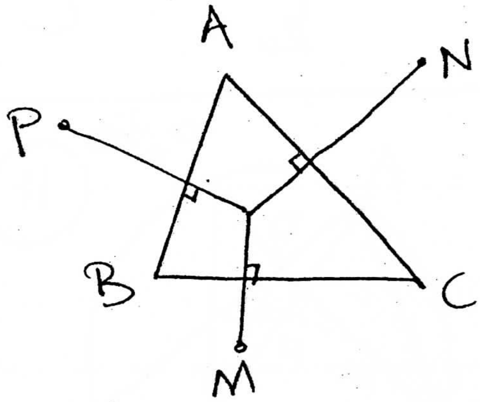
$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{MNP}} = S_{\overset{\Delta}{XYZ}}$



قضیه کارنو



ـ یادآوری: مکان هندسی $MA^2 - MB^2 = k$.



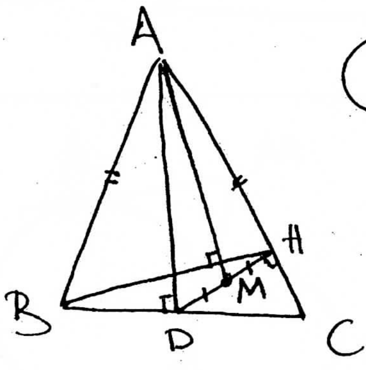
$$AP^2 - PB^2 + BM^2 - MC^2 + CN^2 - NA^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

عمودهای رسم شده از M, N, P بر BC, CA, AB همرس باشند.

---

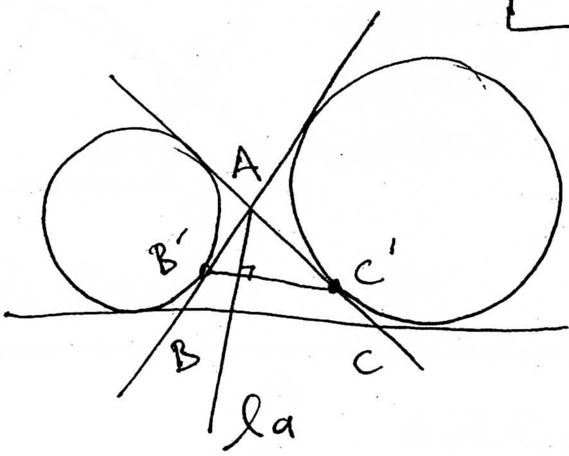
(1)



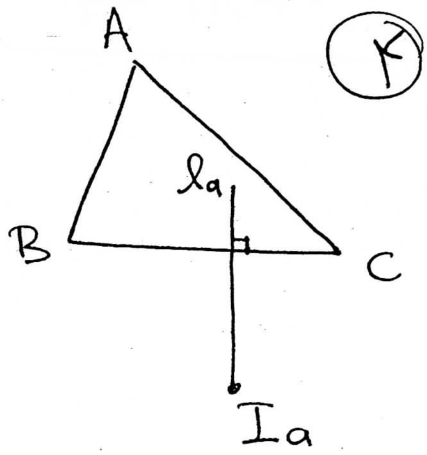
$AM \perp BH$

(2) ارتفاع ها همرسند.

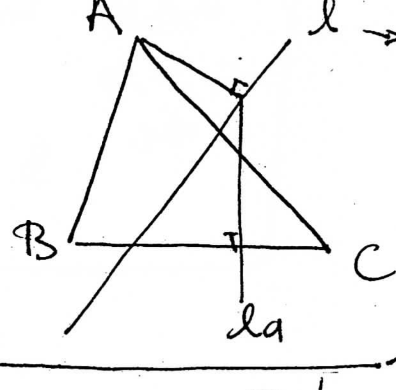
(3)



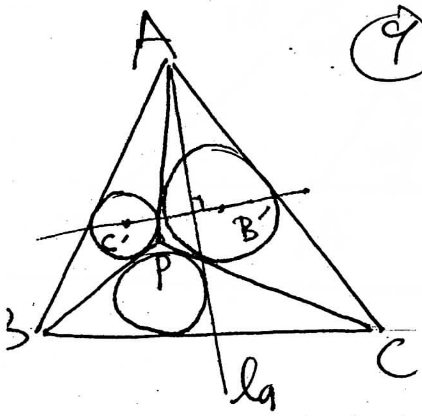
(4)



(5)



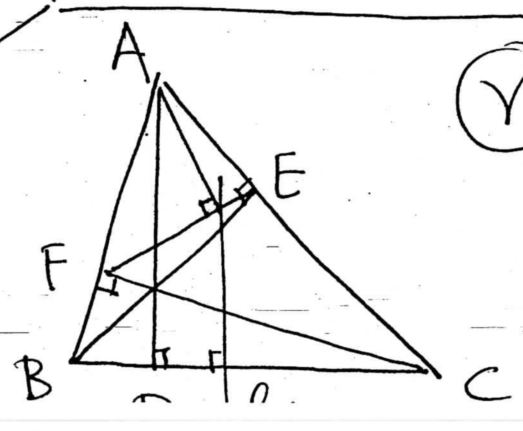
(6)



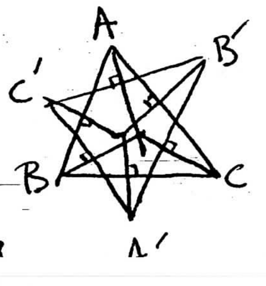
ABC متساوی‌الا

P دلخواه

(7)

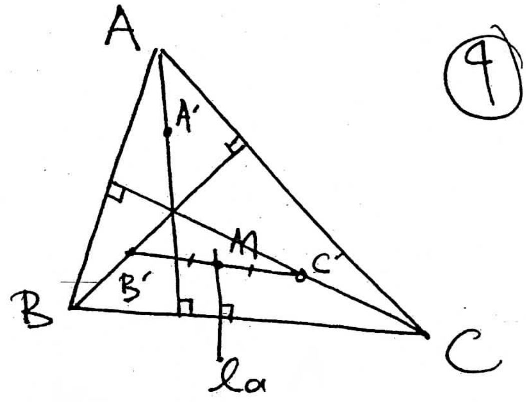


(8)



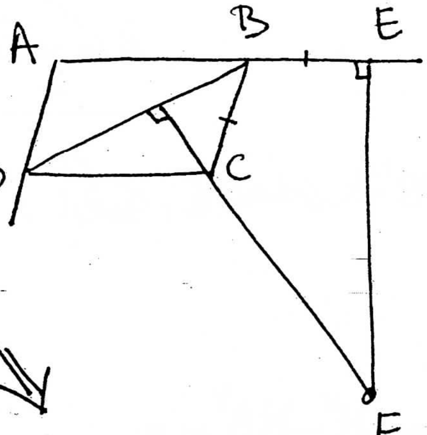
$l'_a \Longleftrightarrow l_a$

۹



A'، B'، C' دلخواه
روی ارتفاع
M وسط $B'C'$

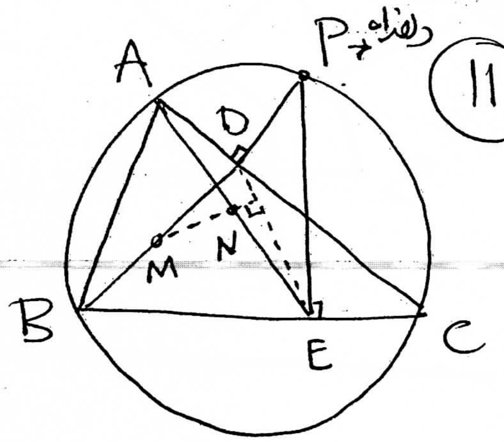
۱۰



⇓

AF نیمساز $\hat{A}$ است

۱۱

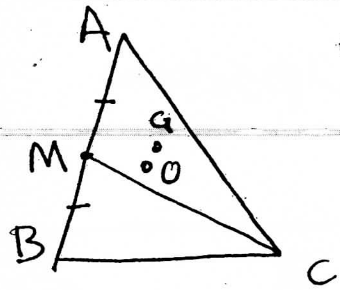


M وسط BD
N وسط AE

⇓

$MN \perp DE$

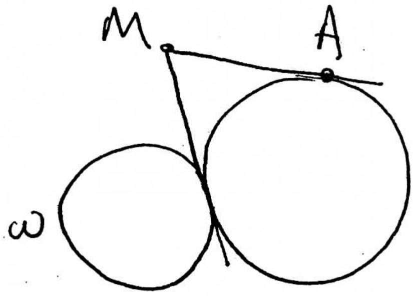
۱۲



$G = G_{\triangle AMC}$
$O = O_{\triangle ABC}$

$AB = AC \iff OG \perp CM$

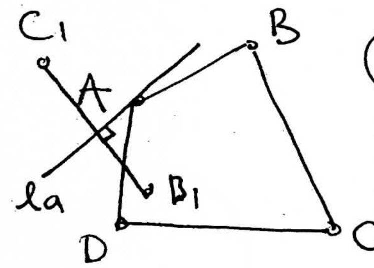
۱۳



ω، A ثابت $\Rightarrow$ مکان M ؟

۱۴

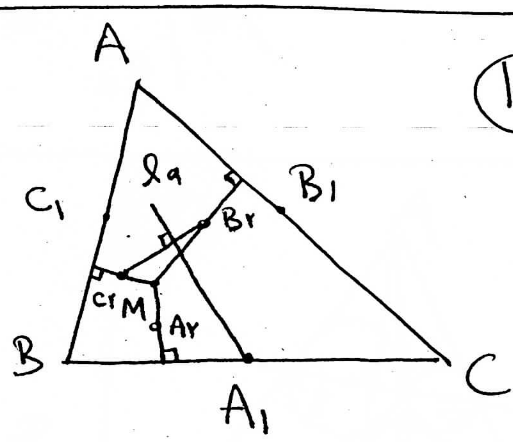
$A_1 = H_{BCD}$
$B_1 = H_{ACD}$
$C_1 = H_{ABD}$



$\Rightarrow$ l_a، l_b، l_c همرسند

۱۵

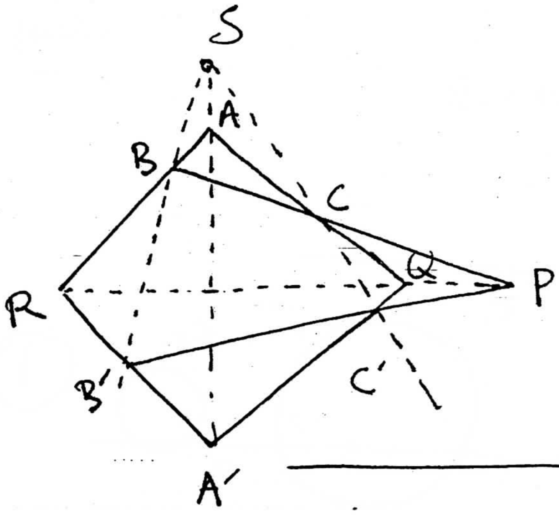
A_1، B_1، C_1
وسط‌های اضلاع
M دلخواه
A_2، B_2، C_2
دلخواه



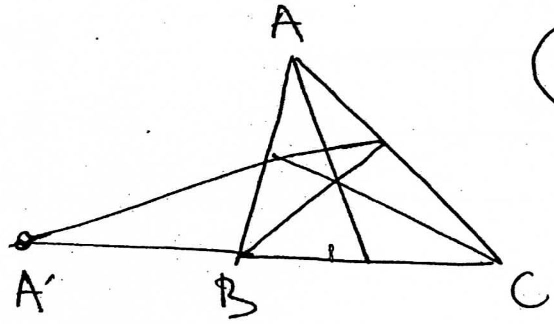
قضیه دزارگ

- اثبات: منلائوس / صفحه و [illegible]

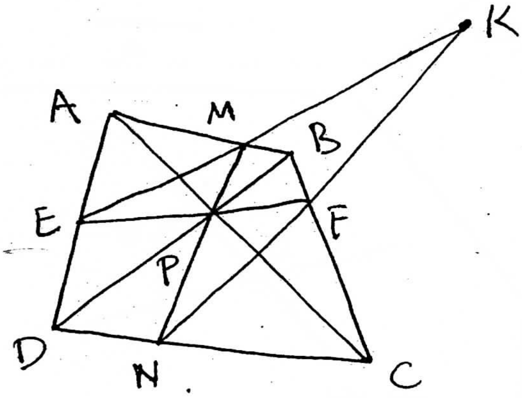
- مرکز همسانی ، محور همسانی



۱



۲

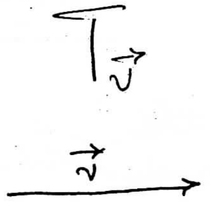


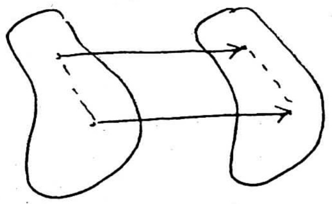
EF و MN متغیر $\Rightarrow$ مکان K ؟

۳

انتقال

$T_{\vec{v}}$

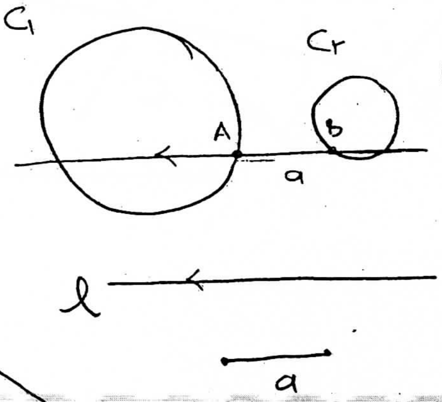




$T_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$

---

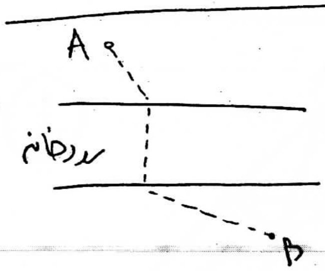
۱)



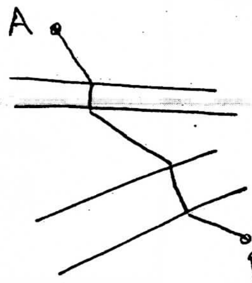
$\left.\begin{matrix} C_1, C_2 \\ a, l \end{matrix}\right\}$ ⇐ خطی موازی l رسم کنید تا $AB=a$.

---

۲) الف)

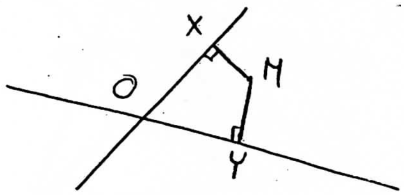


ب)



---

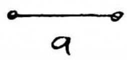
۳)



مکان M ؟

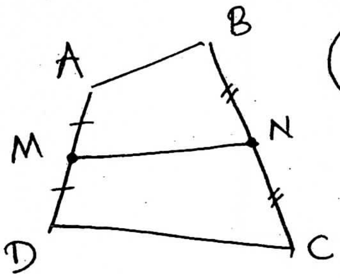
الف) $MX+MY=a$

ب) $|MX-MY|=a$



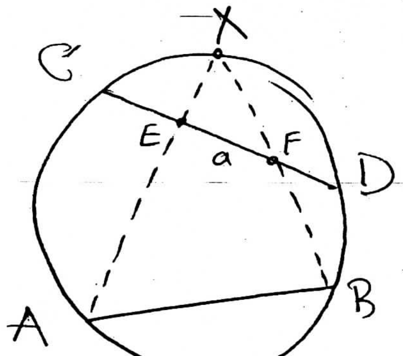
---

۴)



$MN=\dfrac{AB+CD}{2} \Rightarrow ABCD$ ذوزنقه

ه)

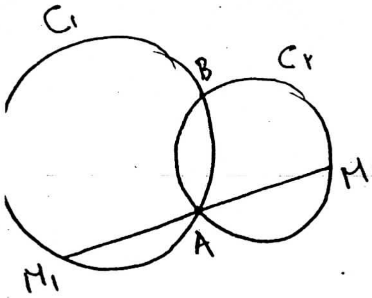


X ⇐ را طوری بیابید که $EF=a$.

(a معلوم)

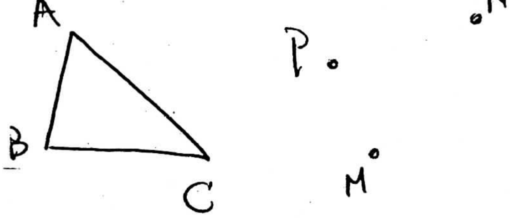
---

۶) الف)



M_1M_2 را رسم کنید که $M_1M_2=a$.

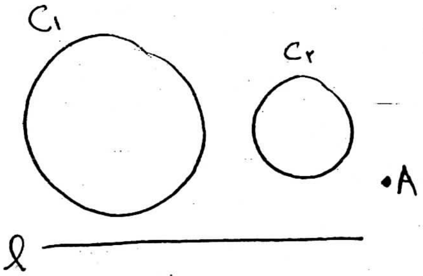
ب)



مثلثی قابل انطباق با $\overset{\Delta}{ABC}$ رسم کنید که اضلاع آن (یا امتداد آنها) از M, N, P بگذرد.

---

۷)

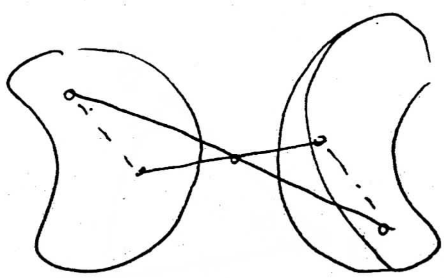


الف) خطی بکشید موازی l که از C_1, C_2 وترهای مساوی جدا کنند.

ب) خطی بکشید موازی l که مجموع (تفاضل) وترها a شود.

ج) خطی بکشید گذرنده از A که وترهای مساوی روی C_1, C_2 جدا کنند.

نیم دور (تقارن مرکزی یا دوران ۱۸۰ درجه)

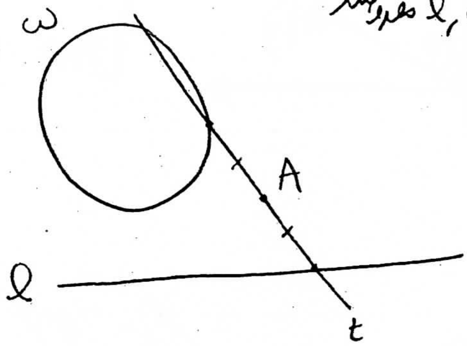


---

۱) A، ω، l مفروضند

⇐

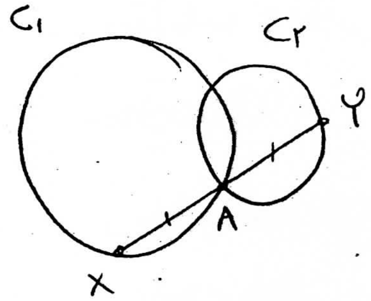
t را رسم کنید.



۲) C_1 و C_2 مفروضند:

الف) XY را رسم کنید.

ب) $|AX-AY|=a$



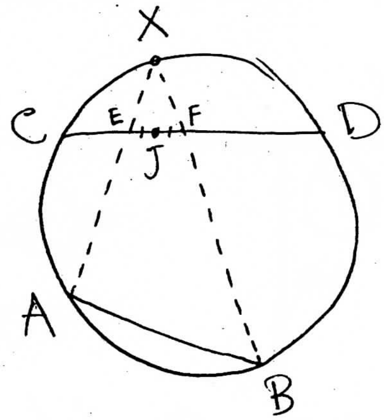
---

۳) AB، CD

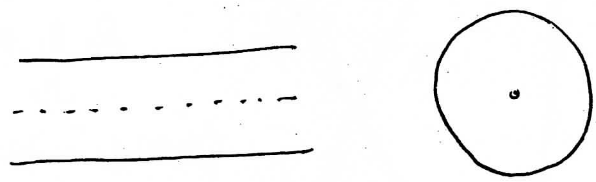
J مفروض

⇓

X را بیابید.



۴) آیا می‌توانید شکلی را بیابید که بیش از یک مرکز تقارن اما متناهی تا داشته باشد؟



---

۵) ترکیب تقارن مرکزی چیست؟

زوج تا ← انتقال

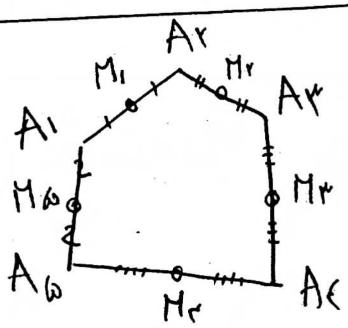
فرد تا ← تقارن مرکزی

۶) M_i ها را داریم

⇓

$A_1 \dots A_5$ را رسم کنید.

(زوج ضلعی چی؟)

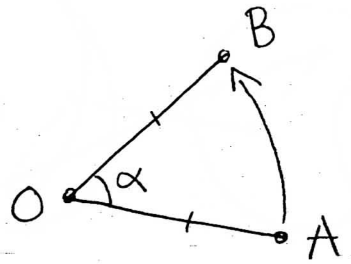


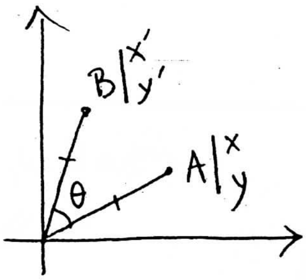
---

۷)

دوران

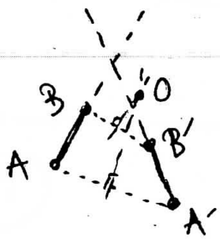
$R_{O}^{\alpha}(A)=B$





$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$$

- نقطه ثابت : مرکز
- ماتریس دوران :
- خط به خط (زاویه α)
- دایره به دایره

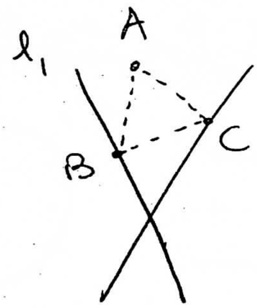


* قضیه : هر ۲ پاره خط مساوی و غیر موازی را می‌توان با یک دوران به یکدیگر تبدیل کرد.

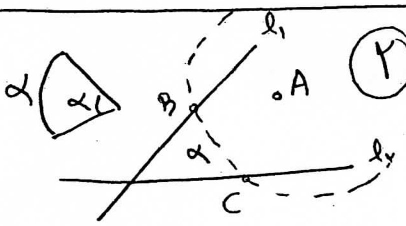
---

(۱)

A, l_1, l_2 ⟸ مثلث متساوی الاضلاع ABC رسم کنید.



(۲)



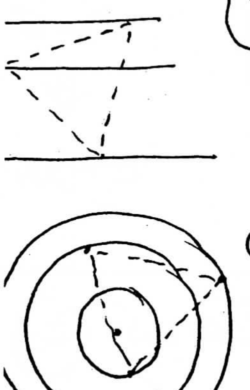
A, l_1, l_2, α

الف ⟸ دایره به مرکز A رسم کنید که $BC=\alpha$

(۳)

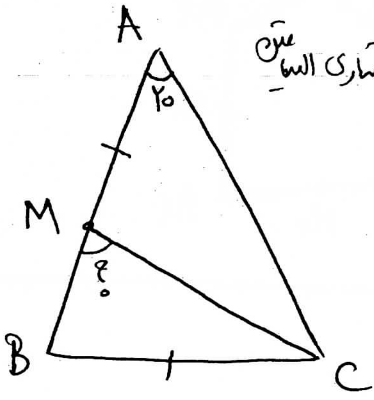
الف)

ب)

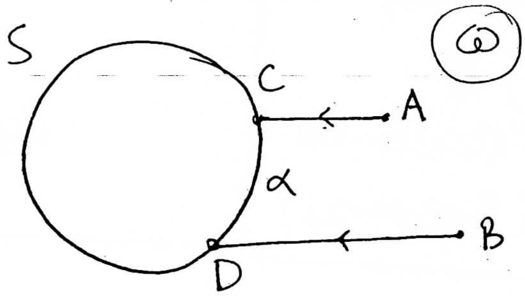


(۴)

ABC متساوی الساقین ⟹ $\hat{M}=?$



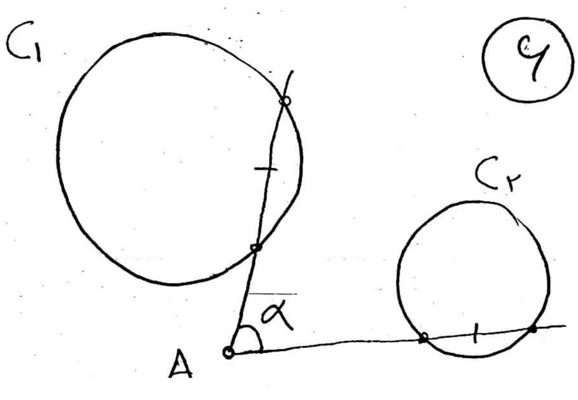
(۵)



A, B, S, α مفروضند ⟸ C, D را بیابید طوری که
C||BD
D=α

(۶)

α, A, C۱, C۲ مفروضند



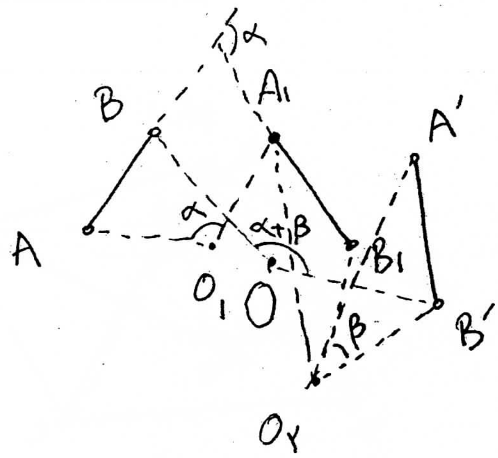
الف ⟸ دو خط گذرنده از A رسم کنید که C۱, C۲ را قطع کنند و وترهای مساوی روی آن‌ها ایجاد کنند و زاویه بین خط‌ها α باشد.

ترکیب دوران‌ها

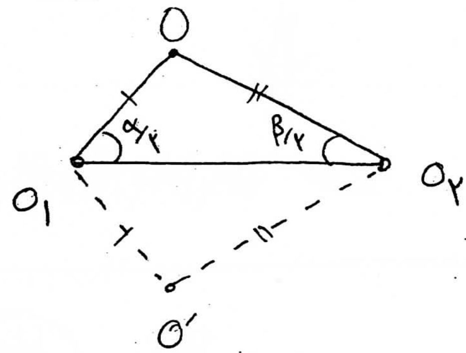
ترکیب ۲ دوران:

$$R_{O_1}^{\alpha} \circ R_{O_2}^{\beta} = R_{O}^{\alpha+\beta} \qquad \alpha+\beta \neq 360$$

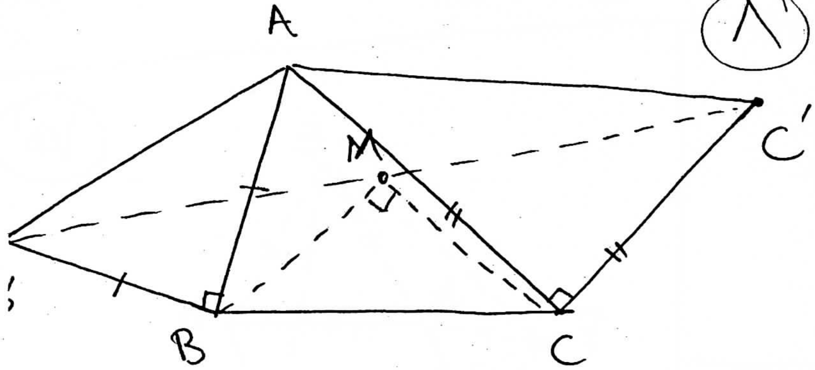
$$R_{O_1}^{\alpha} \circ R_{O_2}^{\beta} = \text{انتقال} \qquad \alpha+\beta = 360$$



* اثبات (با رسم خط‌ها...)

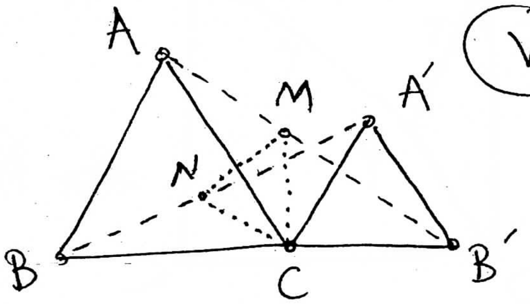


(۸)



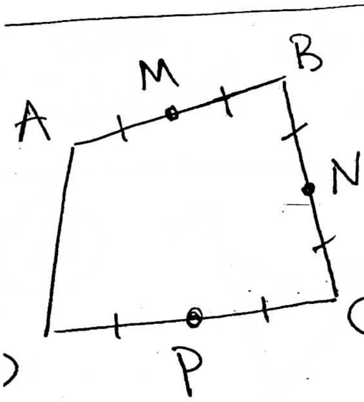
M وسط $B'C'$ $\Leftarrow$ $\triangle BMC$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

(۷)



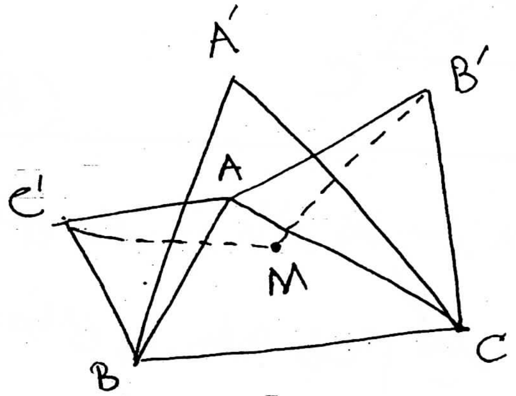
M وسط AB' ، N وسط $A'B$ $\Leftarrow$ $\triangle CMN$ متساوی‌الاضلاع

(۱۰)



اگر $AB=BC=CD$ ، با در دست داشتن P, N, M ، $ABCD$ را رسم کنید.

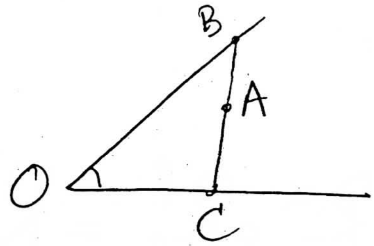
(۹)



$MC'=MB'$ $\Leftarrow$

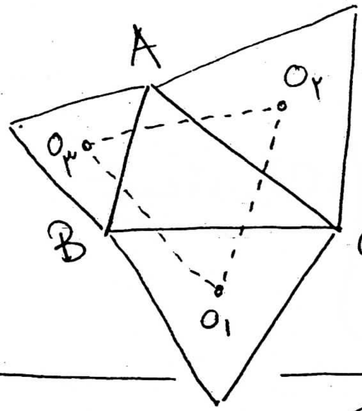
$\widehat{B'MC'}=120^\circ$

۱۱



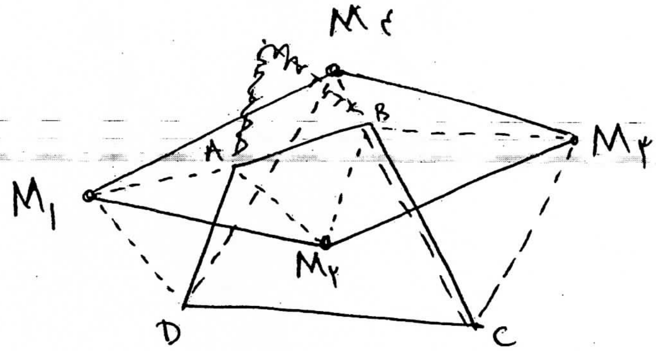
$\hat{O}$ و $\hat{A}$ ثابت ⇐ C ، B را باید طوری یافت که $S_{OBC}^{\triangle}$ مینیمم شود.

۱۲



$\overset{\triangle}{O_1O_2O_3}$ متساوی الاضلاع

۱۳



ABCD دلخواه
۴ مثلث متساوی الاضلاع } ⇐ $M_1M_2M_3M_4$ متوازی الاضلاع

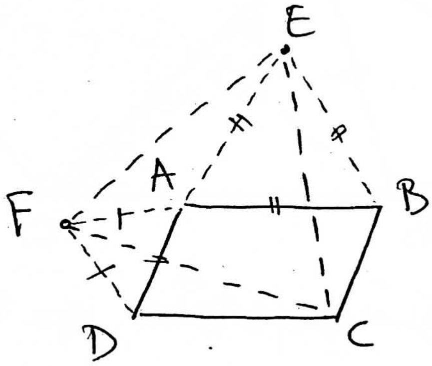
۱۴

در شکل ۱۳ اگر $AC=BD$

⇓

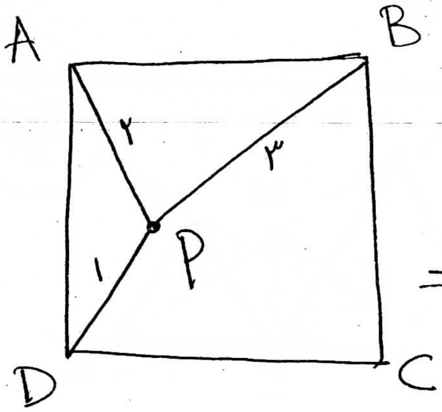
$M_1M_2M_3M_4$ لوزی

۱۵



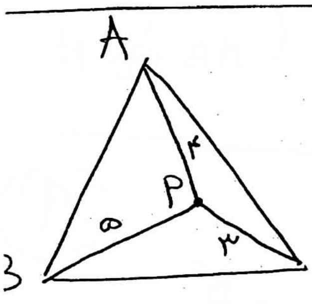
ABCD متوازی الاضلاع ⇐ CEF متساوی الاضلاع

۱۶



$\Rightarrow \hat{APD} = ?$

۱۷

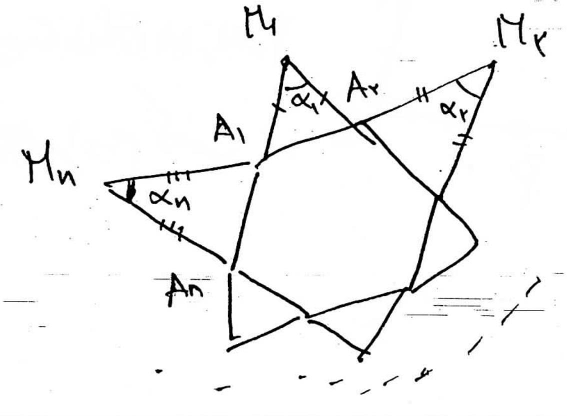


$\Rightarrow S_{ABC}^{\triangle} = ?$

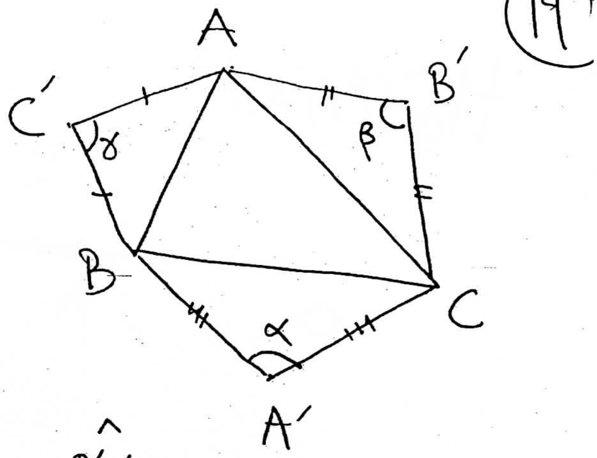
$(\sqrt{25+12\sqrt{3}})$

۱۸

با داشتن $M_1, M_2, \ldots, M_n$ و $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ، n ضلعی $A_1A_2\ldots A_n$ را رسم کنید.



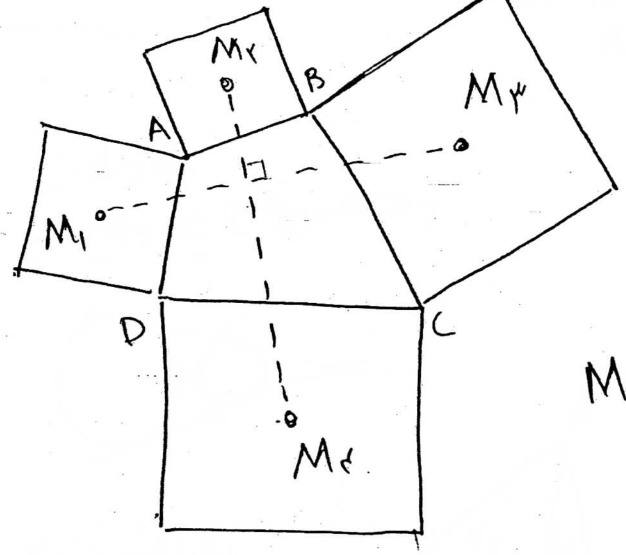
۱۹)



$\widehat{B'A'C'}=\frac{\alpha}{2}$ و ... $\Leftarrow$ $\alpha+\beta+\gamma=360$

۲۰)

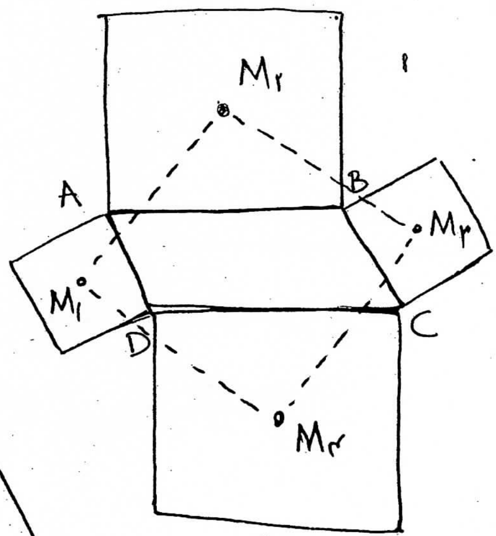
الف)



$\Downarrow$

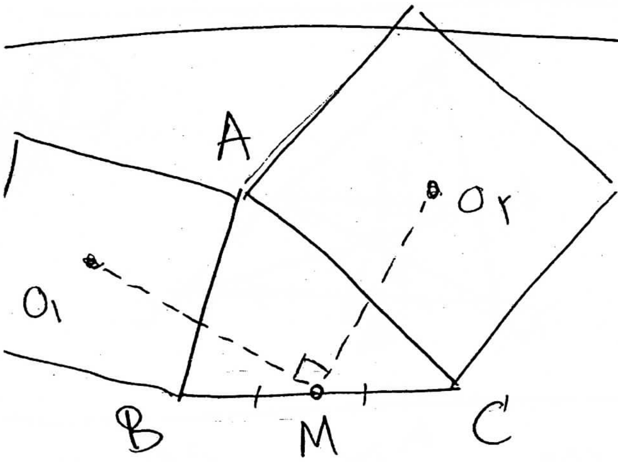
$M_1M_3 \stackrel{\perp}{=} M_2M_4$

ب)



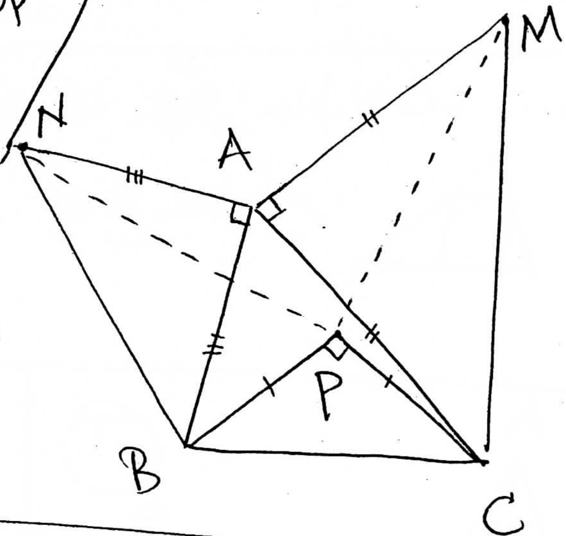
$\Leftarrow$ $M_1M_2M_3M_4$ مربع

۲۱)



$MO_1 \stackrel{\perp}{=} MO_2$

۲۲)



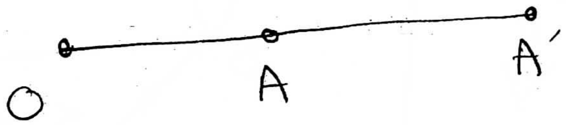
([illegible])

$PM \stackrel{\perp}{=} PN$

تجانس

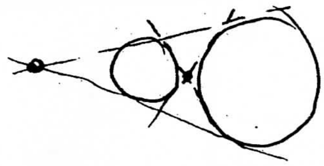
$H_O^k(A)=A'$

$\frac{OA'}{OA}=k$

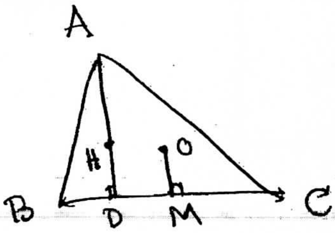


_ خط به خط

_ دایره به دایره (مستقیم و معکوس)



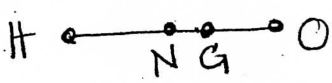
$H_G^{-\frac{1}{2}}(\overset{\triangle}{ABC})=\overset{\triangle}{MNP} \Rightarrow AH=2OH \Rightarrow \cdots$



(۱) خط اویلر

_ دایره نه نقطه

_ N



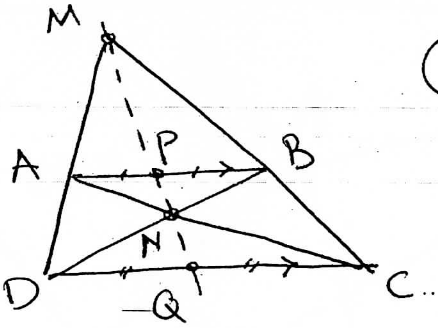
خط اویلر

---

(۲)

الف) M ، N ، P ، Q هم خطند.

ب) C_{ABM} و C_{CDM} مماسند و ...

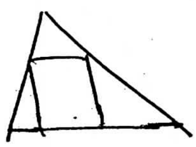


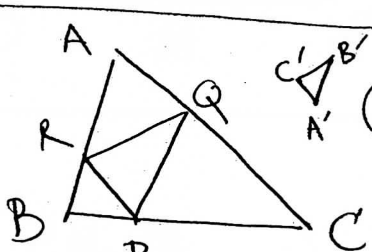
---

(۳)

الف) در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ مثلث $\overset{\triangle}{PQR}$ را محاط کنید که: $PQ \parallel A'B'$, ...

ب) « « یک مربع محاط کنید.



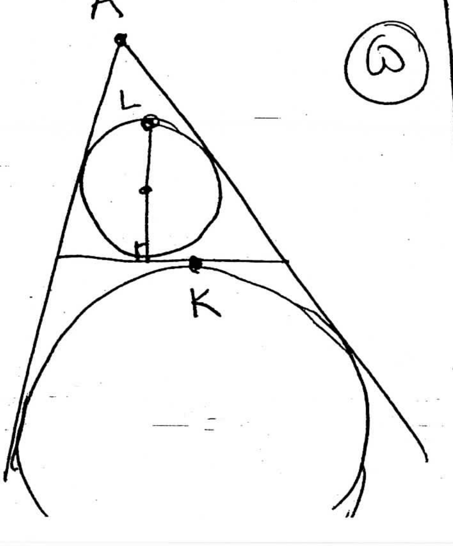


---

(۴) PLL

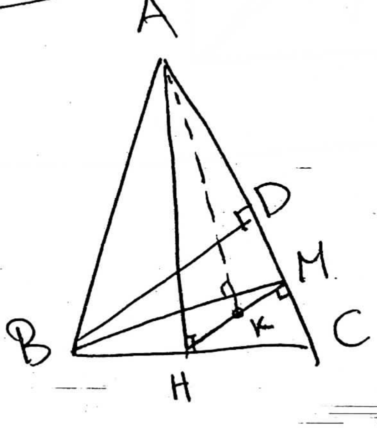
۲ راه حل

(۵)



L, K, A ⇐ هم خطند

(۶)



$\overset{\triangle}{BDC}$

دوران + تجانس $90°$

$\Downarrow$

$\overset{\triangle}{AMH}$

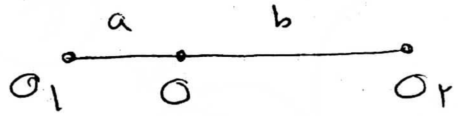
$\Downarrow$

میانه ⊥ میانه

$AK \perp BM$

ترکیب تجانس

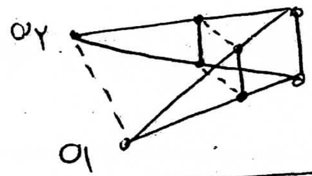
$$H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1} = H_O^{k_1k_2}$$



نقطه ثابت = مرکز تجانس

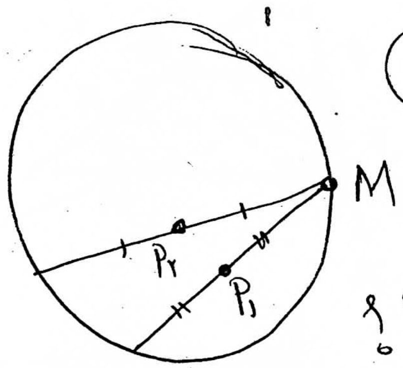
$$k_2(a+b-k_1a)=b \Rightarrow k_2\left(\frac{a}{b}+1-k_1\frac{a}{b}\right)=1$$

$$\Rightarrow k_2+\frac{a}{b}(k_2(1-k_1))=1 \Rightarrow \boxed{\frac{a}{b}=\frac{1-k_2}{k_2(1-k_1)}} \rightarrow$$ مشکلی دارد...



- اگر $k_1k_2=1$ ، ترکیب تجانس یک انتقال است.

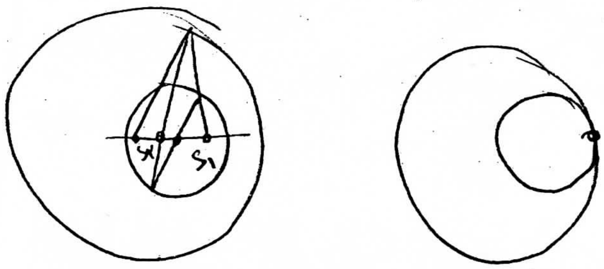
۸



مکان P ؟

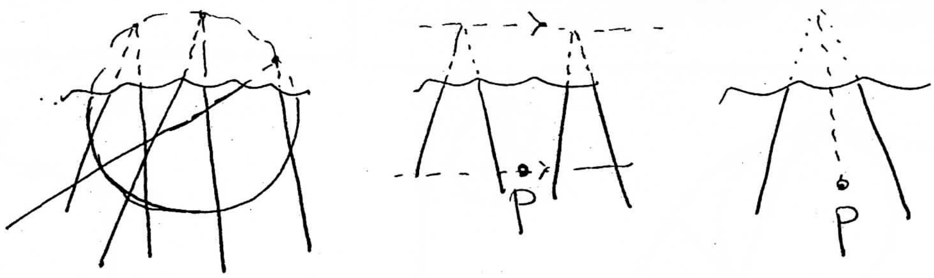
ساده‌تر

۷ پیدا کنید که مرکز تجانس ۲ دایره.

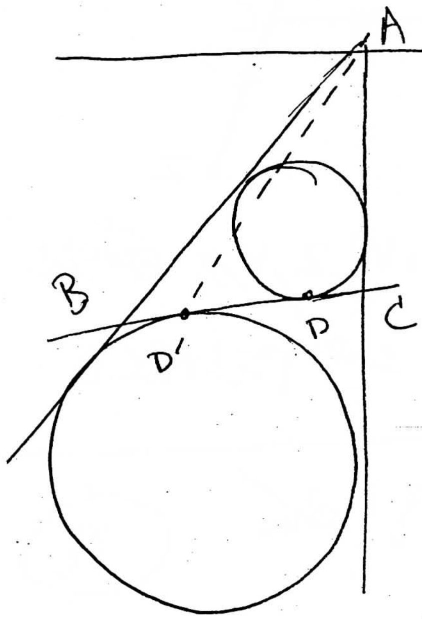


---

۹ ترسیم



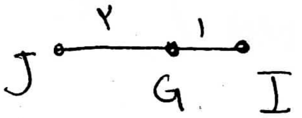
۱۱



الف) AD' همرسند

ب) اگر J

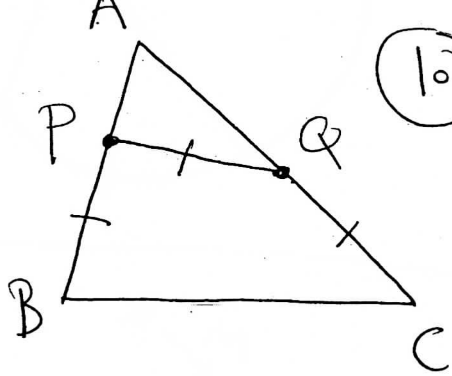
حل تمرین:



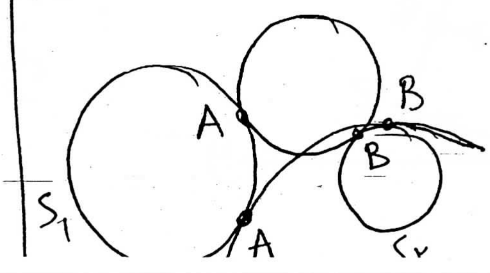
(نظیرش)

۱۰

اساسی P, Q



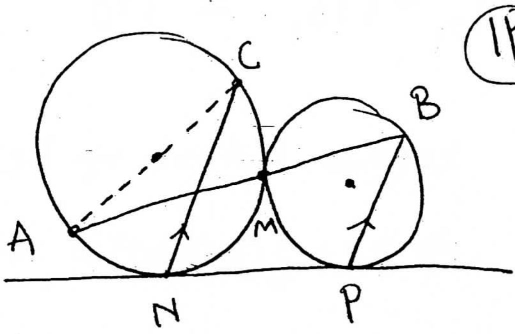
۱۲



← BA از مرکز تجانس S_1, S_2 می‌گذرد.

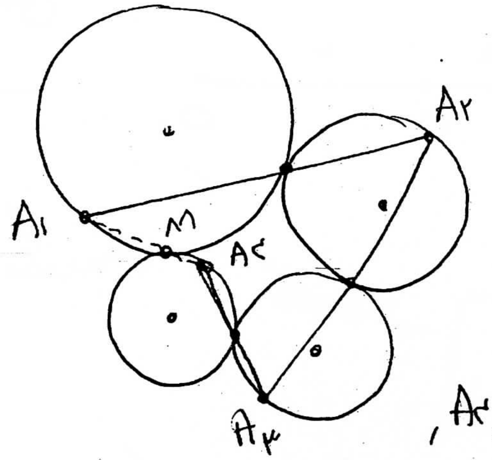
تعمیم ۳ مرکز تجانس

۱۳



⇐ A ، C روبرو قطری اند

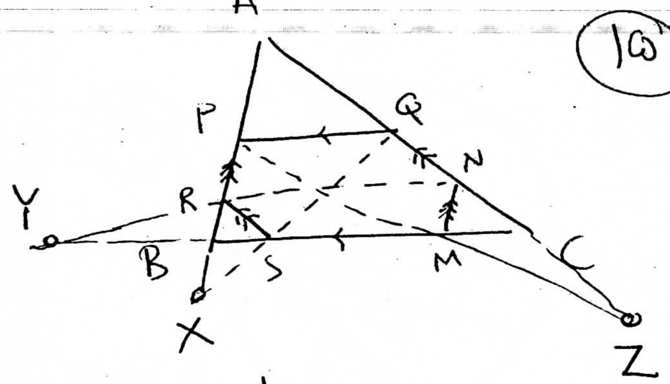
۱۴



⇐ A_1 ، A_4 ، M هم خطند

(تعمیم دهید ...)

۱۵

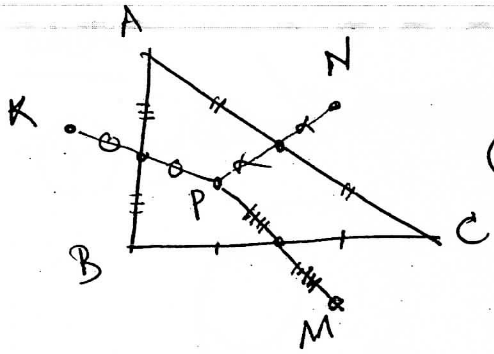


⇐ X ، Y ، Z هم خطند

۱۶

P دلخواه

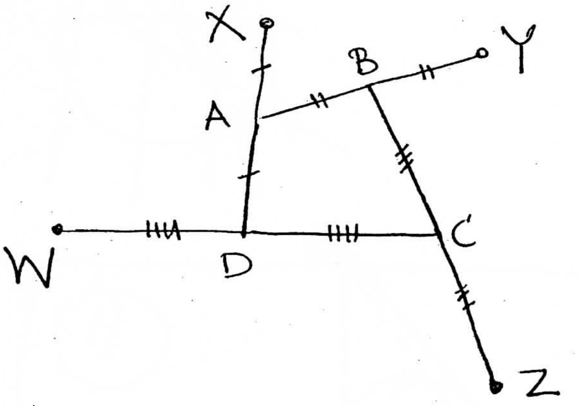
قرینه نسبت به وسط اضلاع ⇐



الف) AM ، BN ، CK همرسند: (در Q)

ب) اگر P روی دایره حرکت کند، مکان Q ؟

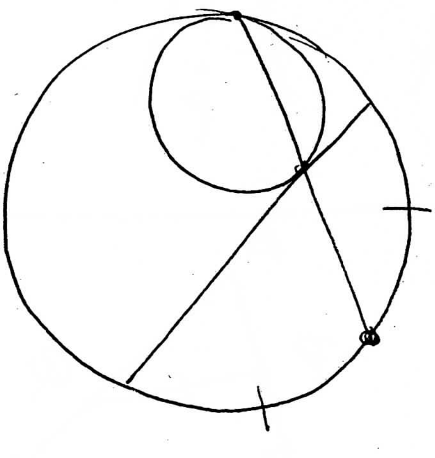
۱۷



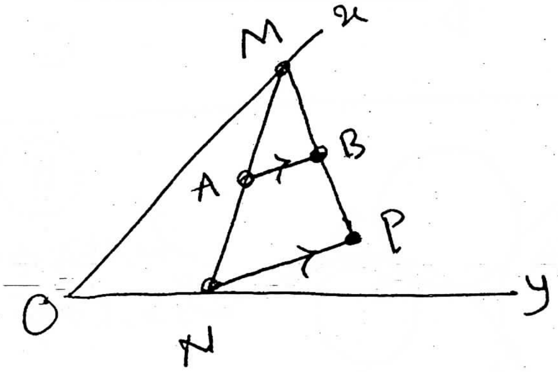
با داشتن X ، Y ، Z ، W ،

ABCD را رسم کنید

۱۸



۱۹

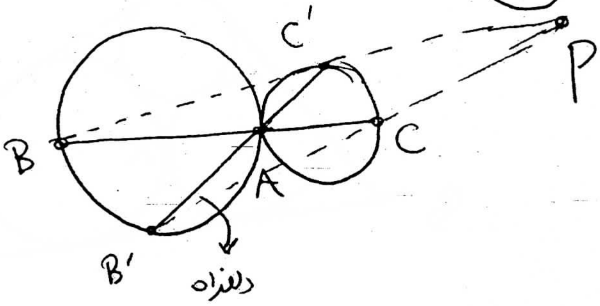


$x\hat{O}y$ ، A ، B ثابت

MN متغیر

⇒ مکان P ؟

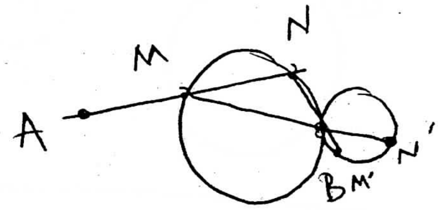
۲۰



دو دایره و A، B، C ثابت

⇐ مکان P ؟

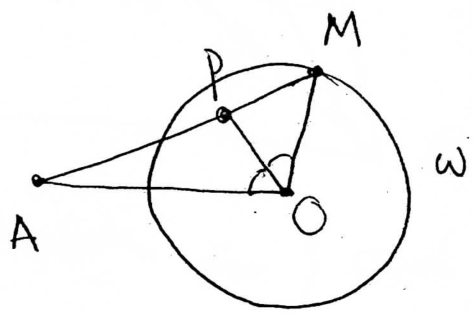
۲۱



A، B، دو دایره ثابت

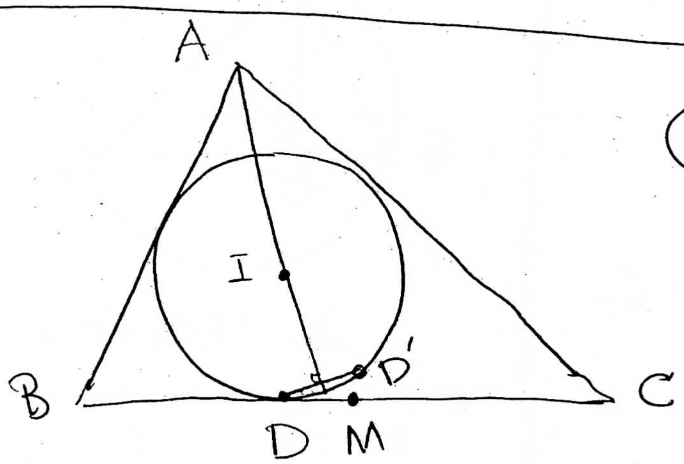
⇐ MN' از نقطهٔ ثابت می‌گذرد.

۲۲



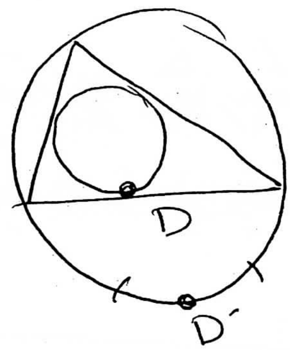
A، ω ثابت
M دلخواه
⇐ مکان P ؟

۲۳



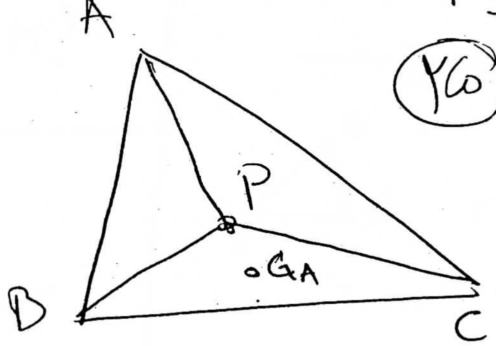
$l_A = MD'$ ⇐ l_A، l_B، l_C همرسند

۲۴



$l_A = DD'$

۲۵

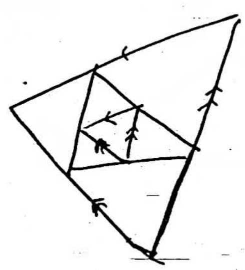


P دلخواه

⇓

$l_A = AG_A$

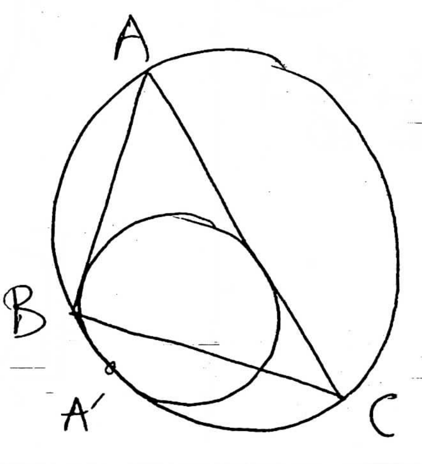
۲۶



$S_1 < S < S_2$

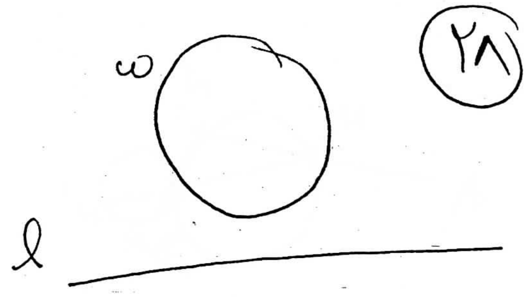
$\Rightarrow S_1 S_2 = S^2$

۲۷



$\Rightarrow l_A = AA'$

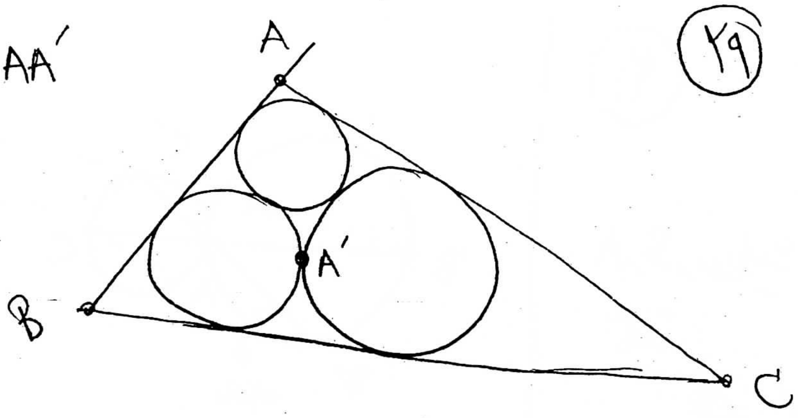
۲۸



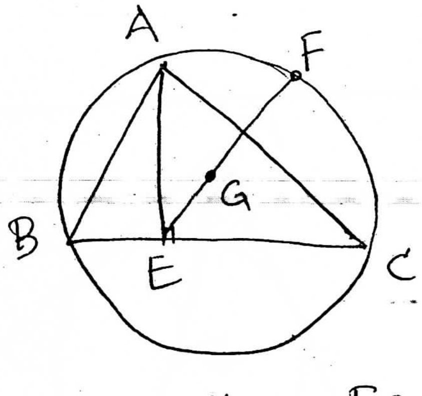
مربعی رسم کنید که ۲ رأس روی ω و
۲ رأس روی l

۲۹

$l_A = AA'$

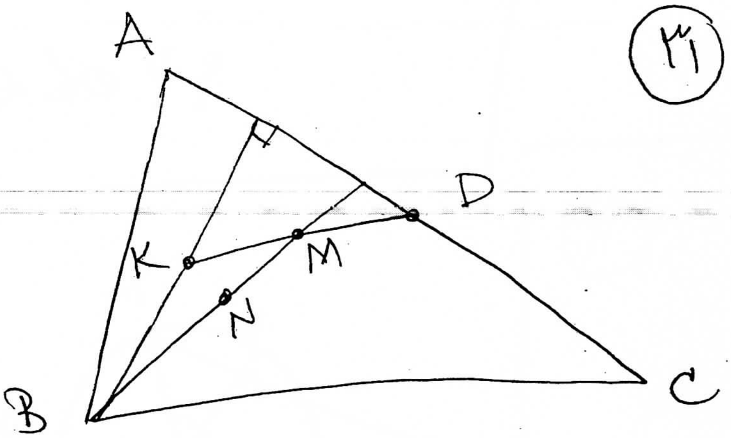


۳۰



$\Rightarrow 2EG = FG$

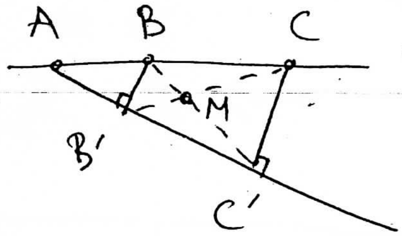
۳۱



D وسط AC
K وسط ارتفاع
N وسط نیمساز $\hat{B}$

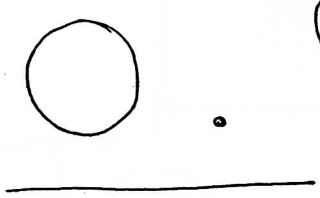
$\Rightarrow$ M ، N هم‌زاویه‌اند

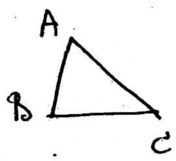
۳۲



با دوران $\Leftarrow$ مکان M ؟

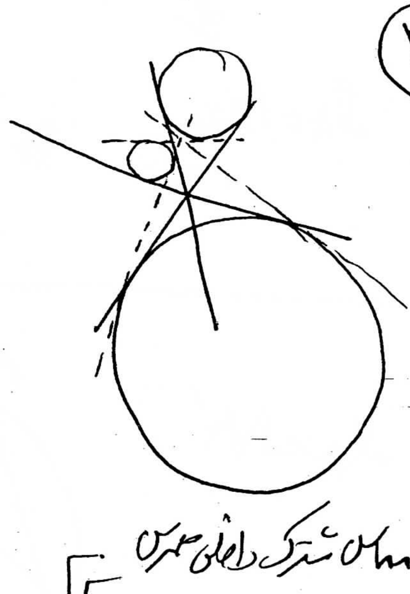
۳۳





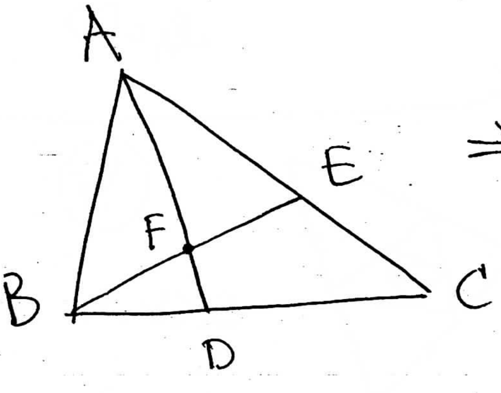
$\Leftarrow$ مثلثی متشابه با $\overset{\triangle}{ABC}$ رسم کنید که یک رأس
آن نقطه، یک رأس روی دایره و یک رأس روی خط
باشد.

۳۴



۳ مماس مشترک داخلی همرس
$\Rightarrow$ ۳ تای دیگر هم همرس!

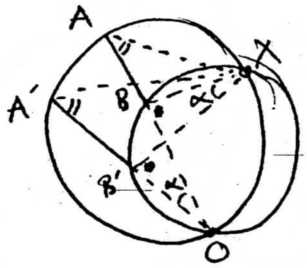
۳۵



$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABF}} = \frac{AC}{AE} + \frac{BC}{BD} - 1$$

تجانس مارپیچی

- ترکیب دوران و تجانس
- نقطه ثابت (مرکز)
- خط به خط
- دایره به دایره

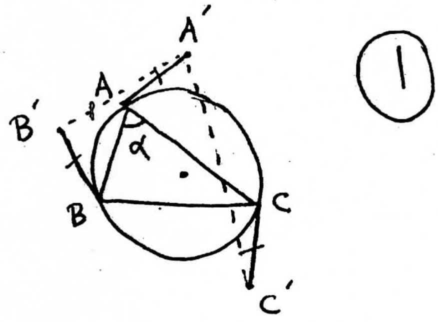


$$\begin{cases} \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \\ k = k_1 \cdot k_2 \end{cases}$$

قضیه: هر دو پاره‌خط غیرموازی با یک تجانس مارپیچی به هم تبدیل می‌شوند.

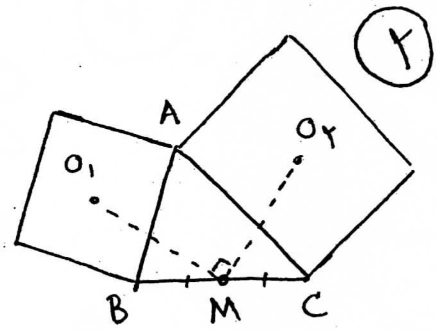
قضیه: ترکیب تجانس مارپیچی‌ها: تجانس مارپیچی

۱



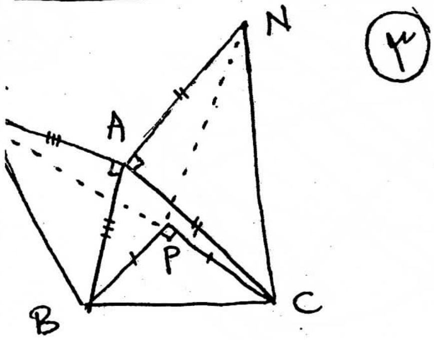
$\Rightarrow \widehat{B'A'C'} = \alpha$

۲



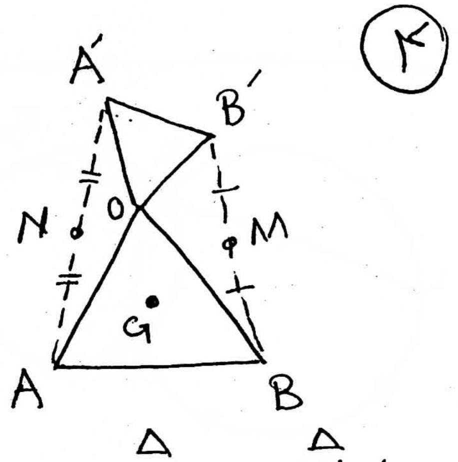
$\Rightarrow MO_1 \overset{\perp}{=} MO_2$

۳



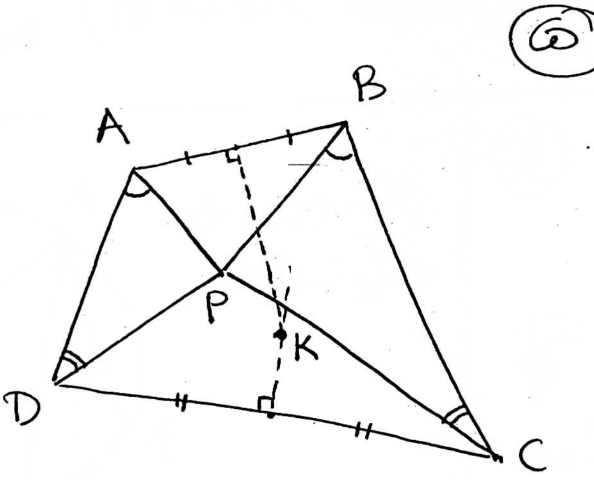
$\Rightarrow PM \overset{\perp}{=} PN$

۴



$\Rightarrow \overset{\triangle}{GMA'} \sim \overset{\triangle}{GNB'}$

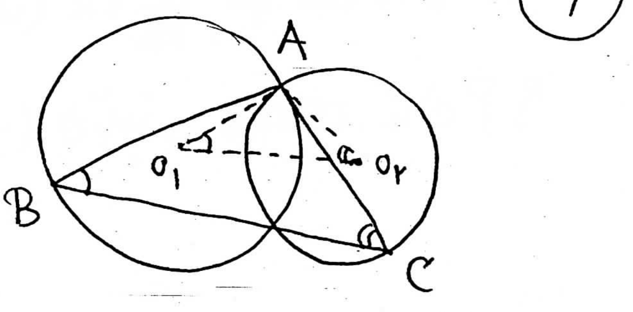
۵



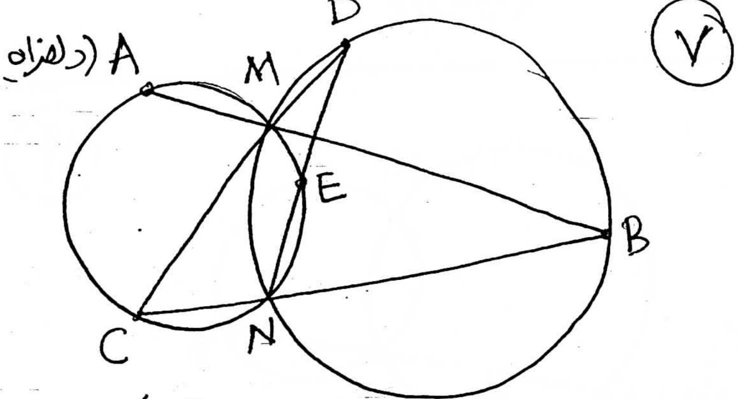
$\Leftarrow \widehat{DKC} = 2\widehat{DAP}$

۶

لم



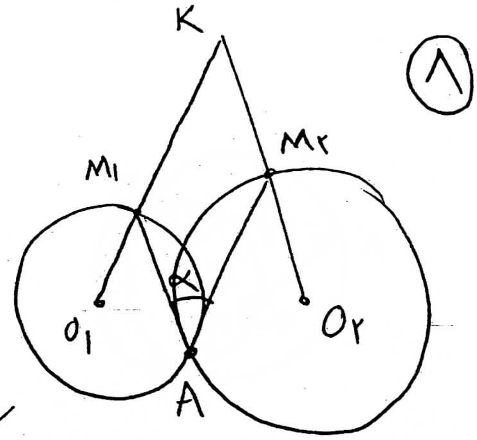
۷



$\Leftarrow$ طول AE مستقل از انتخاب A (ثابت)

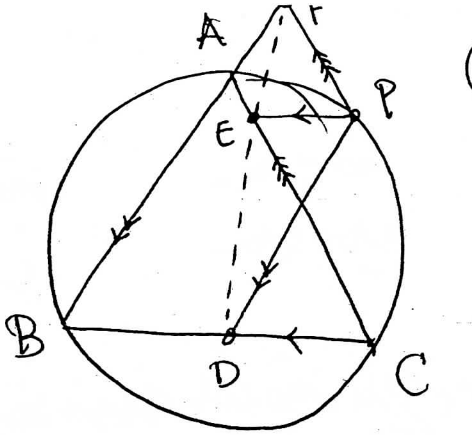
۸

(ب) با تغییر α مکان نقطه K چیست؟



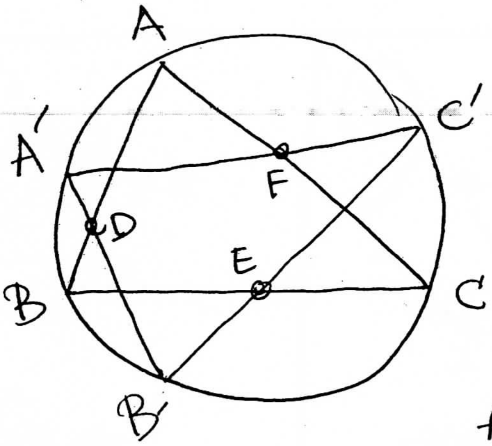
α ثابت ⇐ $C_{KM_1M_2}$ از نقطه ثابت می‌گذرد. (الف)

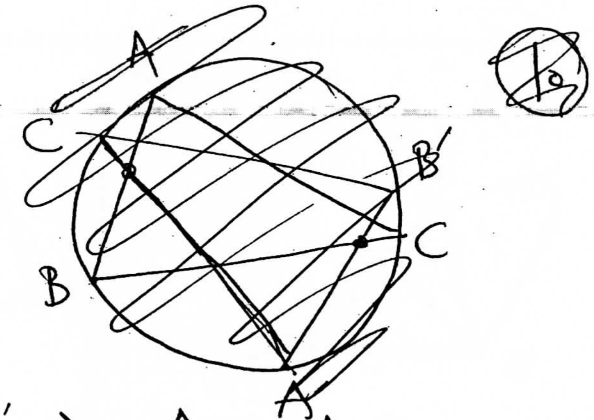
۹



ABC متساوی‌الاضلاع ⇐ F, E, D هم خطند

۱۰



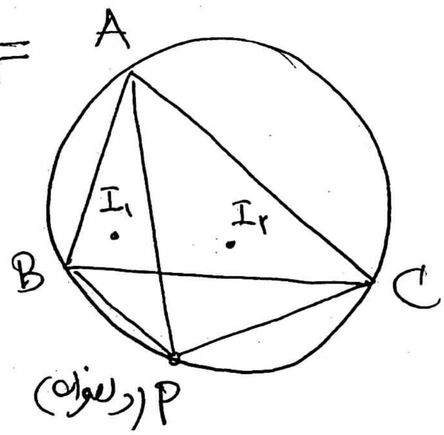


الف) $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$

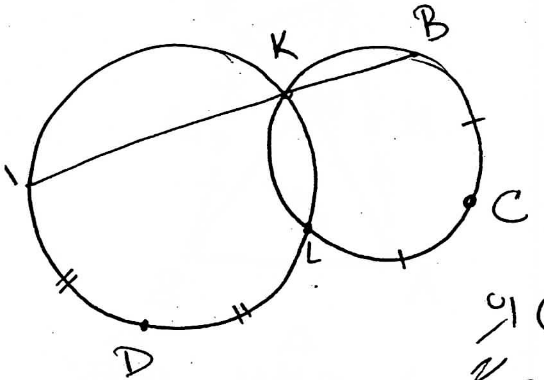
ب) $H_{\triangle DEF} \triangleq O_{\triangle ABC}$ (این قسمت برای هر DEF متشابه درست است.)

۱۱

از $C_{PI_1I_2}$ ⇐ نقطه ثابت می‌گذرد.



۱۲

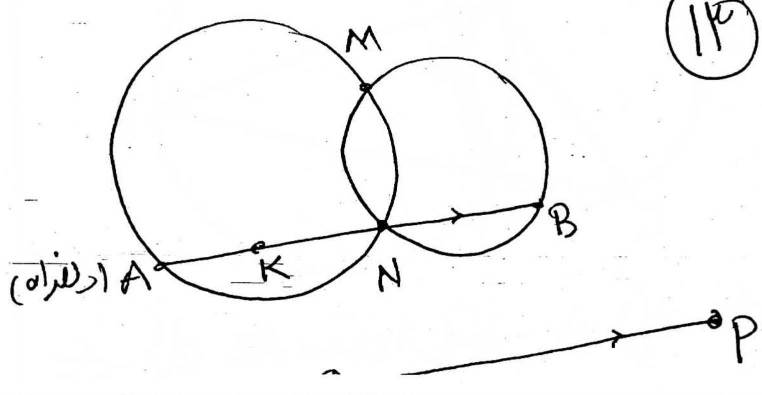


⇐ از C_{KCD} نقطه ثابت می‌گذرد.

۱۳

الف) $\frac{AK}{KB}=k$ ⇐ مکان K؟

ب) O ثابت و $OP=AB$. مکان P؟

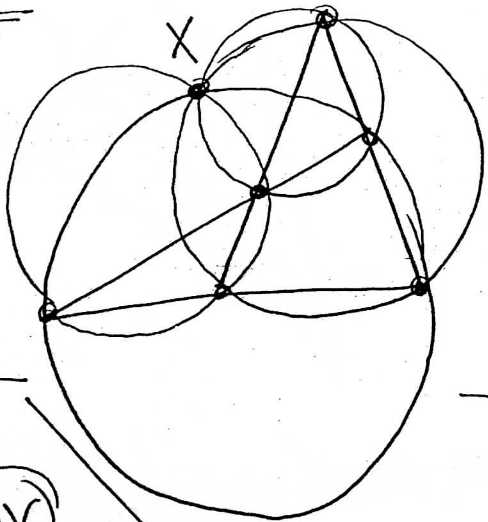


(۱۵)

۴ داده ⇐

هم‌رسند

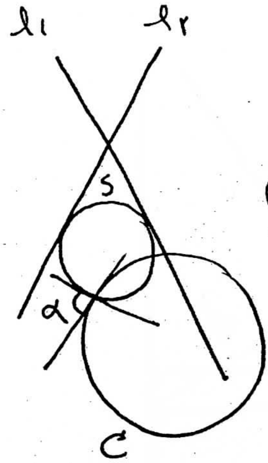
(در X)



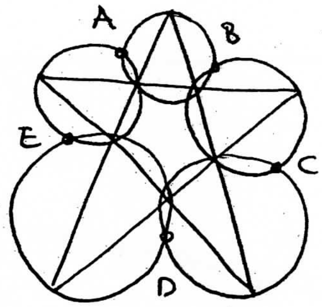
(۱،۲)

(۱۴)

دایره C را طوری رسم
کنید که بر l_1 و l_2 مماس
و با C زاویه α بسازد.

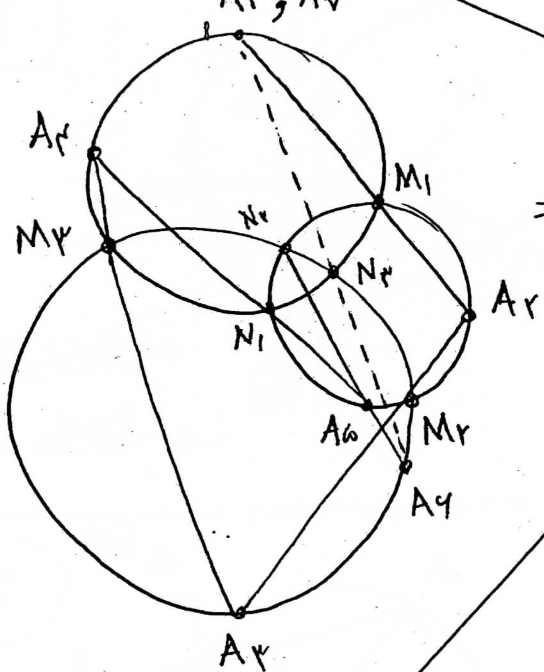


(۱۶)



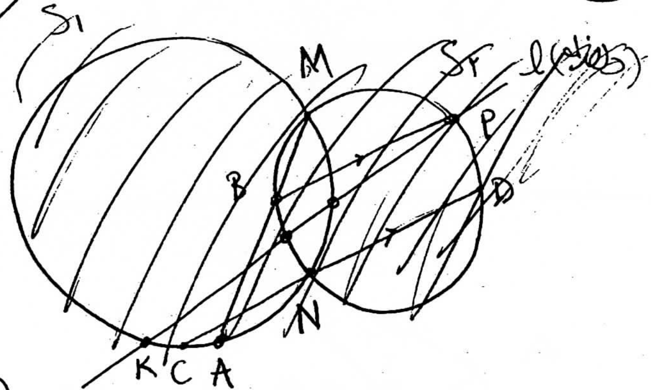
A,B,C,D,E همه داده‌اند ⇐

(۱۷)

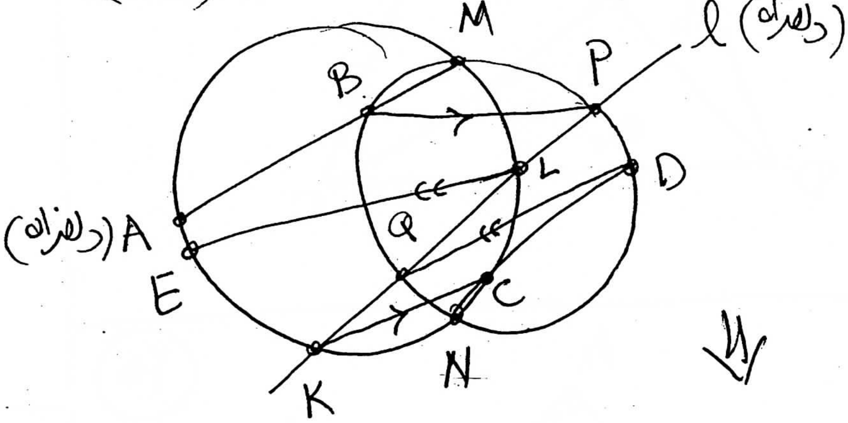


$\Rightarrow A_1 \triangleq A_7$

(۱۸)

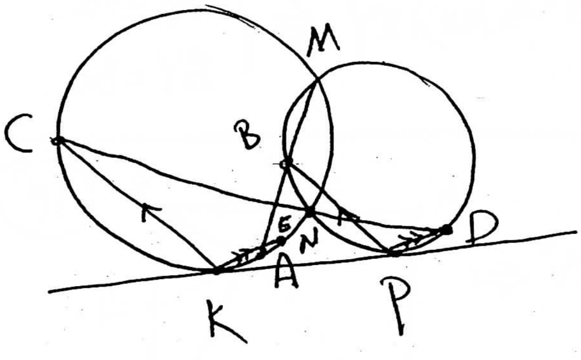


(الف)



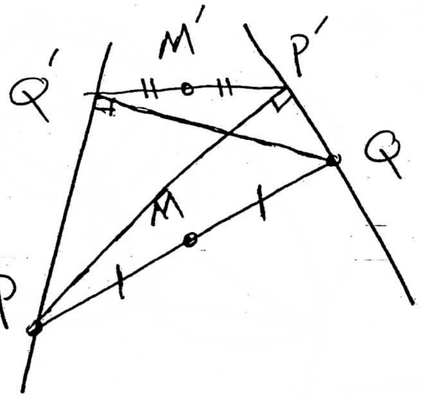
$E \triangleq A$

(ب)

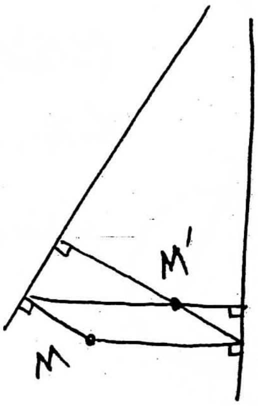


$\Rightarrow E \triangleq A$

۱۹



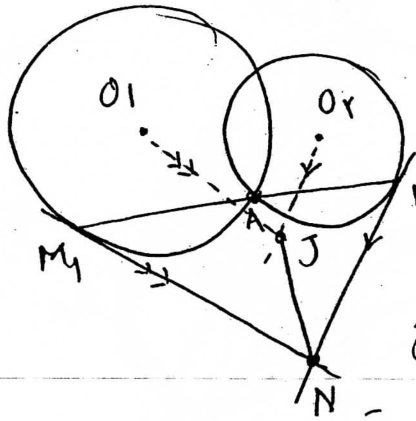
الف)



ب)

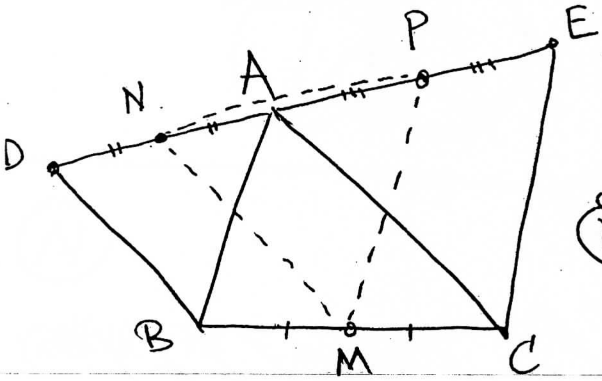
با تغییر M روی یک دایره، مکان M' ؟

۲۰



JN از نقطهٔ ثابت
می‌گذرد، طولش ثابت است.

۲۱

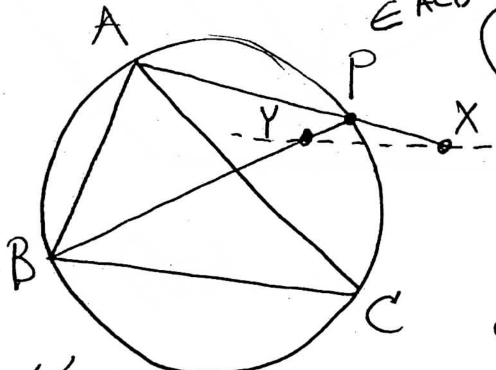


⇓

MNP
متساوی‌الاضلاع

۲۲

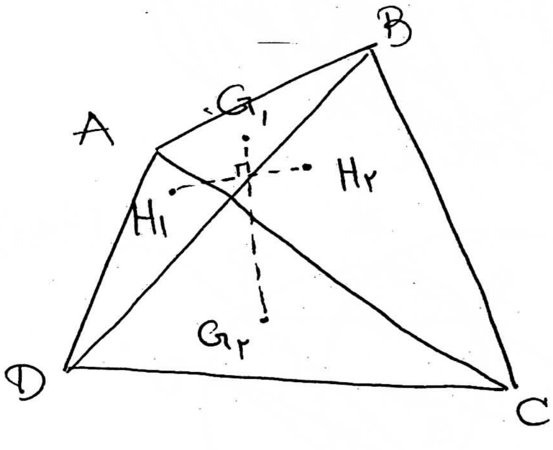
$\in \widehat{ACB}$



P دلخواه

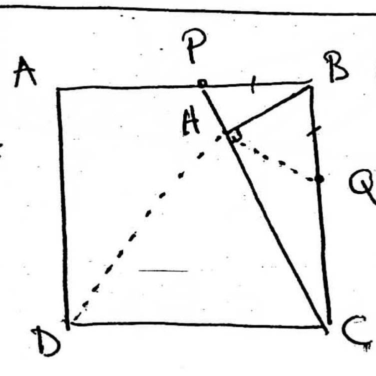
XY از نقطهٔ ثابت می‌گذرد $\Leftarrow \begin{cases} AX = AC \\ BY = BC \end{cases}$

۲۳



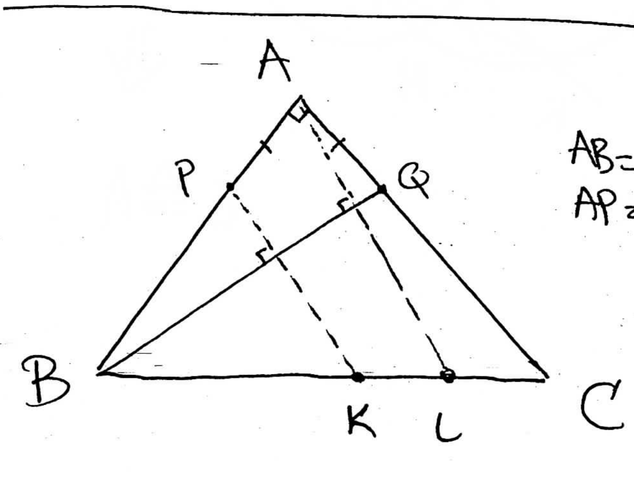
$G_1G_2 \perp H_1H_2$

۲۴



$\widehat{DHQ} = 90^\circ \Leftarrow$

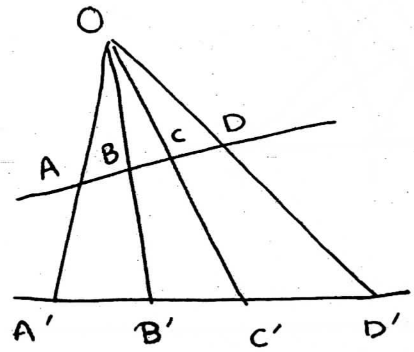
۲۵



$AB = AC$
$AP = AQ$
$\Downarrow$
$KL = LC$

نسبت ناهمساز

- نحوه پیدایش (سایه‌ها)
- نیاز به حداقل ۴ نقطه



$\exists O$

$\Updownarrow$

$f(A,B,C,D) = f(A',B',C',D')$

- نسبت ناهمساز ۴ نقطه :

$$(AB,CD) = \frac{\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}}{\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}}$$

---

(۱)

$$(AB,CD)=k \Rightarrow \begin{cases} (BA,DC) = (CD,AB) = (DC,BA) = k \\ (BA,CD) = (AB,DC) = (CD,BA) = (DC,AB) = \frac{1}{k} \end{cases}$$

$(AC,BD) = ?$

---

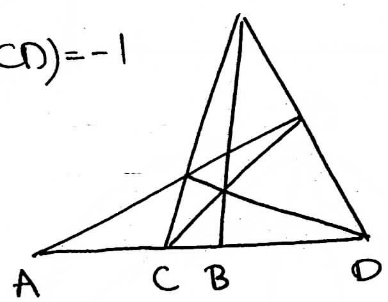
(۲)

$(AB,CD) = (AB,DC) \Rightarrow (AB,CD) = -1$ همساز (توافقی)

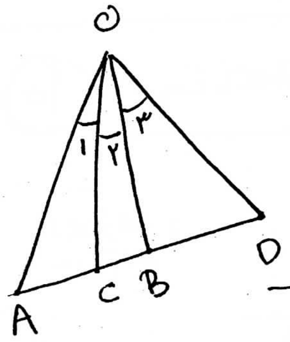
---

(۳)

$(AB,CD) = -1$



(۴)



$$(AB,CD) = \frac{\frac{\sin O_1}{\sin O_2}}{\frac{\sin(O_1+O_2+O_3)}{\sin O_3}}$$

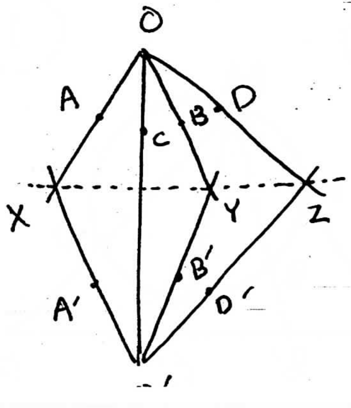
* اشعه‌های ناهمساز

---

(۵) قضیه

I) اگر دو دستگاه ناهمساز k ، یک نقطه مشترک داشته باشند ، خطوط واصل نقاط متناظر همرسند.

II) اگر دو دستگاه اشعه‌های ناهمساز k ، یک اشعه مشترک داشته باشند ، محل برخورد اشعه‌های متناظر هم خطند.



$O(AB,CD) = O'(A'B',C'D')$

$\Downarrow$

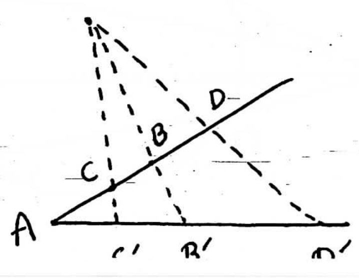
X, Y, Z

هم خطند

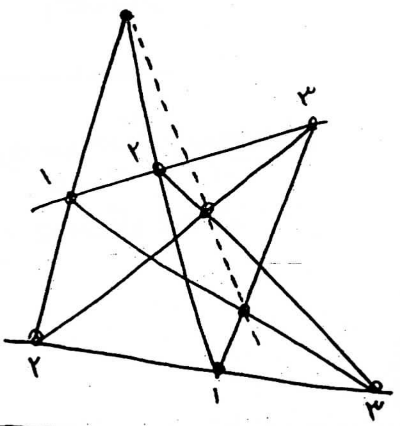
$(AB,CD) = (AB',C'D')$

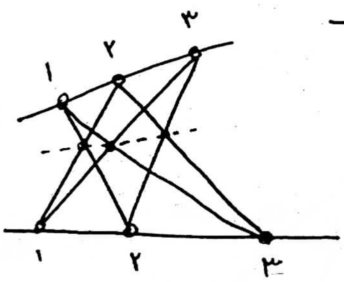
$\Downarrow$

BB', CC', DD' همرسند

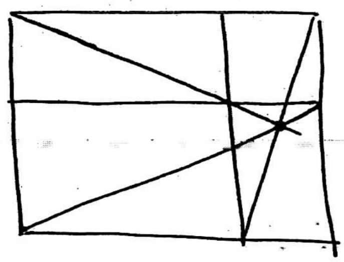


۶ قضیه پاپوس

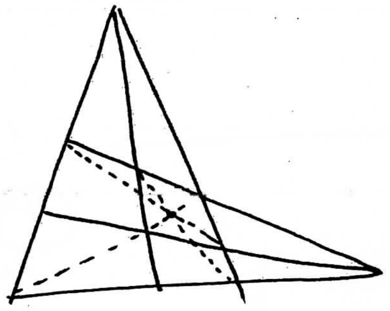


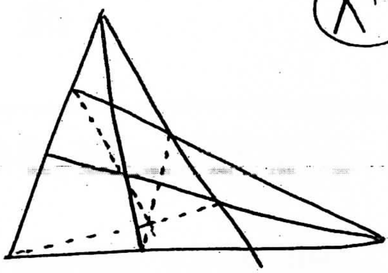


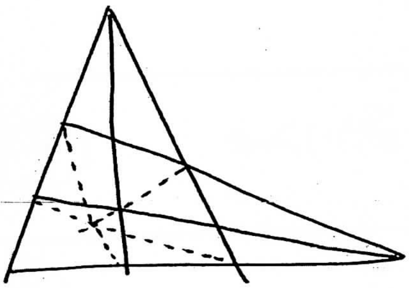
۷



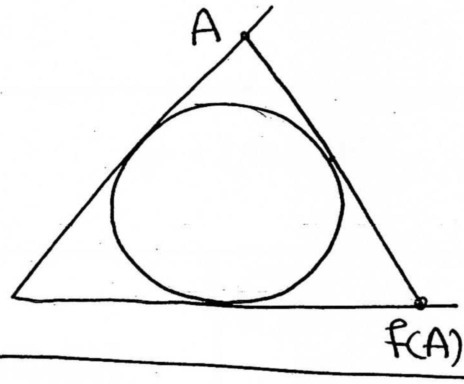
۸





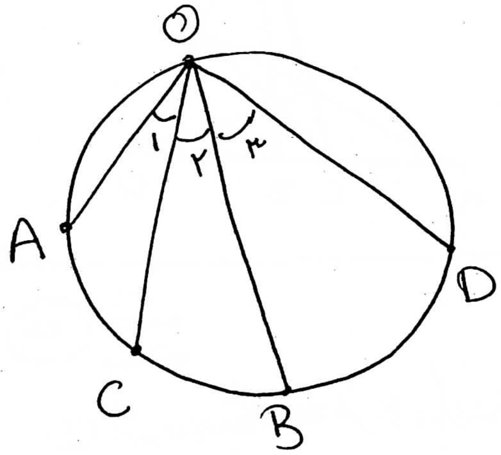


۹



$$\Rightarrow (AB,CD) = (f(A)f(B), f(C), f(D))$$

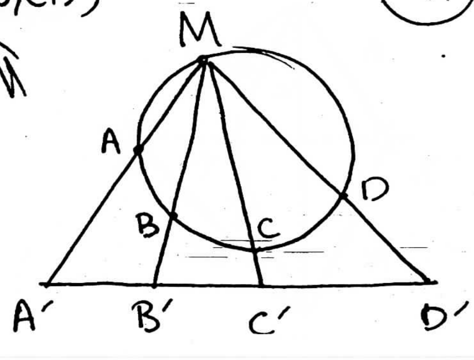
۱۰ نسبت ناهمساز برای دایره



تعریف :

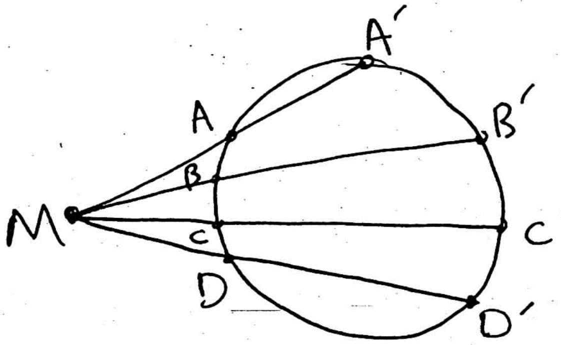
$$(AB,CD) = \frac{\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}}{\dfrac{\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}{\sin\theta_3}} = \frac{\dfrac{CA}{CB}}{\dfrac{DA}{DB}}$$

۱۱

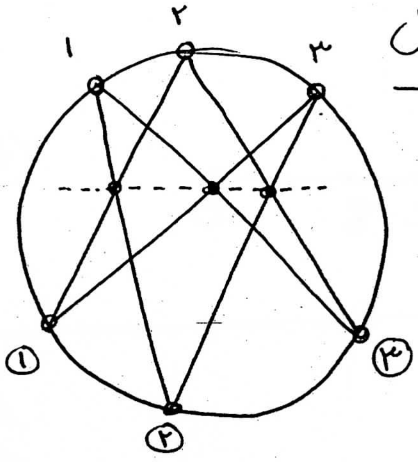


$$\Rightarrow (AB,CD) = (A'B',C'D') \Uparrow$$

۱۲



۱۳ قضیه پاسکال



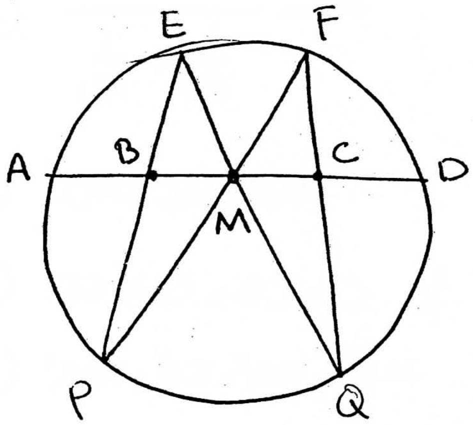
ABCDEF روی دایره

$$\Downarrow$$

هم خطند $\begin{cases} (AB, DE) \\ (BC, EF) \\ (CD, AF) \end{cases}$

---

۱۴ قضیه پروانه



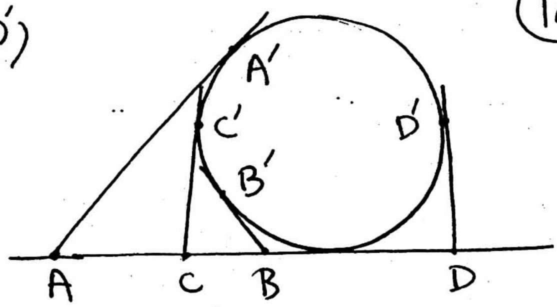
$$MB = MC \iff MA = MD$$

تعمیم قضیه پروانه

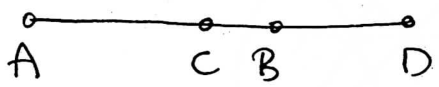
$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MC} = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MD}$$

۱۵

$$(AB, CD) = (A'B', C'D')$$

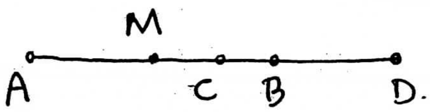


نسبت همساز (توافقی)



$(AB,CD)=-1$

* D,C مزدوج همساز نسبت به A و B



۱) اگر $(AB,CD)=-1$ و M وسط AB باشد، ثابت کنید:

I) $AB=\dfrac{2}{\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AD}}$

II) $MA^2=MC.MD$

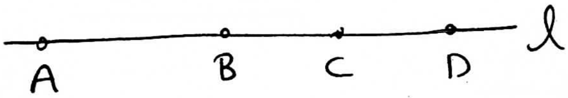
III) $CA.CB=CM.CD$ یا $DA.DB=DM.DC$

IV) $MC^2+MD^2=CD^2+2MA^2$

V) $\dfrac{1}{CA.CB}+\dfrac{1}{DA.DB}=\dfrac{1}{MA.MB}$

VI) $\dfrac{1}{BC}=\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{CD}$

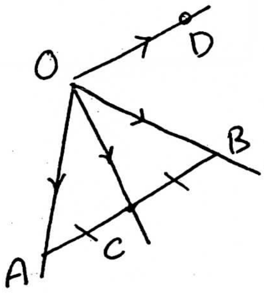
۲)



Q,P را روی l بیابید طوری که:

$(AB,PQ)=(CD,PQ)=-1$

۳) قضیه: از ۳ گزاره زیر، ۲ تا درست باشند، سومی نیز درست است:



I) $O(AB,CD)=-1$

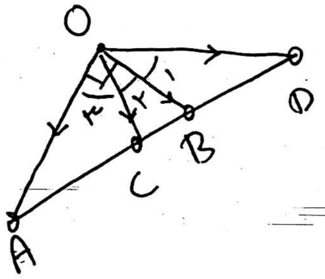
II) $CA=CB$

III) $OD \parallel AB$

I) $(AB,CD)=-1$

II) $\hat{O}_2+\hat{O}_3=90^\circ$

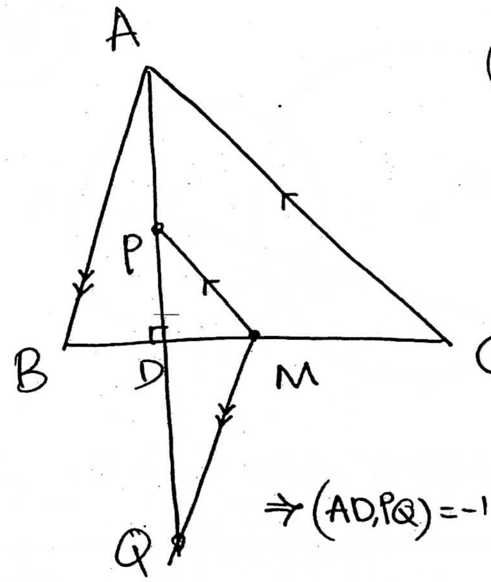
III) $\hat{O}_1=\hat{O}_2$



۴) مزدوج همساز OC نسبت به OA ، OB را رسم کنید.

۵) $A(OH\,I\,I_b)=-1$

۶)

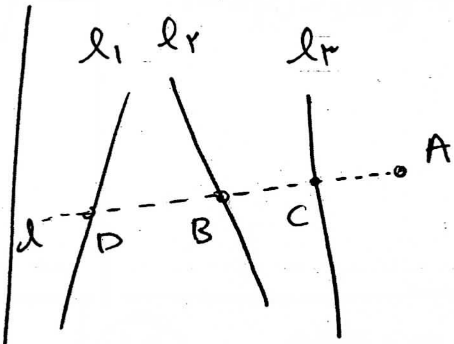


$\Rightarrow (AD,PQ)=-1$

۷) A ، l_1 ، l_2 ، l_3 مفروضند.

$\Leftarrow$ l را طوری رسم کنید:

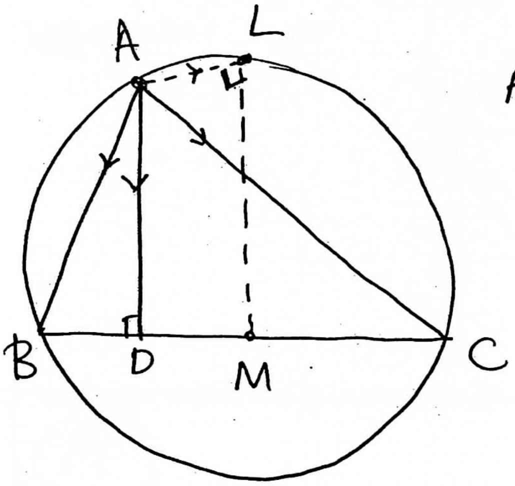
$(AB,CD)=-1$



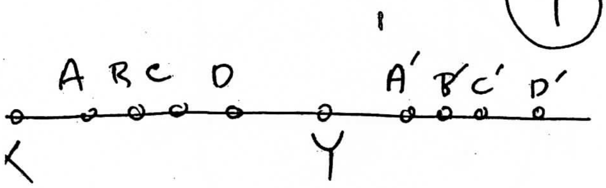
۸) $A\hat{L}M=90^\circ$

$\Downarrow$

$A(BC,DL)=-1$



۹)



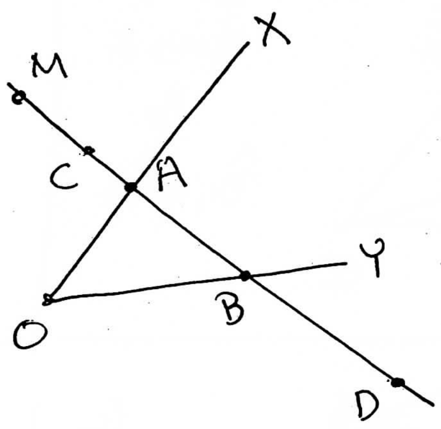
$(XY,AA')=-1,\ldots \Rightarrow (AB,CD)$
$=(A'B',C'D')$

۱۰) $X\hat{O}Y$ و A ثابت
B متغیر

$BC=BD=BO$
$(MA,CD)=-1$

$\Downarrow$

مکان M ؟

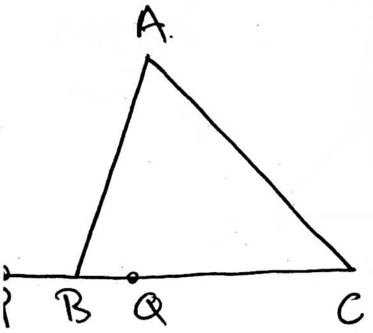


۱۱) P و Q متغیر

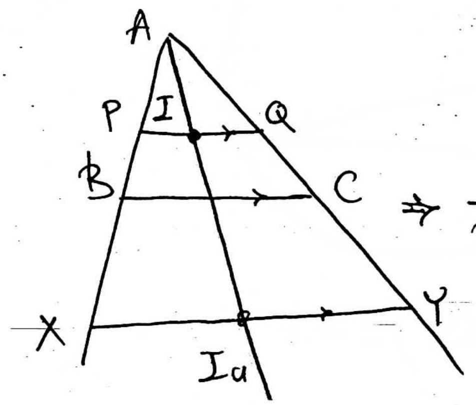
$(BC,PQ)=-1$

$\Downarrow$

مکان $O_{\overset{\triangle}{APQ}}$ ؟



۱۲)

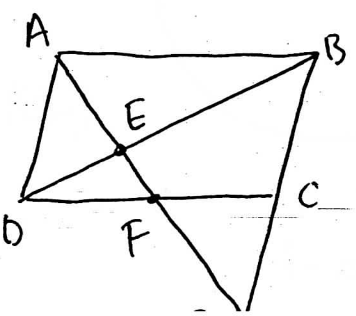


$\Rightarrow \frac{2}{BC}=\frac{1}{PQ}+\frac{1}{XY}$

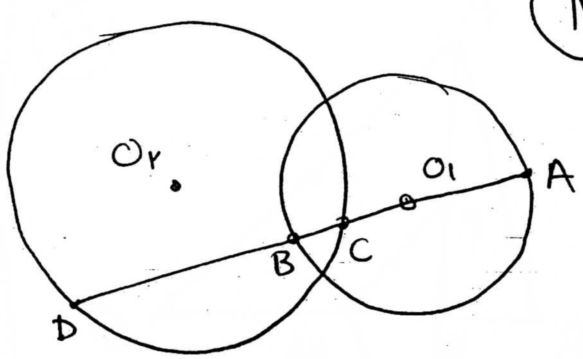
۱۳) $ABCD$ متوازی‌الاضلاع

$\Downarrow$

$\frac{1}{AE}=\frac{1}{AF}+\frac{1}{AG}$



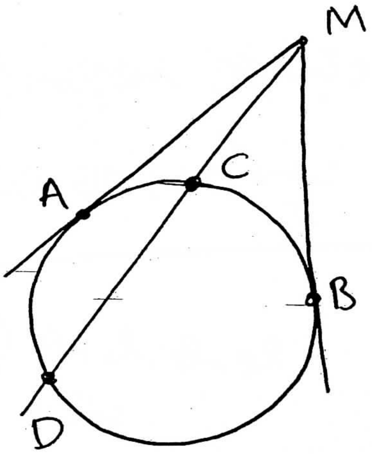
۱۴



$(AB,CD)=-1 \iff C_1 \perp C_2$

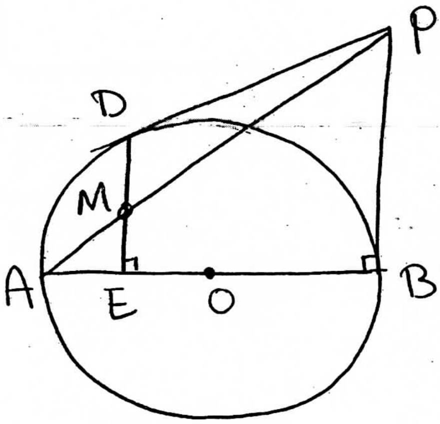
۱۵

لم :



$\rightarrow (AB,CD)=-1$

۱۶

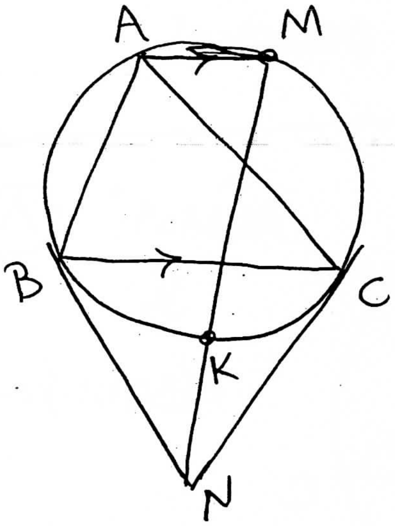


$\rightarrow MD=ME$

۱۷

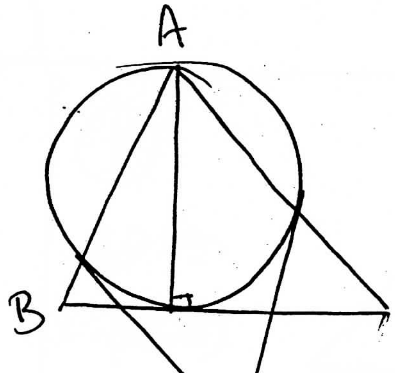
$AM \parallel BC$

$\rightarrow$ AK میانه است



۱۸

AM میانه است $\Rightarrow$



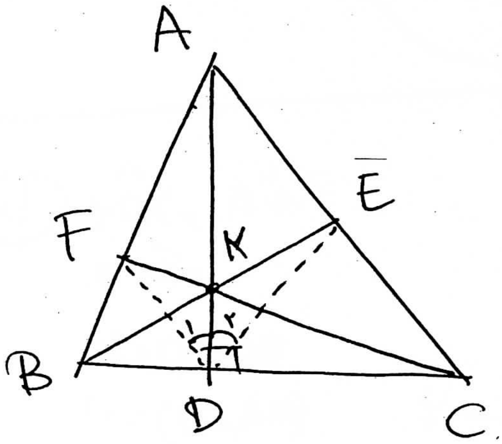
۱۹

AD ارتفاع

K دلخواه

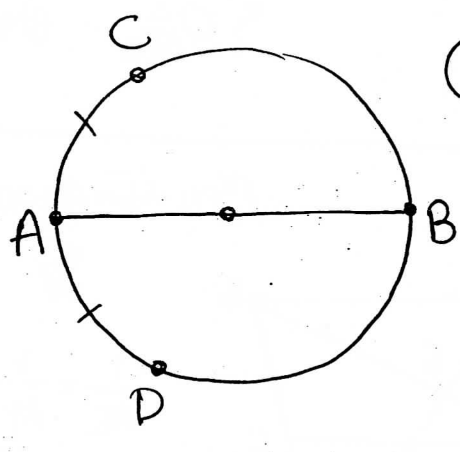
$\Downarrow$

$\hat{D}_1=\hat{D}_2$



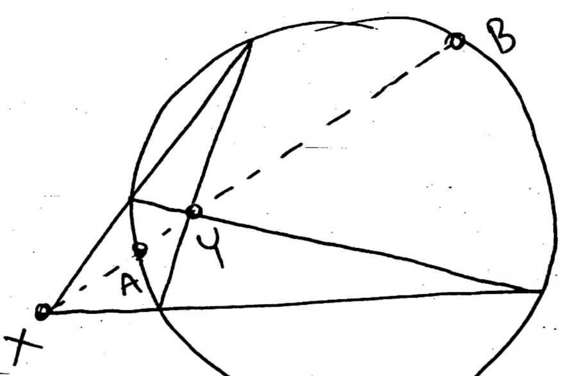
۲۰

الف)



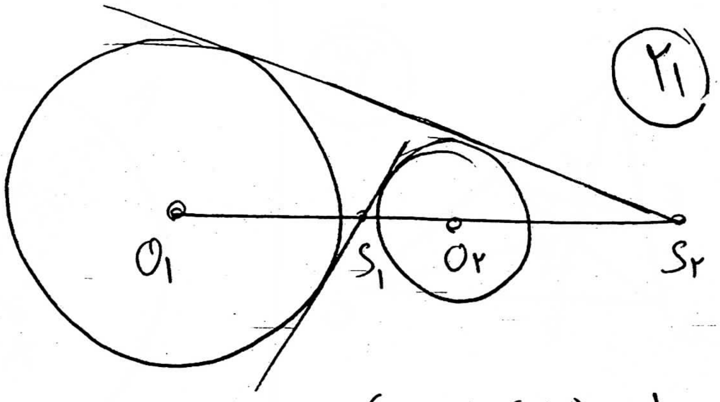
$(AB,CD)=-1$

ب)



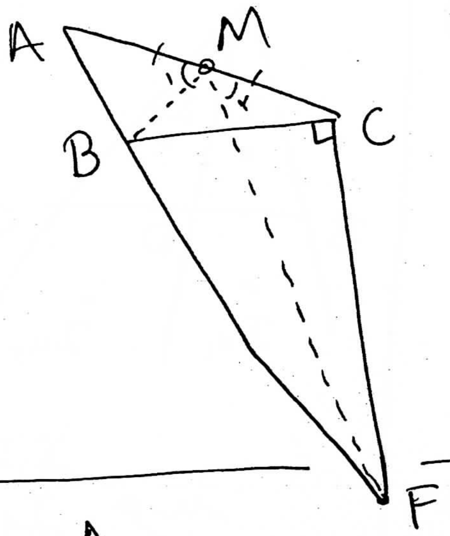
$(AB,XY)=-1$

۲۱



$(O_1O_2, S_1S_2) = -1$

۲۲

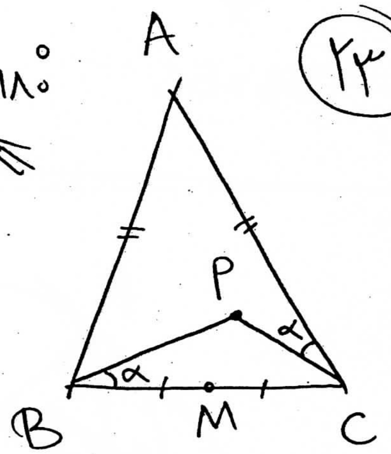


$\hat{A} = 2\hat{C}$

$\Downarrow$

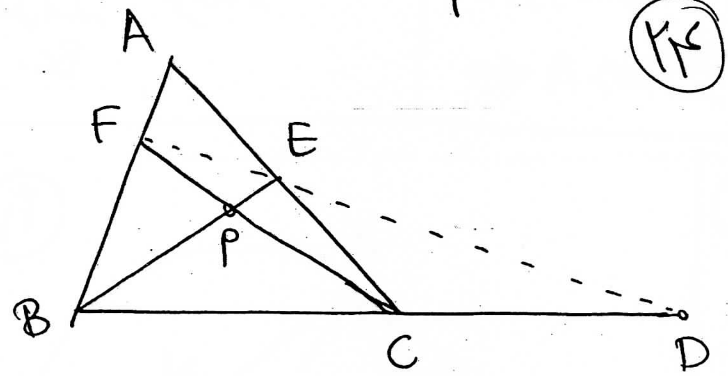
$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

۲۳



$\hat{MPC} + \hat{BPA} = 180^\circ$ $\Leftarrow$

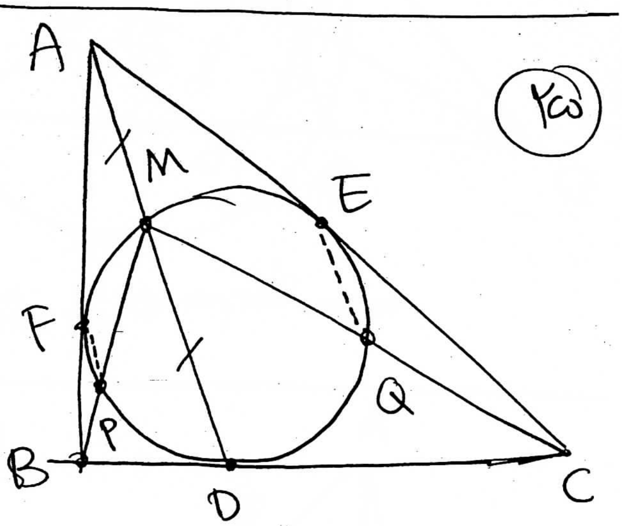
۲۴



$CA = CD$

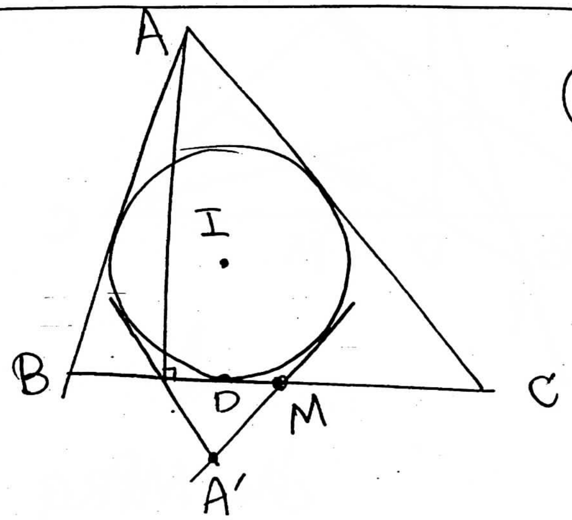
$P = C_{\overset{\triangle}{ACD}} \cap BC$ دایره نیم‌محاطی $\Big\} \Rightarrow$ F, E, D هم خط

۲۵



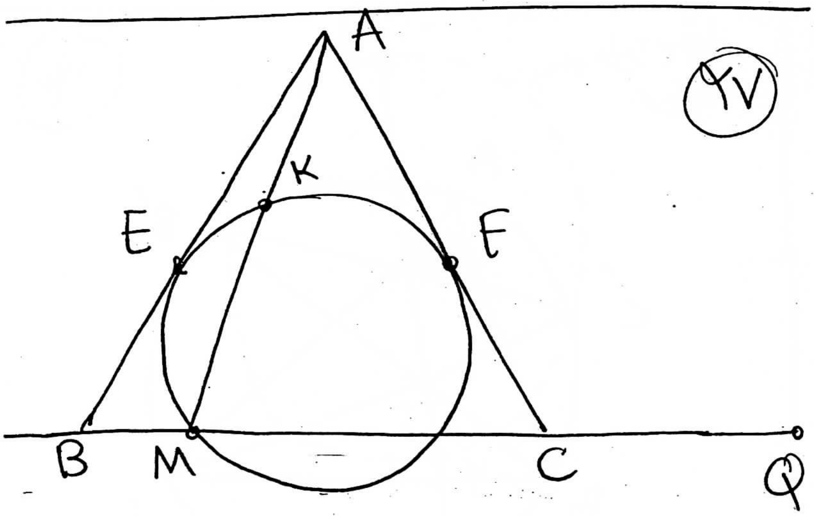
$FP \parallel EQ \Leftarrow AM = MD$

۲۶



حکم: مزدوج همساز DI نسبت به DA', DB

۲۷

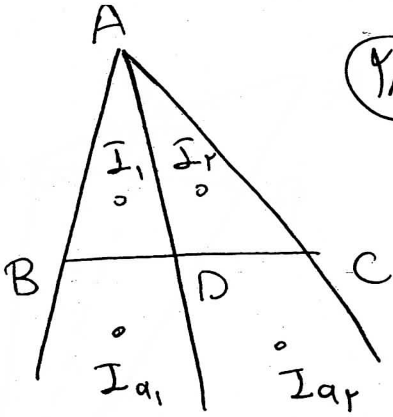


$AB = AC$

$BP = BM$

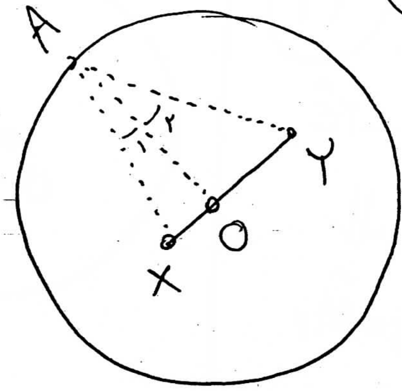
$CQ = CM$ $\Big\} \Rightarrow$ C_{KPQ} بر C_{KEF} مماس است.

۲۸



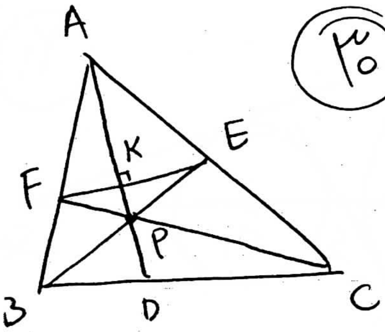
I_1I_2 ،
$I_{a_1}I_{a_2}$ ، همرسند
BC

۲۹



X، Y مفروضند
$\hat{A}_1=\hat{A}_2$ / $\Leftarrow$ A را طوری بیابید

۳۰

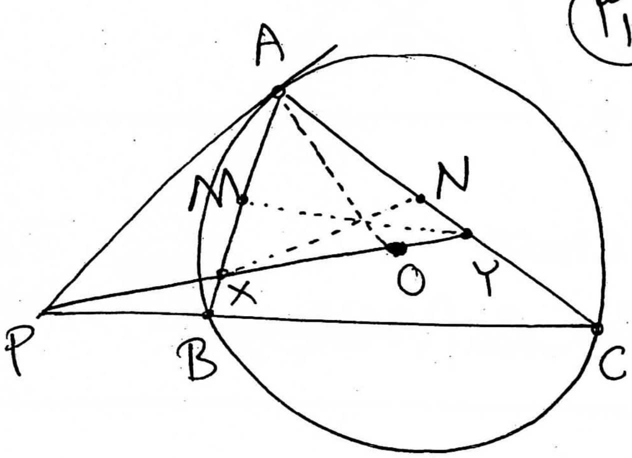


BKEC محاطی

$\Downarrow$

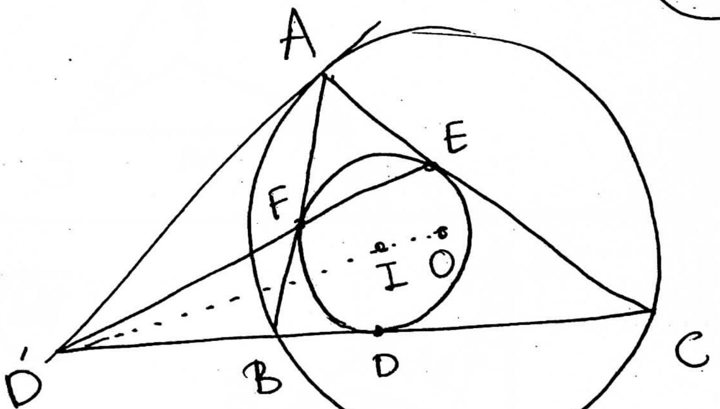
$EB=EC$

۳۱



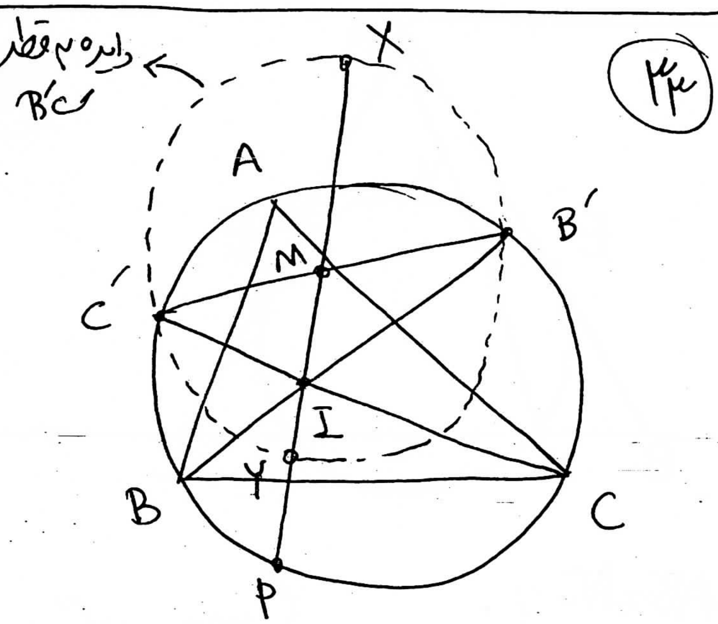
M، N اوساط اضلاع $\Leftarrow$ AO ، NX ، MY
همرسند.

۳۲



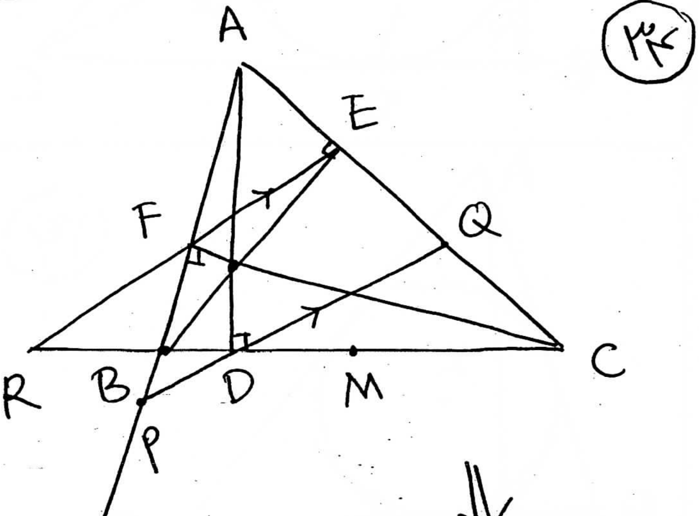
$\Rightarrow$ D' ، I ، O همخطند

۳۳



M وسط
B'C' $\Rightarrow (XY, IP) = -1$

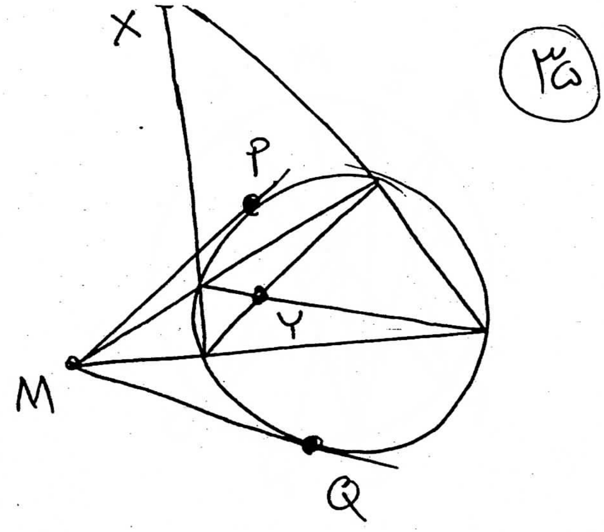
۳۴



$\Downarrow$

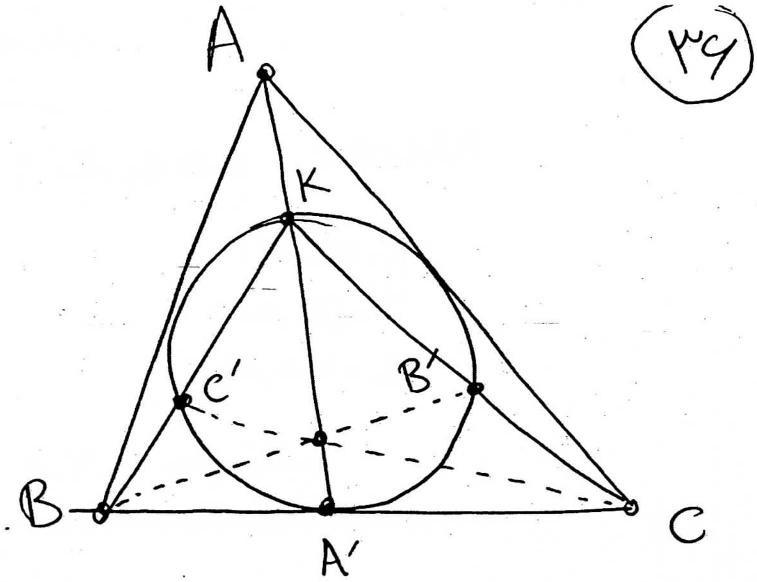
MPRQ محاطی

۳۵



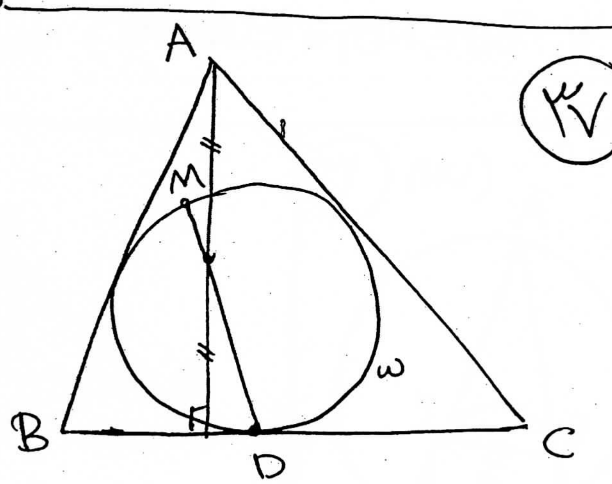
$\Leftarrow X, Y, P, Q$ هم‌خطند.

۳۶



$\Leftarrow AA', BB', CC'$ همرسند.

۳۷



$\Leftarrow C_{\overset{\triangle}{MBC}}$ بر ω (داخلی) مماس است.

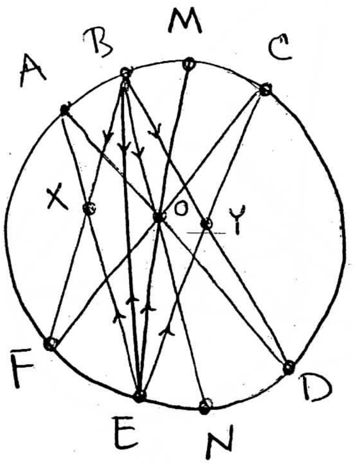
۳۸

تعمیم پاسکال

ـ شش نقطه روی دایره ABCDEF

$X = (AB, DE)$
$Y = (BC, EF)$
$Z = (CD, AF)$

$\Leftarrow$ X, Y, Z هم خطند

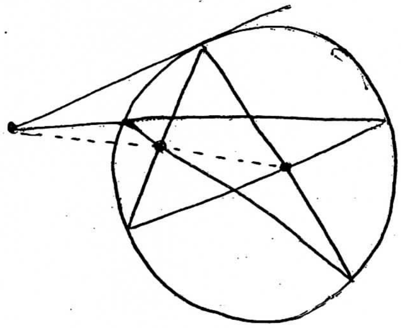


ـ اثبات:

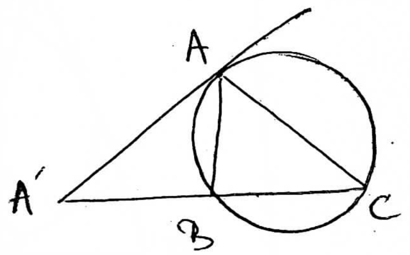
$(AB, MC) \overset{O}{=} (DN, EF) = (FE, ND)$

$\Rightarrow B(FE, ND) = E(AB, MC) \Rightarrow$ X,O,Y هم خطند

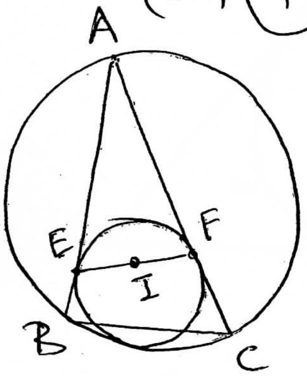
۱



۲

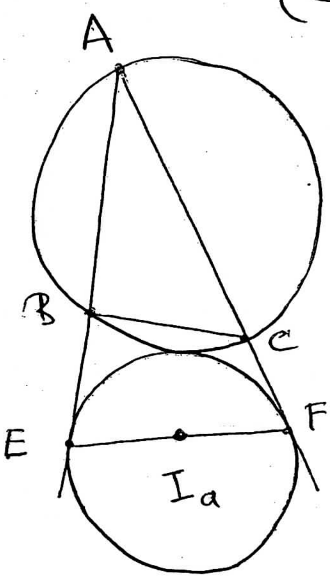


۳) الف)

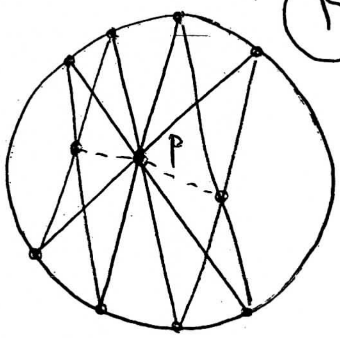


I وسط EF

ب)

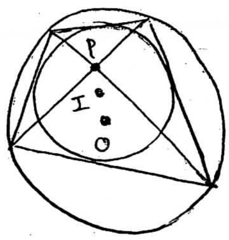


۴



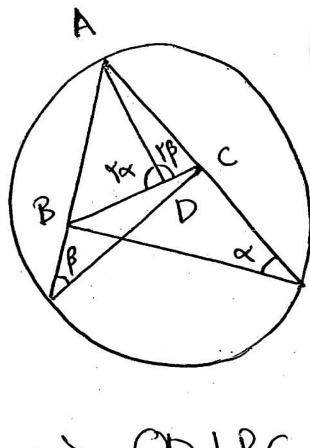
P دلخواه

۵



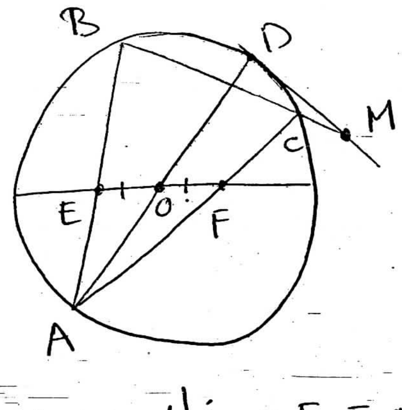
$\Rightarrow$ O, I, P هم خطند

۶



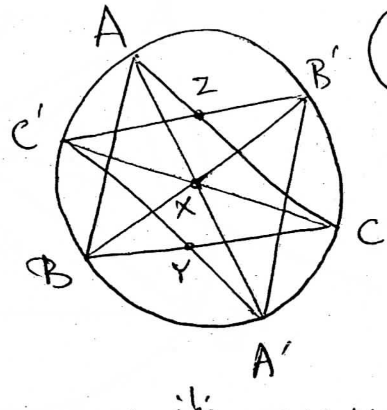
$\Rightarrow OD \perp BC$

۷



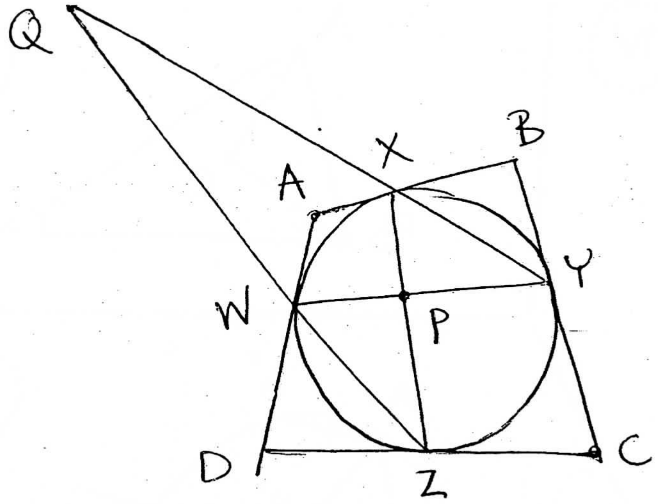
$\Rightarrow$ F, E, M هم خطند

۸



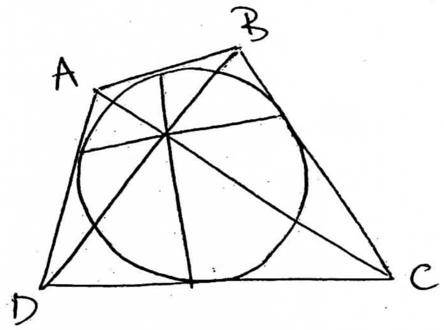
X,Y,Z هم خطند $\Rightarrow$

۹

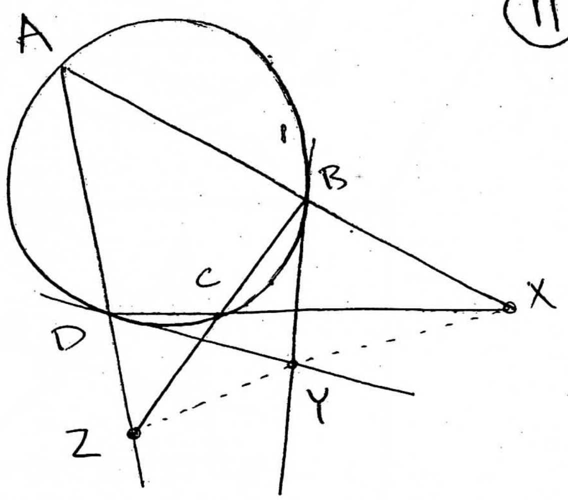


A,C,P,Q هم خطند

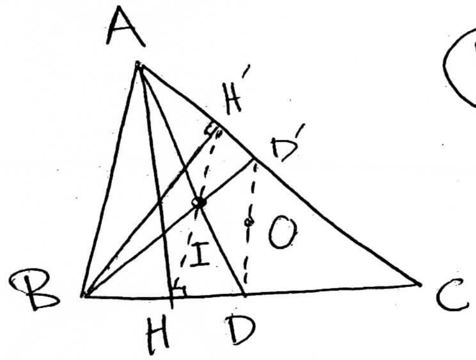
۱۰



۱۱

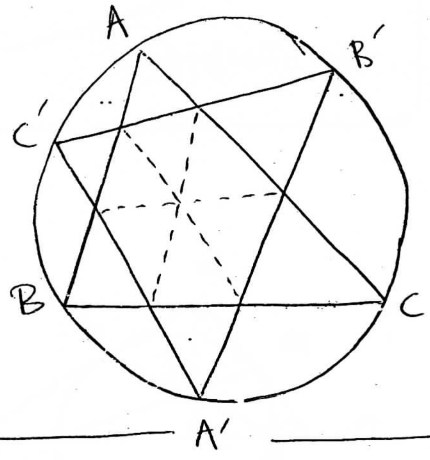


۱۲

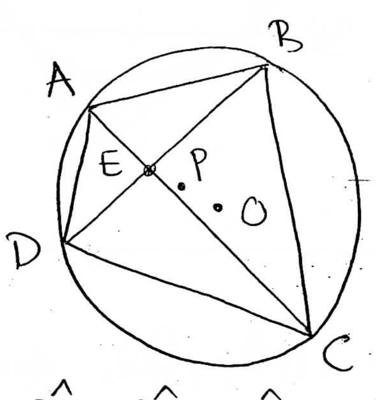


D, D', O هم خطند $\Longleftrightarrow$ I, H, H هم خطند

۱۳



۱۴



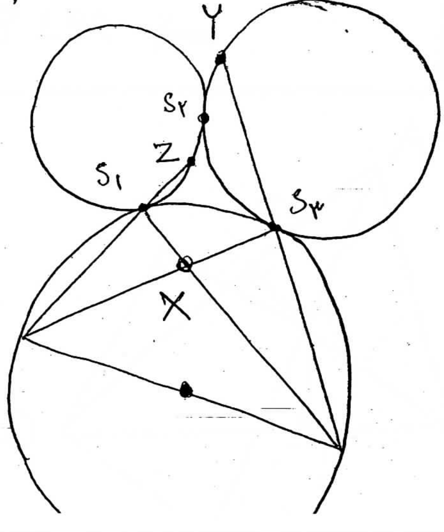
$\widehat{PBC}+\widehat{PDC}=\widehat{PAD}+\widehat{PCD}=90^\circ$

$\Rightarrow$ P, O, E هم خطند

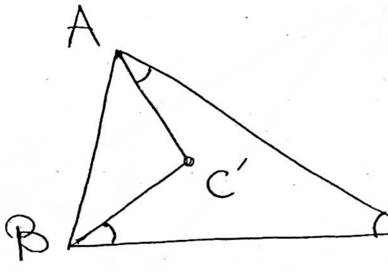
۱۵

الف) $S_1 S_2 S_3 X$ محاطی

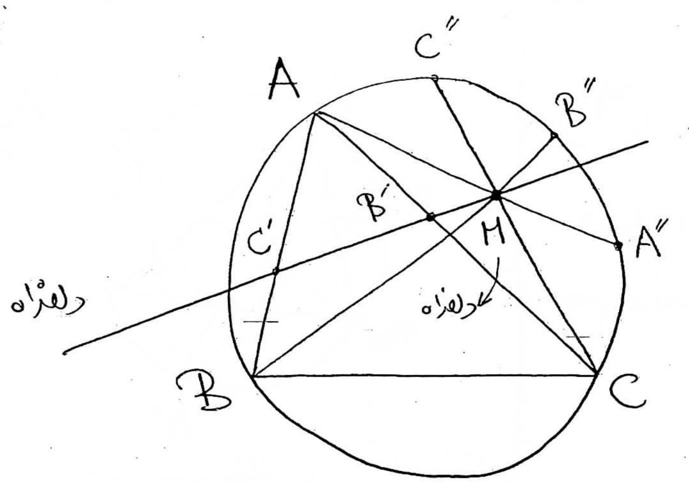
ب) X, Y, Z هم خطند



۱۶

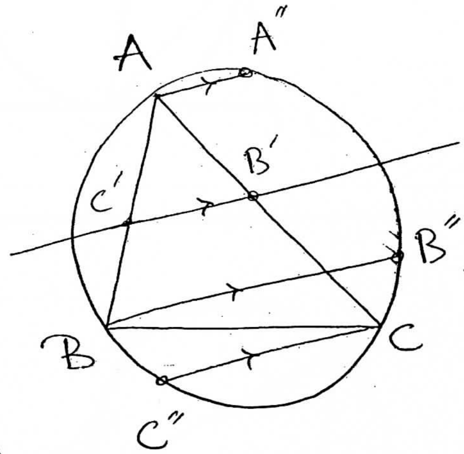


۱۷

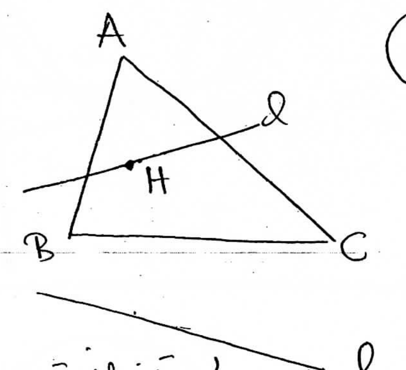


⇒ AA'' ، BB'' ، CC'' همرسند ⇐

۱۸

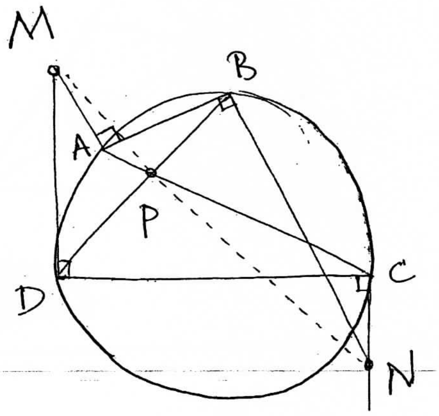


۱۹

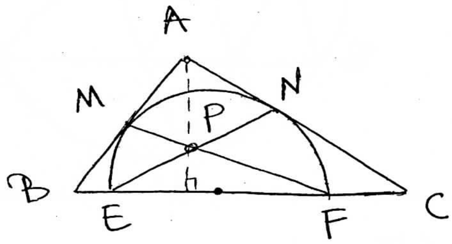


قرینه ℓ نسبت به BC

۲۰

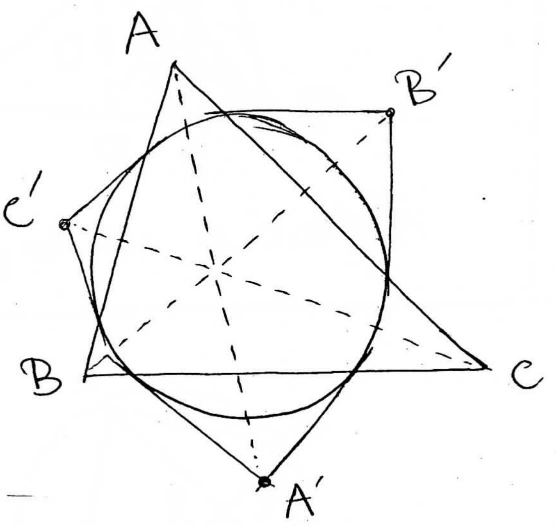


۲۱

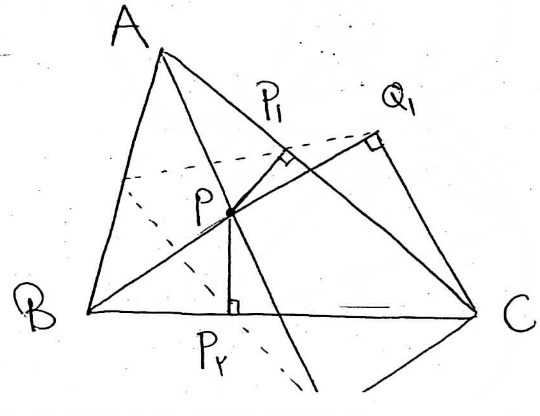


$\Rightarrow AP \perp BC$

۲۲

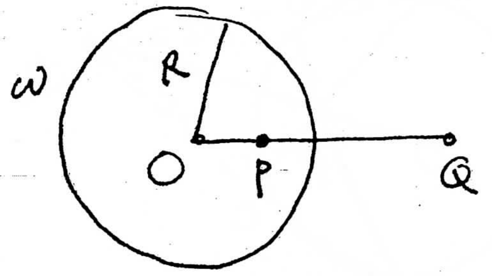


۲۳



P دلخواه ⇐ P_1Q_1 ، P_2Q_2 ، AB همرسند

قطب و قطبی — نقاط وارون



P ، Q وارون نسبت به دایره ω :
اگر هم‌خط با O باشند و O بین آن‌ها نباشد و $OP.OQ=R^2$.

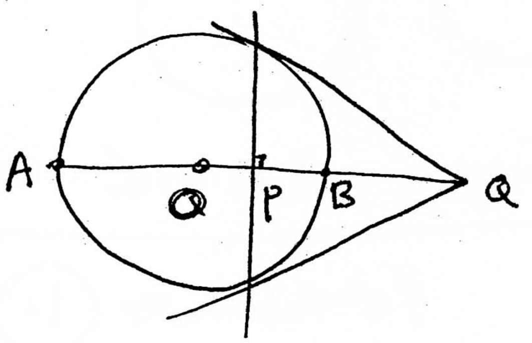
---

(۱) P ، Q وارون نسبت به $\omega(O,R)$ ، ثابت کنید:

الف) $P_\omega^{P} + P_\omega^{Q} = PQ^2$ ب) $P_\omega^{P} \cdot P_\omega^{Q} = -R^2 \cdot PQ^2$

---

(۲)



$\Rightarrow$ I) P,Q وارون

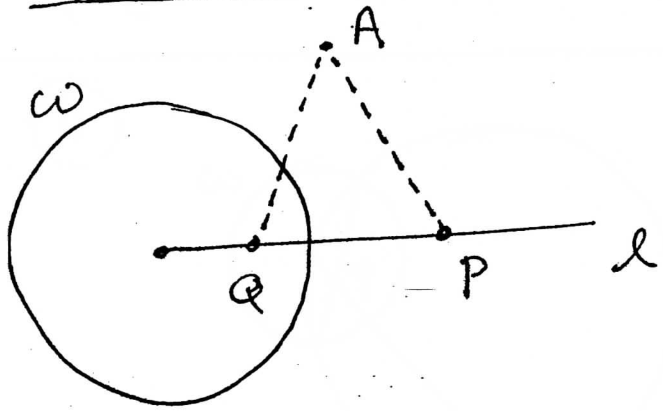
II) $(AB,PQ)=-1$

---

(۳) ثابت کنید محور اصلی یک دایره و یک نقطه، عمود منصف پاره‌خط بین آن نقطه و نقطه وارونش نسبت به دایره است.

---

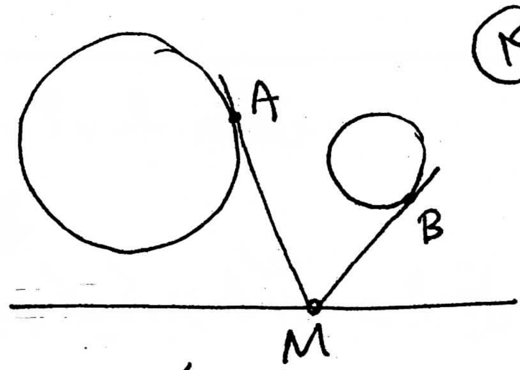
(۵)



A , l , ω ثابت
P متغیر
Q وارون P

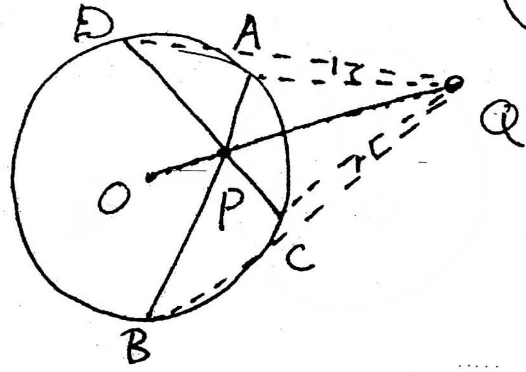
$\Rightarrow$ مکان هندسی $O_{\triangle APQ}$ ؟

(۴)



$\Leftarrow$ M را طوری بیابید که $MA+MB$ مینیمم شود.

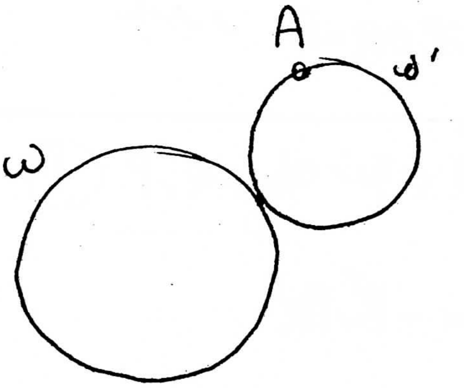
۶



P, Q وارون $\iff \hat{AQD} = \hat{BQC}$

۷ Δ محور اصلی یک دسته دایره هم محور $\{\omega_i\}$ می باشد. مکان هندسی وارون یک نقطه واقع بر Δ نسبت به این دسته دایره چیست؟

۸

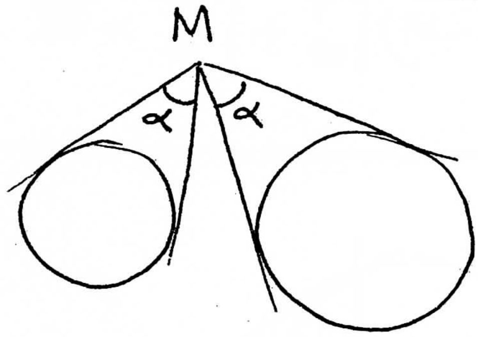


A, ω, P ثابت

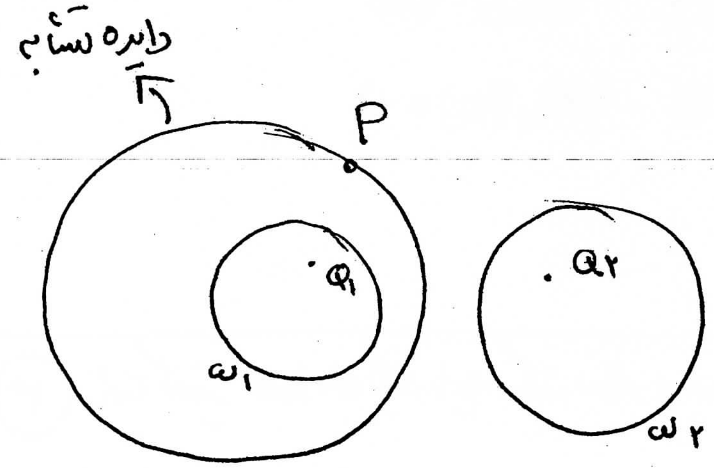
ω' متغیر

$\Longleftarrow$ مکان هندسی وارون P نسبت به ω'

۹



مکان M ؟ (دایره تشابه)

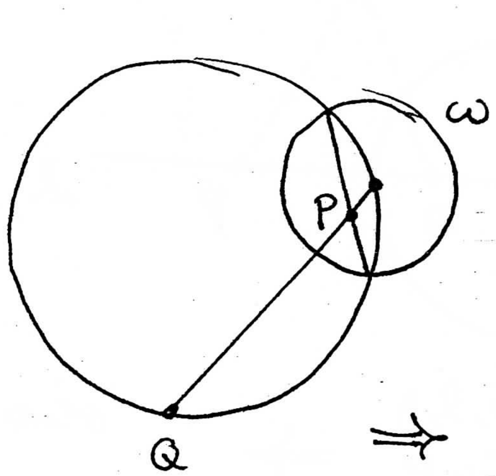


۱۰ Q_1, Q_2 وارون های P

$\Longleftarrow$ Q_1 و Q_2 نسبت به محور اصلی ω_1, ω_2 قرینه اند

(آیا حکم برای سه دایره هم محور نیز درست است؟)

۱۱



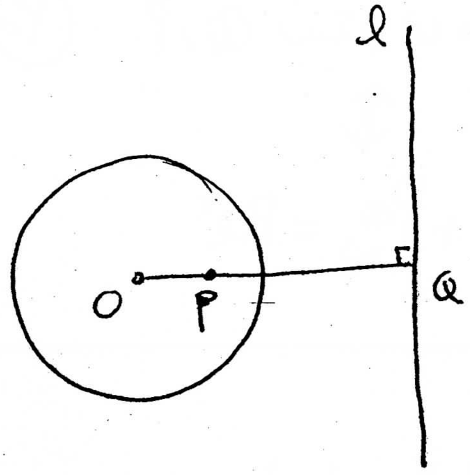
$\Longrightarrow$ Q, P وارون

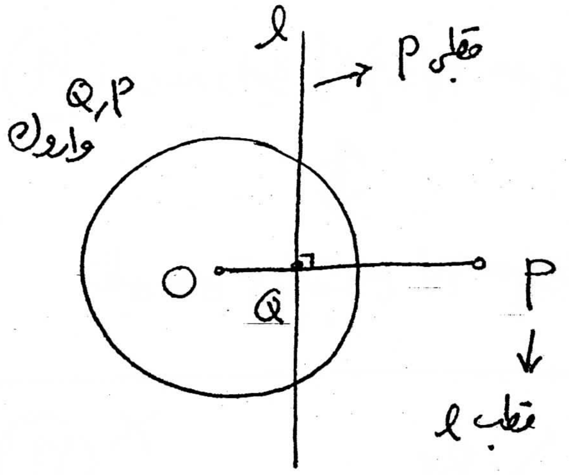
۱۲ A, P, l مفروض‌اند

$\Downarrow$

دایره‌ای رسم کنید که از A بگذرد و l قطبی P نسبت به آن باشد.

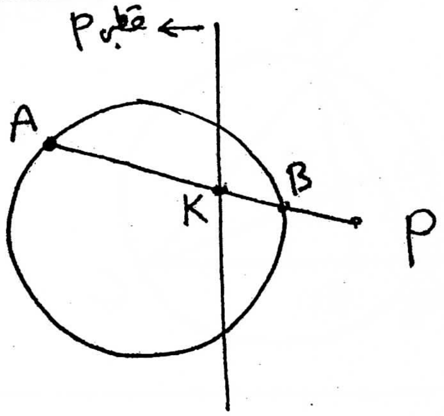
قطب و قطبی

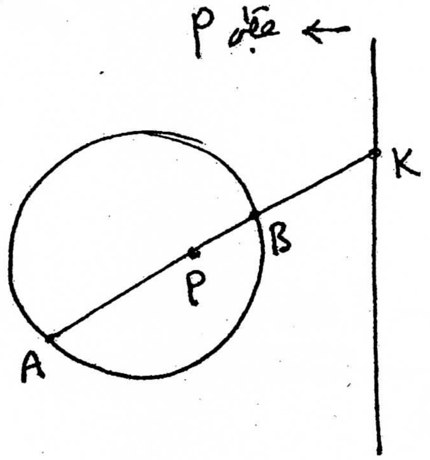




---

(۱۳)





$\Rightarrow (AB, PK) = -1$

---

(۱۴) خاصیت دوگانی: $A \in$ قطبی $B \iff B \in$ قطبی A

تعریف: A, B دو نقطه <u>مزدوج</u> اگر روی قطبی‌های همدیگر باشند.

---

(۱۵) زاویه بین قطبی‌های Q, P $= P\hat{O}Q$

---

(۱۶) ثابت کنید خطوط قطبی ۴ نقطه همساز، تشکیل یک دستگاه همساز می‌دهند.

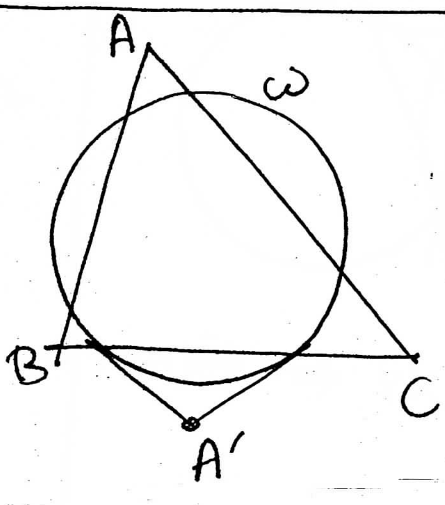
---

(۱۷) ω دلخواه

قطب BC: A'

$\Downarrow$

$l_a: AA'$



(۱۸) <u>دایره ضد قطبی</u> مثلث را رسم کنید

(مسئله در چه حالتی جواب دارد؟)

۱۹

دسته دایره‌ی $W=\{\omega_i\}$ هم محورند!

$\Updownarrow$

قطبی‌های P نسبت به W هم‌رس‌اند!

۲۰

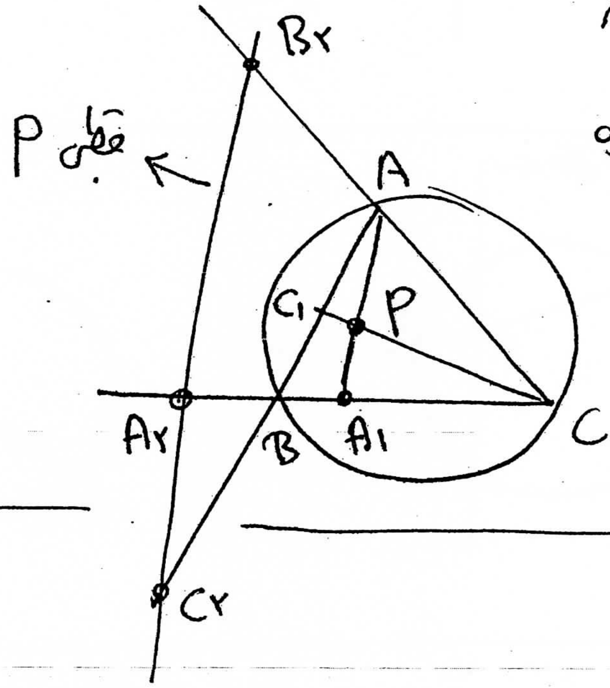
P، Q نسبت به ω مزدوج‌اند

$\Updownarrow$

$P^{P}_{\omega}+P^{Q}_{\omega}=PQ^{2}$

۲۱ ×

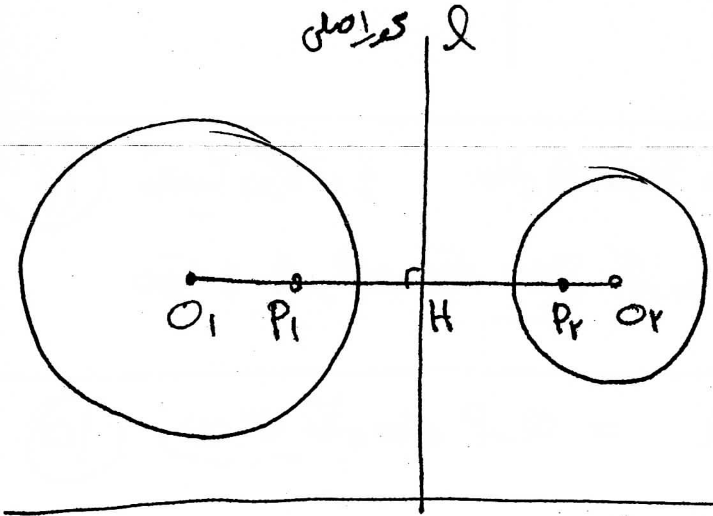
P دلخواه



$\Leftarrow$ وسط‌های A_1A_2 و B_1B_2، C_1C_2 هم‌خط‌اند.

سوال غلط! ← درستش را بیابید! ☺

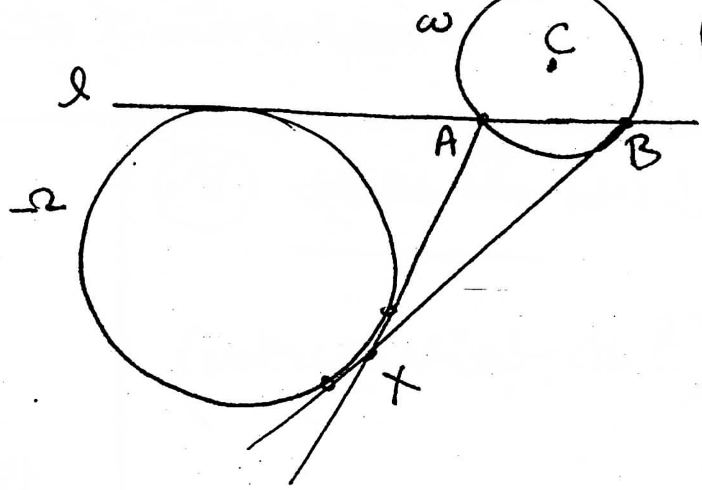
۲۲



P_1 و P_2 قطب‌های l

$\frac{HO_1}{HO_2}=\left(\frac{HP_1}{HP_2}\right)^{-1} \Leftarrow$

۲۳

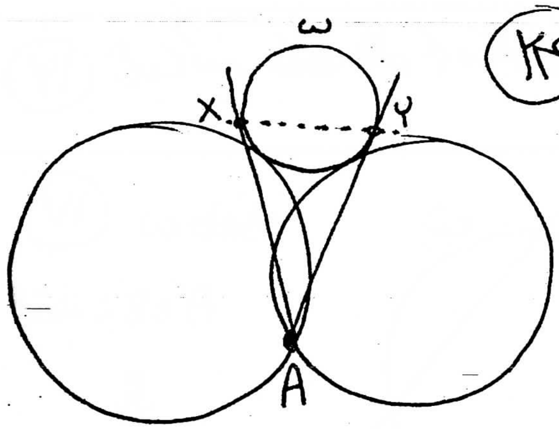


Ω، l، C ثابت‌اند

ω متغیر

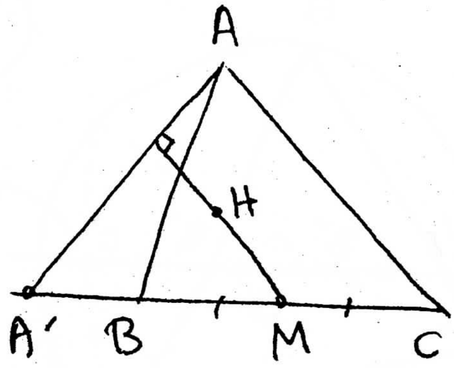
$\Leftarrow$ مکان X ؟

۲۴



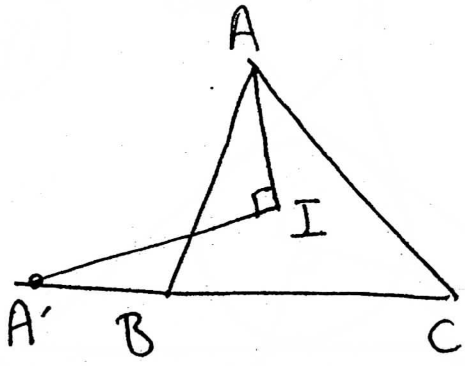
ω متغیر $\Leftarrow$ XY از نقطه ثابتی می‌گذرد

۲۵



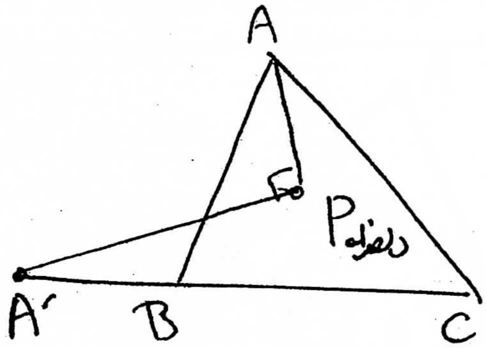
⇐ A′, B′, C′ هم خطند و این خط بر خط اویلر عمود است.

۲۶



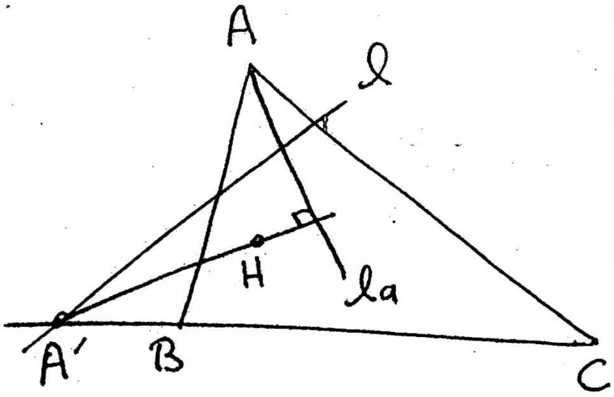
⇐ A′, B′, C′ هم خطند و این خط بر OI عمود است.

۲۷



⇐ A′, B′, C′ هم خطند.

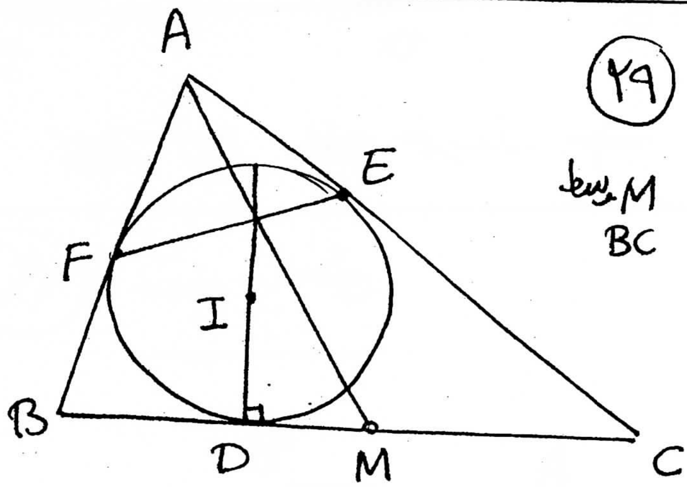
۲۸



⇐ l_a، l_b، l_c، l همرسند (در X) و

$XH \perp l$

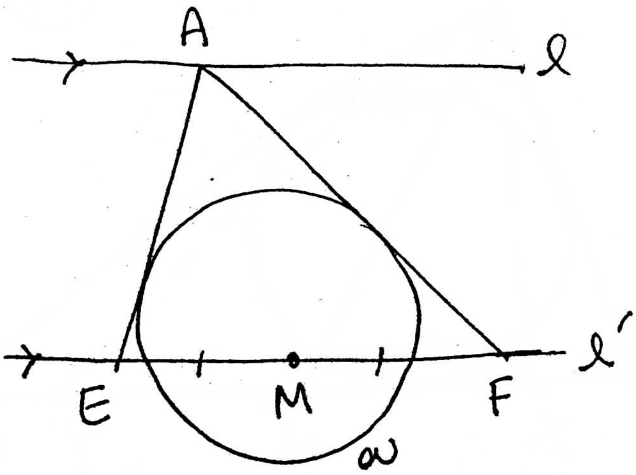
۲۹



M وسط BC

⇐ DI, EF, AM همرسند

۳۰



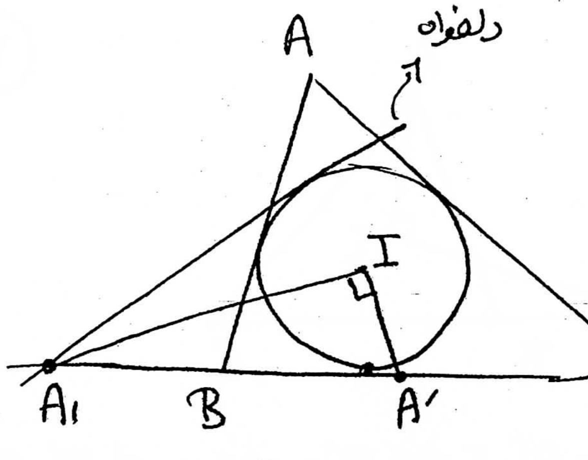
l، l' ثابت
A متغیر
M وسط EF

⇐ AM از نقطه ثابتی می‌گذرد

۳۱ ⇐ مرکز تجانس مثلث‌های میانه‌ای و ارتفاعی،
قطب محور ارتفاعی نسبت به دایره محیطی است.

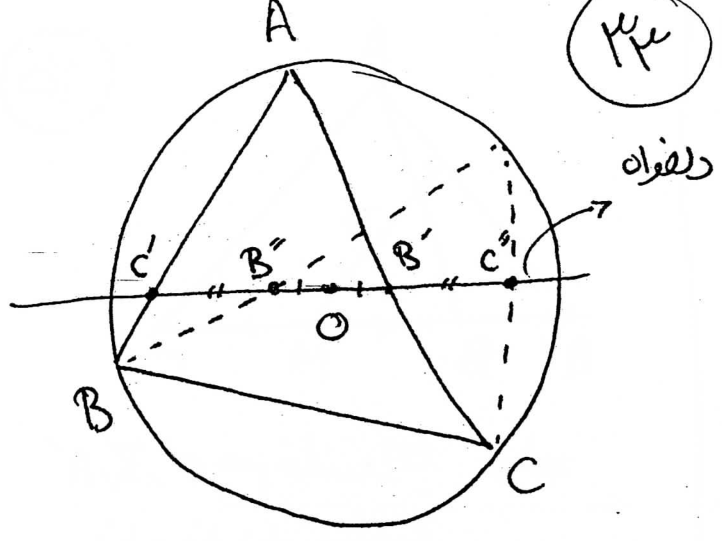
← محور اصلی محیطی و نه نقطه

۳۲



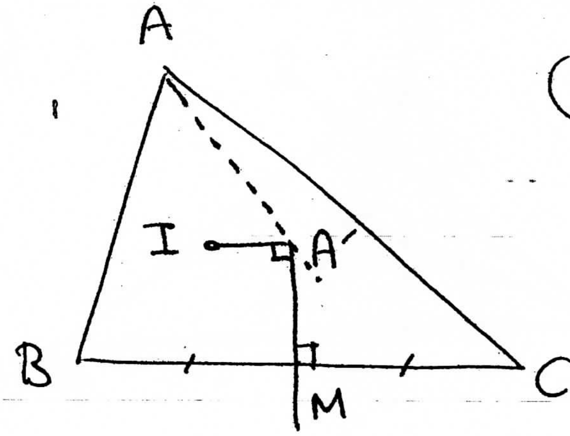
$\Leftarrow$ A′، B′، C′ هم خطند

۳۳



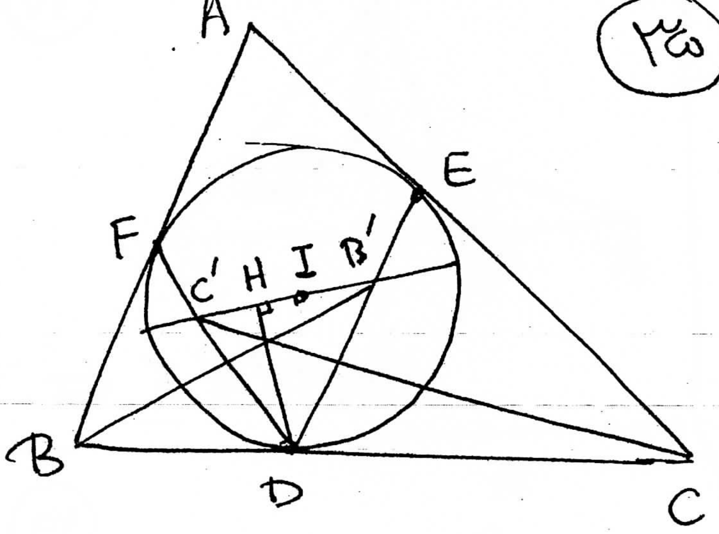
$\Leftarrow$ AA″، BB″، CC″ روی دایره محیطی همرسند.

۳۴



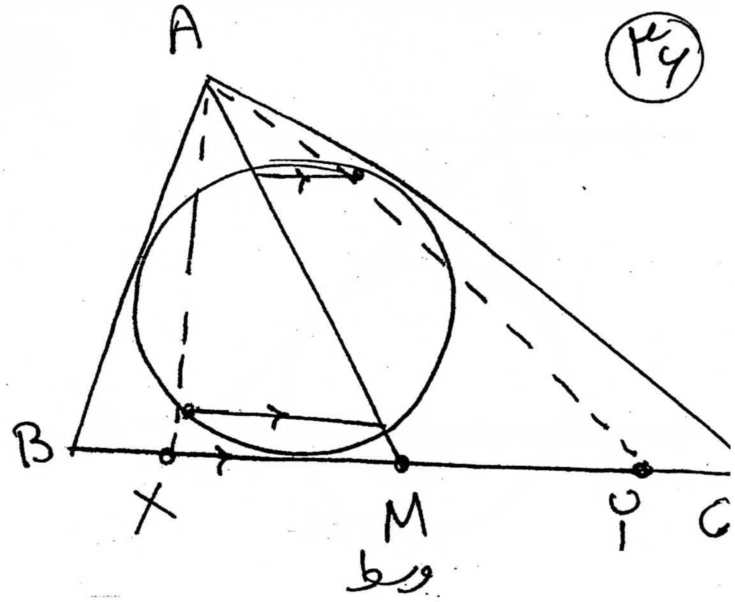
l_a : AA′ (محل همرسی؟)

۳۵



BB′، CC′، DH همرسند. $\rightarrow$

۳۶

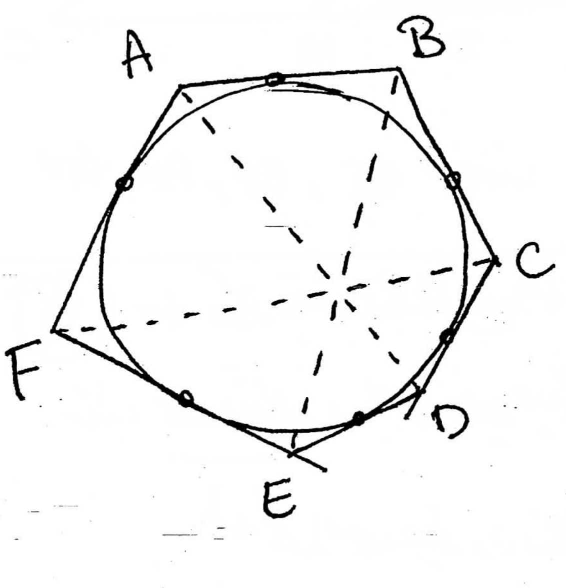


$\Downarrow$

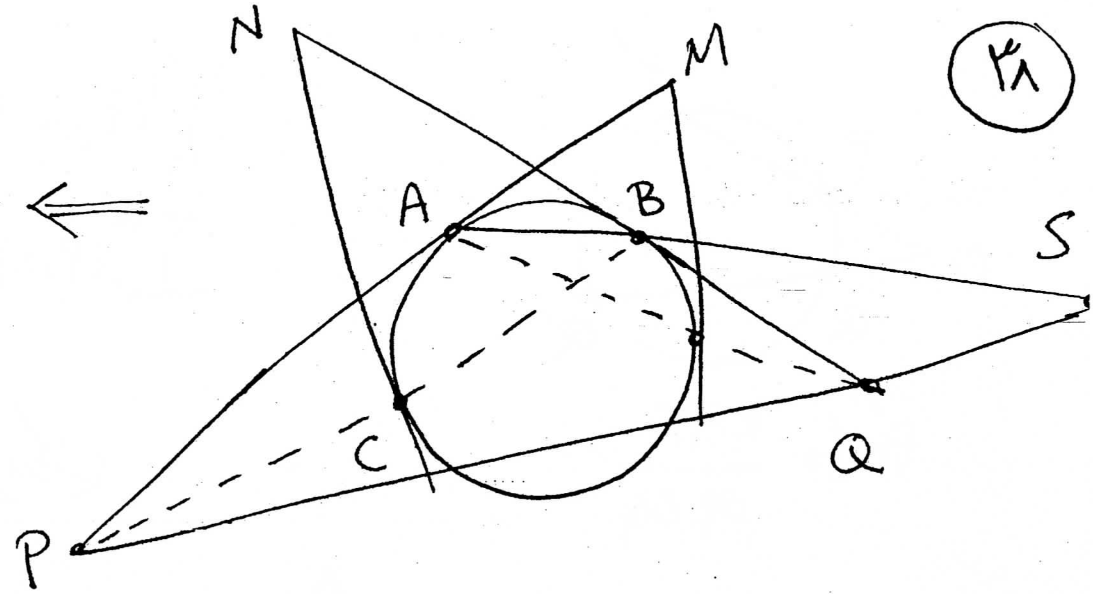
$BX = CY$

۳۷

قضیه بریانشون

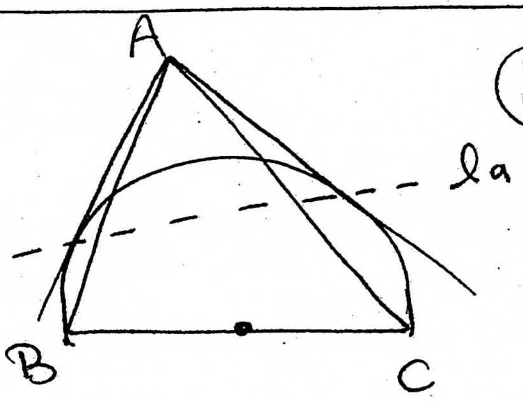


۳۸



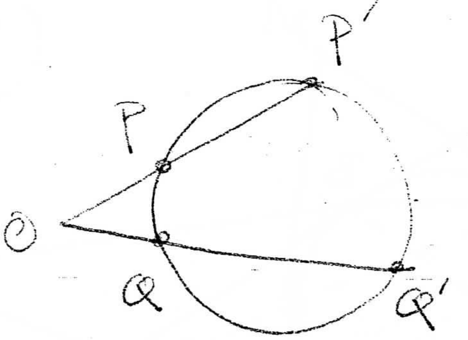
S , N , M $\Leftarrow$ هم خطند

۳۹



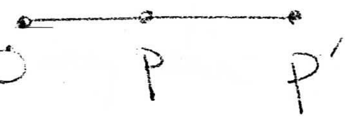
۴۰ فقط با استفاده از خط کش غیر مدرج از یک نقطه دلخواه بر یک مقطع مخروطی مماس رسم کنید.

انعکاس



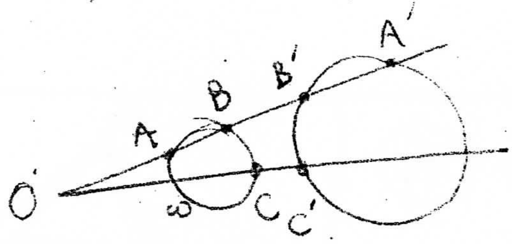
$\varphi_O^k(P)=P'$

$I_O^k(P)=P'$



$$P'Q'=\frac{k.PQ}{OP.OQ}$$

- خط $\longleftrightarrow$ دایره (از مرکز)
- دایره $\longleftrightarrow$ دایره



$ACC'A'$ محاطی ✓

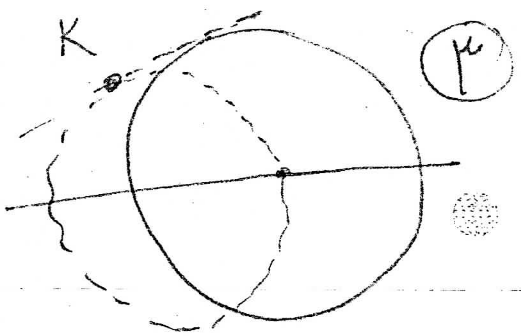
$$\text{نسبت تجانس}=\frac{OA'}{OB}=\frac{OA.OA'}{OA.OB}=\frac{k}{P^O_\omega}$$

---

① مماس

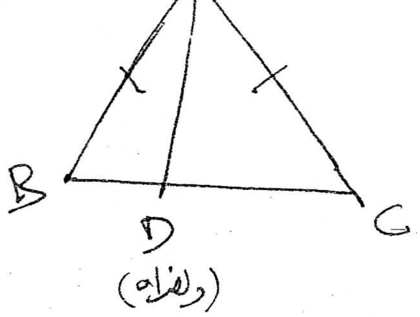
② $OI^2=R^2-2Rr$

③



مکان K ؟

④



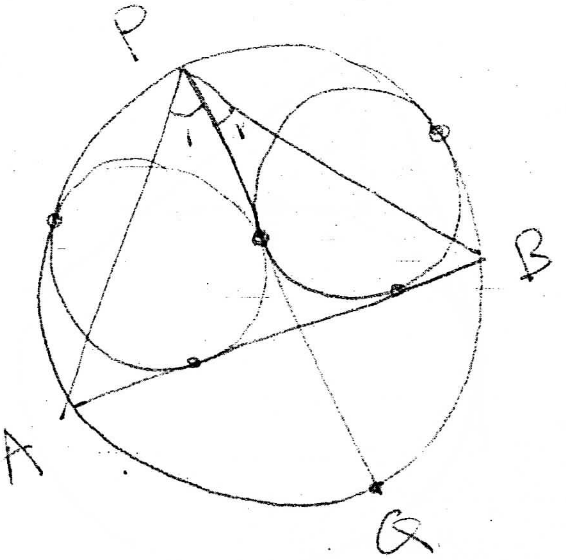
ω مماس بر C_{ABC} , C_{ACD} , C_{ABD}

همه آن‌ها داخل ω

$\Longleftarrow$ مرکز ω روی AD

۵) در شکل روبرو ثابت کنید:

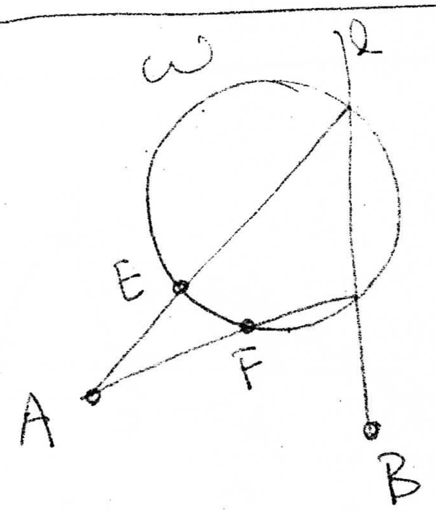
$\hat{P}_1 = \hat{P}_2$



---

۶) A ، B ، ω ثابت ،
ℓ دلخواه

⇐ مکان هندسی $O_{\triangle AEF}$ ؟

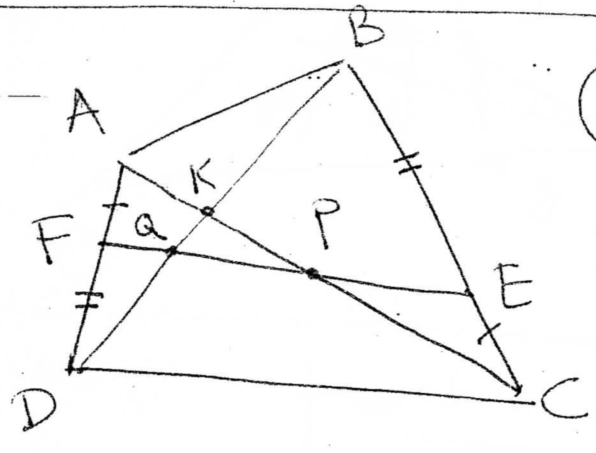


---

۷) $AF = CE$

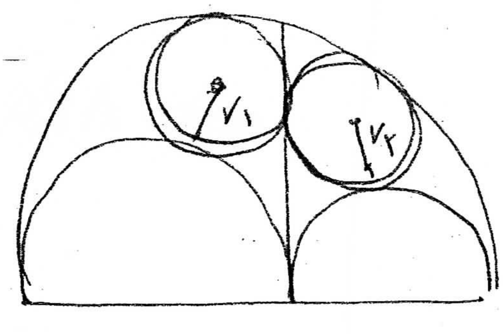
⇓

$C_{\triangle KPQ}$ از نقطه ثابت می‌گذرد

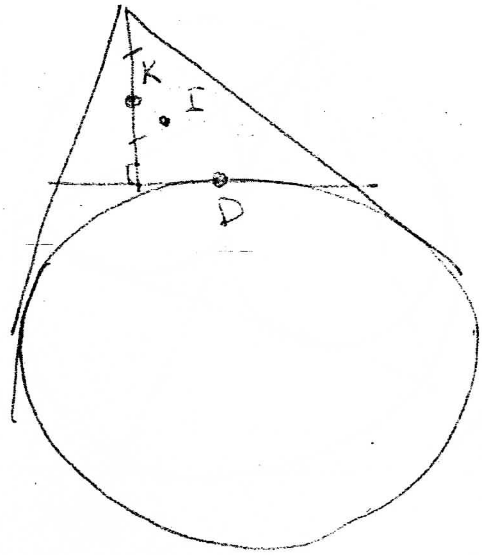


---

۸) $r_1 = r_2$ ⇐

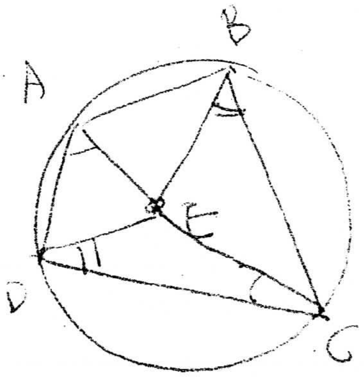


۹



K، I، D هم خطند

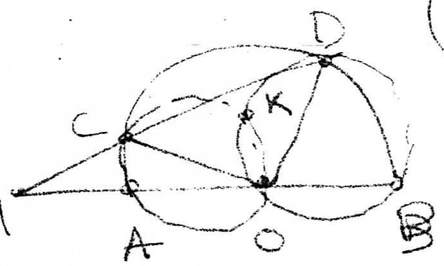
۱۰



$\widehat{EAD} + \widehat{ECD}$
$= \widehat{EBC} + \widehat{EDC}$
$= 90^\circ$

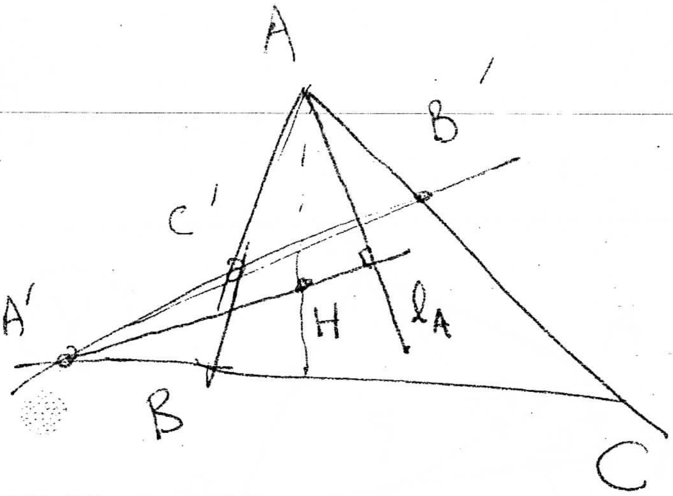
O مرکز دایره
$F = AC \cap BD$ $\Rightarrow$ F، E، O هم خطند

۱۱

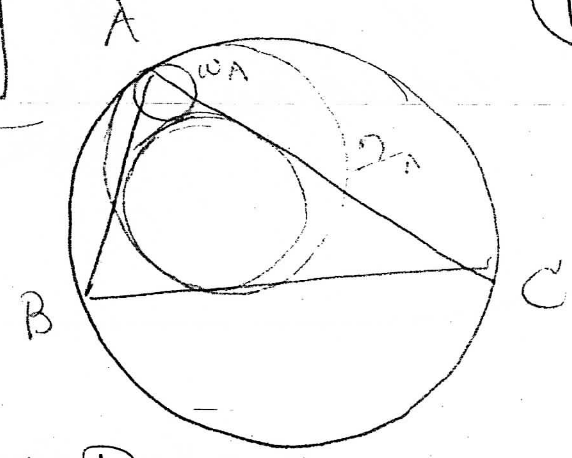


$\Rightarrow \widehat{OKM} = 90^\circ$

۱۲



۱۴



$P_A = \omega_A$ ز
$Q_A = \Omega_A$ "

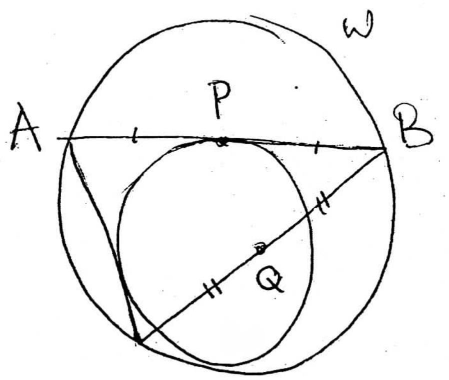
$\triangle$ حساب ؟

$P_A Q_A = \frac{x a^2}{2s}$

$abc \geq 8xyz$

$\Rightarrow 8 P_A Q_A P_B Q_B P_C Q_C \leq R^4$

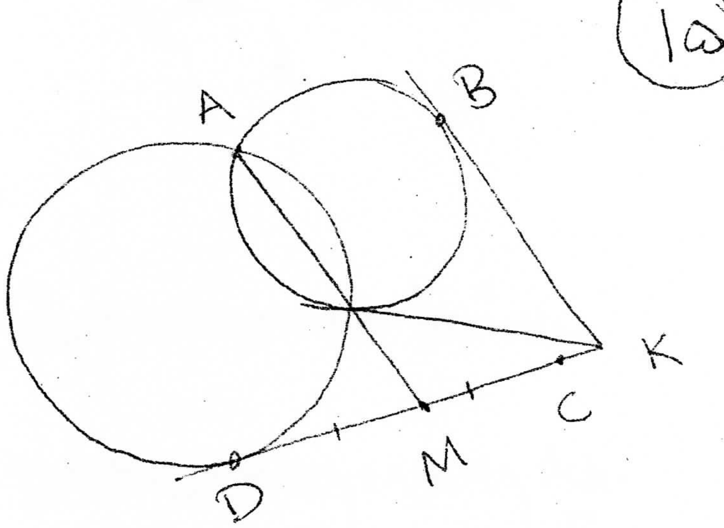
۱۴



$$\left.\begin{aligned} PA &= PB \\ QA &= QB \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

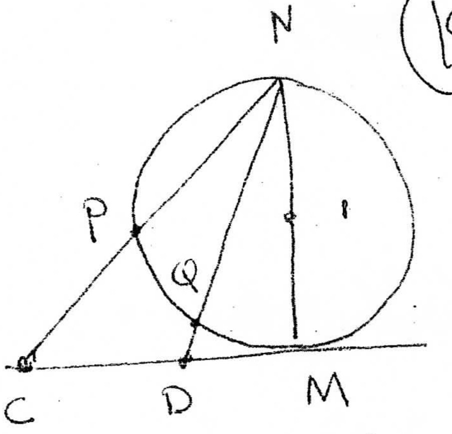
دایره‌ای که بر BC در Q، بر AC مماس است، بر ω نیز مماس است.

۱۵



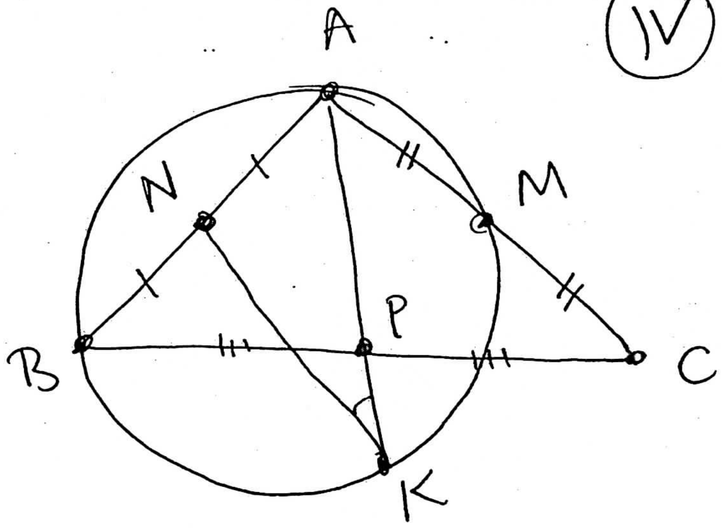
⇐ ABCD محاطی

۱۶



$MC \cdot MD = k \Rightarrow$ PQ از نقطه ثابت c

۱۷



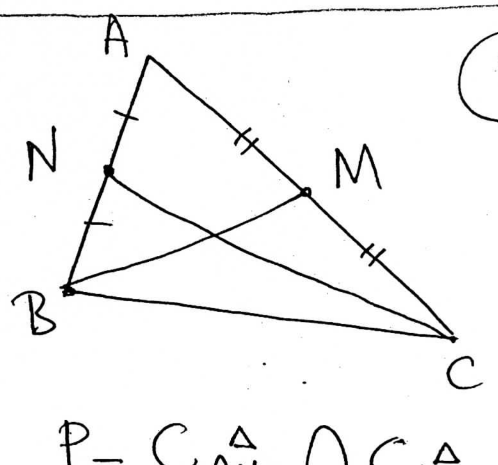
M, N, P وسط اضلاع

$$f(A) = \widehat{AKN}$$

$$\Downarrow$$

$$f(A) = f(B)$$

۱۹



$$P = C_{\overset{\triangle}{ANC}} \cap C_{\overset{\triangle}{AMB}}$$

$$Q = AP \cap C_{\overset{\triangle}{AMN}}$$

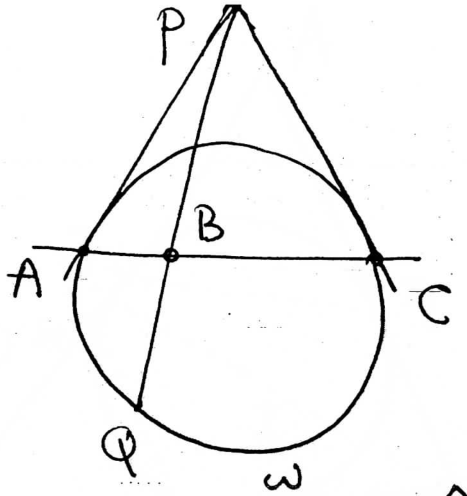
$$\Downarrow$$

$$\frac{AQ}{QP} = ۲$$

تمرین های متفرقه هندسه

- تمرین های این بخش در کلاس های دبیرستان، دوره ۴۰ نفر و دوره طلا استفاده شده اند.
- مسائل این بخش منبع بسیار مناسبی برای داوطلبان مرحله دوم و مرحله سوم المپیاد می باشد.

۱



A, B, C ثابت

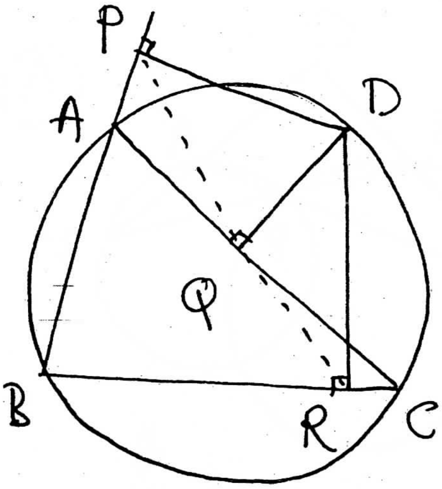
ω دلخواه

$\Downarrow$

نیمساز $\widehat{AQC}$

از نقطه ثابتی می‌گذرد.

۲



$PQ = QR$

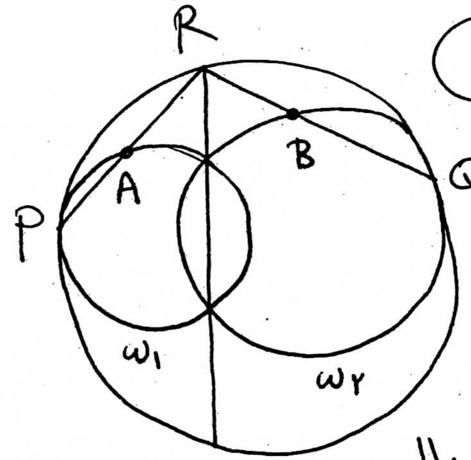
$\Updownarrow$

نیمساز $\widehat{ABC}$ و

" $\widehat{ADC}$ و

AC همرسند.

۳

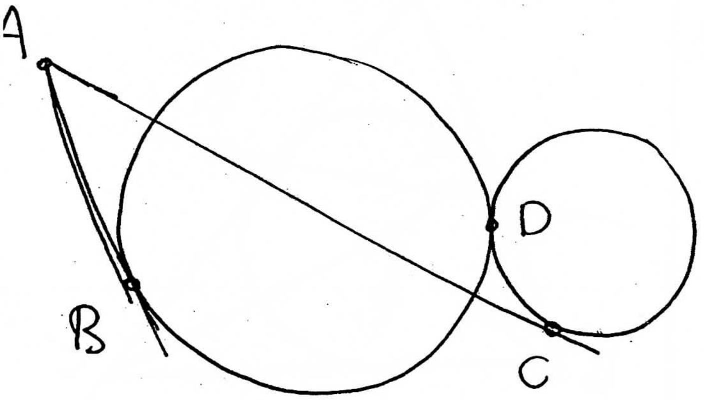


$\Downarrow$

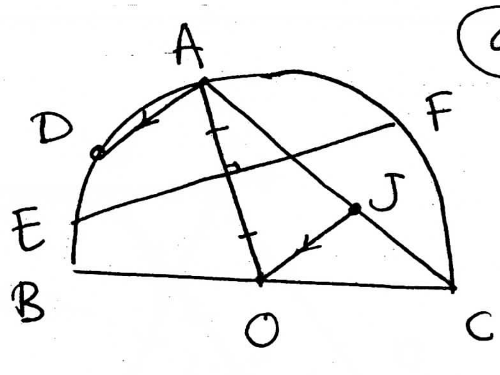
AB مماس مشترک ω۱ و ω۲ است.

۴

$\Rightarrow O_{\triangle BCD} \in C_{\triangle ABC}$



۵

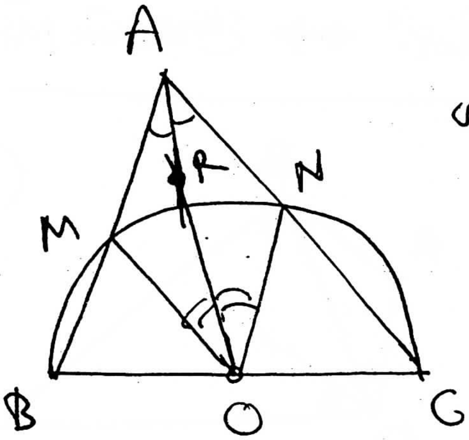


D وسط کمان $\overset{\frown}{AB}$

$\Downarrow$

$J = I_{\triangle CEF}$

۶



R محل برخورد نیمسازهای

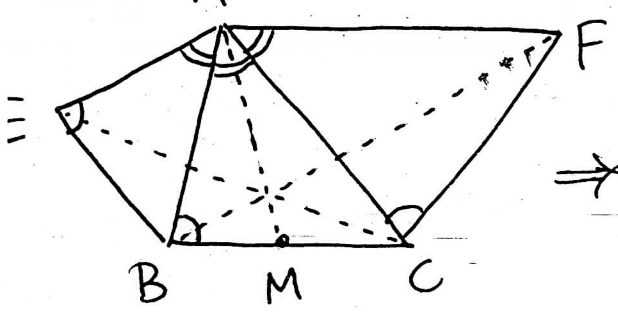
$\widehat{MAN}$ و $\widehat{MON}$

$\Downarrow$

$C_{\triangle BMR}$ و $C_{\triangle CNR}$

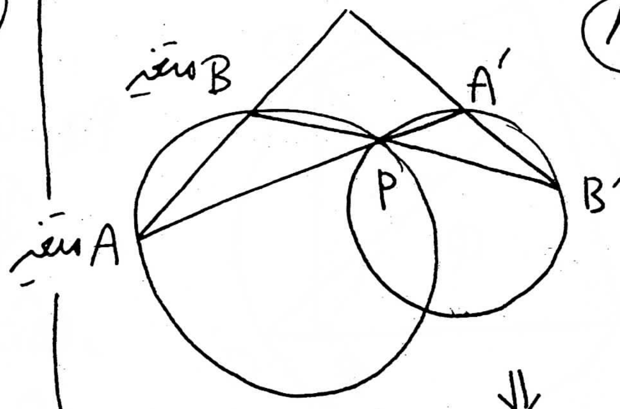
و BC همرسند.

۷



$\Rightarrow MB = MC$

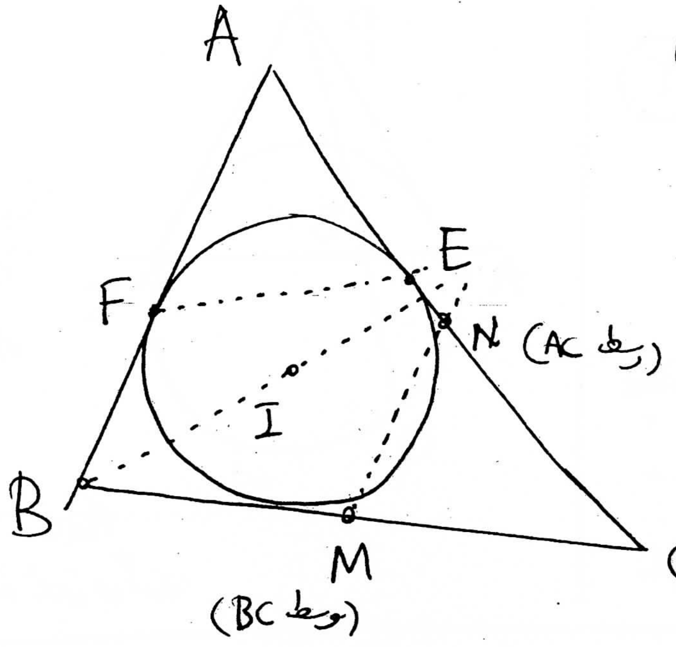
۸



⇓

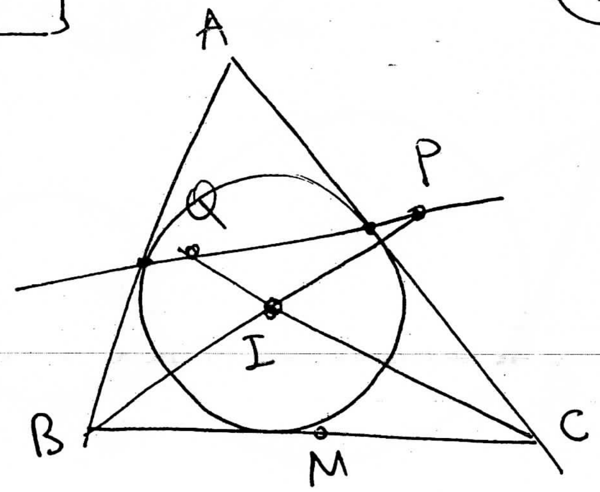
$O_{\triangle AA'C}$ روی یک دایرهٔ ثابت حرکت می‌کند

۹



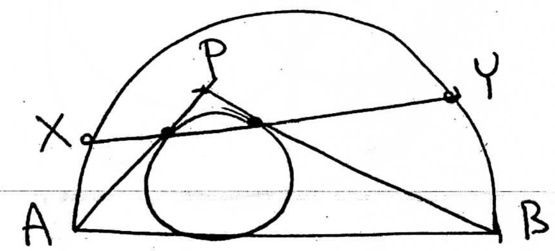
$\Rightarrow$ EF ، BI ، MN همرسند

۱۰



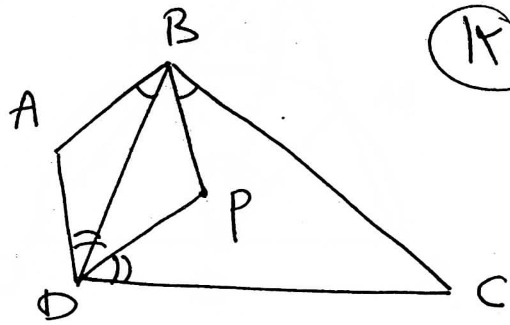
$\hat{A}=90^\circ \iff \triangle MPQ$ متساوی‌الاضلاع

۱۱



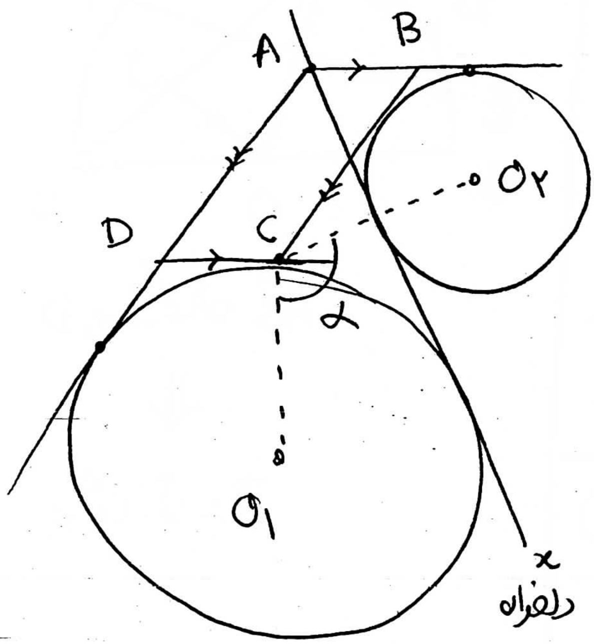
$\Rightarrow \hat{APB} = \overset{\frown}{XY}$

۱۲



$AP=PC \iff ABCD$ محاطی

۱۳

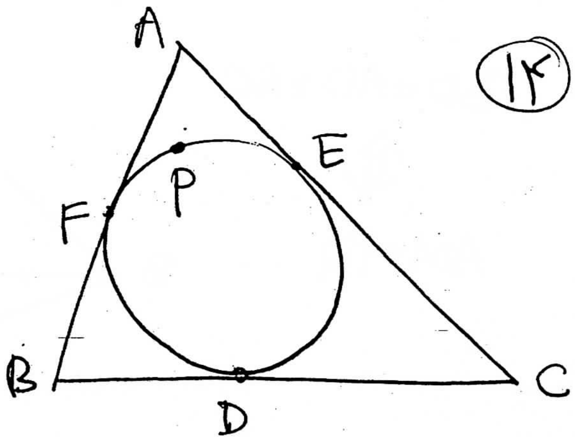


Ax دلخواه

⇓

$\hat{\alpha}$ = ثابت

۱۴

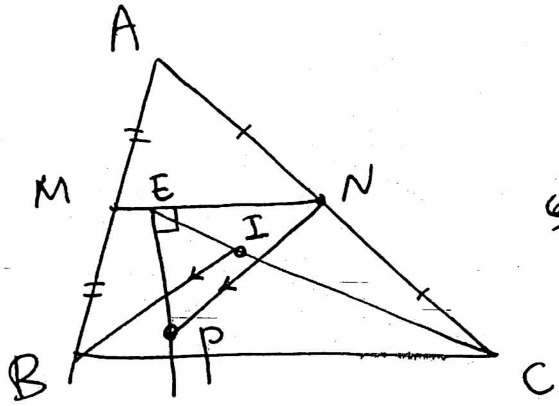


x، y، z فاصله P از اضلاع $\overset{\Delta}{ABC}$

x′، y′، z′ 〃 〃 〃 $\overset{\Delta}{DEF}$

$xyz = x'y'z'$ ⇐

۱۵



MN میان‌خط

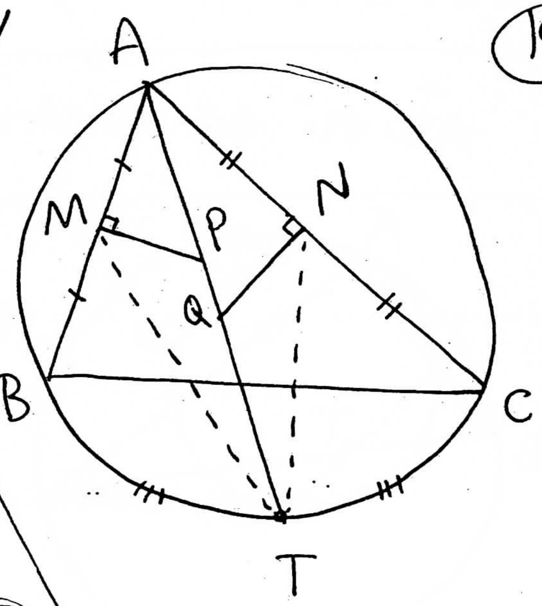
I مرکز دایره محاطی

$PE \perp MN$

$BI \parallel PN$

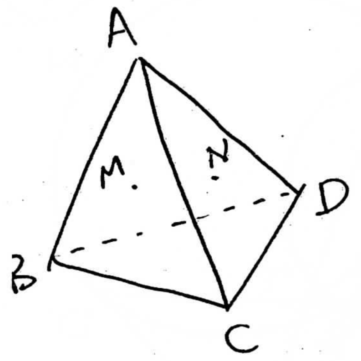
$PI \perp AC$ ⇐

۱۶



$S_{\overset{\Delta}{TMP}} = S_{\overset{\Delta}{TNQ}}$ ⇐

۱۷



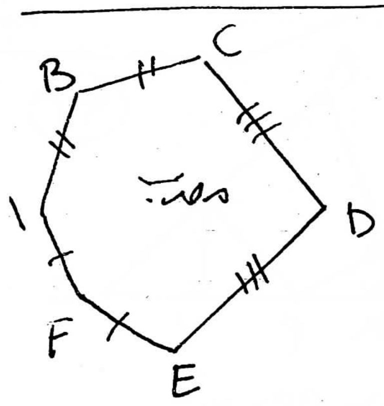
ABCD چهاروجهی منتظم

$M \in ABC$

$N \in ADC$

⇐ با طول‌های MN و BN، DM می‌توان مثلث ساخت.

۱۸



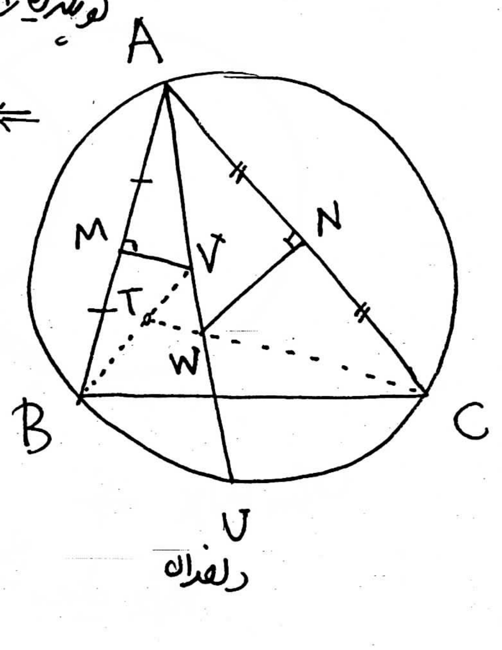
$\Rightarrow \frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{۳}{۲}$

(تساوی؟)

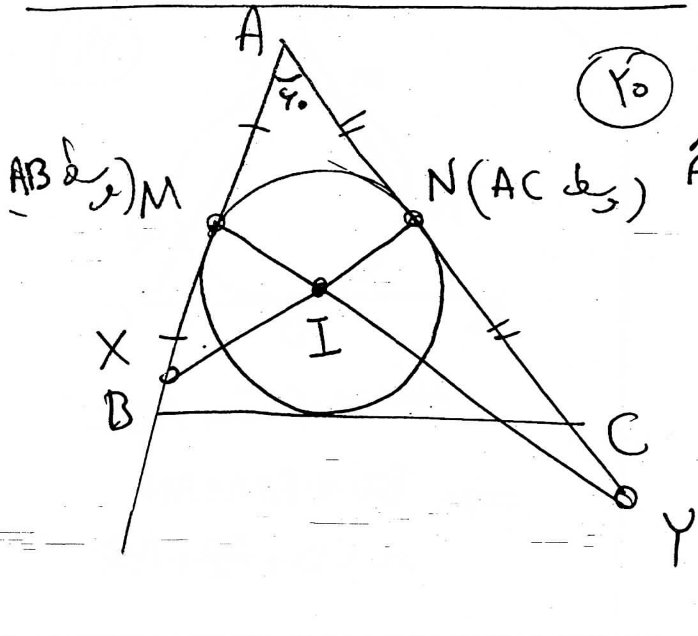
۱۹

کوتاه‌ترین راه؟

$AU = BT + TC$ ⇐



۲۰

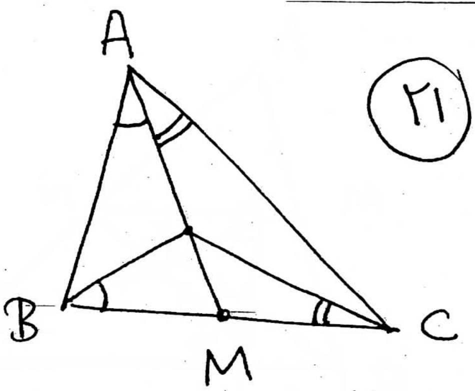


$\hat{A} = ۶۰°$

⇓

$S_{\overset{\Delta}{AXY}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}}$

۲۱



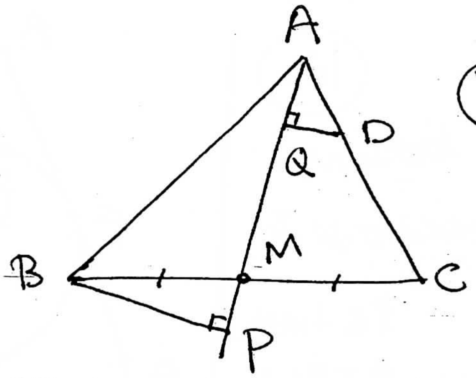
$\Rightarrow BM = MC$

۲۲

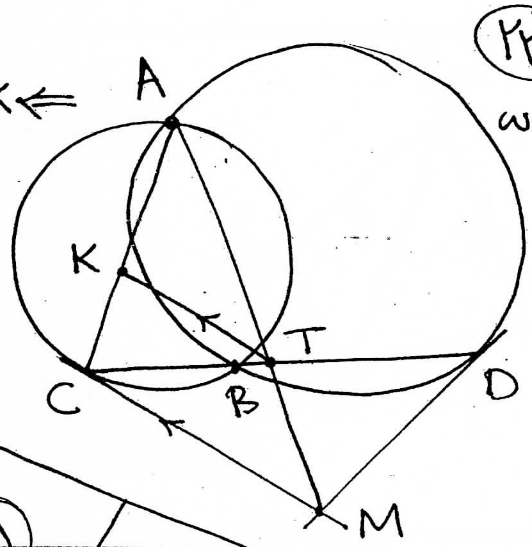
$BD = AD + AC$

$\Updownarrow$

$AM = PQ$



۲۳



BK بر ω مماس ⇐

۲۴

$AO = AH \Rightarrow \hat{A} = ?$

۲۵

ABCD محدب: $R_A + R_C > R_B + R_D$

$\Updownarrow$

$\hat{A} + \hat{C} > \hat{B} + \hat{D}$

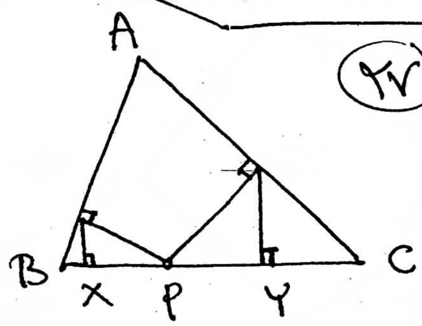
$R_A = R_{\triangle BCD}$ و ...

ثابت کنید:

۲۶

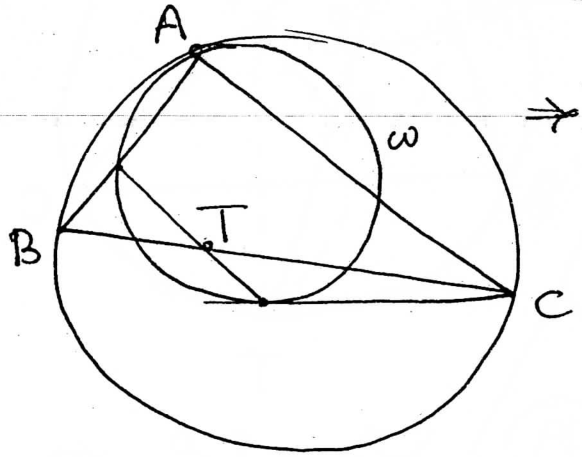
$\hat{AIO} \leq 90^\circ \iff 2a \leq b + c$

۲۷



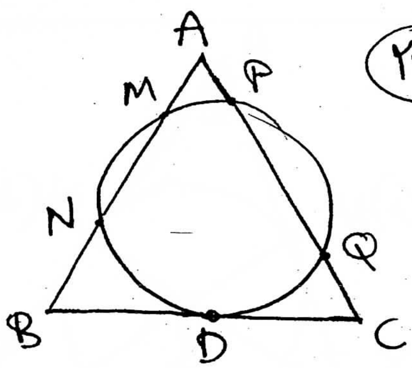
$\Rightarrow AP \geq XY$

۲۸



$\Rightarrow BT =$ طول مماس رسم از B بر ω

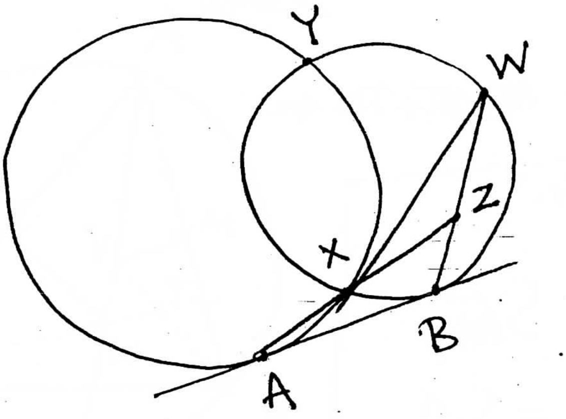
۲۹



ABC متساوی الاضلاع

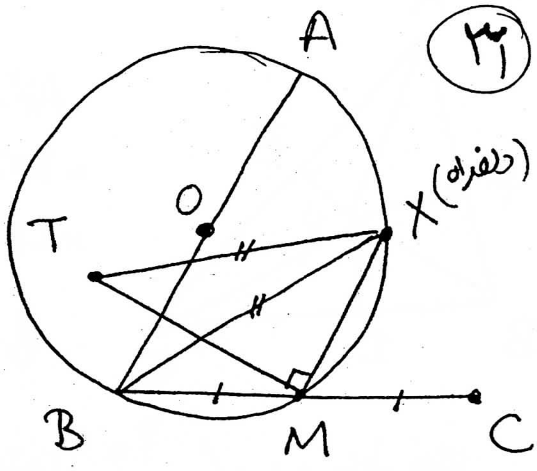
$\Rightarrow BD + AM + AN = CD + AP + AQ$

۳۰



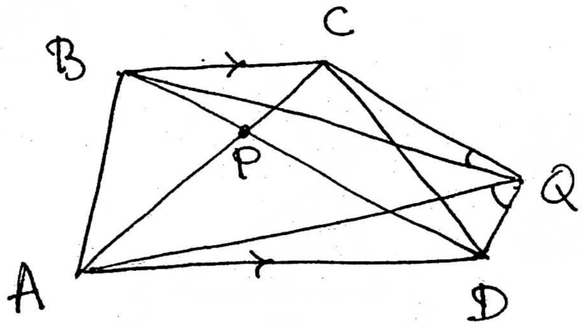
WX مماس $\Rightarrow$ BW و BX مماس بر دایره محیطی $\triangle XYZ$

۳۱



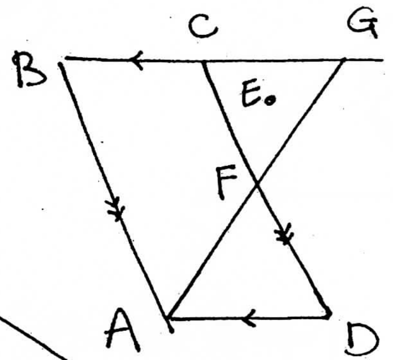
$\Longrightarrow \hat{MT_B} - \hat{MT_C} =$ ثابت

۳۲



$$\left.\begin{array}{l}\hat{BQC} = \hat{AQD} \\ BC \parallel AD\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{BQP} = \hat{DAQ}$$

۳۳



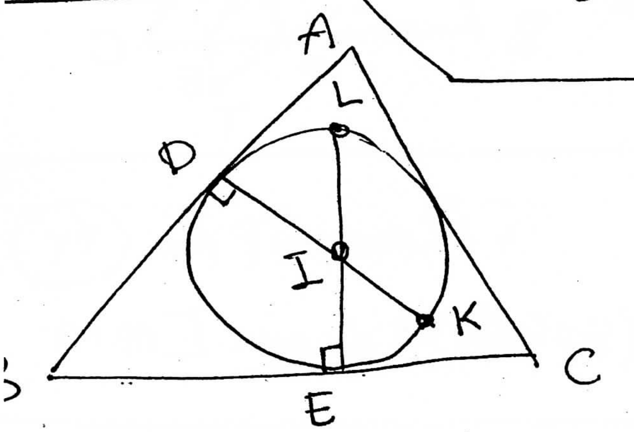
ABCD متوازی الاضلاع

BCED محاطی

$E = O_{\overset{\triangle}{CFG}}$

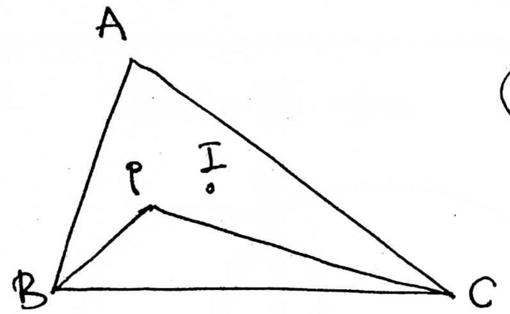
$\Rightarrow \hat{BAF} = \hat{DAF}$

۳۵



$a+c=3b \iff$ ACKL محاطی

۳۴

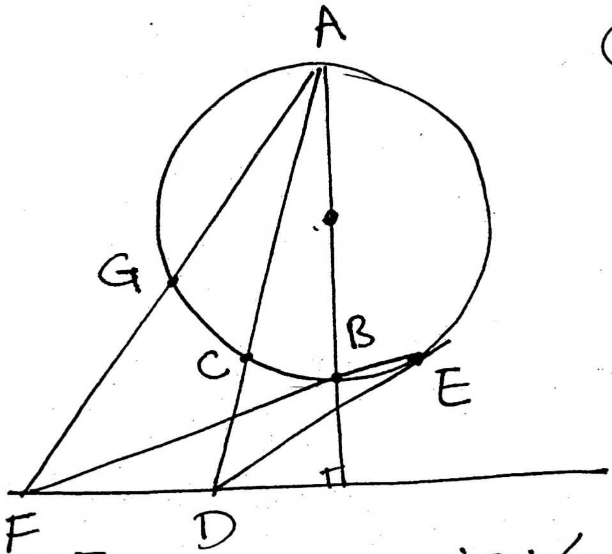


$\hat{PBA}+\hat{PCA} = \hat{PBC}+\hat{PCB}$

$\Longrightarrow AP \geq AI$

(تساوی وقتی $P=I$)

۳۷



$\Longrightarrow$ ثابت کنید تغییر G نقطه‌ی $AB \cap FC$ ثابت

۳۶

ABC متساوی‌الاضلاع

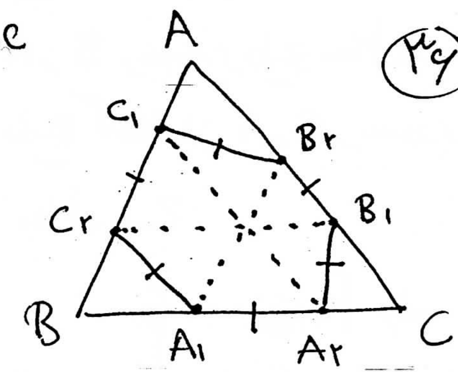
$\Downarrow$

A_1B_2 ,

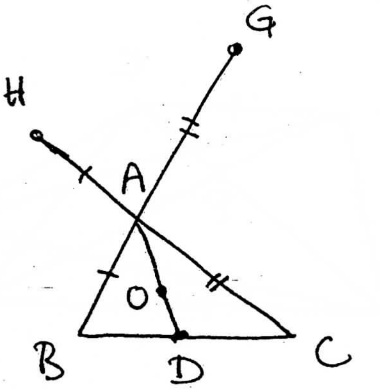
B_1C_2 ,

C_1A_2

هم‌رسند



۳۸

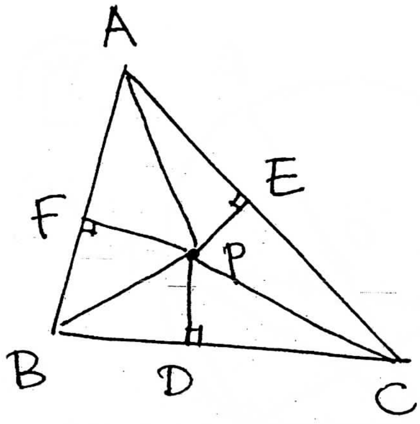


$E = O_{\overset{\triangle}{ABD}}$

$F = O_{\overset{\triangle}{ACD}}$

مستطیل EFGH $\iff |\hat{C} - \hat{B}| = 90^\circ$

۳۹



$AP^2 + PD^2 = BP^2 + PE^2 = CP^2 + PF^2$

$\Downarrow$

$P = O_{I_A I_B I_C}$ ← مرکز دایره محاطی خارجی

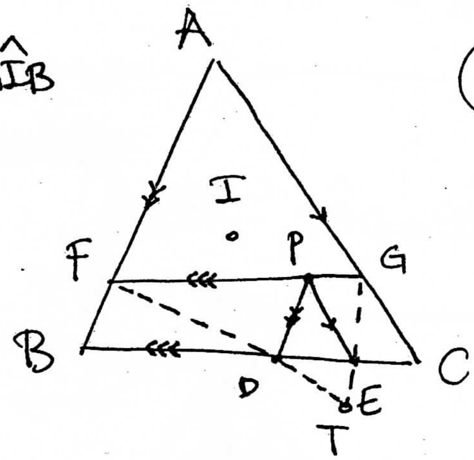
۴۰

$P \in C_{A\hat{I}B}$

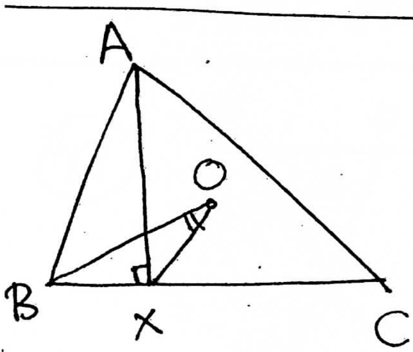
$AB = AC$

$\Downarrow$

$T \in C_{\overset{\triangle}{ABC}}$



۴۱



$\left.\begin{array}{l} ABC \text{ حاده} \\ \hat{B} > \hat{C} + 30^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} + B\hat{O}X < 90^\circ$

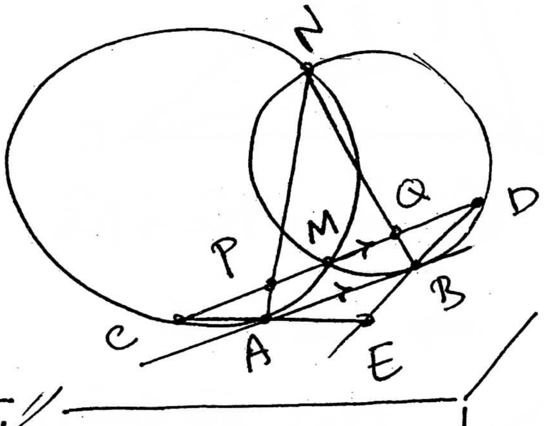
۴۲ نقطه P کجای صفحه باشد تا $\sum AP.AG$ مینیمم شود؟ $(G = G_{\overset{\triangle}{ABC}})$

۴۴ P داخل مثلث ABC

$\Rightarrow \sum PA + \min\{PA, PB, PC\} < \sum a$

۴۳

$\Rightarrow EP = EQ$

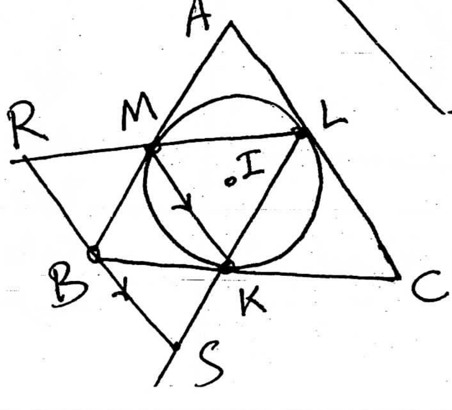


۴۵ همه مجموعه‌های متناهی S شامل حداقل ۳ نقطه را بیابید که برای هر دو نقطه متمایز A، B در S، عمودمنصف AB یک محور تقارن برای S باشد.

۴۶ A' محل برخورد دوم دایره گذرنده از A، B و عمود بر دایره محاطی و دایره گذرنده از A، C و عمود بر دایره محاطی است.

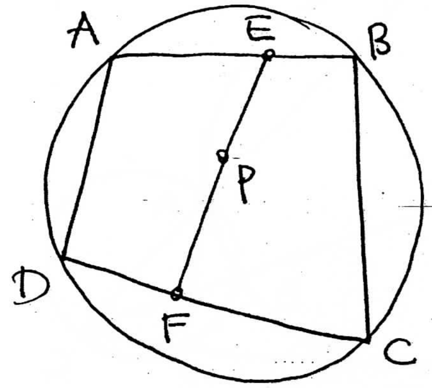
$\Rightarrow R_{A'B'C'} = \frac{r}{2}$

۴۷



$\Rightarrow R\hat{I}S = 90^\circ$

۴۸



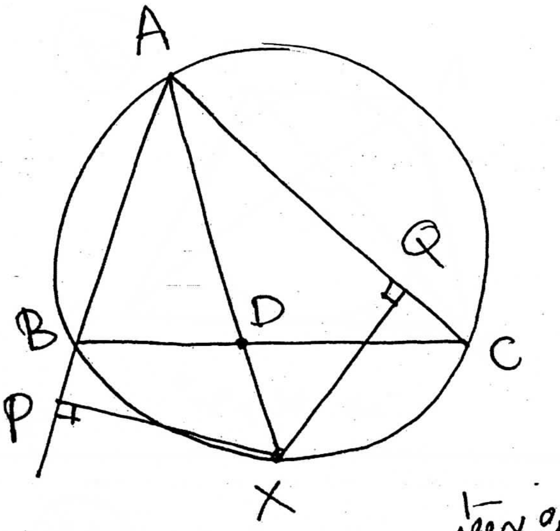
$$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}$$

$$\frac{EP}{PF}=\frac{AB}{CD}$$

$$\Downarrow$$

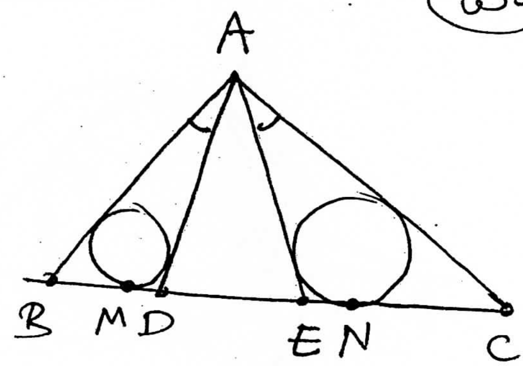
$$\frac{S_{\hat{APD}}}{S_{\hat{BPC}}}=\text{ثابت}$$

۴۹



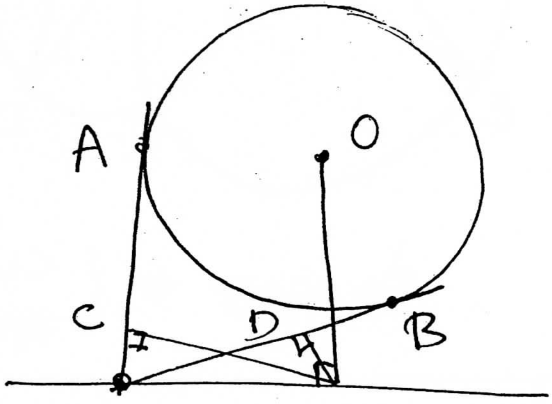
$AB=AC \iff$ PQ بر دایره به قطر XD مماس است

۵۰



$$\Rightarrow \frac{1}{MB}+\frac{1}{MD}=\frac{1}{NE}+\frac{1}{NC}$$

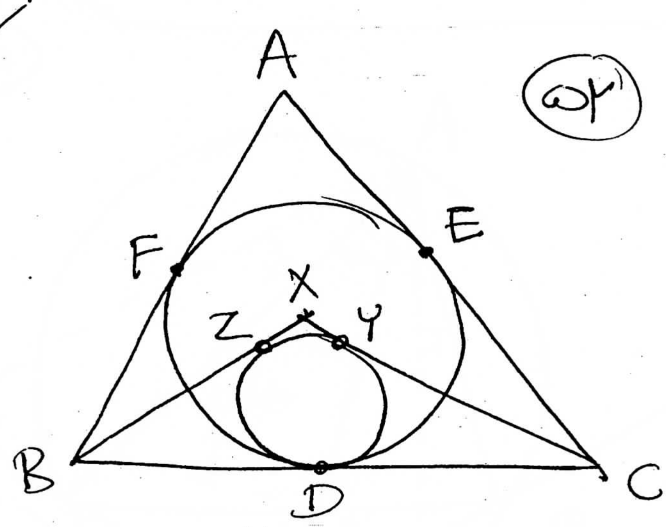
۵۱



M (دلخواه)

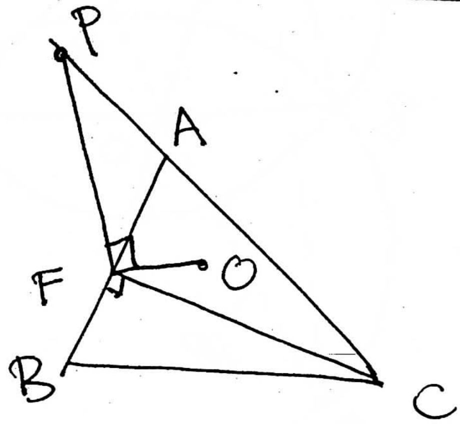
M با تغییر $\Rightarrow$ CD از نقطه ثابت می‌گذرد

۵۲



$\Rightarrow$ EFZY محاطی

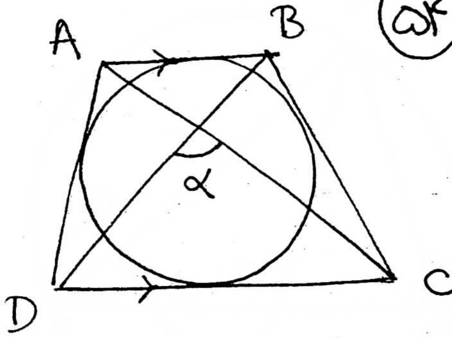
۵۳



$$\Rightarrow \hat{FHP}=\hat{A}$$

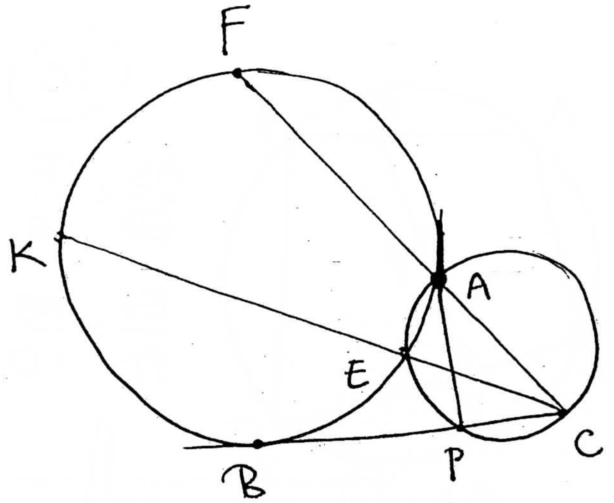
مرکز ارتفاعیه

۵۴



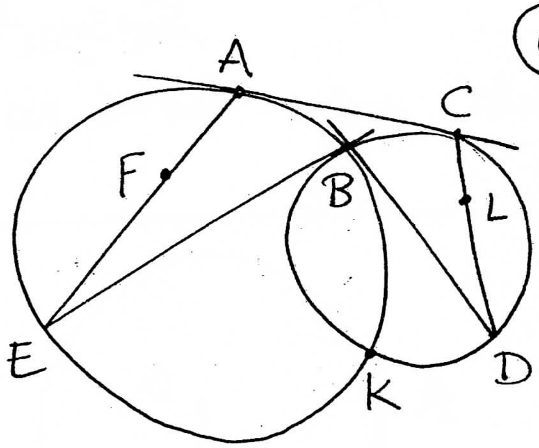
$\Rightarrow \alpha > 90^\circ$

۵۵



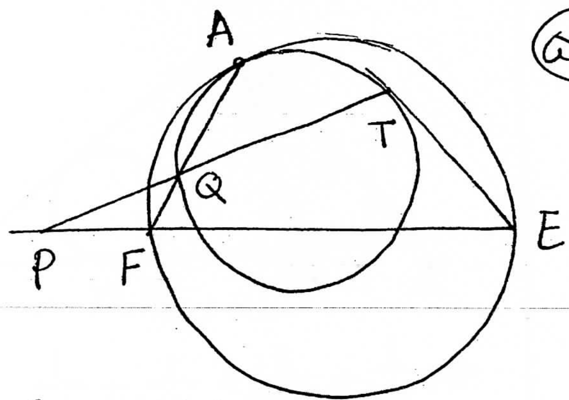
PA, PB مماس $\Rightarrow \begin{cases} \text{I)}\ F\hat{E}K = A\hat{C}B \\ \text{II)}\ EF \text{ از وسط } BC \text{ می‌گذرد} \end{cases}$

۵۶



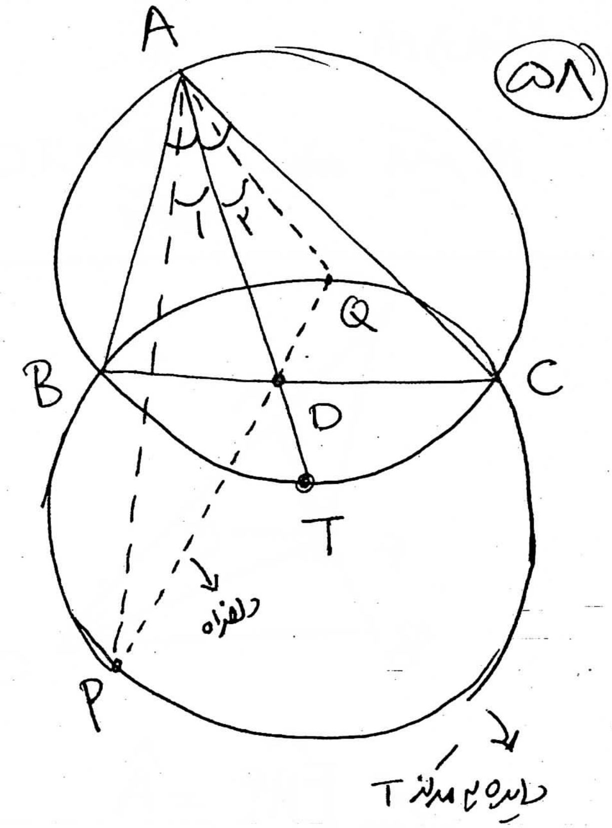
$ACLKF$ محاطی $\Leftarrow \begin{cases} CL = CB \\ AF = AB \end{cases}$

۵۷



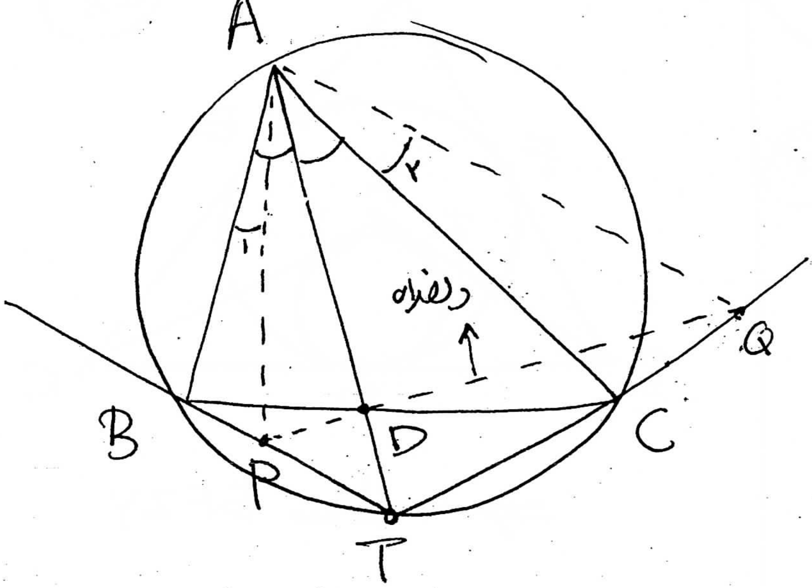
$\Rightarrow A\hat{P}E = P\hat{Q}F$

۵۸



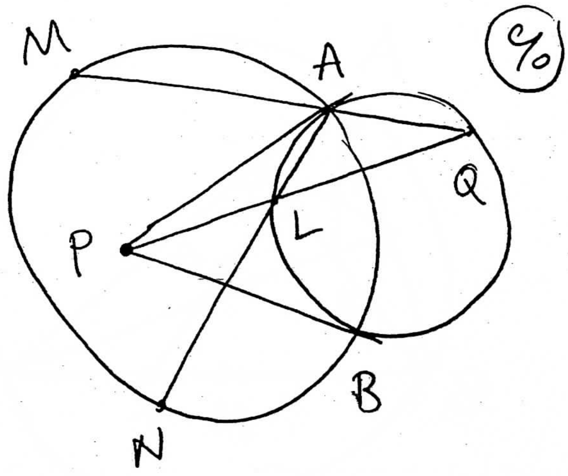
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Leftarrow$

۵۹



$\Rightarrow \hat{A}_1 < \hat{A}_2$

۶۰



$\Rightarrow$ MN از وسط PQ می‌گذرد

۶۱

$IG \parallel BC \Leftrightarrow b+c=2a$

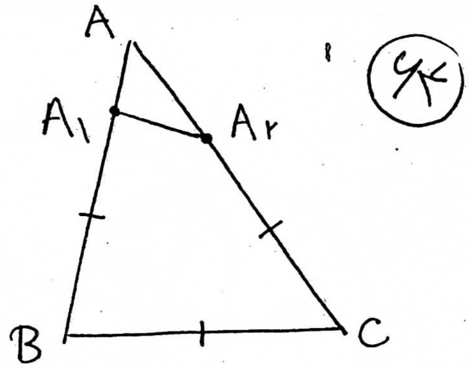
۶۲

$IG \perp BC \Leftrightarrow b+c=3a$

۶۳

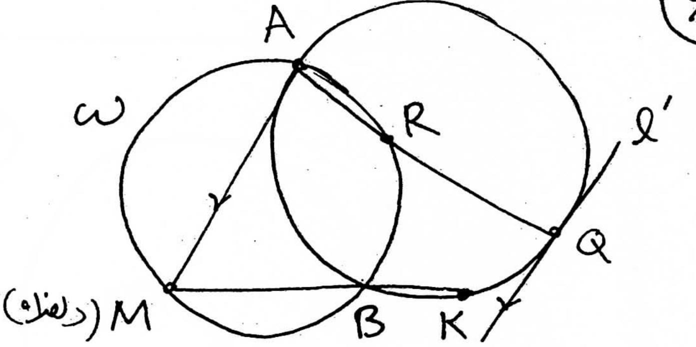
$\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow b+c=3a$

۶۴



$\Rightarrow A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2 \perp OI$

۶۵

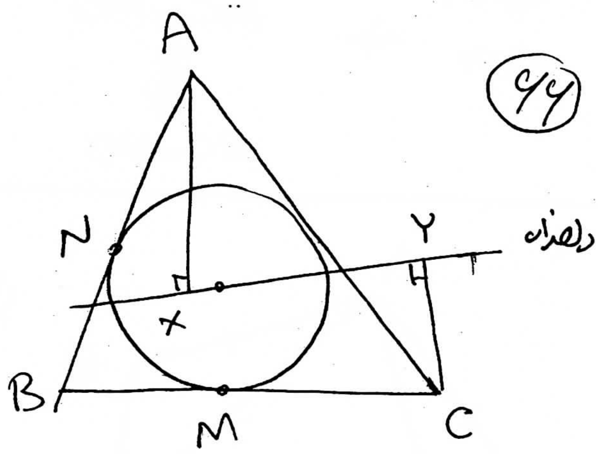


l : مماس در R بر دایره ω

$\Rightarrow$ I) $l \parallel AK$

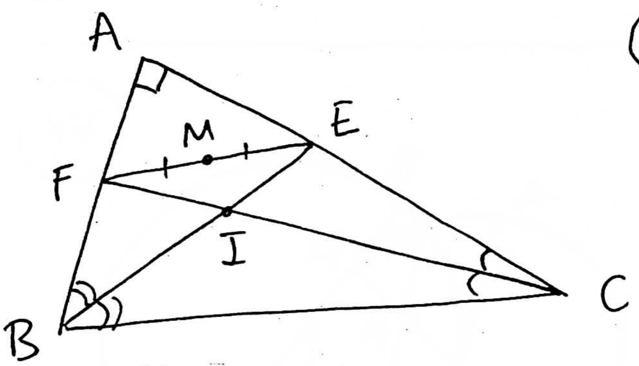
II) KM, l', l همرسند

۶۶



$\Rightarrow$ NX ، MY روی دایره محاطی همرسند

۶۷



$\Rightarrow MI \perp BC$

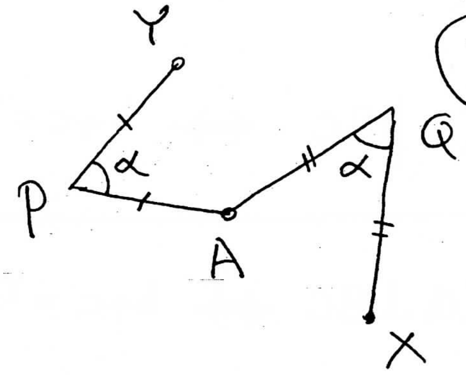
۶۸

$A=90^\circ \Rightarrow A\hat{H}I=\frac{3\hat{B}}{2}$

۶۹

$\sum \sin^2 A = 2+2\prod \cos A < \frac{5}{2}$

۷۰

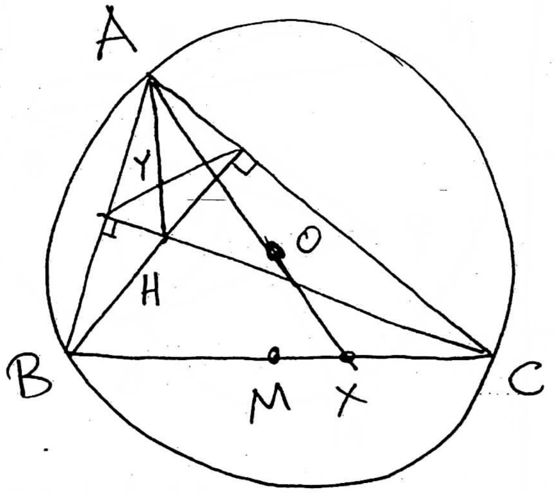


A, P, Q ثابت اند.

α متغیر

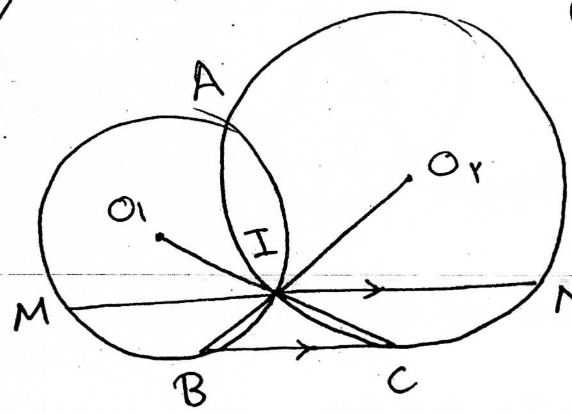
$\Leftarrow$ XY از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۷۱



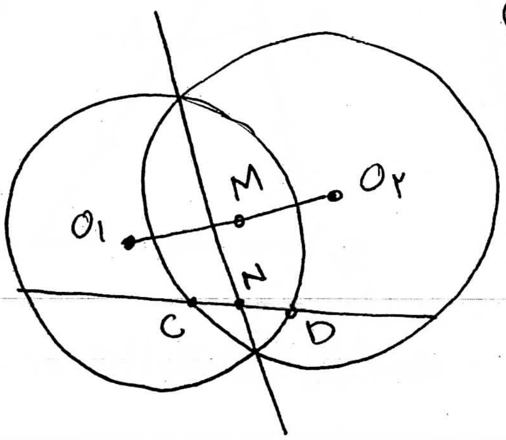
$\Rightarrow MH \parallel XY$

۷۲



$$\Rightarrow \begin{cases} \text{I)}\ I = I_{\triangle ABC} \\ \text{II)}\ AB+AC=MN \end{cases}$$

۷۳

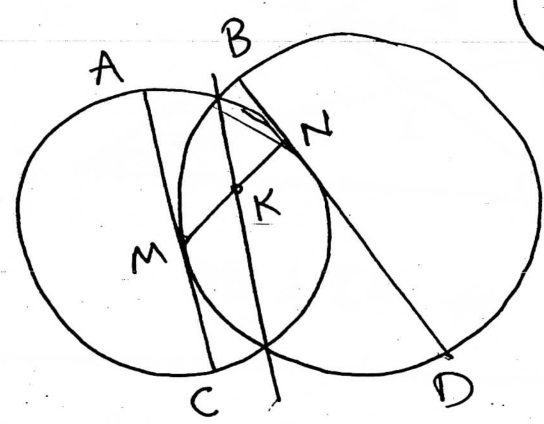


M وسط O_1O_2 $\Rightarrow$ $MC=MD$

$\Updownarrow$

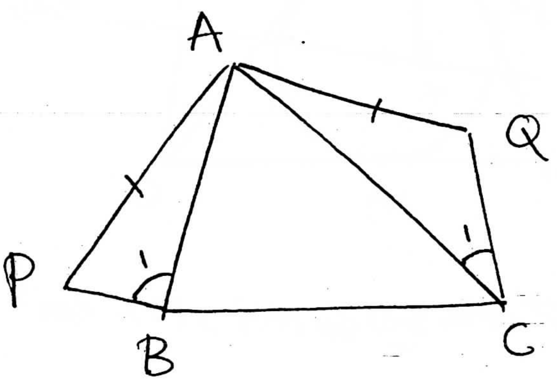
$NC=ND$

۷۴



$KM=KN \Leftrightarrow AB \parallel CD$

۷۵

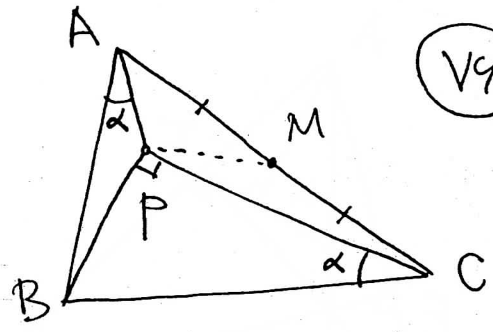


$\widehat{PAQ} = 2\widehat{BAC}$

ثابت کنید:

$H \in PQ \Leftrightarrow \hat{B}_1+\hat{C}_1=180^\circ$

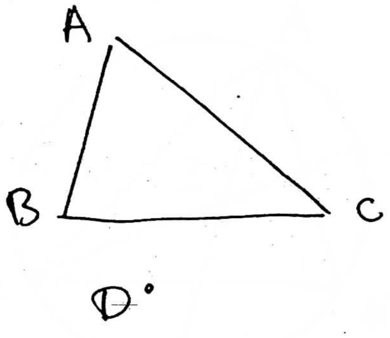
۷۶



$BP = ۲PM$

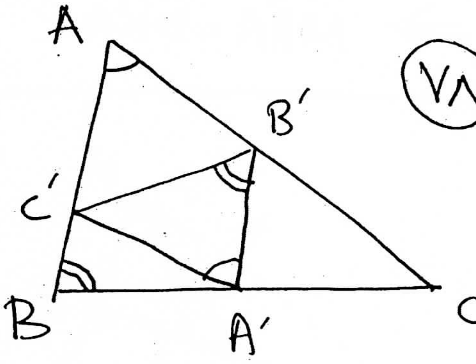
$\Rightarrow$ AP میانه است

۷۷



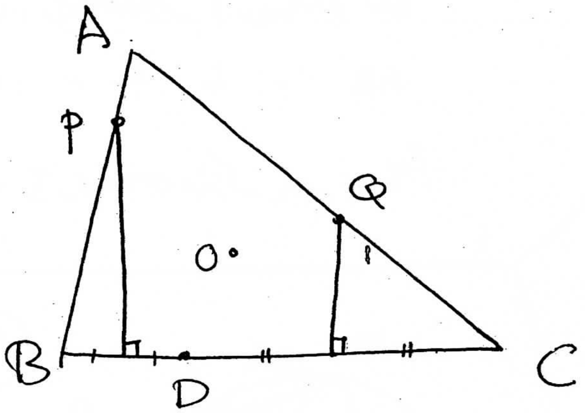
$H_a = H_{\overset{\triangle}{DBC}} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{H_aH_bH_c}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}}$

۷۸



$\Rightarrow H_{\overset{\triangle}{A'B'C'}} = O_{\overset{\triangle}{ABC}}$

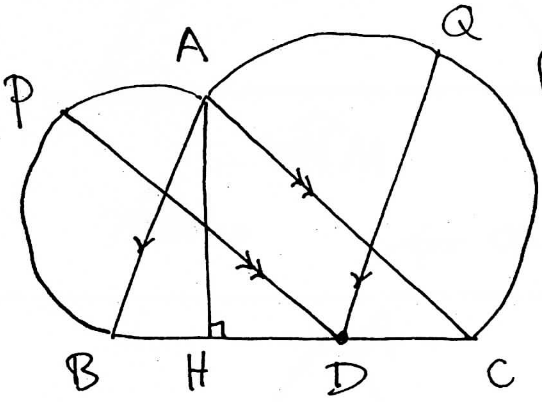
۷۹



دلخواه

$\Rightarrow$ APOQ محاطی

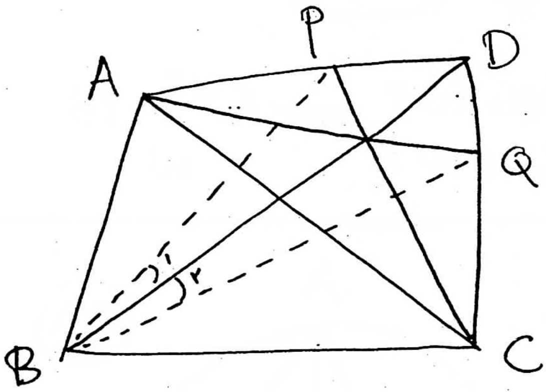
۸۰



دلخواه

$\Rightarrow$ PQDH محاطی

۸۱

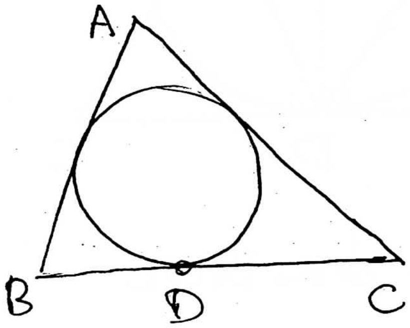


BD نیمساز $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_۲$

۸۲

n روستا داریم. چاه خوب چاهی است که مجموع فاصله آن تا همه روستاها min شود. ثابت کنید حداکثر ۱ چاه خوب داریم.

۸۳

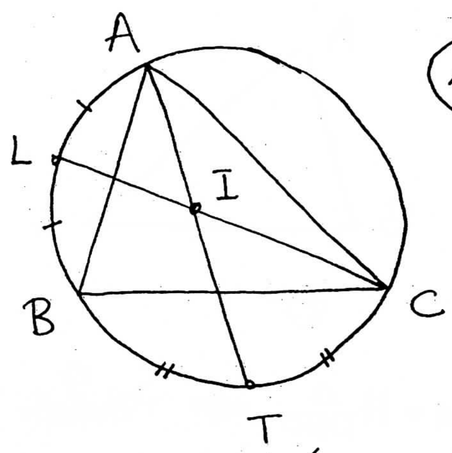


$OI \parallel BC$

$\Leftrightarrow HD \parallel OA$

$\Leftrightarrow \cos B + \cos C = 1$

۱۴

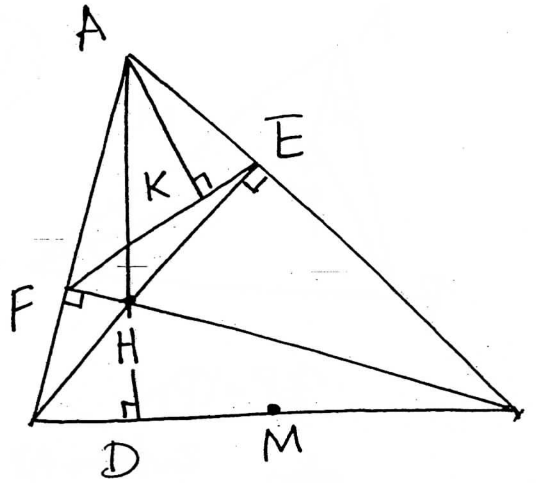


ω_1 : دایره به مرکز T و مماس بر BC

ω_2 : « L « « AB

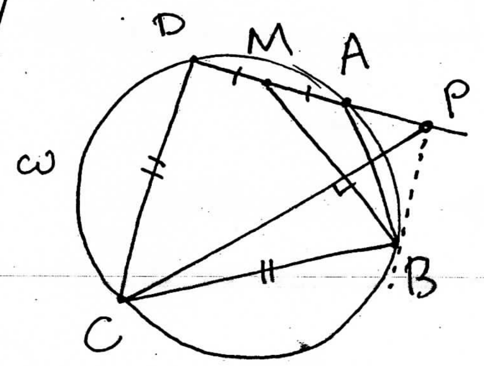
$\Leftarrow$ I روی مماس مشترک ω_1 و ω_2 است.

۱۵



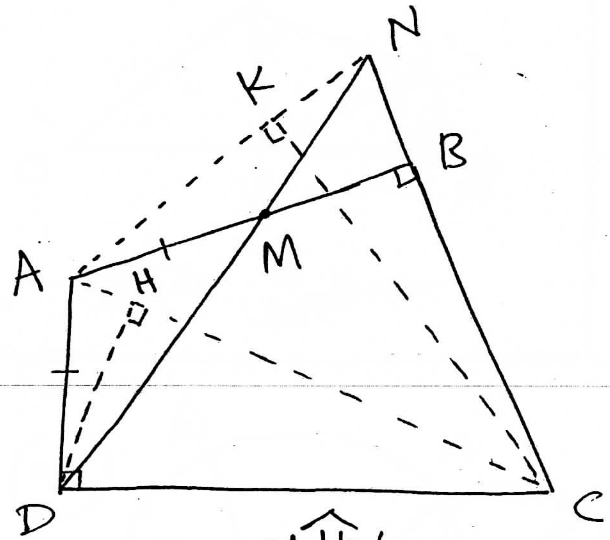
$\Rightarrow \widehat{MHA} = \widehat{DKA}$

۱۶



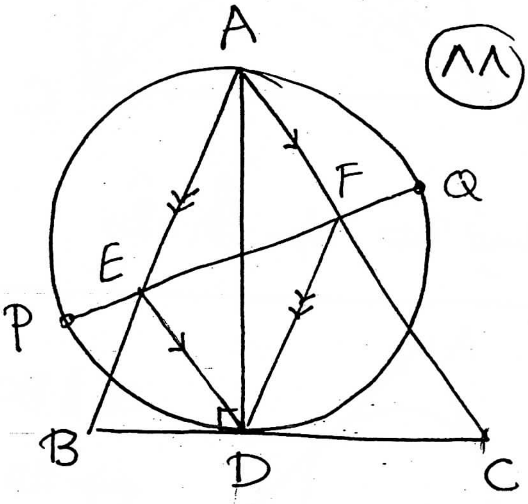
$\left.\begin{matrix} AB = AD \\ CB = CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ PB مماس بر ω

۱۷



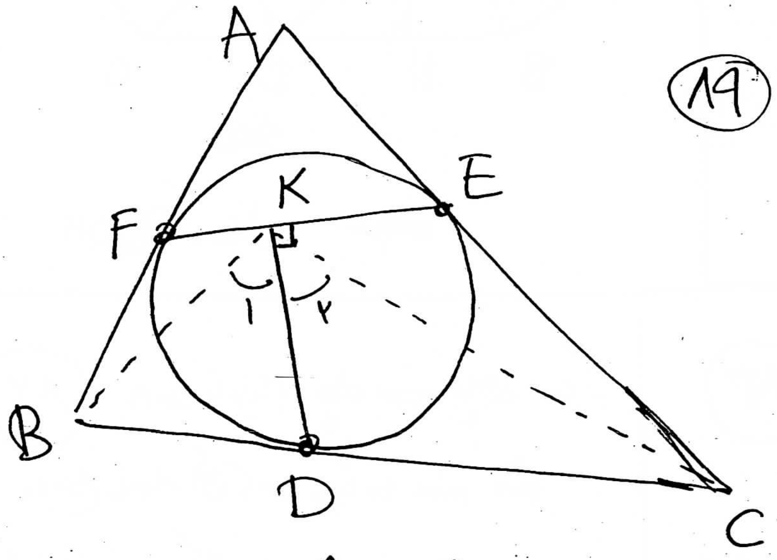
$AM = AD \Rightarrow \widehat{MHN} = \widehat{MCK}$

۱۸



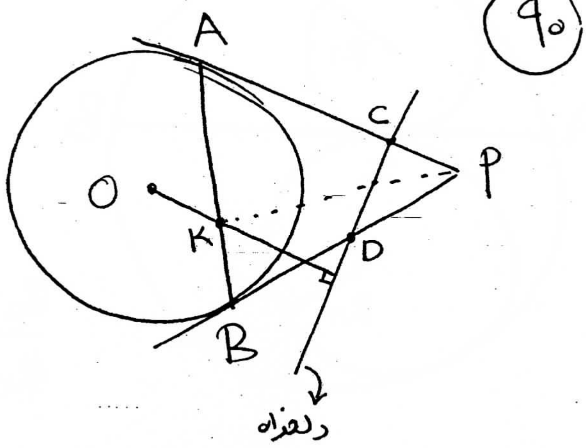
$\Rightarrow$ BPQC محاطی

۱۹



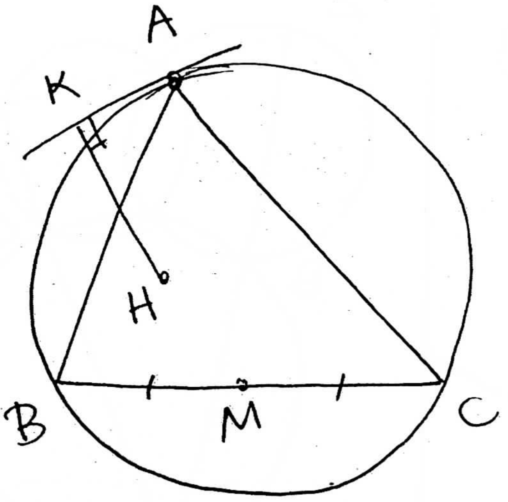
$\Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{K_2}$

۹۰



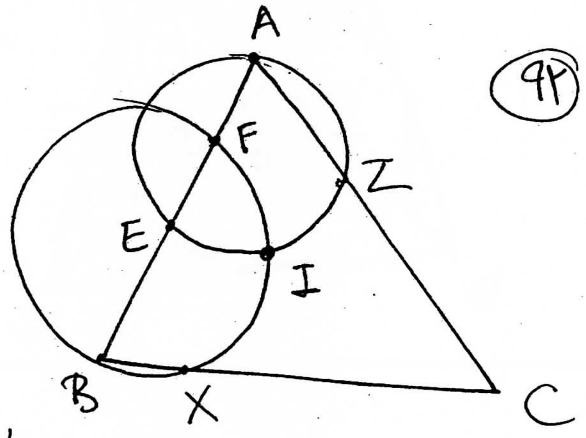
⇐ PK از وسط CD می‌گذرد.

۹۱



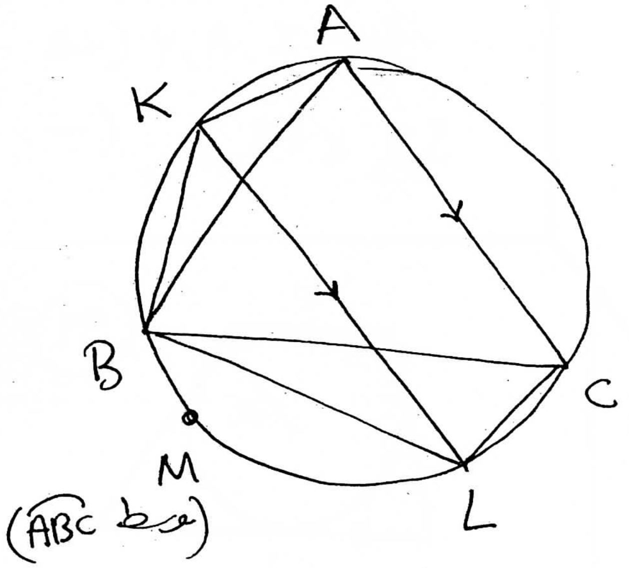
$\Rightarrow MK = MA$

۹۲



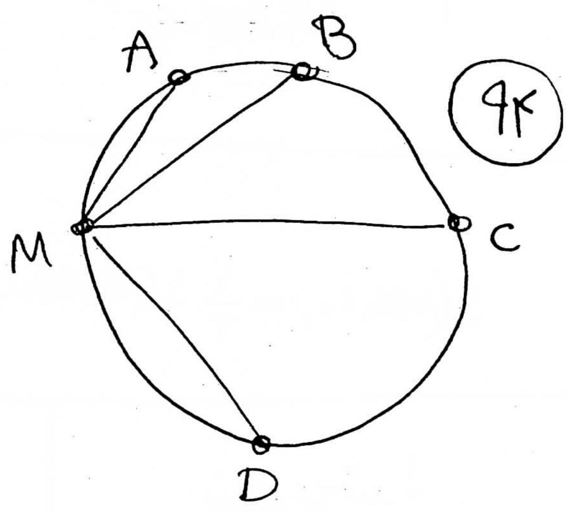
I مرکز محاطی $\Rightarrow AZ + BX + EF = AB$

۹۳



$$\left.\begin{array}{l} I_1 = I_{B\hat{A}K} \\ I_2 = I_{B\hat{C}L} \end{array}\right\} \Rightarrow MI_1 = MI_2$$

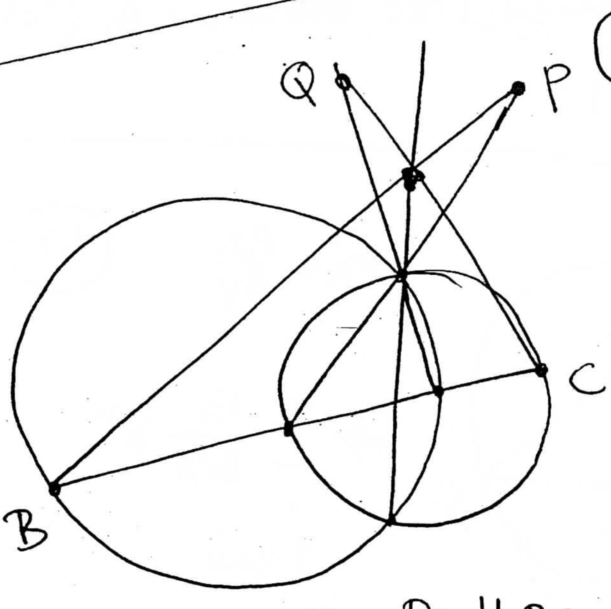
۹۴



A، B، C، D مفروضند.

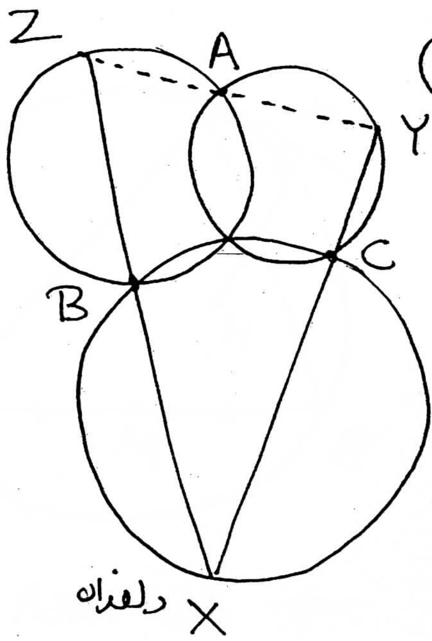
ثابت کنید ۲ نقطه M با خاصیت $\frac{MA}{MB} = \frac{MD}{MC}$ روی دایره وجود دارد که تشکیل یک چهارضلعی عمود قطر می‌دهند.

۹۵



$\Rightarrow PQ \parallel BC$

۹۶

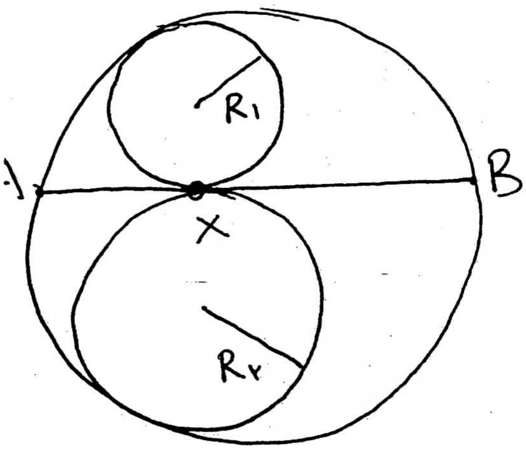


X دلخواه

الف) Y, A, Z هم‌خط

ب) $S_{\triangle XYZ} \leq 4 S_{\triangle O_1O_2O_3}$

۹۷



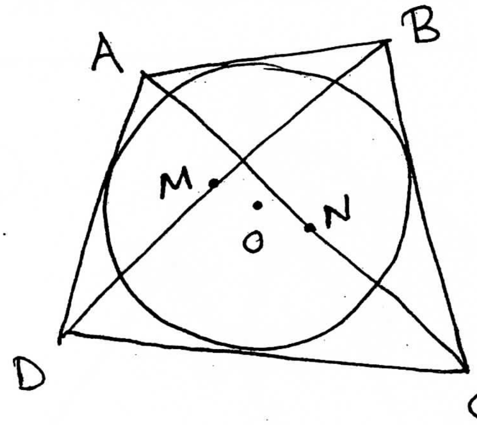
AB ثابت

X دلخواه

$\Downarrow$

$\frac{R_1}{R_2} = cte$

۹۸



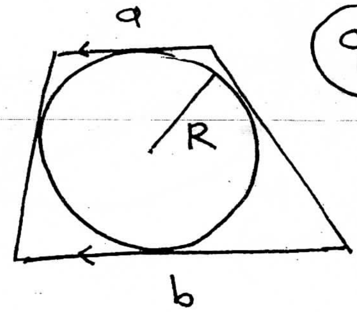
M, N اوساط اقطار

$\Downarrow$

O, N, M

هم‌خط

۹۹



$ab \geq 4R^2$

۱۰۰

AA': طول نیمساز A

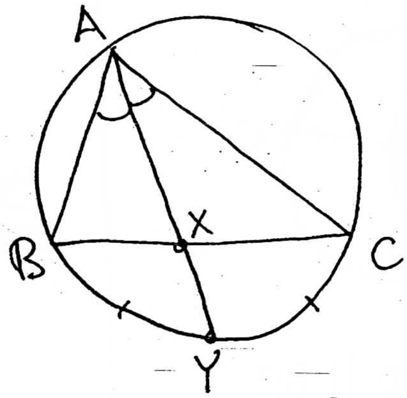
$$\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \leq \frac{8}{27}$$

۱۰۱

A_1: وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ از دایره محیطی.

$$S(A_1B_1C_1) = \frac{1}{2} S(AC_1BA_1CB_1) \geq S(ABC)$$

۱۰۲



$r_A = \frac{AX}{AY}$

$\Rightarrow \sum \frac{r_A}{\sin^2 A} \geq 3$

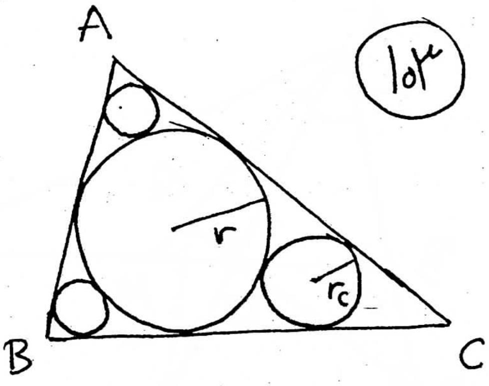
تساوی؟

خسته نباشید!

«میثم عقیقی»

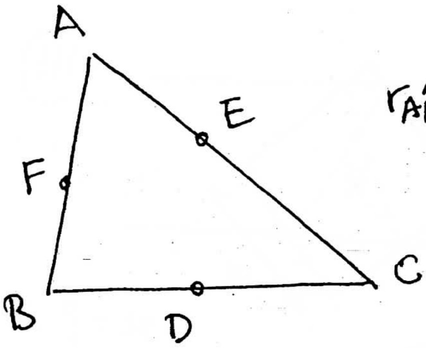
بهار ۱۳۹۱

۱۰۳



$\Rightarrow r_A + r_B + r_C \geq r$

۱۰۴



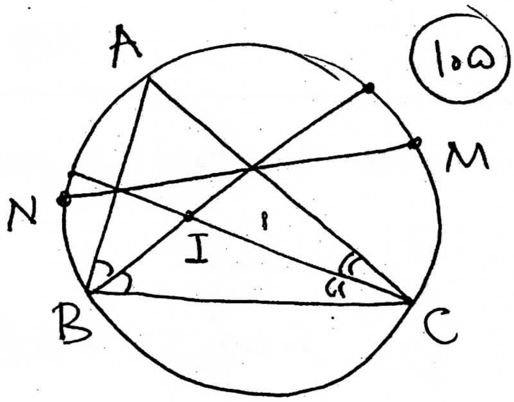
$r_{\triangle AEF} = r_{\triangle BFD} = r_{\triangle CDE} = \frac{r}{2}$

$\Downarrow$

F, E, D

اوساط اضلاعند!

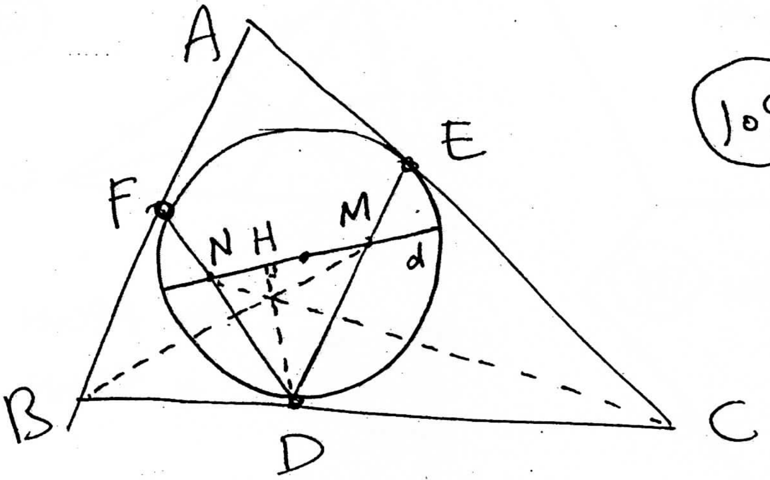
۱۰۵



الف) $\frac{1}{BN} = \frac{1}{AN} + \frac{1}{CN}$

ب) $R_{\triangle IMN} = 2R$

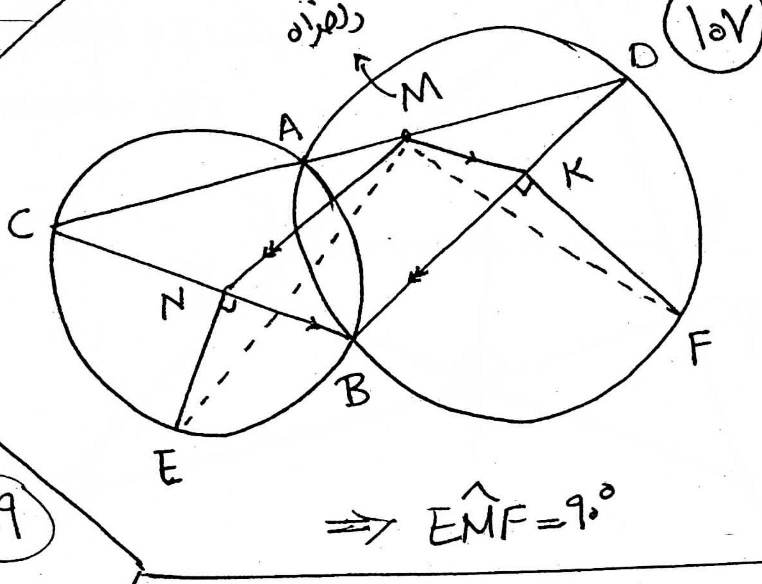
۱۰۶



d قطر دلخواهی از دایره محاطی ، ثابت کنید:

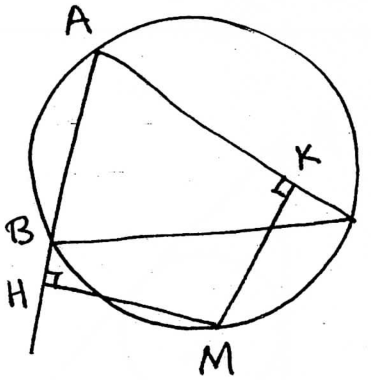
BM، CN و DH همرسند.

۱۰۷



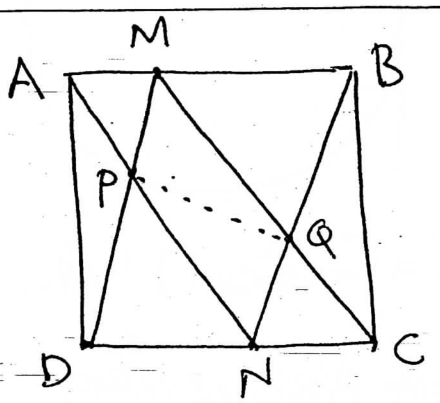
$\Rightarrow E\hat{M}F = 90^\circ$

۱۰۸



M کجای BC باشد تا MH+MK ماکزیمم شود؟

۱۰۹



ABCD مربع

$\Downarrow$

$PQ \geq \frac{AB}{2}$

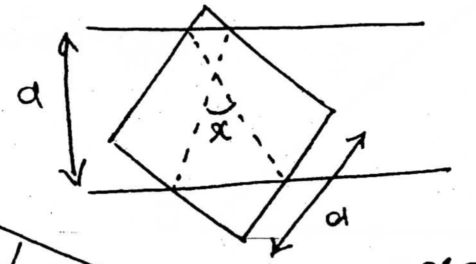
۱۱۰

ABC حاده الزاویه؛ ثابت کنید:

$S_{\triangle AOH} = S_{\triangle BOH} + S_{\triangle COH}$

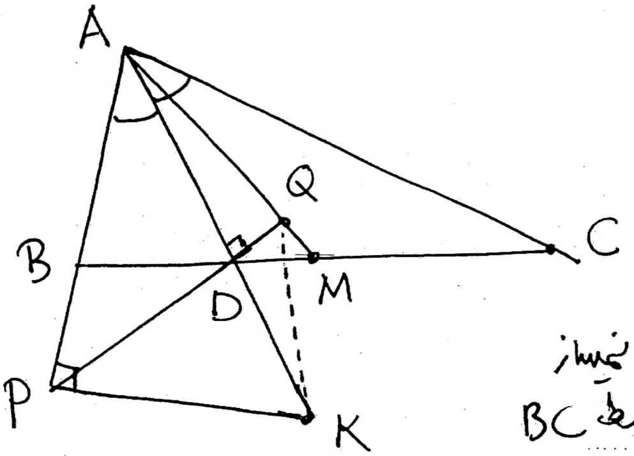
($S_{\triangle AOH} \geq S_{\triangle BOH} \geq S_{\triangle COH}$ با فرض)

۱۱۱



$x = ?$

۱۱۲



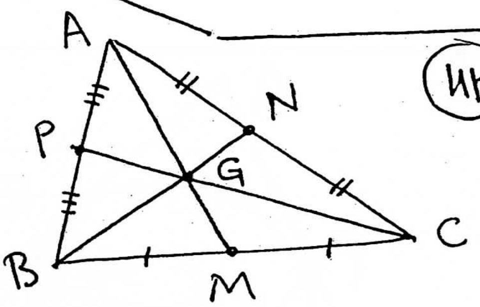
AD نیمساز

M وسط BC

$\Downarrow$

$KQ \perp BC$

۱۱۳



APGN محاطی

BPGM 〃

$\Rightarrow$ ABC متساوی الاضلاع

۱۱۴ نقطه O درون چندضلعی $\mathcal{F}$ (نه لزوماً محدب) مفروضند.

$P =$ محیط $\mathcal{F}$

$D =$ مجموع فواصل O از رئوس $\mathcal{F}$

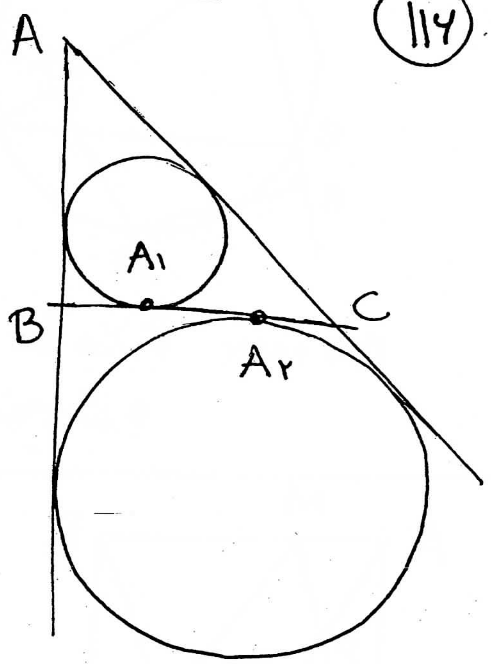
$H =$ 〃 اضلاع 〃 〃 〃

$$\Rightarrow D^2 - H^2 \geq P^2/4$$

۱۱۵ ω_B و ω_C قرینه‌های دوایر محاطی خارجی نظیر C, B نسبت به وسط‌های AB, AC هستند

$\Leftarrow$ محور اصلی این دو دایره محیط مثلث را نصف می‌کند.

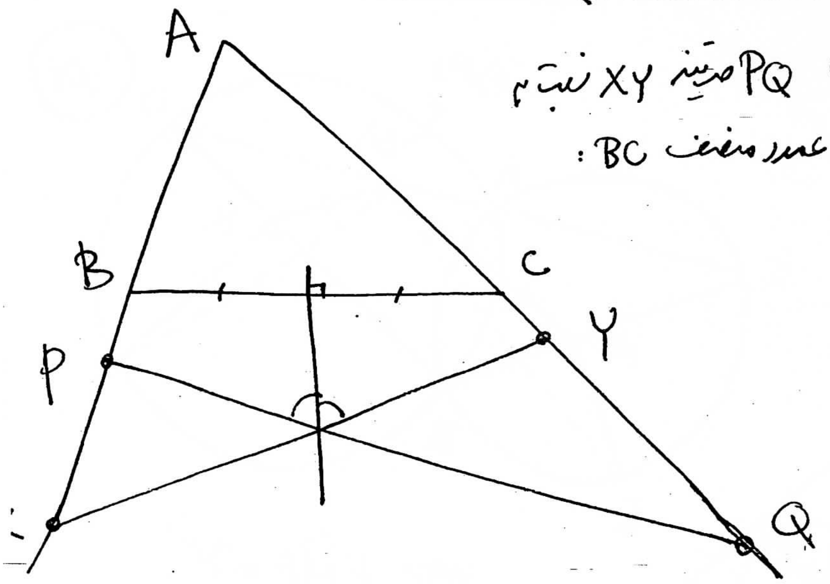
۱۱۶



$$A' = C_{\triangle AB_2C_2} \cap C_{\triangle ABC}$$

$$\Rightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle A_1B_1C_1$$

۱۱۷ PQ قرینه XY نسبت به عمود منصف BC:

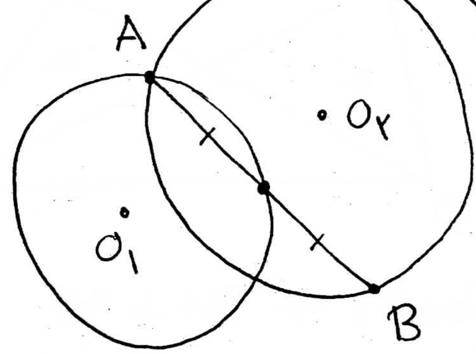


$$BP + CQ = PQ$$

$$\Updownarrow$$

$$BX + CY = XY$$

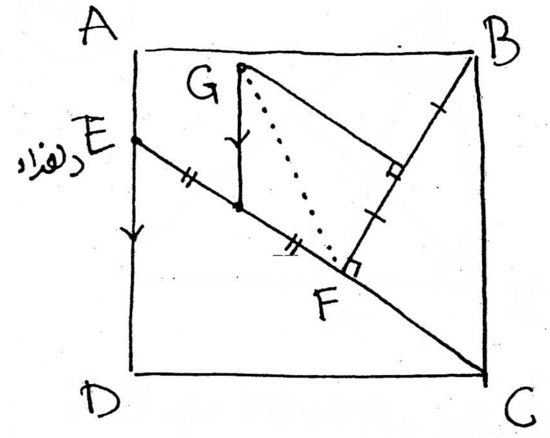
۱۱۸



$R_1=1,\ R_2=\sqrt{2},\ O_1O_2=2$

$\Rightarrow AB=?$

۱۱۹



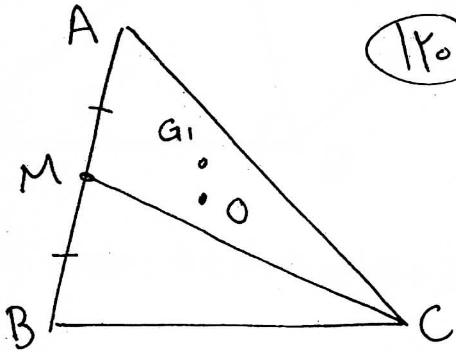
مربع $ABCD \Rightarrow AC < 2FG$

۱۲۰

$G_1 = G_{\triangle AMC}$

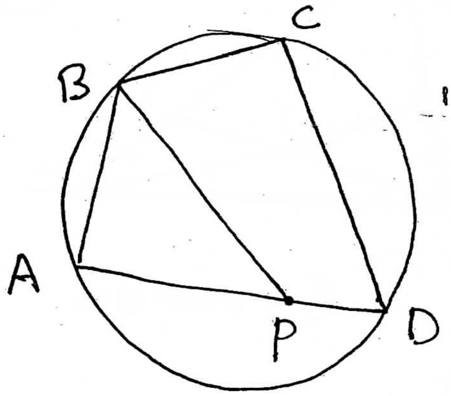
$O = O_{\triangle ABC}$

ثابت کنید:



$G_1O \perp CM \iff AB = AC$

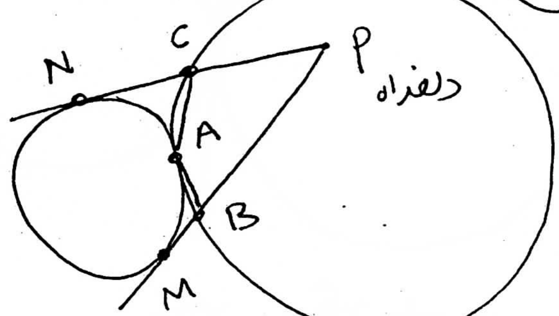
۱۲۱



BP محیط و مساحت را نصف می‌کند

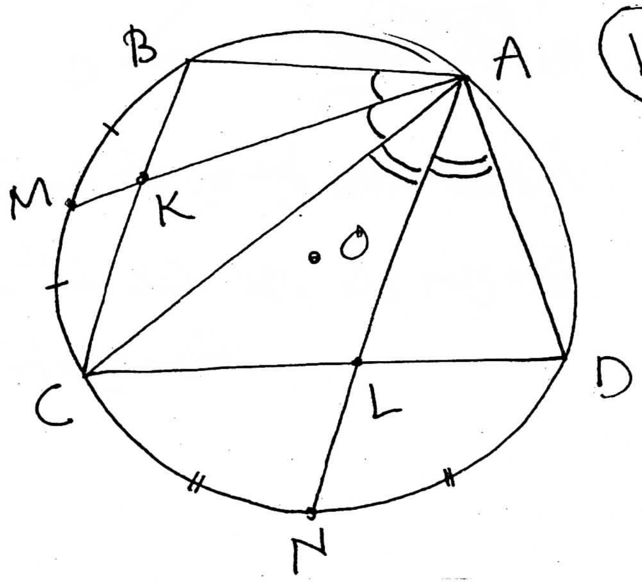
$\Leftarrow$ دو ضلع ABCD برابرند

۱۲۲



$\Rightarrow \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{AC}{CN}$

۱۲۳



$KL \parallel MN$

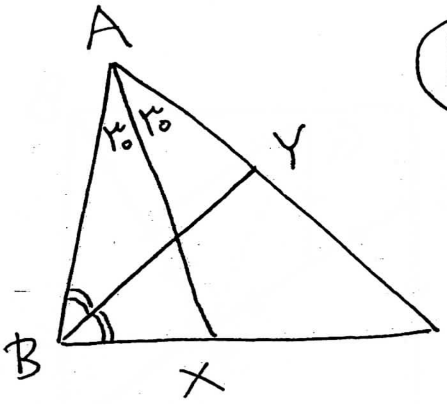
$\Leftarrow$ دایره محیطی $\triangle MON$ از وسط AC

می‌گذرد

۱۲۴ ثابت کنید کوچکترین نیمساز

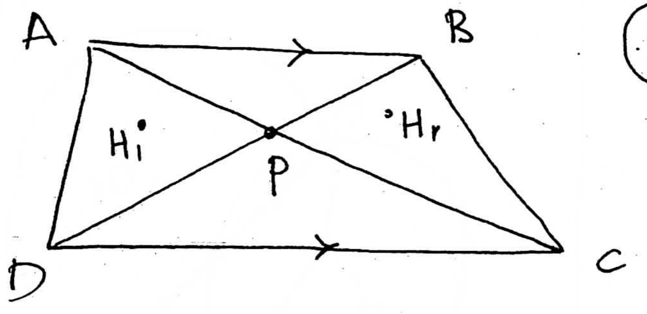
کمتر مساوی بزرگترین ارتفاع

۱۲۵



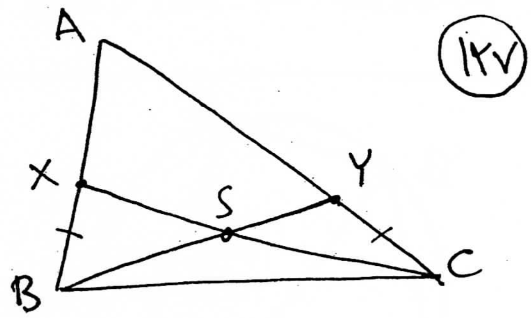
$AB+BX=AY+BY \Rightarrow \hat{B}=?$

۱۲۶



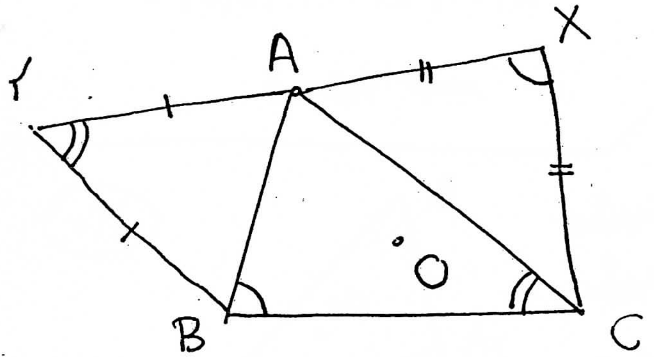
M وسط H_1H_2 $\Rightarrow PM \perp AB$

۱۲۷



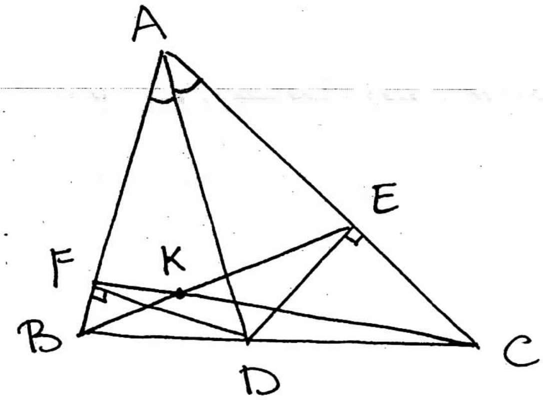
مکان هندسی S ؟

۱۲۸



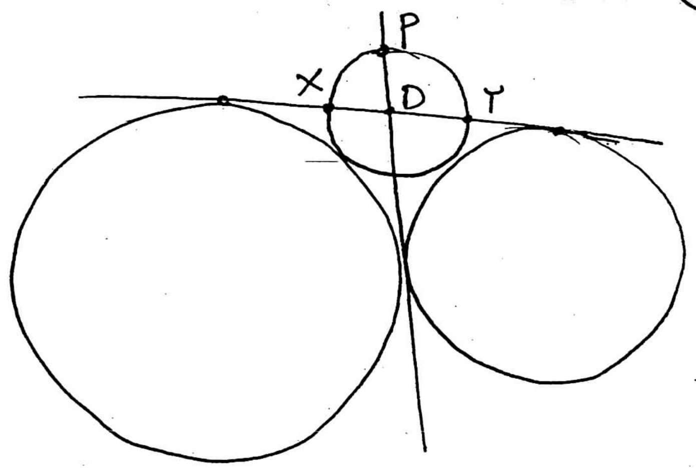
$OX+OY=a+b+c \iff \hat{A}=90^\circ$

۱۲۹



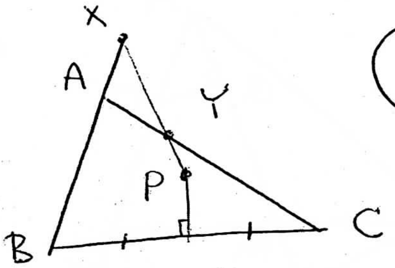
G محل تماس دایره محیطی AFK با BE می‌باشد.
ثابت کنید GE و BF و BG اضلاع مثلثی قائم‌الزاویه می‌باشند.

۱۳۰



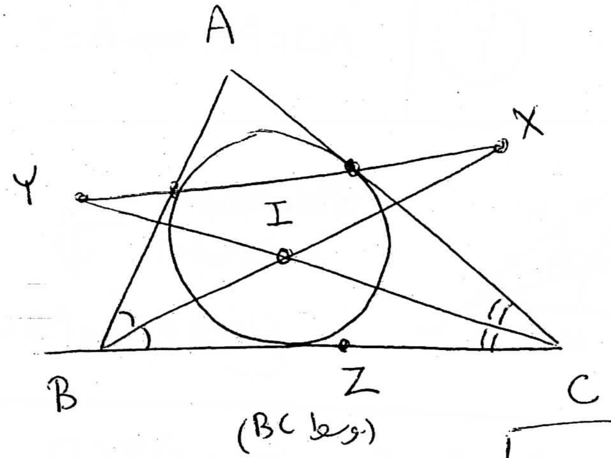
$\Rightarrow X\hat{P}D = Y\hat{P}D$

۱



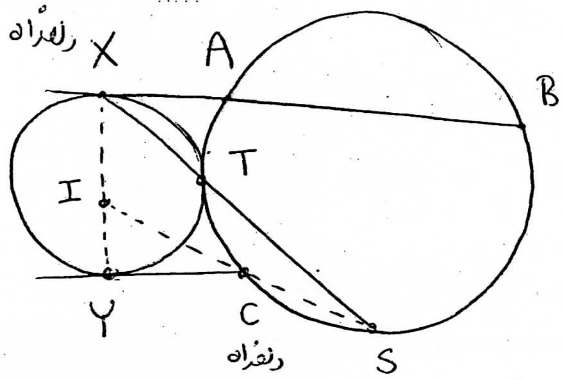
$BX = CA$
$CY = BA$
$\Downarrow$
$B\hat{P}C + \hat{A} = 180^\circ$

۲



XYZ متساوی الاضلاع $\Longleftrightarrow$ $\hat{A} = 60^\circ$

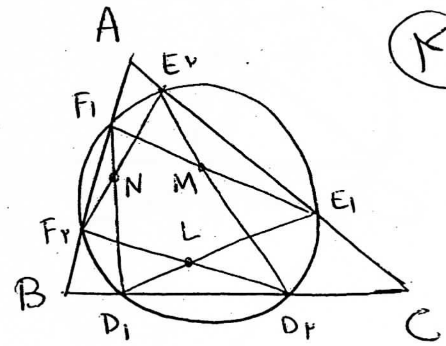
۳



الف) CTIY محاطی

ب) I مرکز دایره محاطی خارجی $\overset{\Delta}{ABC}$

۴

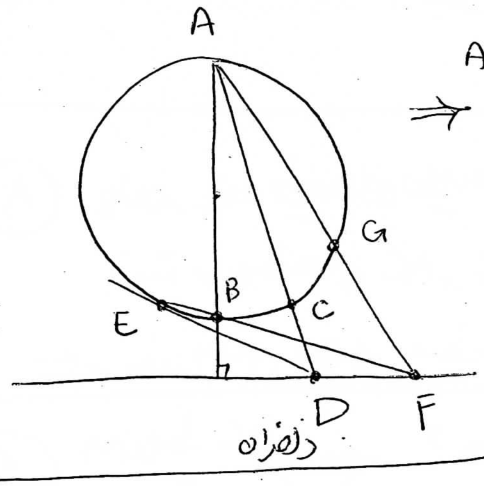


AL، BM، CN همرسند

۵

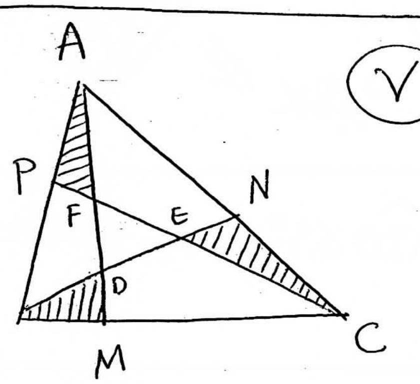
$BC = AC + \frac{1}{2}AB$, $P \in AB$, $AP = 3PB$ $\Rightarrow P\hat{A}C = 2C\hat{P}A$

۶



قرینه G نسبت به AB $\Rightarrow$ روی CF است.

۷



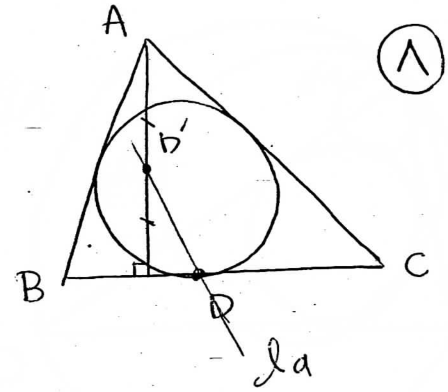
$\frac{BM}{BC} = \alpha$, $\frac{CN}{CA} = \beta$, $\frac{AP}{AB} = \gamma$

$\alpha + \beta + \gamma = 1$

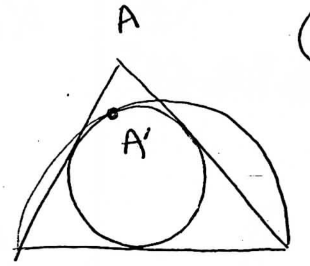
$\Updownarrow$

$S_{D\hat{E}F}$ = ماکسیمم گردد

۸

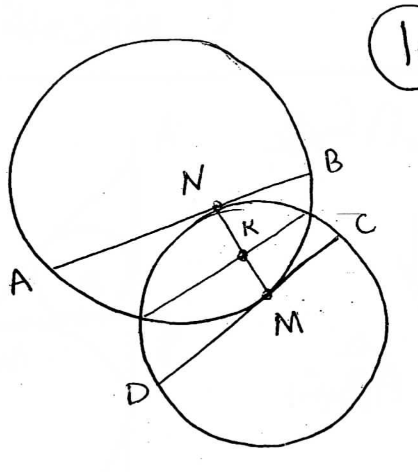


۹



$l_a \circ AA'$

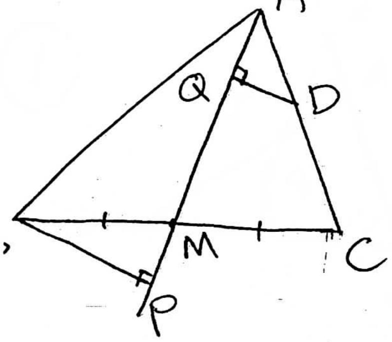
۱۰



$AD \parallel BC \Longleftrightarrow KN = KM$

۱) $AO=AH \Rightarrow \hat{A}=?$

۲)

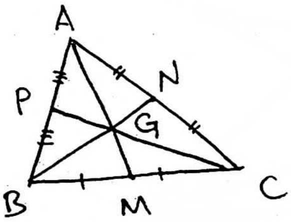


$BD=AD+AC$

$\Updownarrow$

$AM=PQ$

۳)



APGN محاطی
BPGM « $\Big\}\Rightarrow$

ABC متساوی الاضلاع

۴) ABCD محدب، $R_A=R_{\triangle BCD}$ و ...

ثابت کنید:

$R_A+R_C>R_B+R_D$

$\Updownarrow$

$\hat{A}+\hat{C}>\hat{B}+\hat{D}$

۵) در صفحه نقطه O و چند ضلعی F (نه لزوماً محدب) مفروضند.

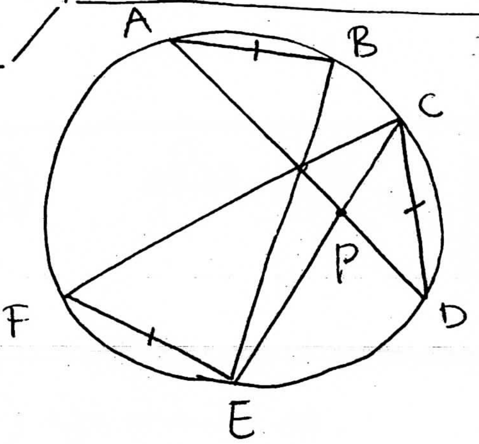
$P=$ محیط F

$D=$ مجموع فواصل O از رئوس F

$H=$ « « « اضلاع «

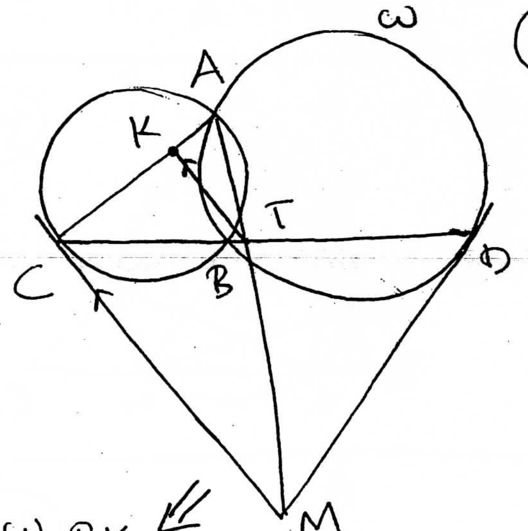
$\Rightarrow D^2-H^2\geq P^2/4$

۶)



$\frac{PC}{PE}=\left(\frac{AC}{CE}\right)^2$

۷)



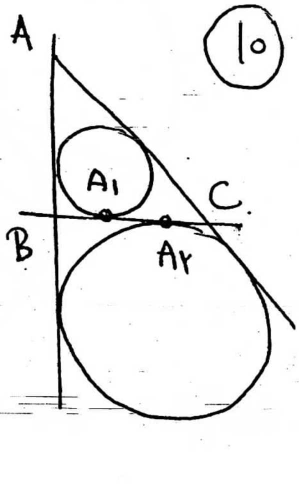
$\Leftarrow$ BK بر ω مماس

۸) ω_B و ω_C قرینه‌های دوایر مماس خارجی نظیر B و C نسبت به وسط‌های AC و AB هستند.

$\Leftarrow$ محور اصلی این دو محیط را نصف می‌کند

۹) $\left\{\begin{array}{l} M \text{ وسط } BC \\ M\hat{A}C=15^\circ \end{array}\right. \Rightarrow \max\{\hat{B}\}=?$

۱۰)



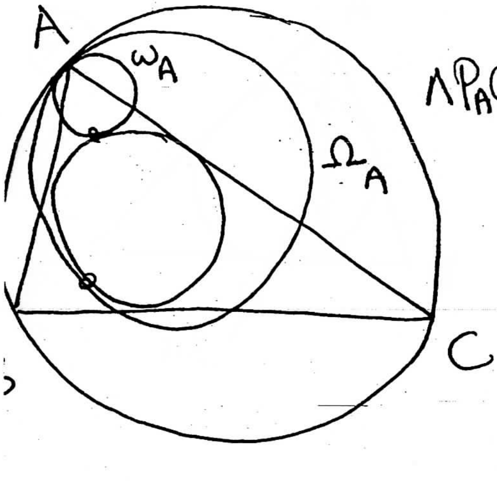
$A'=C_{\triangle AB_2C_2}\cap C_{\triangle ABC}$

$\Downarrow$

$\triangle A'B'C' \sim \triangle A_1B_1C_1$

۱۱) $A\hat{I}O\leq 90^\circ \Longleftrightarrow 2a\leq b+c$

۱۲)



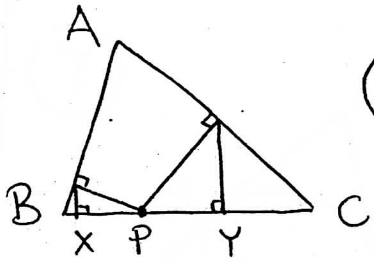
$8P_AQ_A\cdot P_BQ_B\cdot P_CQ_C\leq R^3$

$\Uparrow$

$P_A=$ مرکز ω_A

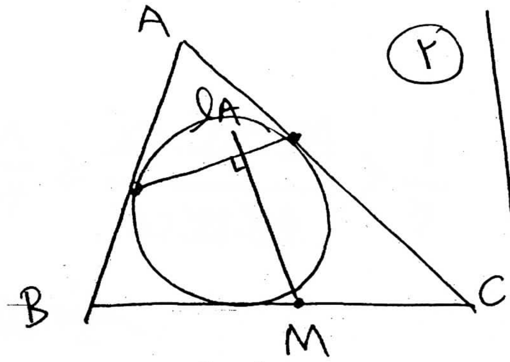
$Q_A=$ مرکز Ω_A

۱



$AP \geq XY$

۲



وسط BC

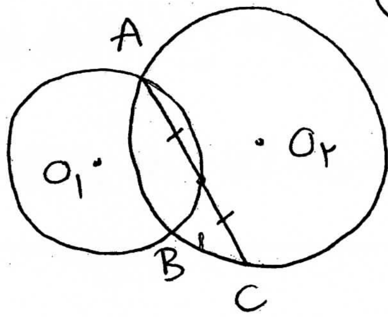
۳

OH و AB داده شده‌اند

می‌دانیم $OH \parallel AB$ ، مثلث را رسم

کنید.

۴



$R_1=1, R_2=\sqrt{2}$

$O_1O_2=2$

$\Rightarrow AC=?$

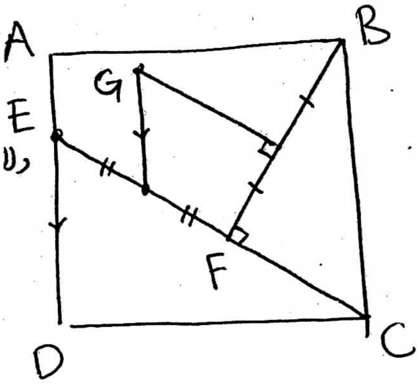
۵

ABCD

مربع

$\Downarrow$

$AC<2FG$

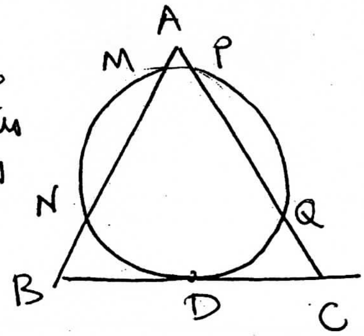


۶

ABC

متساوی‌الاضلاع

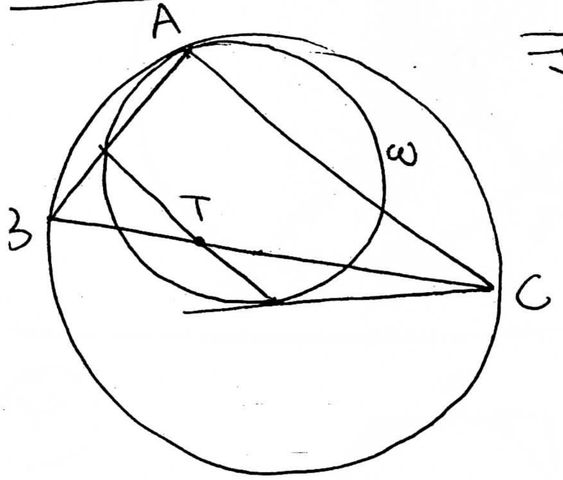
$\Rightarrow$



$BD+AM+AN=$

$CD+AP+AQ$

۷



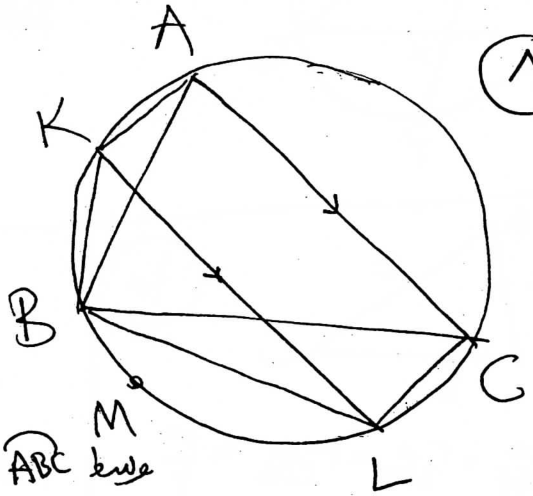
$\Rightarrow$

BT = طول مماس

رسم از B

بر ω

۸



M وسط $\widehat{ABC}$

$MI_1=MI_2 \Longleftarrow \begin{cases} I_1=I_{\hat{BAK}} \\ I_2=I_{\hat{BCL}} \end{cases}$

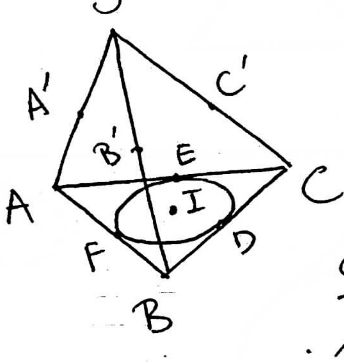
۹

SABC چهاروجهی

$AA'=AE$

$BB'=BD$

$CC'=CE$



S' روبه‌روی قطری S در کره محیطی SABC

اگر SI ارتفاع چهاروجهی باشد ثابت کنید:

$S'A'=S'B'=S'C'$

۱

$BH = OI$

$\hat{A} = ۶۰^\circ$

$\Downarrow$

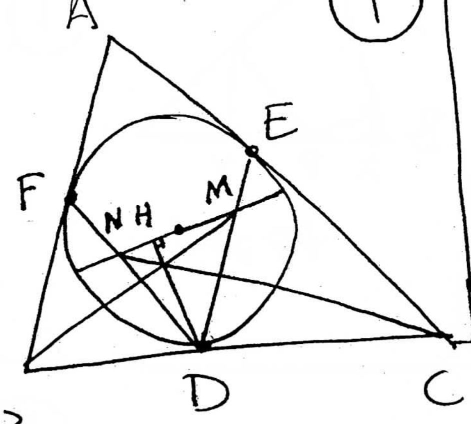
$\hat{B}, \hat{C} = ?$

۲

$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}$

AA' : طول نیمساز

۳



قطر دلخواه از دایره محاطی

$\Downarrow$

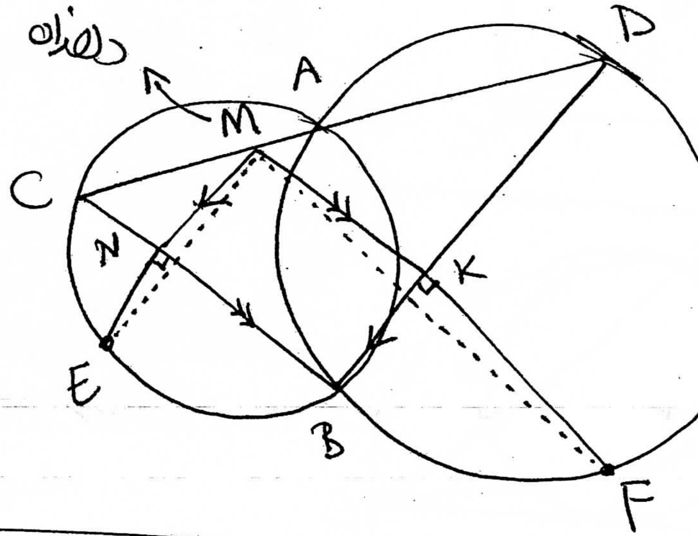
DH , NC , MB همرسند.

۴

$S(A_1B_1C_1) = \frac{1}{2} S(AC_1BA_1CB_1) \geq S(ABC)$

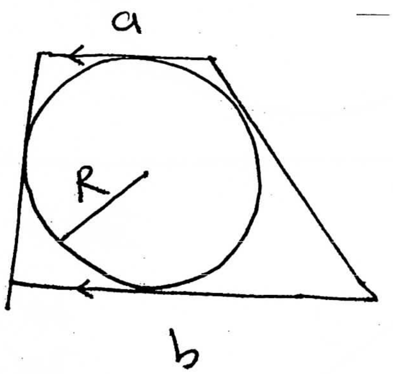
A_1 : وسط کمان BC از دایره محیطی

۵



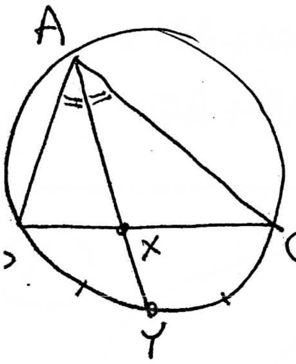
$\hat{EMF} = ۹۰^\circ \Leftarrow$

۶



$ab \geq ۴R^2$

۷

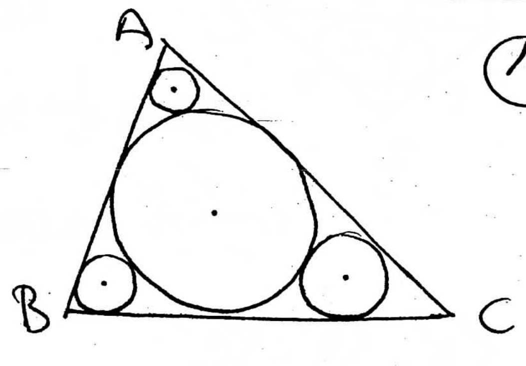


$r_A = \frac{AX}{AY}$

$\Rightarrow \sum \frac{r_A}{\sin^2 A} \geq ۳$

تساوی؟

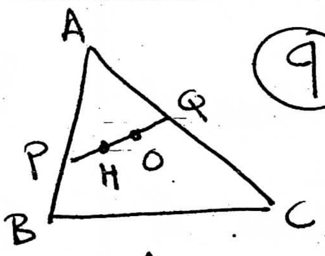
۸



$\Rightarrow r_A + r_B + r_C \geq r$

تساوی؟

۹

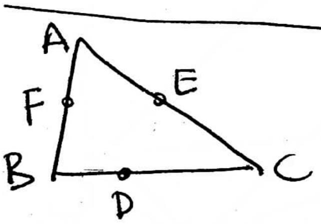


$\hat{A} = ۹۰^\circ$

$\Updownarrow$

$PO = HQ$

۱۰

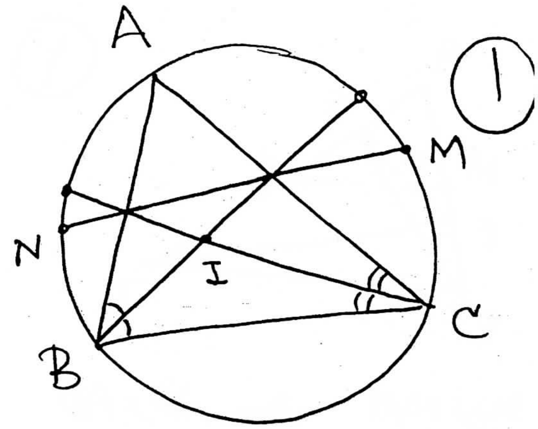


$r_{AEF}^{\triangle} = r_{BFD}^{\triangle} = r_{CDE}^{\triangle} = \frac{r}{2}$

$\Downarrow$

F, E, D اوساط اضلاع‌اند!

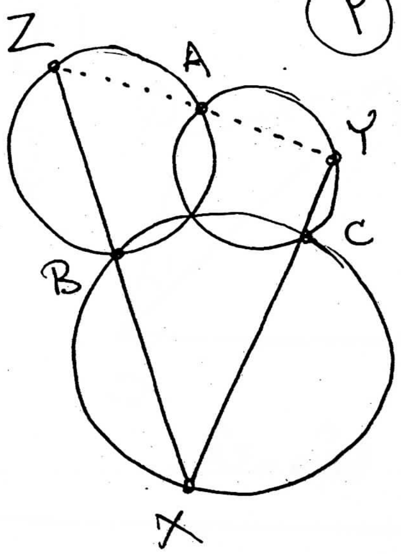
۱



الف) $\frac{1}{BN} = \frac{1}{AN} + \frac{1}{CN}$

ب) $R_{\overset{\triangle}{IMN}} = 2R$

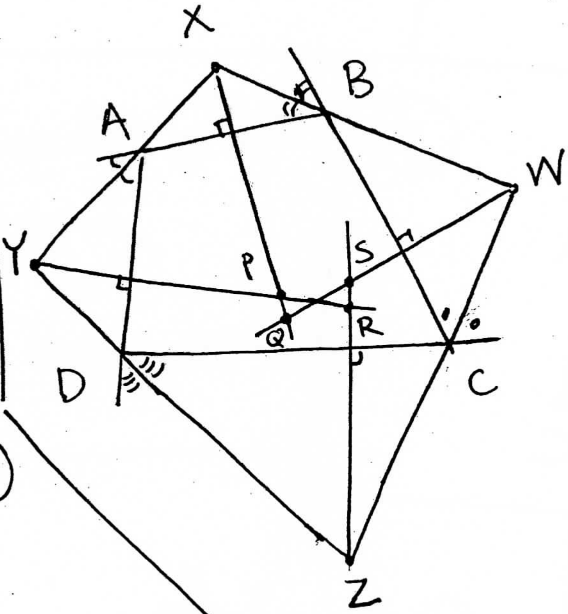
۲



الف) X درحرکت $\Leftarrow$ Z, Y, B هم خطند

ب) $S_{\overset{\triangle}{XYZ}} \leqslant 4 S_{\overset{\triangle}{O_1 O_2 O_3}}$

۳



الف) XYZW محاطی

ب) PQRS محیطی

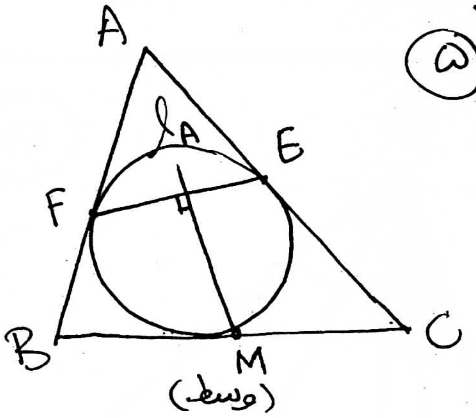
ج)

$I_{PQRS} \triangleq O_{XYZW}$

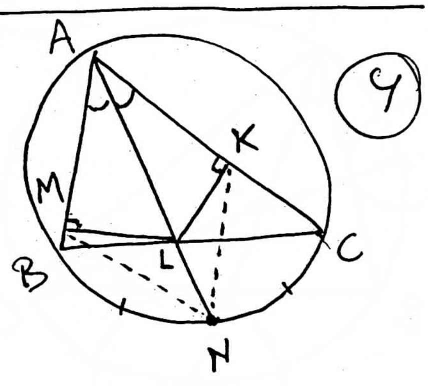
۴

$\sum \sin^2 A = 2 + 2\prod \cos A < \frac{5}{2}$

۵

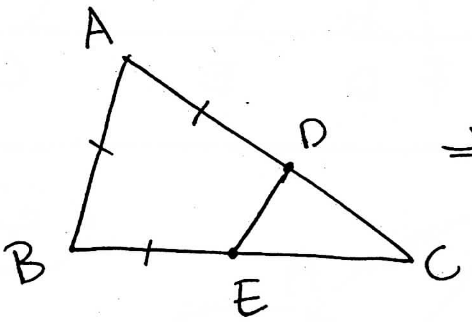


۶



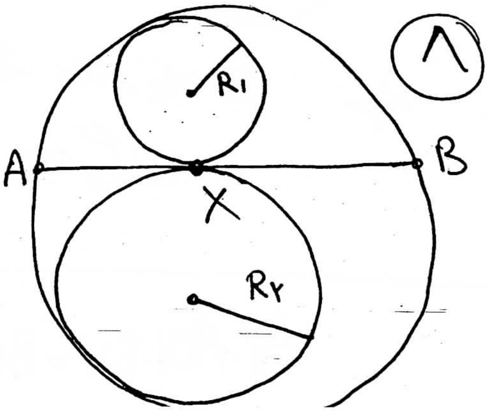
$S_{AKNM} = S_{ABC}$

۷



$\Rightarrow DE \perp OI$

۸

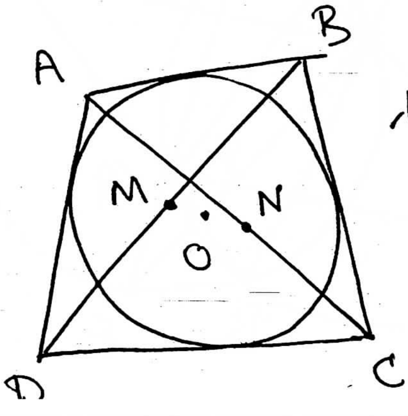


X درحرکت

$\Downarrow$

$\frac{R_1}{R_2} = cte$

۹



M, N اوساط اقطار

$\Downarrow$

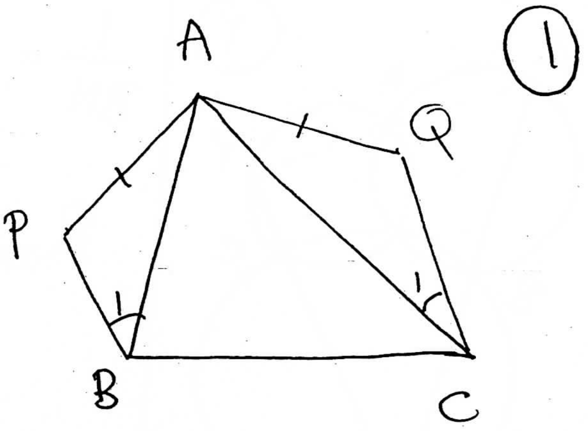
O, N, M هم خطند

۱

PQ از $H_{\overset{\triangle}{ABC}}$

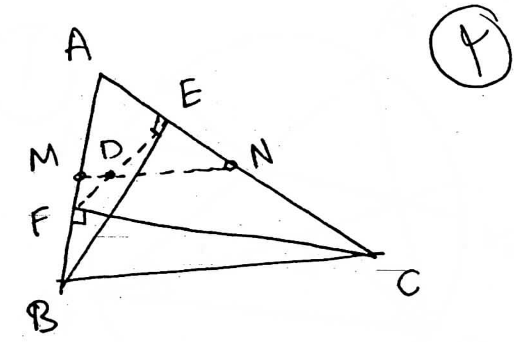
$\Updownarrow$

$\hat{B}_1+\hat{C}_1=180^\circ$



$P\hat{A}Q = 2\hat{A}$.

۲



M,N اوساط اضلاع $\Longrightarrow$ AD بر خط اوساط عمود است.

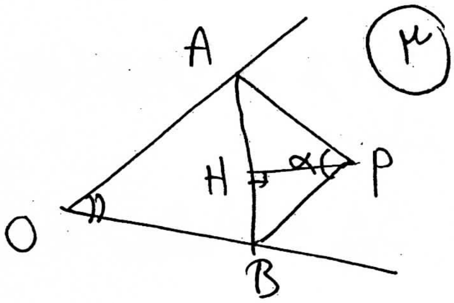
۳

زاویه $\hat{O}$ ، P ، α ثابت

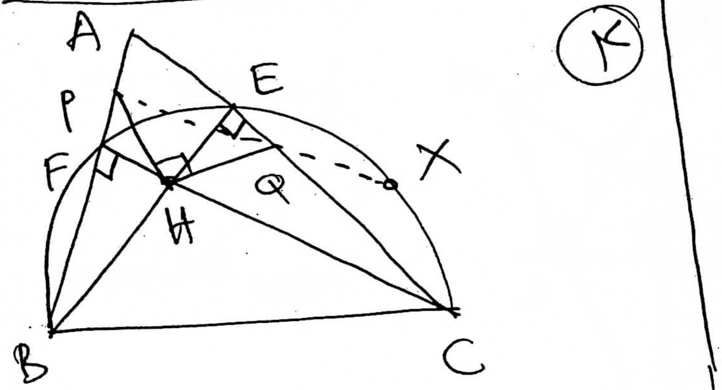
A,B متغیر

$\Downarrow$

مکان هندسی H ؟



۴



$\Longrightarrow CX \parallel HP$

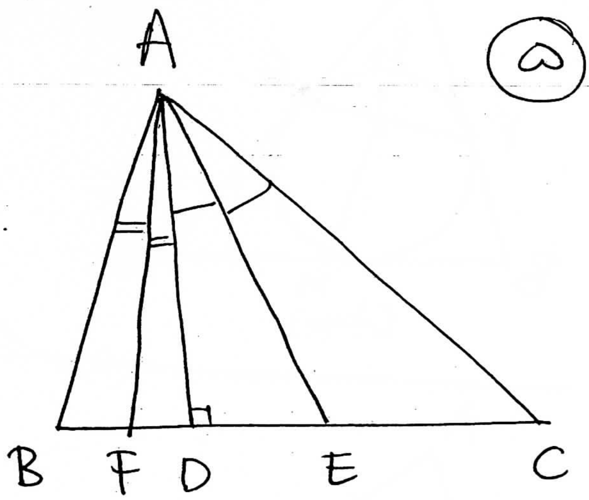
(مسئله قبل! در راهنمایی)

۵

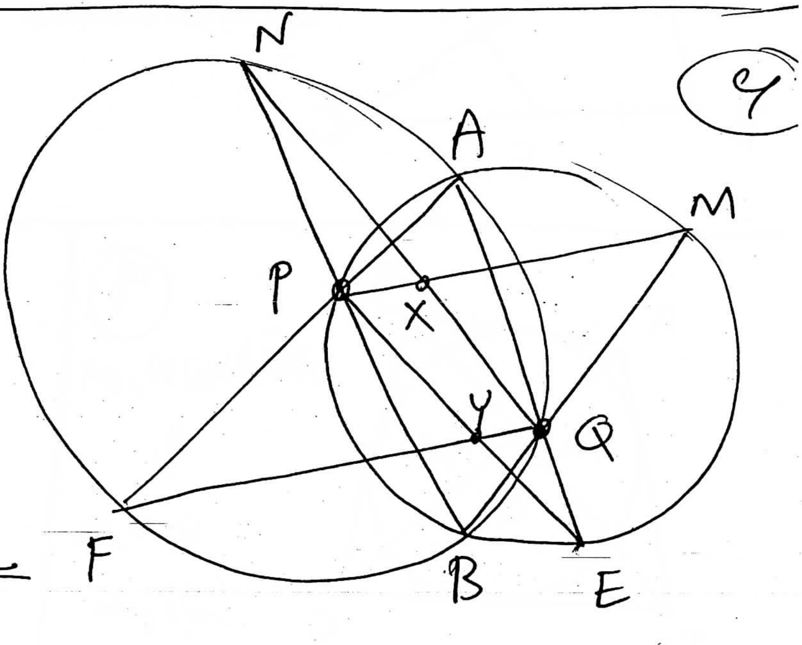
$O_{\overset{\triangle}{AEF}} = I_{\overset{\triangle}{ABC}}$

$\Downarrow$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BE.CF$

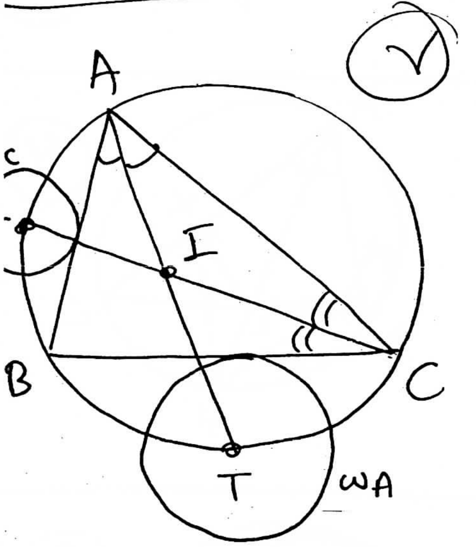


۶



$AP.AQ.BY = BP.BQ.AX \Longleftarrow$

۷



$\Longrightarrow$ مماس مشترک ω_C ، ω_A از I می‌گذرد

شماره	نام و نام خانوادگی	نام دبیرستان	شهر ۱۳۸۸-۸۹
۱	حسام‌الدین رجب‌زاده	شهید دستغیب	شیراز
۲	مجتبی یراق	شهید صدوقی	یزد
۳	مرتضی اشرفی‌جو	انرژی اتمی	تهران
۴	سینا رضایی‌زارعی	شهید بهشتی	اهواز
۵	امیرحسین ضابطی	انرژی اتمی	تهران
۶	روح‌الله حکام	شهید بهشتی	مراغه
۷	سعید طیبی	شهید اژه‌ای	اصفهان
۸	سینا جلالی	علامه حلی تهران	تهران
۹	میلاد برزگر	شهید مدنی	تبریز
۱۰	جواد عابدی قزل‌آباد	علامه حلی	تهران
۱۱	حسام‌الدین محمدی	علامه حلی	اراک
۱۲	فاطمه نویدی	فرزانگان	تهران
۱۳	مسعود شفاهی ابر	شهید بهشتی	شهرری

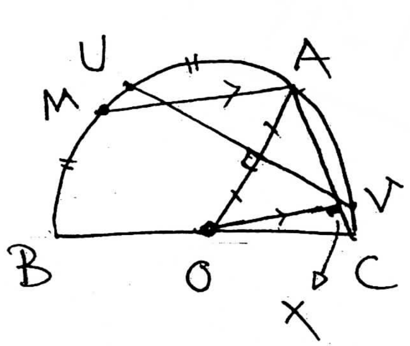
	نام و نام خانوادگی	سال تحصیلی (پایه)	مدرسه
۱	پارسیا شاهینی	پیش	انرژی اتمی
۲	مینا دلمرودی فرد	سوم	فرزانگان
۳	عرفان توکل	پیش	شهید بهشتی آمل
۴	مجتبی تقاق	پیش	شهید صدوقی ~~[illegible]~~ یزد
۵	محمد پیرام‌فر		میرزا کوچک خان رشت
۶	مجتبی شکریان	پیش	شهید اژه‌ای اصفهان
۷	سهند سیف	پیش	انرژی اتمی
۸	سعید مسعودیان	پیش	انرژی اتمی
۹	محمدامین نجات‌بخش	پیش	علامه طباطبایی
۱۰	آرتینا اسپید پدونف	~~[illegible]~~ سوم	علامه طباطبایی
۱۱	پدرام صفایی	سوم	علامه حلی شهریار
۱۲-	علیرضا فلاح	سوم	علامه حلی تهران
۱۳-	رویا هنریار	سوم	علامه حلی تهران

۱۳۸۹-۹۰

۱۳۹۱-۹۲

ردیف	نام و نام خانوادگی	نام دبیرستان
۱	نیما ترکمان	فرزانگان ۱
۲	الکس پدروزیا	علامه طباطبایی
۳	سیدمحمدحسین سیدصالحی	علامه حلی ۴
۴	عارف صادقی	شهید سلطانی کرج
۵-	سیدعلی رضا توکلی	شهید دستغیب شیراز
۶-	مبین یحیی زاده	شهید بهشتی بابل
۷-	هادی خداشده	میرزا کوچک خان رشت
۸-	محمدامین آتابکی	علامه حلی ۳
۹-	جلال احمدی	علامه حلی ۱
۱۰-	پاهان تجربه‌کار	سلام ایران زمین
۱۱-	محمدجواد شفیعی زهرایی	سلام هدف
۱۲-	محمدجواد بافرونی	انرژی اتمی
۱۳-	حسین حضرتی	علامه طباطبایی

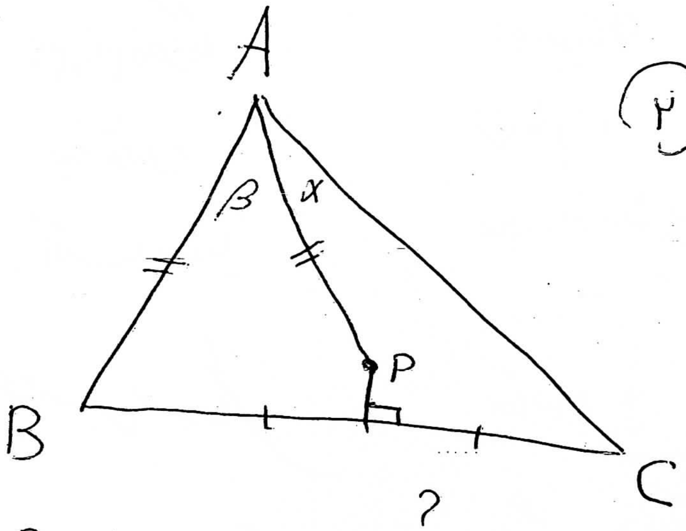
(۱)



(تقاطع با CA)

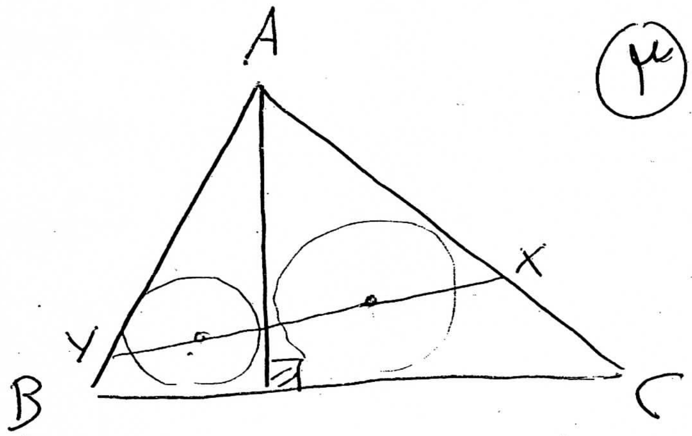
$X = I_{\hat{\triangle} CUV} \Leftarrow$

(۲)



$B = 2C \rightsquigarrow \beta \overset{?}{=} 2\alpha$

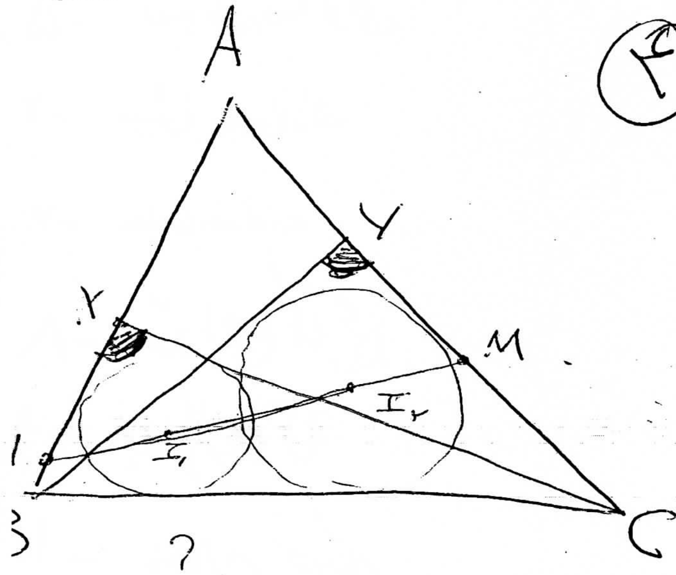
(۳)



ثابت کنید $AX=AY$ اگر و تنها اگر

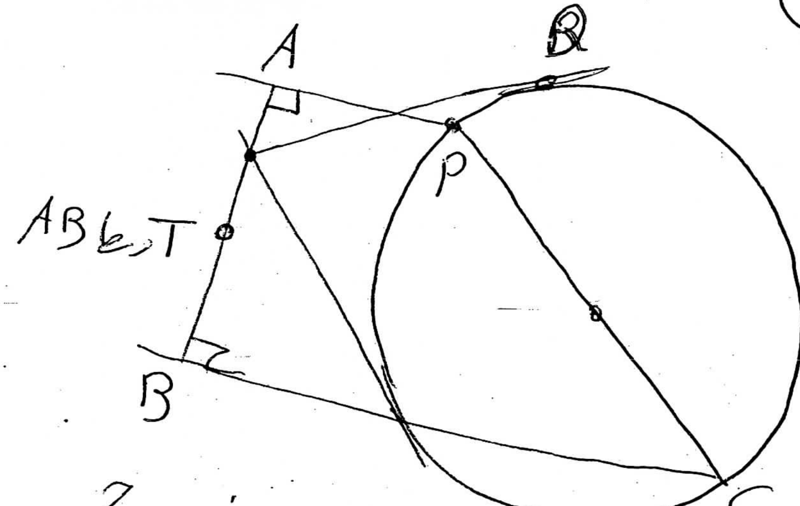
$A=90$ یا $AB=AC$

(۴)



$AM \overset{?}{=} AN \iff BXYC$ محاطی باشد

(۵)



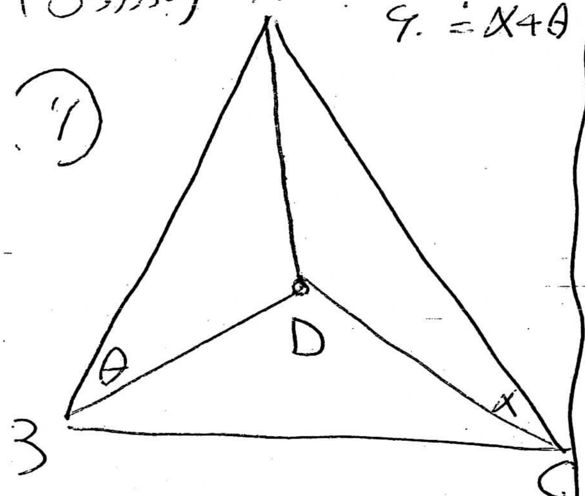
T وسط AB

Q، P و T همخط اند؟

(۶)

(با دو روش!)

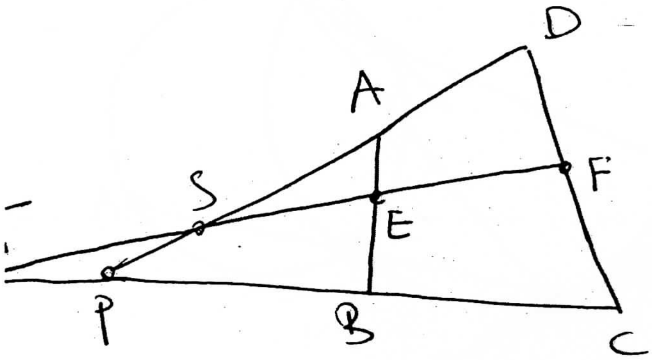
$90 \overset{?}{=} \alpha + \theta$



$AB = ab$ $AC = a.c$ $BC = b.c$

$AD = ad$ $BD = bd$ $CD = cd$

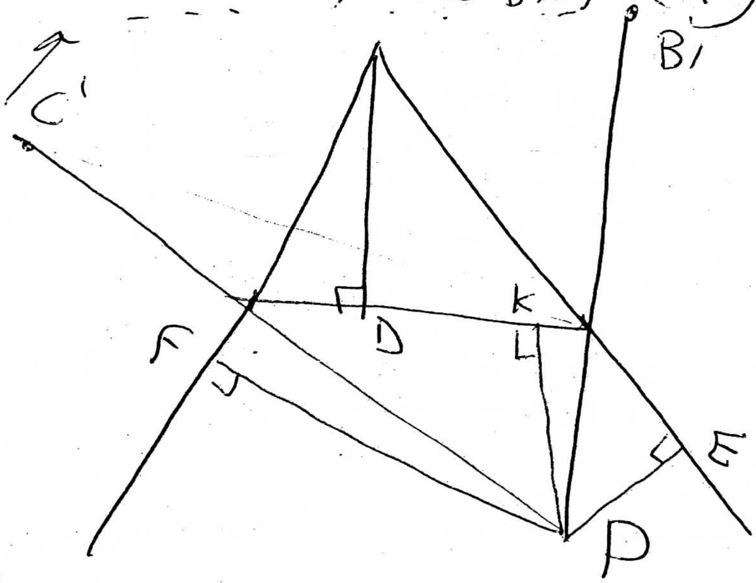
۱



$\frac{AE}{EB}=\frac{DF}{FC} \Longrightarrow$ همرسند دایره محیطی AES, SDF, TEB, FCF

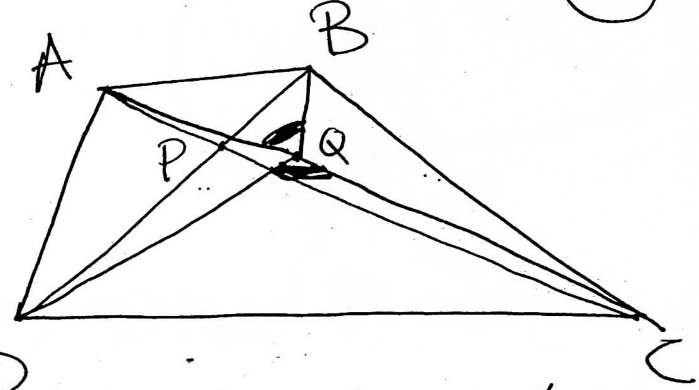
۷

قرینه B نسبت به AC



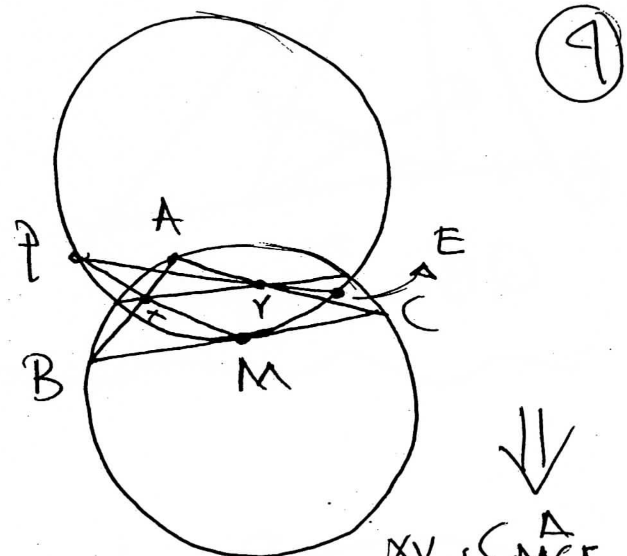
FDKE محاطی

۱۰



$\widehat{QDC}=\widehat{AQP}$ ثابت کنید $\Longleftarrow$

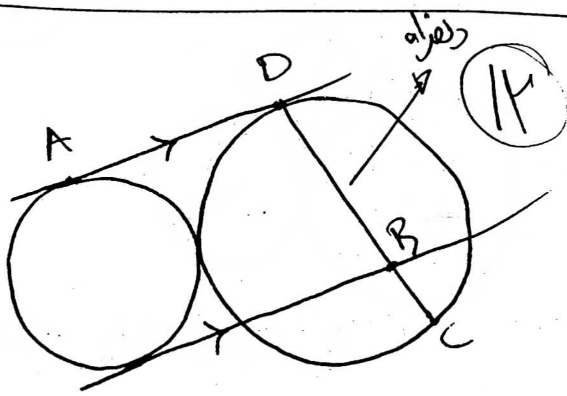
۹



$\Downarrow$

XY بر $C_{\overset{\triangle}{MCE}}$ مماس

۱۲



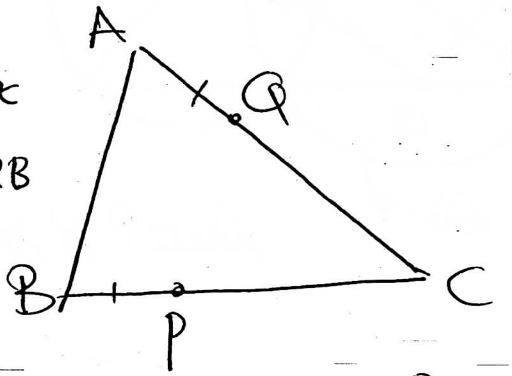
$\Leftarrow$ $C_{\overset{\triangle}{ABC}}$ بر AD مماس است.

۱۱

$O_1=O_{ABC}$

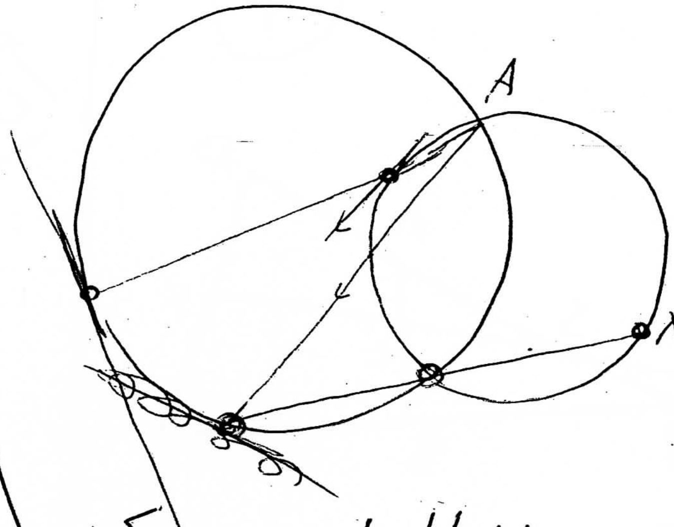
$O_2=O^{C}_{AQB}$

$a\neq b$



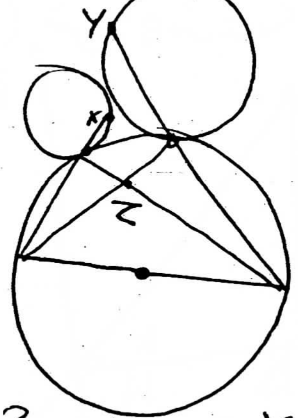
$C=60^\circ \Longleftarrow$ $AO_1=BO_2$

۱۳



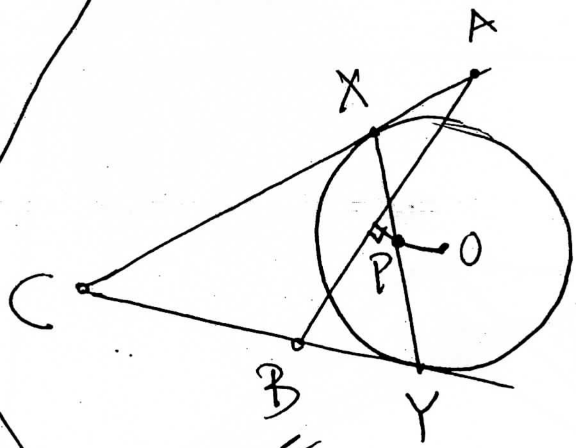
$L \parallel AX$?

۱۴



X و Y و Z هم‌خط‌اند؟

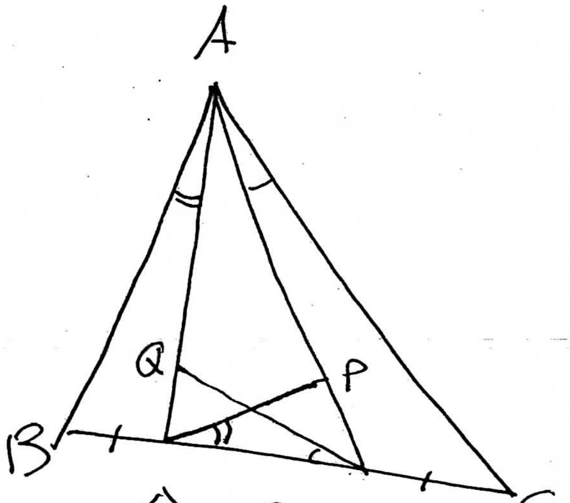
۱۵



⇐ CP از وسط AB می‌گذرد.

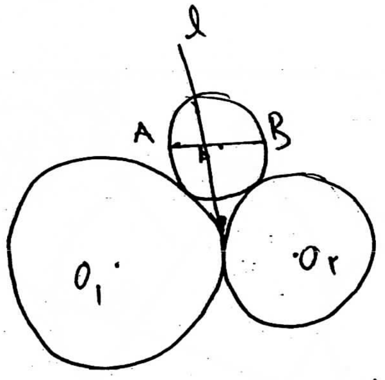
(۲ راه‌حل)

۱۶



$Q\hat{B}C \overset{?}{=} P\hat{C}B$

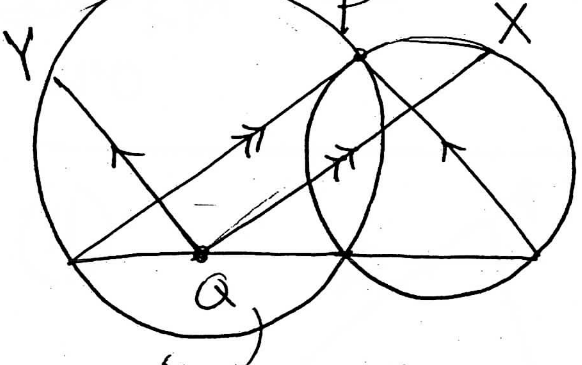
۱۷



⇐ O_1A و O_2B و l همرسند.

(۲ راه‌حل)

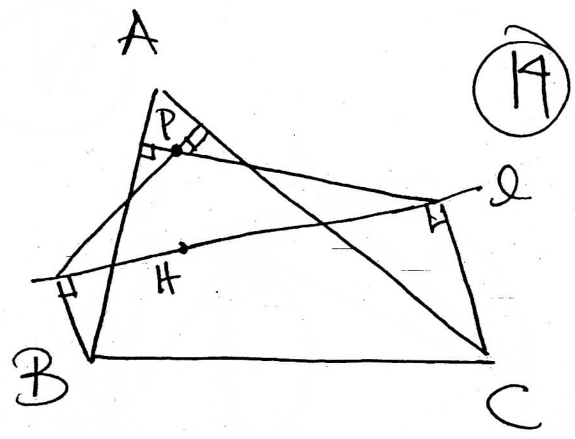
۱۸



دلخواه

⇐ X، Y، P هم‌خط‌اند.

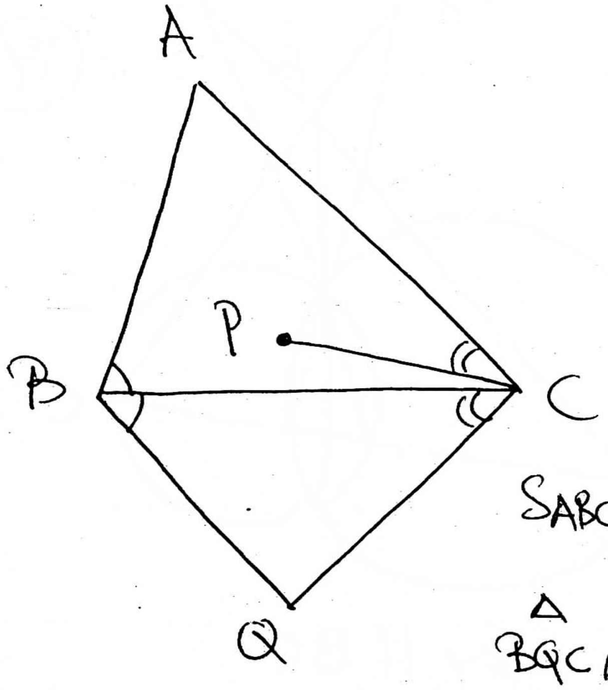
۱۹



؟ = مکان هندسی قرینه P نسبت به l

(نقطه)

۲۰

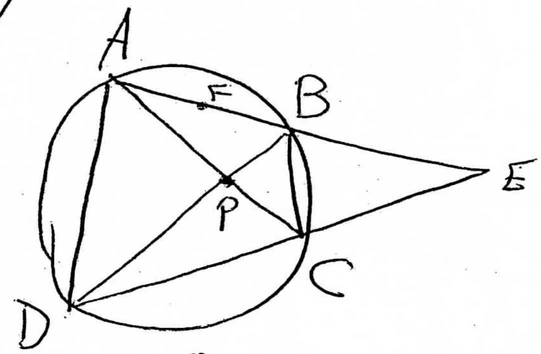


$S_{ABC} = S_{BPCQ}$

$\Downarrow$

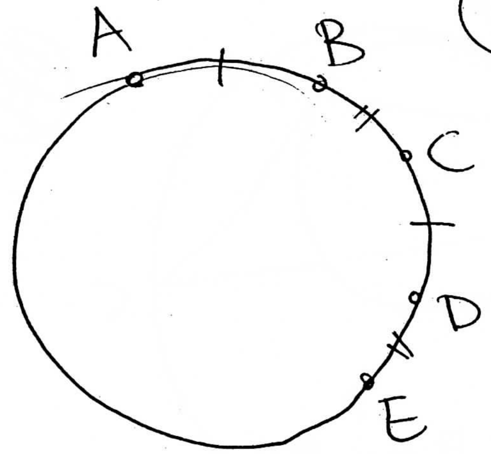
$\triangle BQC \sim \triangle APC$

۲۱



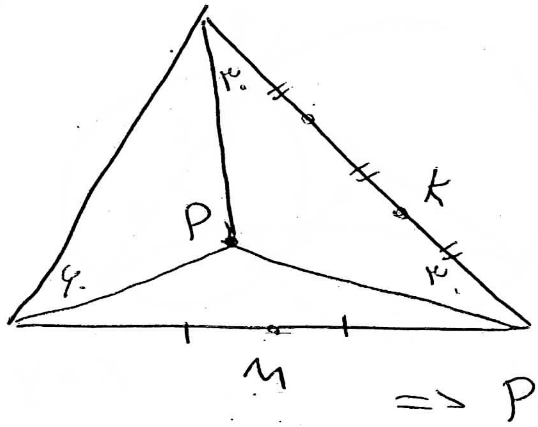
$\frac{EF}{ED} = \frac{DP}{AP}$ $\rightsquigarrow$ DF از وسط EP می‌گذرد.

۲۲



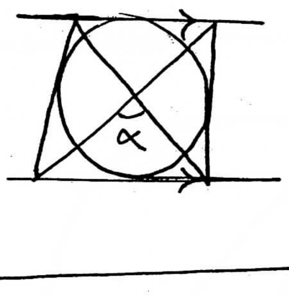
$\widehat{AC} = 90$ $\Longleftarrow$ $H_{ACD} H_{BCD} H_{BCE}$ قائم الزاویه

۲۳



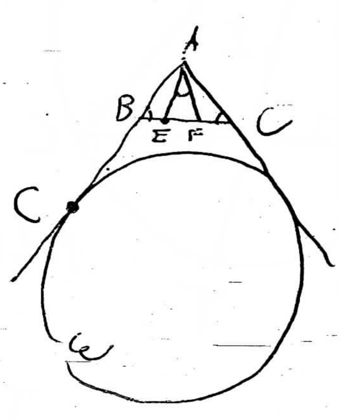
$\Rightarrow \widehat{PMK} \overset{?}{=} 90$

۲۴



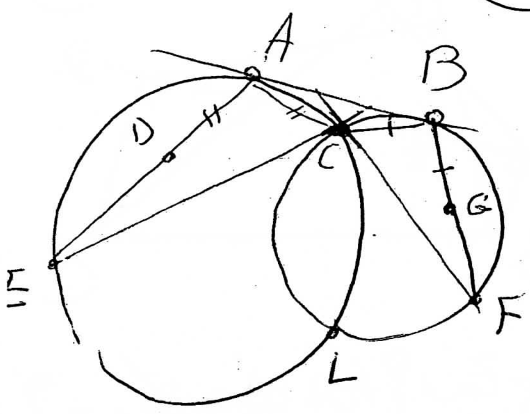
$\alpha > 90^\circ$

۲۵



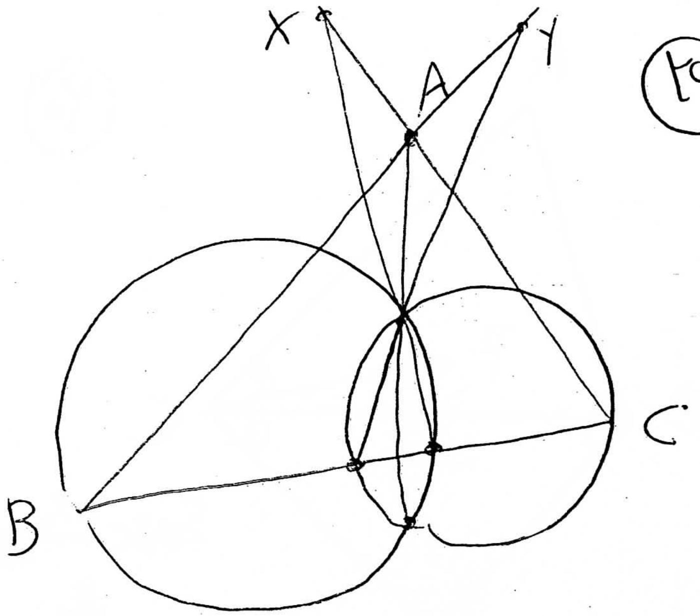
دایره محیطی AEF بر ω مماس است اگر و تنها اگر $AB = BC$

۲۷



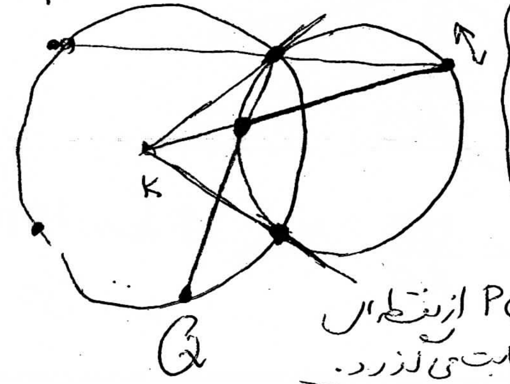
? ~~A~~D ~~L~~GB محاطی

۲۶



XY || BC
?

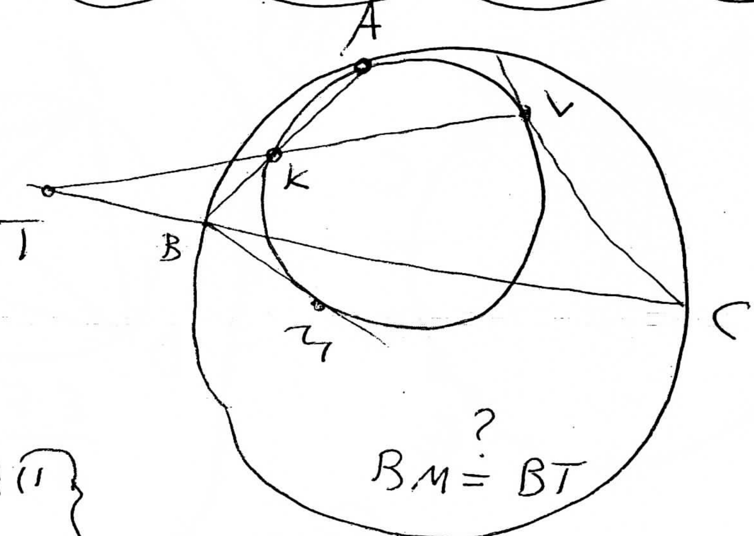
۲۹ ~~۲۷~~



۱) PQ از نقطه ثابت می‌گذرد.

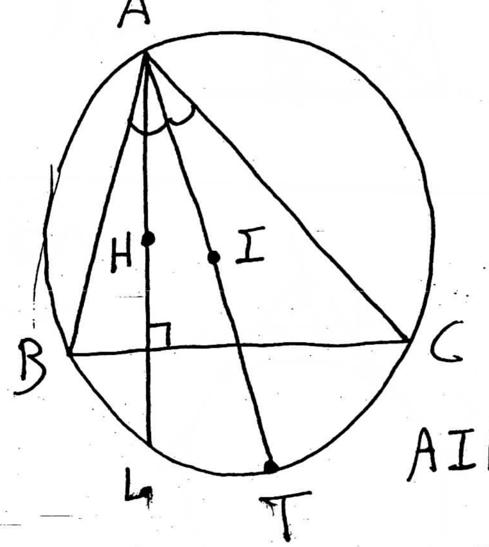
۲) MK از وسط PQ می‌گذرد

~~۳۵~~ ۲۸



$BM \overset{?}{=} BT$

۳۱



ثابت کنید

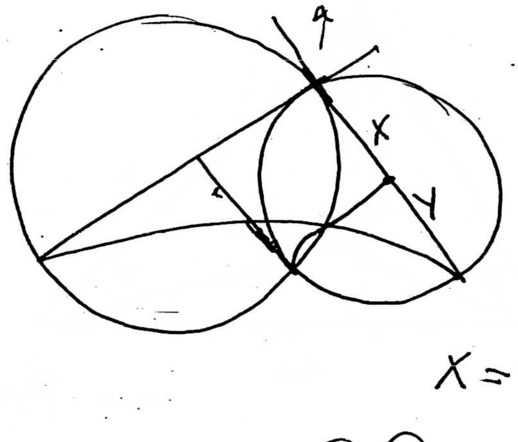
$AIH = 90$

$\Updownarrow$

$TLI = 90$

۳۰

مماس

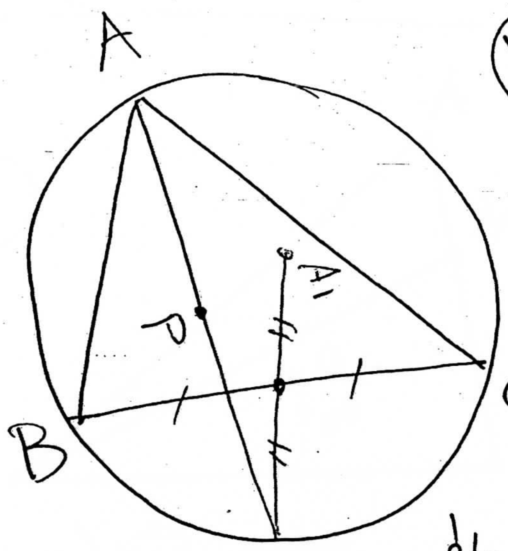


X = Y ?

۳۰ از دبیرستان C

([illegible] ⇐ $P \to \infty$)

۳۲

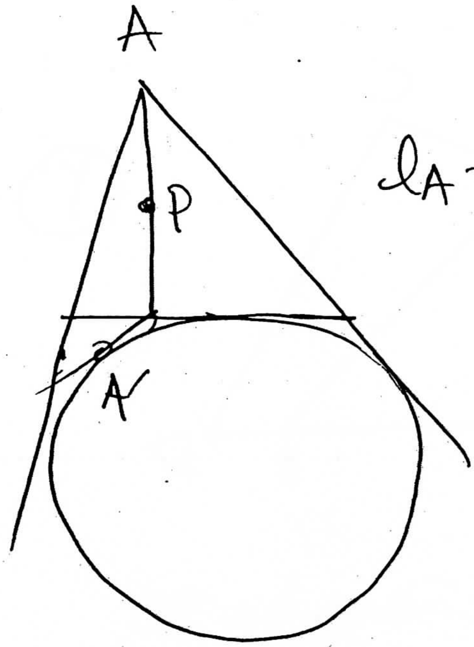


⇓

عامل HABC

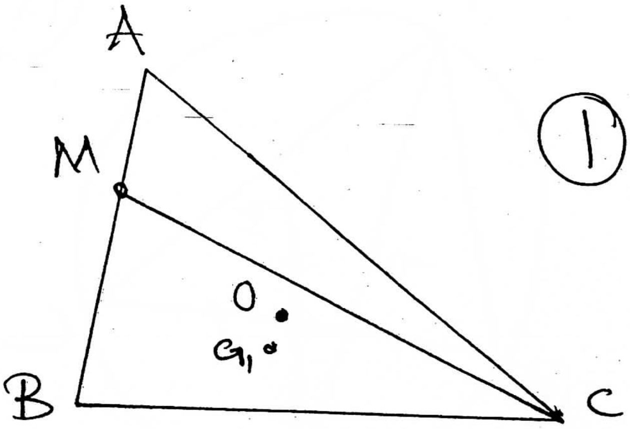
۱

$l_A = AA'$



تمرینات نوروزی هندسه

۱



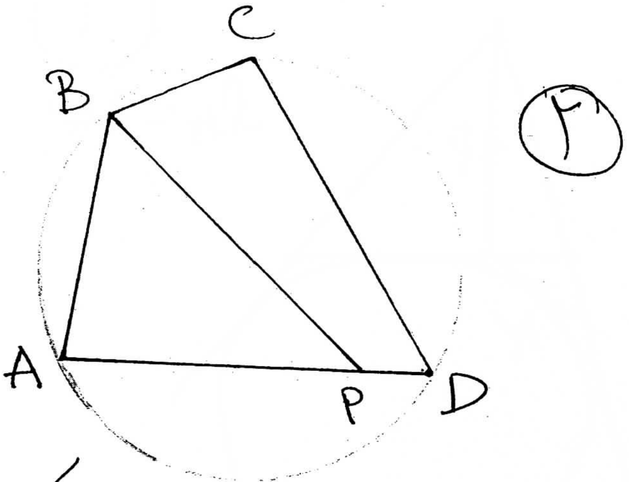
G_1 مرکز ثقل BMC

$G_1O \perp CM$

$\frac{AB}{BC}=K$

$\frac{AM}{AB}=?$ ⟸

۲

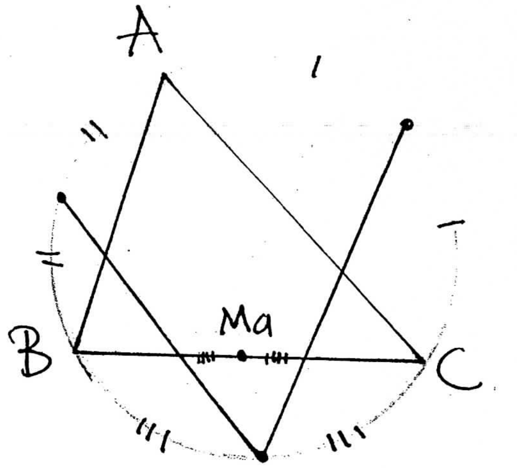


BP محیط و مساحت را نصف کرده

⟸ دو ضلع ABCD برابرند

۳ ثابت کنید که کوچکترین نیمساز کمتر مساوی بزرگترین ارتفاع

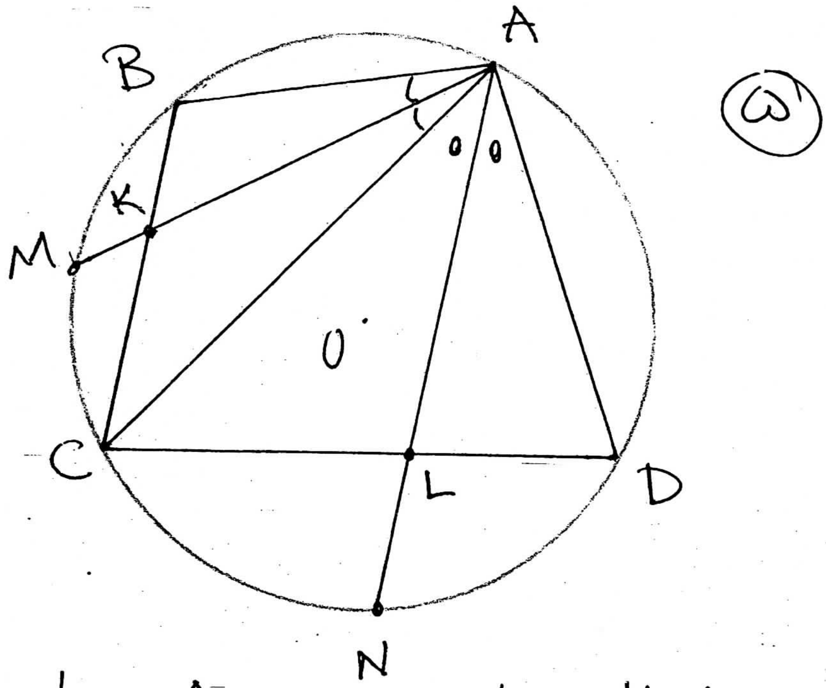
۴



ABC متساوی الساقین

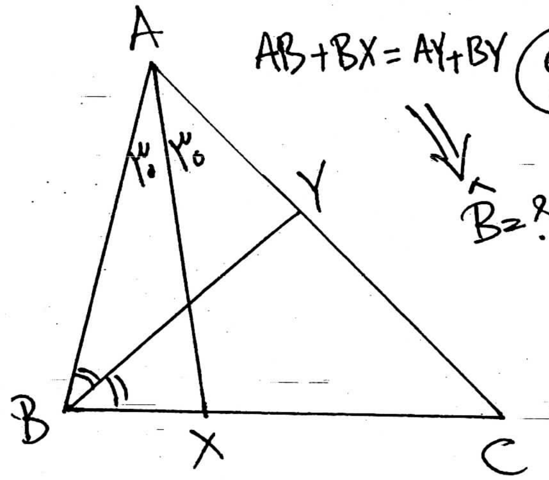
AM_a ، BM_b ، CM_c هم‌رسند

۵



KL || MN ⟸ ثابت کنید دایره محیطی $\overset{\triangle}{MON}$ از وسط BD می‌گذرد

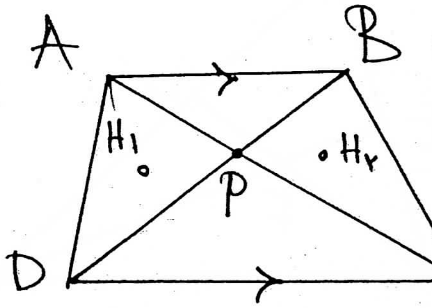
۶



$AB+BX=AY+BY$

⟹ $\hat{B}=?$

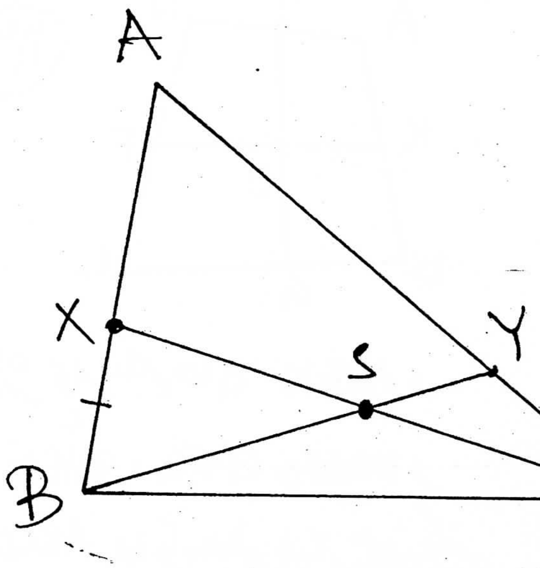
۷



اگر M وسط H_1H_2 باشد

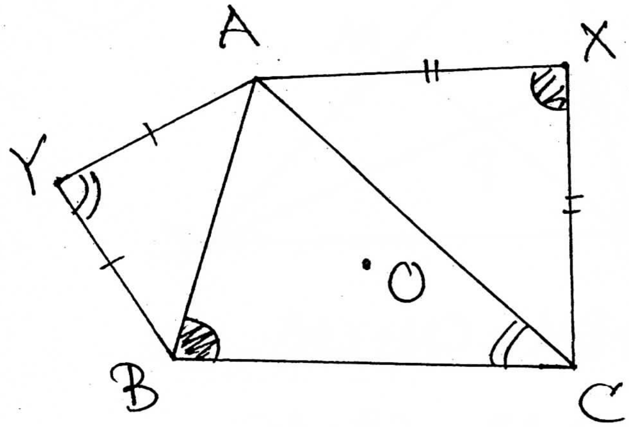
$\Leftarrow PM \perp AB$

۸



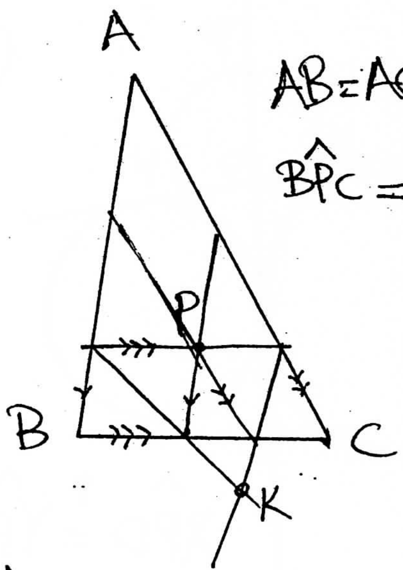
مکان هندسی S را بیابید.

۹



$OX+OY=a+b+c \Longleftrightarrow \hat{A}=90^\circ$

۱۰



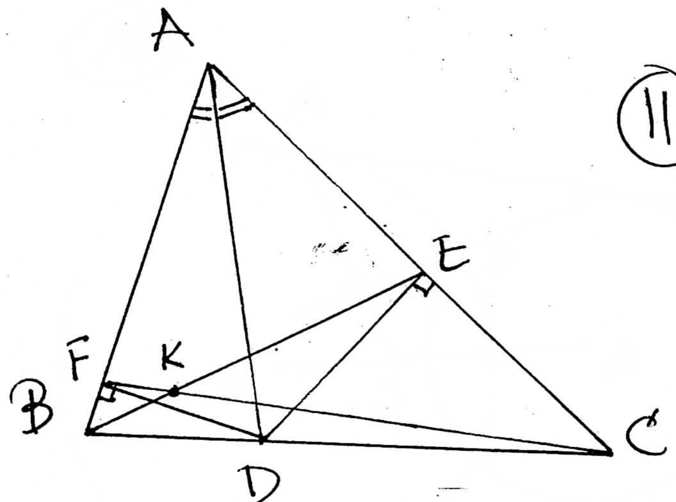
$AB=AC$

$B\hat{P}C=90^\circ+\hat{A}/2$

$\Downarrow$

ABKC محاطی

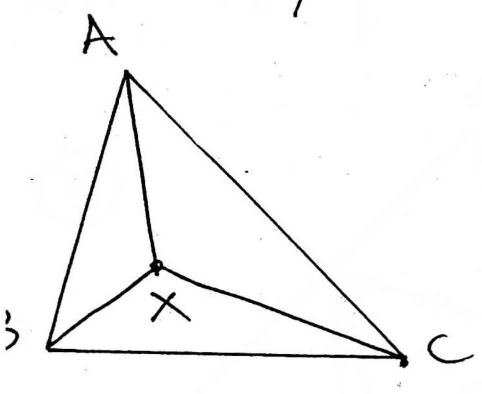
۱۱



G وسط مماس دایره محیطی AFK با BE می‌باشد.

ثابت کنید GE، BF، BG اضلاع مثلث قائم الزاویه می‌باشند.

۱۲

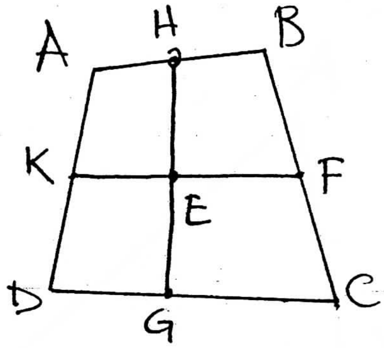


در شکل $AX=BX+CX$. P وسط کمان $\widehat{AXB}$ از دایره محیطی $\overset{\triangle}{AXB}$

Q وسط کمان $\widehat{AXC}$ از دایره محیطی $\overset{\triangle}{AXC}$.

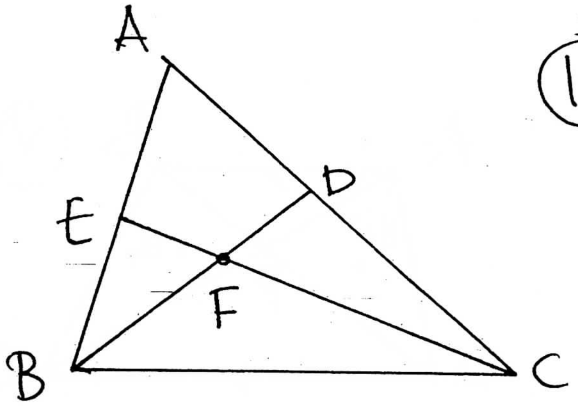
ثابت کنید دایره‌های محیطی $B\hat{X}Q$ ، $C\hat{X}P$ هم مماسند.

۱۳



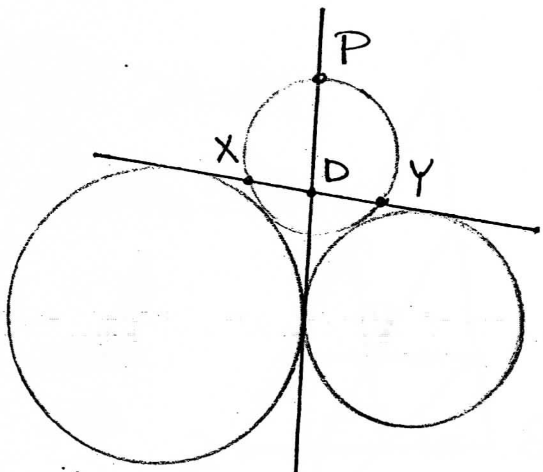
اگر چهارضلعی‌های AHEK،
BHEF، CFEG و DGEK و
ABCD چهارتا محیطی است. ثابت کنید
پنجمی نیز محیطی است.

۱۴



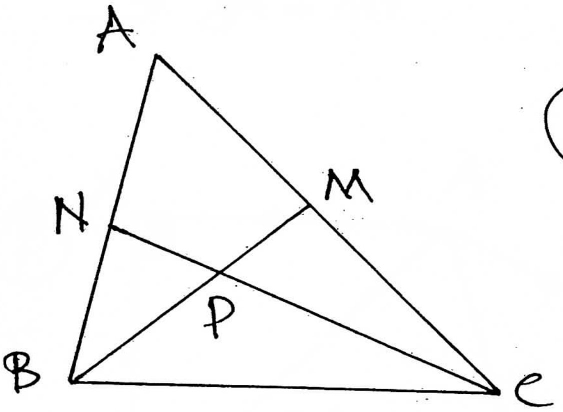
$DE \leq \frac{b+c}{2} \Leftarrow$ F نقطه فرما

۱۵



$\hat{XPD} \overset{?}{=} \hat{YPD}$

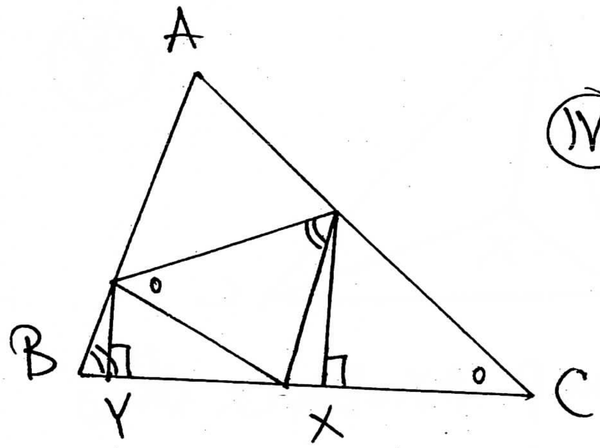
۱۶



$BN + BM = CN + CM$

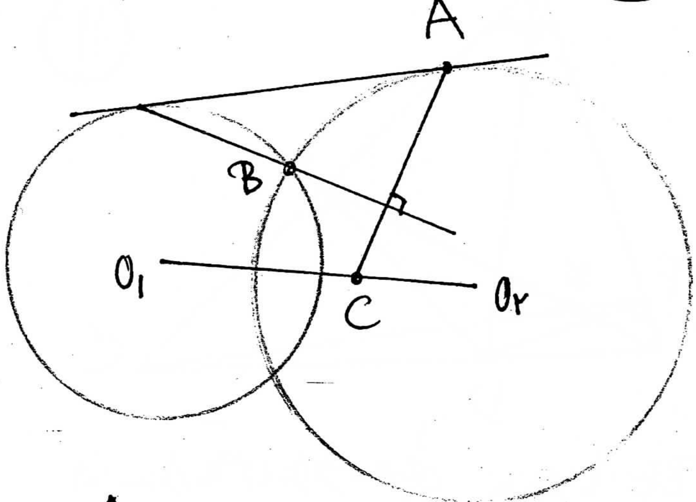
$\Rightarrow BP + AB = CP + AC$

۱۷



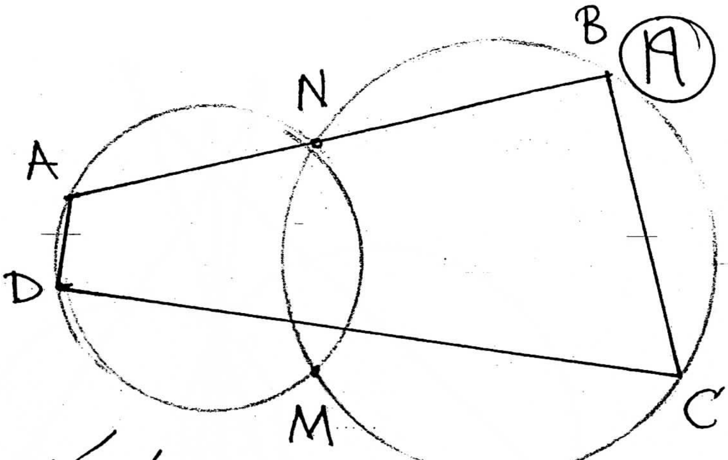
$XY \overset{?}{=} \frac{BC}{2}$

۱۸



$\hat{ABC} \overset{?}{=} 90^\circ$

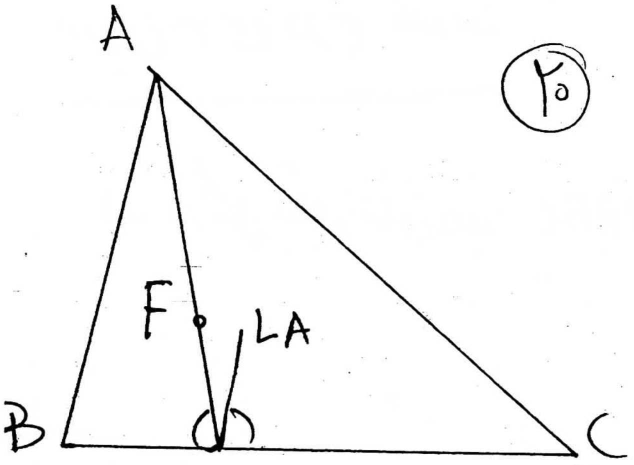
۱۹



ABCD ثابت است. N روی AB حرکت می‌کند

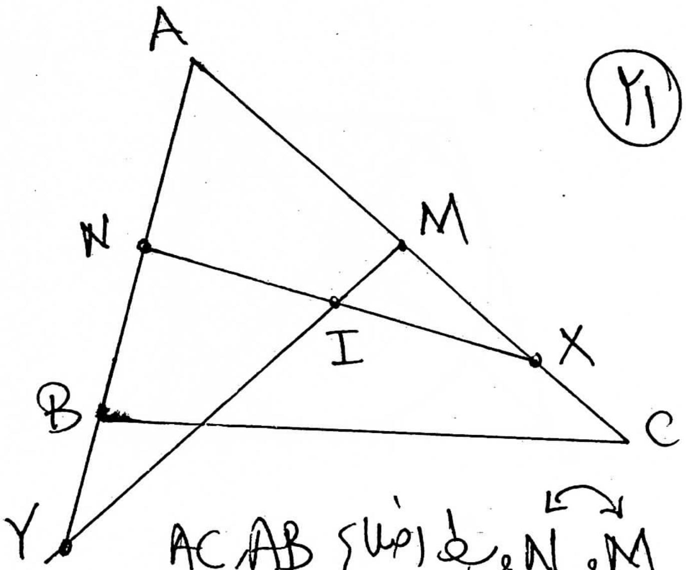
$\Leftarrow$ MN از نقطه‌ای ثابت می‌گذرد.

۲۰



LA ، LB ، LC همرسند.

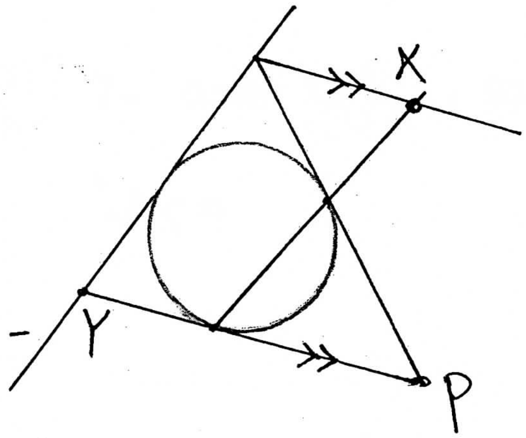
۲۱



M و N وسط اضلاع AB ، AC

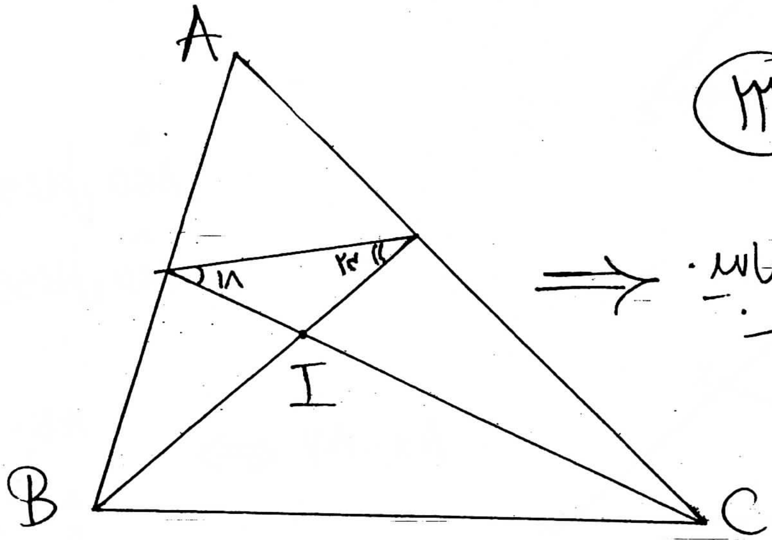
$S_{AXY} = S_{ABC} \Longleftarrow \hat{A} = ?$

۲۲



P و دایره ثابت است. L مماس بر دایره تغییر می‌کند. ثابت کنید XY از نقطه ثابت می‌گذرد.

۲۳



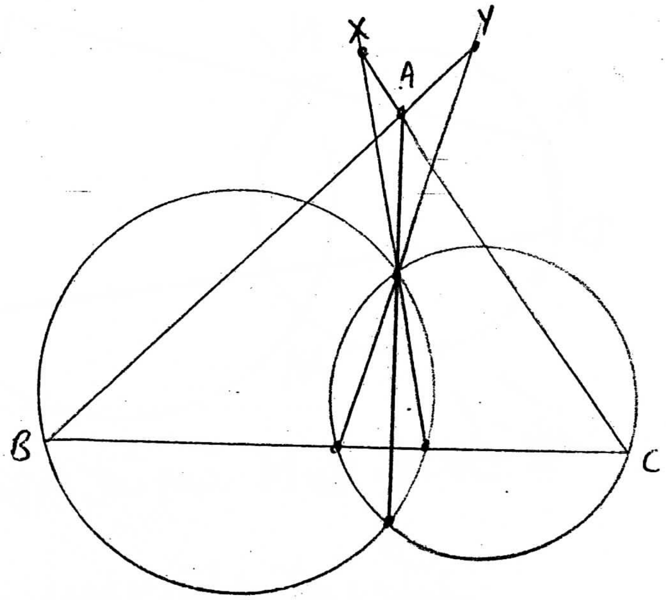
$\Longrightarrow$ $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ را بیابید.

عیدتان مبارک!

نوروز ـ ۱۳۸۷

دهه طلا

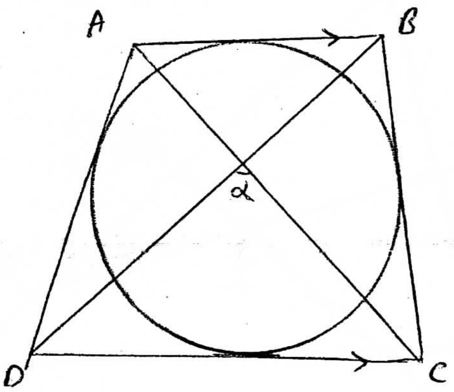
تمرین سری دوم هندسه

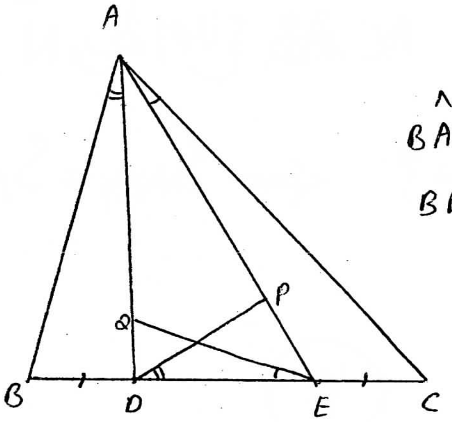


۱- در شکل مقابل نشان دهید: $XY \parallel BC$

۲- $ABCD$ محیطی است و $AB \parallel CD$ است. نشان دهید:

$\alpha > 90^\circ$

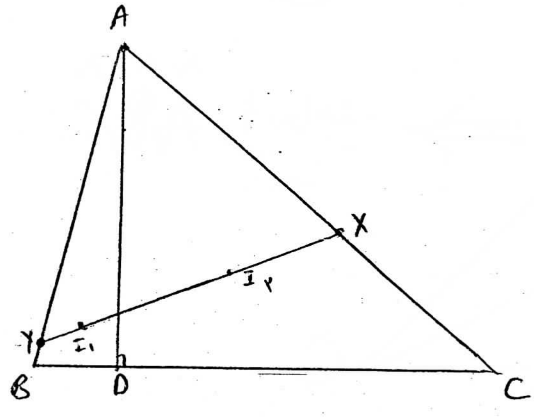




۳- در شکل مقابل می‌دانیم $\hat{BAD} = \hat{PDE}$ و $\hat{CAE} = \hat{QED}$

$BD = EC$

نشان دهید: $\hat{QBC} = \hat{PCB}$

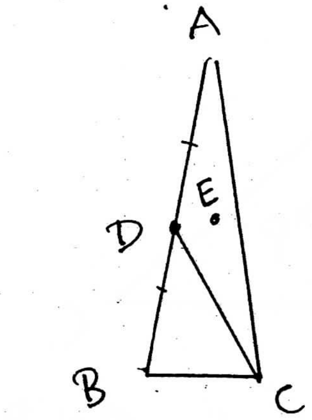


۴- I_1 مرکز دایره محاطی $\triangle ABD$

I_2 مرکز دایره محاطی $\triangle ACD$

ثابت کنید:

$AX = AY \iff AB = AC$ یا $\hat{A} = 90^\circ$



$E = G_{ADC}$

$O = O_{ABC}$

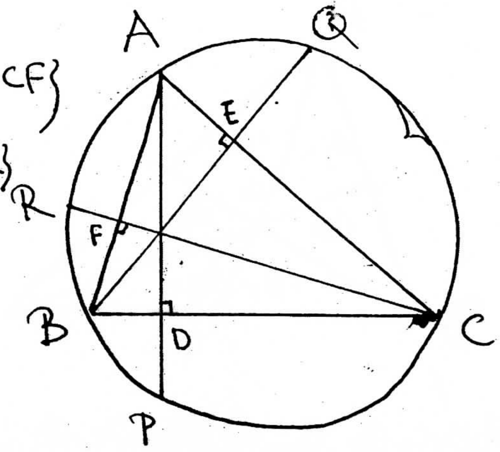
$AB = AC \Rightarrow OE \perp CD$

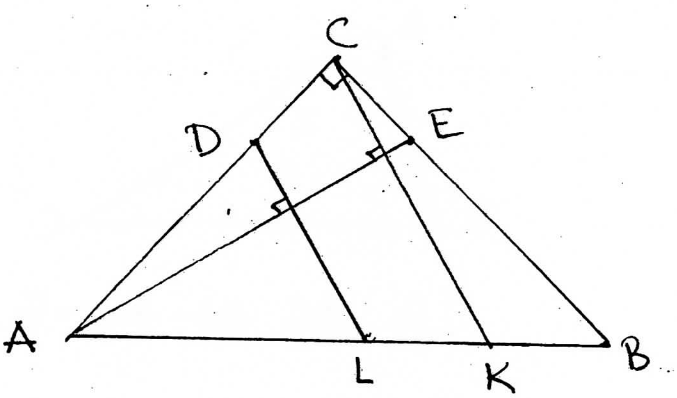
$h = \max\{AD, BE, CF\}$

$s = \min\{AP, BQ, CR\}$

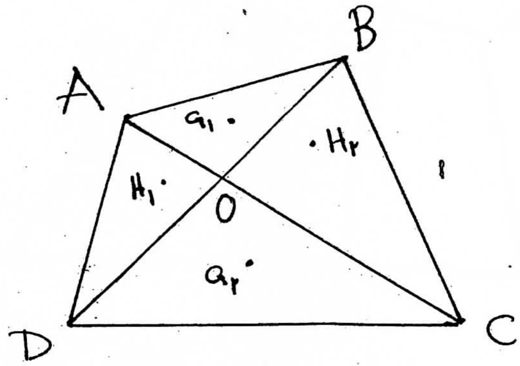
$\Downarrow$

$\frac{h}{s} > \frac{۱۳۸۷}{۲۵۰۸}$

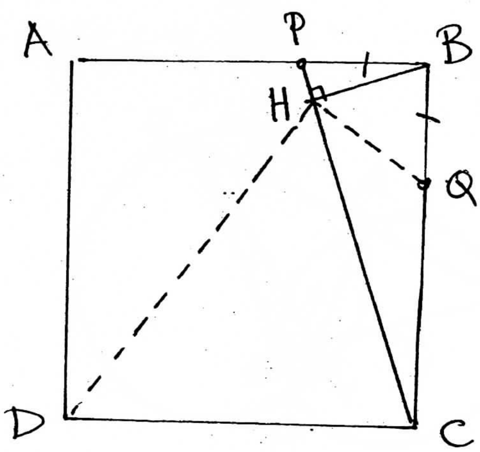




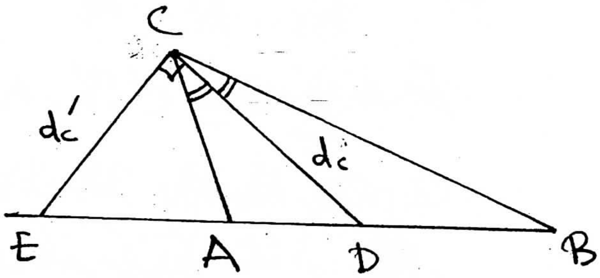
$\left.\begin{array}{l} CA = CB \\ CD = CE \\ \hat{C} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow LK = KB$



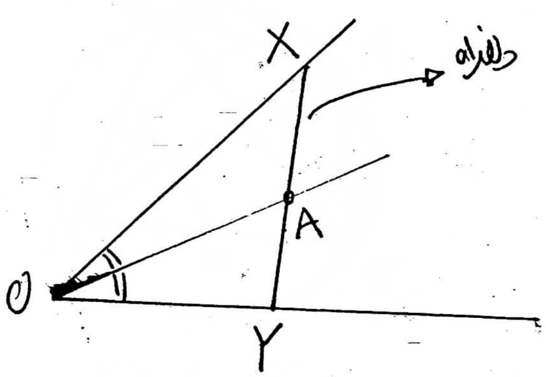
$G_1G_2 \perp H_1H_2$



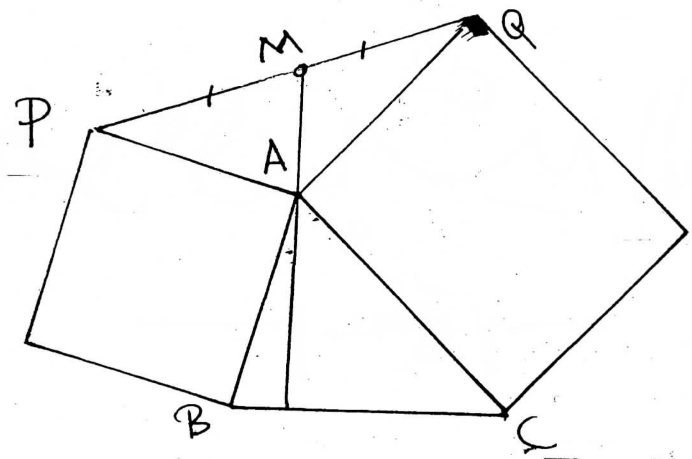
$BP = BQ \Rightarrow D\hat{H}Q = ۹۰^\circ$



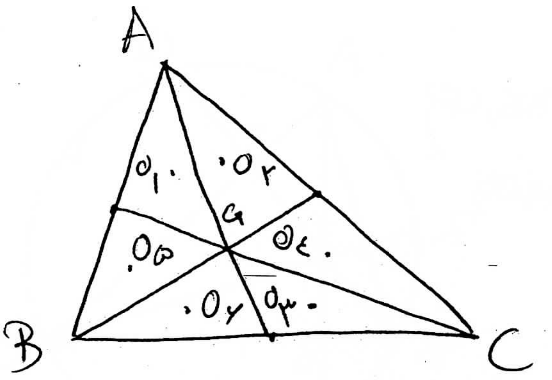
$d_c = d'_c \Rightarrow a^2 + b^2 = 4R^2$



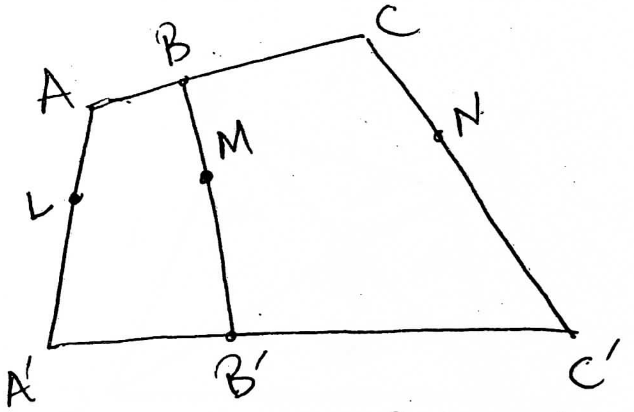
$\frac{1}{OX} + \frac{1}{OY} = K$ (ثابت)



$AM \perp BC$

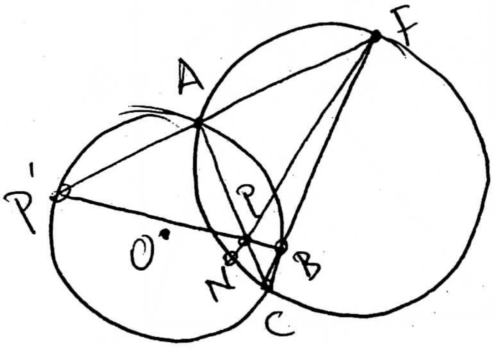


ثابت کنید $O_1، O_2، O_3، O_4، O_5، O_6$ روی یک دایره‌اند.



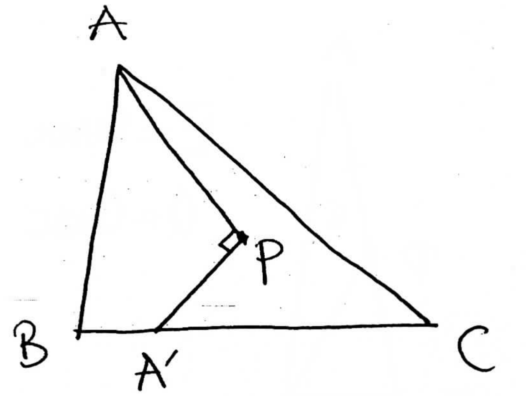
$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'} \ , \ \frac{AL}{LA'}=\frac{BM}{MB'}=\frac{CN}{NC'}$$

$\Longrightarrow$ L, M, N هم‌خطند.

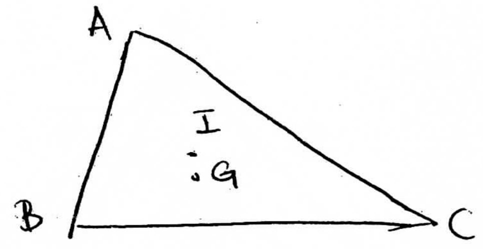


$ON \perp FP$

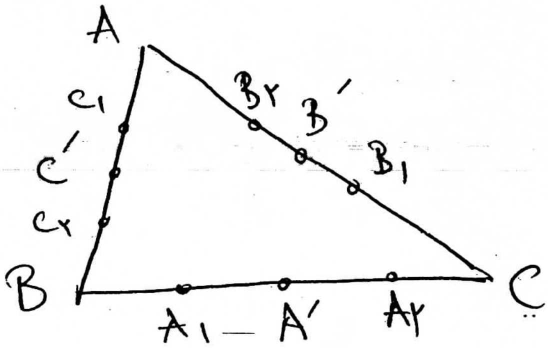
موفق باشید



P دلخواه $\Leftarrow$ $A'، B'، C'$ هم‌خطند.



$IG \perp BC \iff b+c=3a$

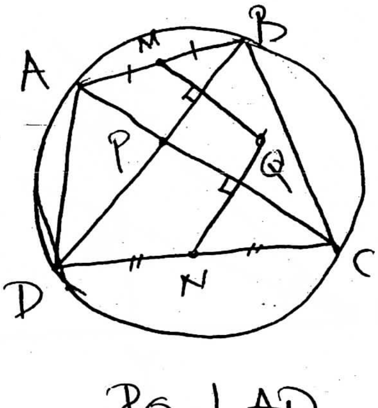


$A'، B'، C'$ وسط اضلاع هستند.

$C'C_1=C'C_2،\ A'A_1=A'A_2 ،\ B'B_1=B'B_2$

ثابت کنید مرکز ثقل مثلث‌های $\overset{\Delta}{ABC}$ ،

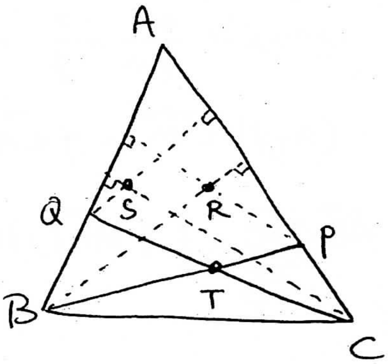
$\overset{\Delta}{A_2B_2C_2}$ ، $\overset{\Delta}{A_1B_1C_1}$ هم‌خطند.



$PQ \perp AD$

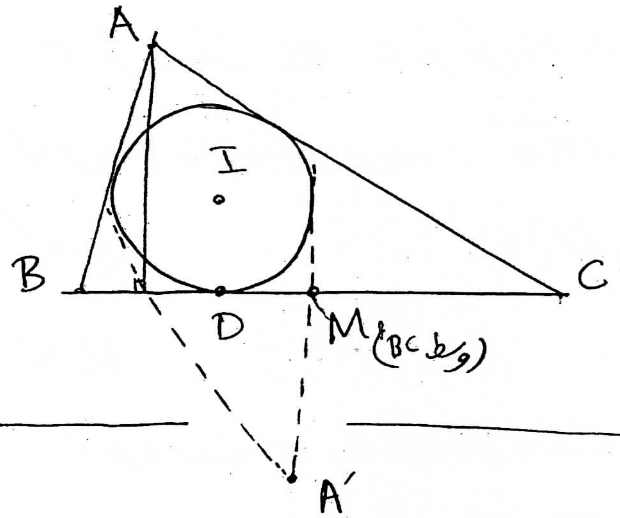
تمرین تکمیلی هندسه (نوروز ۱۳۹۲) همراه حل

(۱)



ABC متساوی الاضلاع
TSR « «
$\Longleftarrow$ همه مقادیر ممکن برای $\hat{TBC}$ و $\hat{TCB}$ را بیابید

(۲)

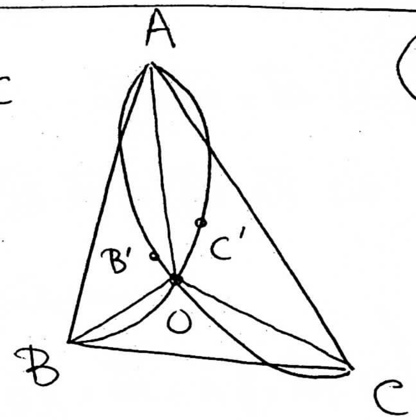


مزدوج همساز DI نسبت به DA′ و BC $= l_A$

$\Downarrow$

l_A و l_B و l_C همرسند!

(۳)



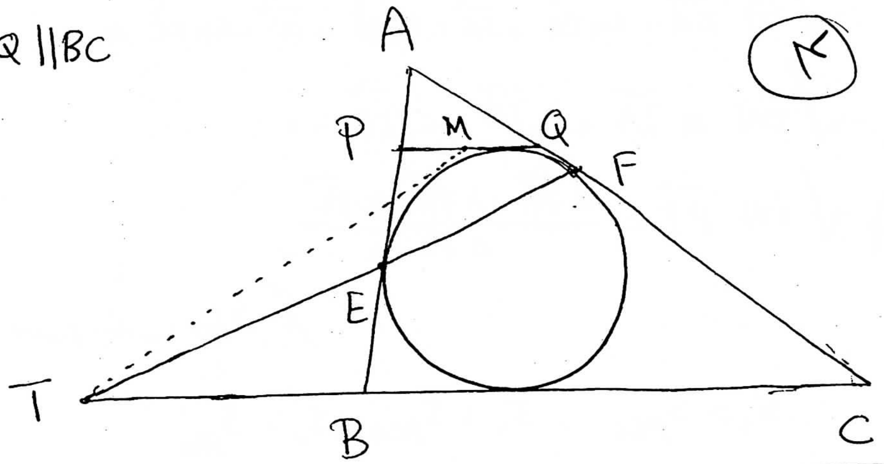
$OA = OB + OC$

B′ وسط کمان $\overset{\frown}{AOC}$

C′ « « $\overset{\frown}{AOB}$

$\Longleftarrow$ دوایر محیطی $\overset{\triangle}{BB'O}$ و $\overset{\triangle}{CC'O}$ بر یکدیگر مماس هستند!

(۴)

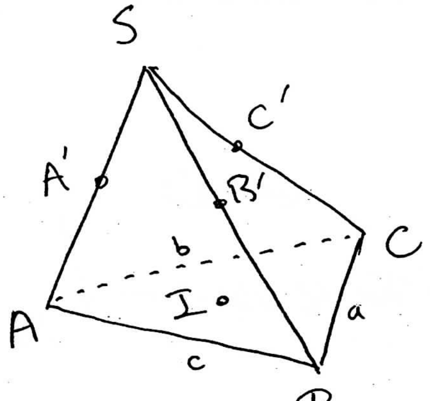


$PQ \parallel BC$ ، M وسط PQ

$\Downarrow$

TM بر دایره‌ی محاطی مماس است!

(۵)



SI ارتفاع چهاروجهی

$\Downarrow$

$S'A' = S'B' = S'C'$

SABC چهاروجهی

$I = I_{\overset{\triangle}{ABC}}$

$AA' = p-a$

$BB' = p-b$

$CC' = p-c$

S′: روبروی نقطه S در کره محیطی چهاروجهی

تمرین هندسی ۳

۱- در مثلث ABC، M نقطه‌ای روی ضلع AB است به طوری که $\frac{AM}{BM}=\frac{x}{y}$ نشان دهید:

$$(x+y)\,\overrightarrow{CM} = y\,\overrightarrow{CA} + x\,\overrightarrow{CB}$$

۲- در چهارضلعی $ABCD$ داریم:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\cancel{\overrightarrow{DC}}\;\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2\right)$$

۳- اگر در مثلث ABC، G مرکز ثقل باشد داریم:

الف) P نقطه‌ای دلخواه در صفحه

$$|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2 = |\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2+3|\overrightarrow{PG}|^2$$

ب)

$$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2 = 3\left(|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2\right)$$

ج)

$$3\,\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$$

۴- اگر در مثلث ABC، H مرکز ارتفاعی باشد و O مرکز دایرهٔ محیطی؛ ثابت کنید:

i) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

ii) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

iii) $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$

۵- اگر در مثلث ABC، I مرکز دایره محاطی داخلی باشد و H مرکز ارتفاعی: نشان دهید:

i) $\overrightarrow{HA}\times \operatorname{tg}\hat{A}+\overrightarrow{HB}\times \operatorname{tg}\hat{B}+\overrightarrow{HC}\times \operatorname{tg}\hat{C}=0$

ii) $\overrightarrow{OA}\times \sin 2\hat{A}+\overrightarrow{OB}\times \sin 2\hat{B}+\overrightarrow{OC}\times \sin 2\hat{C}=0$

iii) $a\,\overrightarrow{IA}+b\,\overrightarrow{IB}+c\,\overrightarrow{IC}=0$

iv) $\overrightarrow{PI} = \dfrac{a\,\overrightarrow{PA}+b\,\overrightarrow{PB}+c\,\overrightarrow{PC}}{a+b+c}$

۶- در مثلث ABC، P نقطه‌ای دلخواه درون مثلث می‌باشد. اگر

$S_1 = S_{PBC}$ ، $S_2 = S_{PCA}$ ، $S_3 = S_{PAB}$

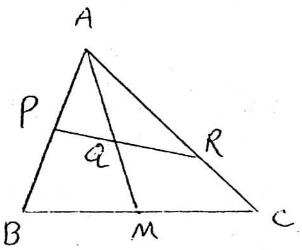
$$\overrightarrow{PA}\times S_1+\overrightarrow{PB}\times S_2+\overrightarrow{PC}\times S_3=0$$

نشان دهید:

۷- برای چهار نقطهٔ دلخواه A، B، C و D در صفحه نشان دهید:

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

تمرین تکمیلی ۲

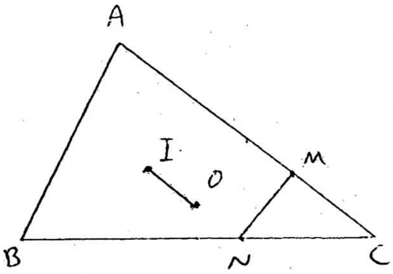


۸- مثلث ABC و نقطهٔ M وسط ضلع BC مفروض است. خط دلخواه l خطوط AC ، AM ، AB را به ترتیب در R ، Q ، P قطع می‌کند. نشان دهید:

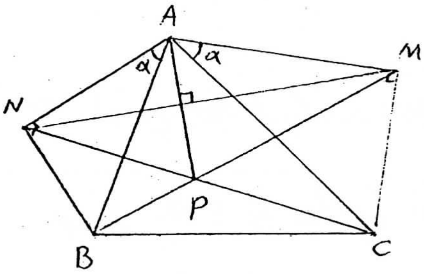
$$\frac{AM}{AQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{AC}{AR} + \frac{AB}{AP}\right)$$

۹- مثلث ABC و نقطهٔ P در درون آن مفروض است. نشان دهید:

$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = 0 \iff \frac{|\vec{PA}|}{\sin B\hat{P}C} = \frac{|\vec{PB}|}{\sin C\hat{P}A} = \frac{|\vec{PC}|}{\sin A\hat{P}B}$$



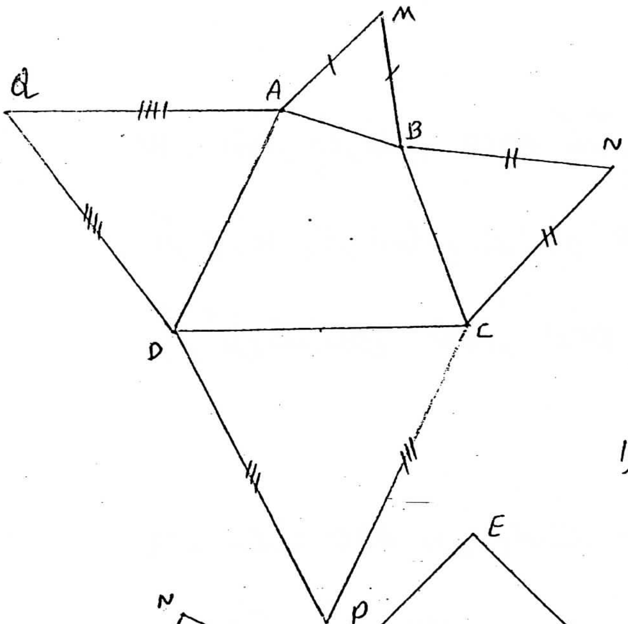
۱۰- در مثلث ABC نقاط N ، M به ترتیب روی اضلاع BC ، AC طوری انتخاب شده‌اند که: $AM = BN = AB$. اگر I و O به ترتیب مراکز دوایر محیطی و محاطی داخلی مثلث ABC باشند. ثابت کنید: $OI \perp MN$



۱۱- روی اضلاع AB ، AC از مثلث ABC و در خارج آن دو مثلث قائم الزاویهٔ متشابه به نام‌های ACM و ABN می‌سازیم که داریم:

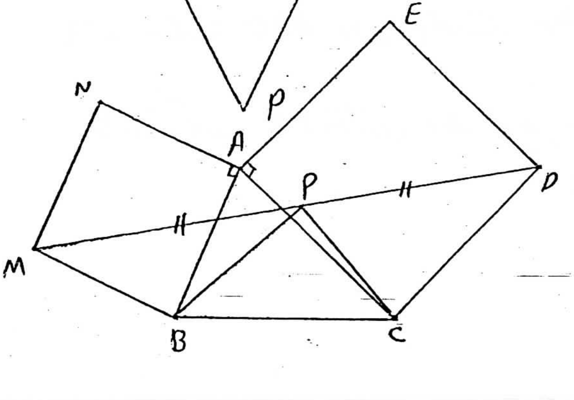
$$C\hat{A}M = B\hat{A}N \quad , \quad \hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$$

اگر P محل برخورد خطوط BM و CN باشد، ثابت کنید: $AP \perp MN$



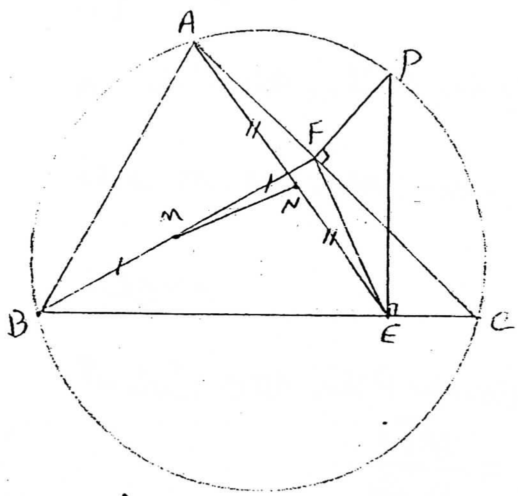
۱۲- در چهارضلعی $ABCD$ طول دو قطر AC ، BD باهم برابر است. در خارج چهارضلعی چهار مثلث متساوی الساقین به نام‌های AMB ، BNC ، CPD و DQA می‌سازیم؛ ثابت کنید: $MP \perp NQ$

۱۳- در خارج مثلث ABC ، دو مربع $ABMN$ و $ACDE$ را می‌سازیم. اگر نقطهٔ P وسط پاره خط DM باشد. ثابت کنید مثلث PBC قائم الزاویه و متساوی الساقین است.



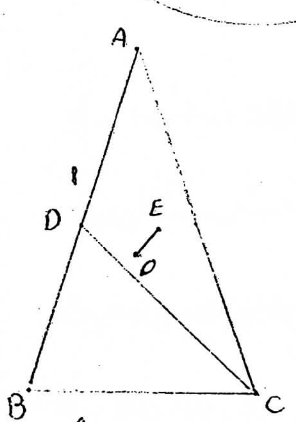
«مسائل تحقیقی»

۱۱



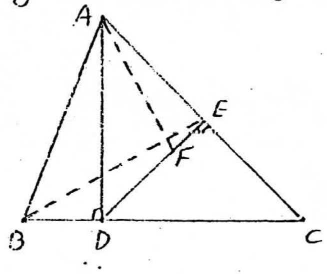
۱۴ـ نقطهٔ دلخواه P را روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC انتخاب می‌کنیم. از نقطهٔ P دو عمود PE و PF را بر BC و AC فرود می‌آوریم و اوساط AE و BF را به ترتیب N و M می‌نامیم.

ثابت کنید: $MN \perp EF$

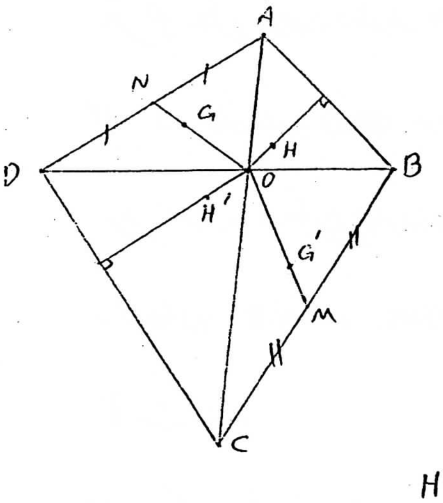


۱۵ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$، نقطهٔ D وسط ضلع AB و نقطهٔ E مرکز ثقل مثلث ADC و نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌باشد.

ثابت کنید: $OE \perp CD$



۱۶ـ ارتفاع AD از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و پای عمود وارد از D بر ضلع AC را E می‌نامیم. نقطهٔ F را چنان روی DE انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $\frac{EF}{FD} = \frac{BD}{DC}$. نشان دهید: $AF \perp BE$



۱۷ـ اقطار چهارضلعی ABCD یکدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. اگر H و H′ مراکز ارتفاعی مثلث‌های ABO و DCO و G و G′ مراکز ثقل مثلث‌های ADO و BCO باشند نشان دهید:

$HH' \perp GG'$

۱۸ـ مثلث ABC مفروض است. نقطهٔ فرمای آن را F و مزدوج همزاویهٔ F را F′ می‌نامیم.

ثابت کنید: FF' موازی خط اویلر مثلث ABC است. (۱۰۰۰ تومان)

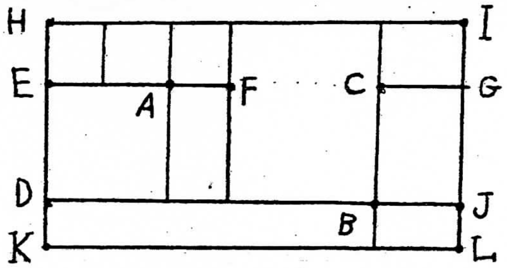
سوالات مرحله دوم

- در این بخش سوالات مرحله دوم ریاضی از سال ۱۳۸۱ تا سال ۱۳۸۹ آمده است.

۱ـ $a_1,a_2,\dots,a_n$ را یک "جایگشت" از اعداد ۱، ۲، ...، n می‌نامیم هرگاه $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}=\{1,2,\dots,n\}$ (یعنی a_1 تا a_n همان اعداد ۱ تا n هستند که احتمالاً ترتیب آن‌ها تغییر کرده است). تمام جایگشت‌های ۱ تا n مانند $a_1,a_2,\dots,a_n$ را بیابید که برای هر $1\le i\le n$، $2(a_1+a_2+\dots+a_i)$ بر $i+1$ بخش‌پذیر باشد.

برای مثال $a_1=3$ و $a_2=1$ و $a_3=4$ و $a_4=2$ یک جایگشت از اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ است.

۲ـ یک مستطیل را به وسیله‌ی تعدادی مستطیل (کوچک‌تر) پوشانده‌ایم به طوری که مستطیل‌ها به جز احتمالاً در رئوس و اضلاع با هم اشتراکی ندارند. در ضمن اضلاع مستطیل‌های پوشاننده موازی اضلاع مستطیل اصلی هستند، همچنین هیچ قسمتی از این مستطیل‌ها بیرون از مستطیل اصلی قرار نمی‌گیرد. برای مثال، شکل زیر یکی از این حالت‌ها را نشان می‌دهد:



بنابراین هر طور که مستطیل را به وسیله‌ی مستطیل‌های کوچک‌تر با توجه به شرایط فوق بپوشانیم در شکل حاصل تعدادی خط (پاره‌خط) افقی و عمودی و تعدادی نقاط برخورد پاره‌خط‌ها دیده می‌شود، یک نقطه‌ی برخورد را یک "چهارراه" می‌گوئیم هرگاه محل تقاطع دو پاره‌خط باشد، مثلاً در شکل بالا نقاط A و B چهارراه هستند ولی نقاط C و D و K چهارراه نیستند، همچنین در این شکل ۵ خط افقی (KL , DJ , CG , EF , HI) و ۶ خط عمودی دیده می‌شود، در ضمن شکل به وسیله‌ی ۱۰ مستطیل پوشانده شده است.

نشان دهید در هر صورت اگر تعداد خط‌های افقی، عمودی و تعداد چهارراه‌ها را در نظر بگیریم و این سه عدد را با هم جمع کنیم، حاصل برابر است با تعداد مستطیل‌های پوشاننده به اضافه‌ی عدد سه.

۳ـ در چهارضلعی محدّب ABCD داریم $\angle ABC=\angle ADC=135^\circ$. ضمناً M و N به ترتیب نقاطی روی (امتداد) AD و AB می‌باشند به طوری که $\angle MCD=\angle NCB=90^\circ$، همچنین K محل برخورد دوم دایره‌های محیطی دو مثلث ABD و AMN می‌باشد. ثابت کنید AK بر KC عمود است.

۴ـ A و B دو نقطه‌ی ثابت در صفحه می‌باشند. چهار ضلعی محدّب $ABCD$ به گونه‌ای ساخته می‌شود که $AB=BC$ و $AD=DC$ و زاویه‌ی $\angle ADC=۹۰^\circ$. ثابت کنید نقطه‌ای ثابت وجود دارد به طوری که هر طور چهارضلعی $ABCD$ را در یک طرف AB بسازیم خط گذرنده از DC همواره از این نقطه می‌گذرد.

۵ـ مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با اضافه کردن موجودی جدید به نام δ به فضای بزرگتری توسعه داده‌ایم، فضای جدید را با $R[\delta]$ نشان می‌دهیم و اعضای آن موجوداتی به شکل $a+b\delta$ هستند که a و $b\in R$. (R نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.)

قرارداد می‌کنیم که $a+b\delta=a'+b'\delta$ اگر و تنها اگر $a=a'$ و $b=b'$. δ موجودی بسیار کوچک است به طوری که هر چند صفر نیست ولی $\delta^۲=۰$!

روی این فضا جمع و ضرب به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$(a+b\delta)+(a'+b'\delta)=(a+a')+(b+b')\delta$$

$$(a+b\delta)(a'+b'\delta)=aa'+ab'\delta+ba'\delta+bb'\delta^۲=aa'+(ab'+ba')\delta$$

فرض کنید $P(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، نشان دهید این چند جمله‌ای در R ریشه‌ای مضاعف دارد اگر و تنها اگر در $R[\delta]$ ریشه‌ای غیرحقیقی داشته باشد.

(ریشه‌ی غیر حقیقی یعنی ریشه‌ای به شکل $a+b\delta$ که $b\neq ۰$).

توضیح: می‌گوییم a ریشه‌ی مضاعف چند جمله‌ای $P(x)$ است اگر $P(x)$ بر $(x-a)^۲$ بخش‌پذیر باشد.

۶ـ در یک کلاس ۲۰ نفره در سال گذشته ۱۰۰ مسابقه‌ی تنیس روی میز بین بچه‌های کلاس برگزار شده است، هیچ دو نفری بیش از یک بار با هم مسابقه نداده‌اند. بچه‌های کلاس می‌خواهند از بین خود دو تیم دو نفره (دو تیم عضو مشترک ندارند) برای شرکت در مسابقات مدرسه انتخاب کنند با این شرط که دو عضو یک تیم در سال گذشته با هم بازی کرده باشند، می‌دانیم که این کار به ۴۰۵۰ طریق مختلف امکان‌پذیر است. ثابت کنید همه‌ی بچه‌های کلاس در سال گذشته به تعداد مساوی بازی کرده‌اند.

مرحلهٔ دوم بیست ویکمین المپیاد ریاضی کشور

۱) عدد طبیعی n را سه لایه‌ای می نامیم هر گاه بتوان مجموعهٔ مقسوم علیه های مثبت آن را به سه دسته طوری تقسیم کرد که مجموع اعضای هر سه دسته با هم برابر باشد.

الف) عددی سه لایه‌ای مثال بزنید ،
ب) ثابت کنید بی نهایت عدد سه لایه‌ای وجود دارد.

۲) دریک روستا n خانه وجود دارد ($n \geq ۳$) به طوری که همهٔ آن ها روی یک خط قرار ندارند. می خواهیم یک منبع آب در این روستا احداث کنیم . برای این کار نقطهٔ A مناسب تر از نقطهٔ B است اگر مجموع فواصل A تا خانه ها کم تر از مجموع فواصل B تا خانه ها باشد .
نقطه ای را ایده‌آل می گوییم که هیچ نقطه ای مناسب تر از آن وجود نداشته باشد . ثابت کنید حداکثر یک نقطه ایده‌آل برای احداث منبع آب وجود دارد.

۳) n تیم والیبال دو به دو (هر دو تیم دقیقاً یک بار) با هم مسابقه داده‌اند . برای هر دو تیم متمایز مانند B, A دقیقاً t تیم وجود دارند که از هر دو تیم B, A باخته اند . ثابت کنید $n = ۴t + ۳$.
(توجه کنید که در والیبال تساوی وجود ندارد .)

مرحلهٔ دوم بیست ویکمین المپیاد ریاضی کشور

۴) برای هر سه عدد حقیقی z,y,x با شرط $xyz = -۱$ ، نامساوی زیر را ثابت کنید:

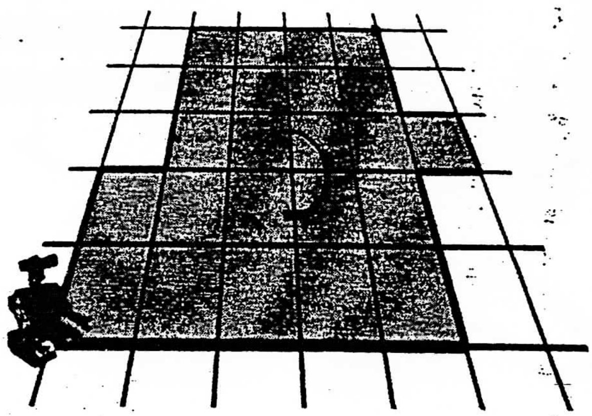
$$x^۴ + y^۴ + z^۴ + ۳(x+y+z) \geq x^۲/y + x^۲/z + y^۲/z + y^۲/x + z^۲/x + z^۲/y$$

۵) زاویهٔ $\widehat{A}$ کوچک ترین زاویهٔ مثلث ABC می باشد . نقطهٔ D روی کمان کوچک تر BC از دایره محیطی مثلث ABC واقع است .
عمود منصف های AC, AB با خط AD به ترتیب در نقاط N, M برخورد می نمایند. نقطه T محل برخورد CN, BM است . ثابت کنید

$$BT + CT \leq ۲R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث ABC است .

۶) یک روبات از یک رأس دل خواه روی صفحهٔ شطرنجی بزرگ شروع به حرکت کرده و هر بار یک واحد به یکی از جهت های اصلی روی اضلاع صفحهٔ شطرنجی حرکت می کند . این روبات دارای دو خانهٔ حافظهٔ B, A است که در ابتدای کار در هر دو خانه عدد صفر قرار دارد .
در هر مرحله بر حسب این که حرکت به سمت شمال ، جنوب ، شرق یا غرب باشد ، به ترتیب ، به خانهٔ A یکی اضافه می شود ، از خانهٔ A یکی کم می شود ، به خانهٔ B به اندازهٔ عدد خانهٔ A اضافه می شود یا از خانهٔ B به اندازهٔ عدد خانهٔ A کم می شود . فرض کنید روبات مسیری را طی کند که خودش را قطع نکرده و در نهایت به جای اول خود بازگردد . ثابت کنید در انتهای مسیر قدر مطلق مقدار خانهٔ حافظهٔ B ، برابر با مساحت درون شکلی است که روبات پیموده .



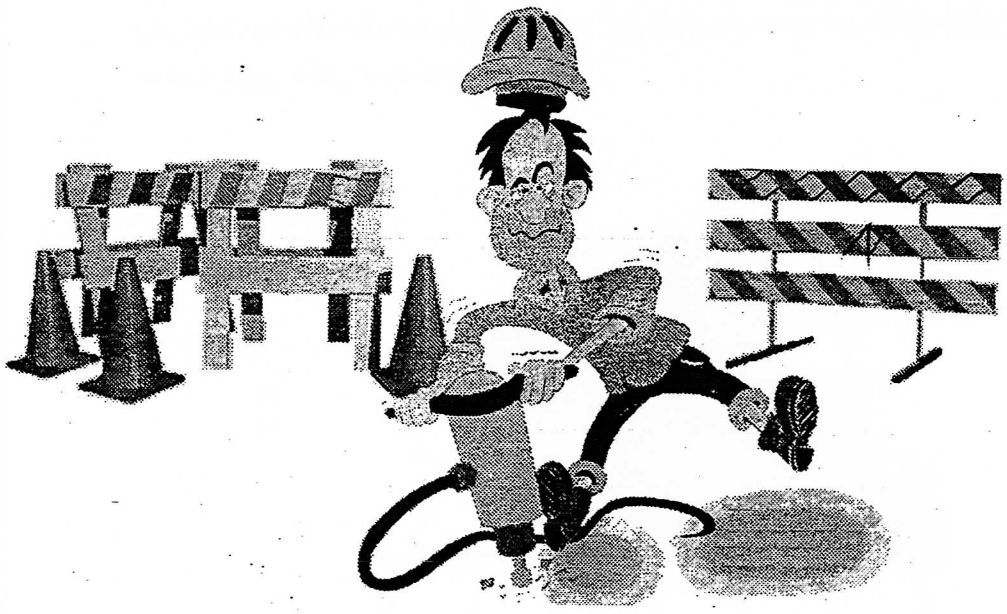
مرحلهٔ دوم بیست ودومین المپیاد ریاضی کشور

۱) در مثلث قائم الزاویهٔ $\overset{\triangle}{ABC}$ ($\widehat{A} = 90°$)، نقطهٔ D محل برخورد نیمساز داخلی زاویهٔ A با ضلع BC و نقطهٔ I_a مرکز دایرهٔ محاطی خارجی نظیر زاویهٔ A است. (I_a محل برخورد نیمسازهای زوایای خارجی B و C است.) ثابت کنید

$$\frac{AD}{DI_a} \leq \sqrt{2} - 1$$

۲) فرض کنید $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای این خاصیت است که $f(x) - 3x$ و $f(x) - x^3$ توابعی صعودی اند. نشان دهید $f(x) - x^2 - x$ نیز صعودی است. (تابع g را صعودی گوییم هر گاه اگر $x \leq y$ آنگاه $g(x) \leq g(y)$)

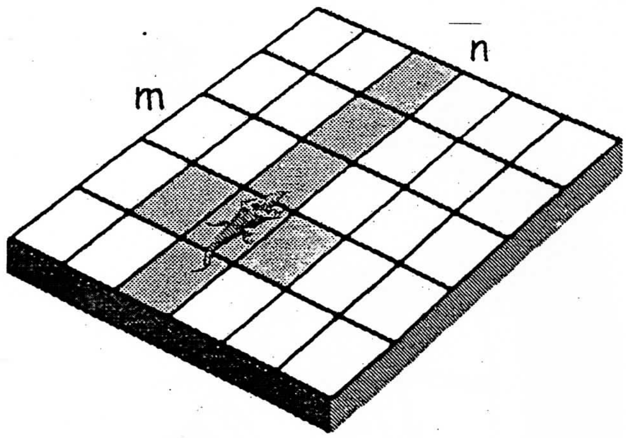
۳) وزارت راه مرمت ۲۴۰۰ جاده را به ۸۰ شرکت خصوصی واگذار کرده است. این جاده‌ها ۱۰۰ شهر را به یکدیگر متصل می‌کنند. هر جاده بین دو شهر است و بین هر دو شهر حداکثر یک جاده کشیده شده است. می‌دانیم هر شرکت وظیفهٔ مرمت ۳۰ جاده از بین آن‌هایی که دست کم در یکی از دو سرش نمایندگی دارد به عهده گرفته است. نشان دهید شهری وجود دارد که حداقل ۸ شرکت در آن نمایندگی دارند.



۴) همهٔ توابع $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ را بیابید که برای هر m,n طبیعی، $m+n$ بر $f(m)+f(n)$ بخش پذیر باشد.

۵) نیمساز داخلی زاویهٔ A از مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، ضلع BC و دایرهٔ محیطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را، به ترتیب، در D و M قطع می‌کند. خطی گذرنده از نقطهٔ D دایرهٔ به مرکز M و به شعاع MB را در X و Y قطع کرده است. ثابت کنید خط AD زاویهٔ $\widehat{XAY}$ را نصف می‌کند.

۶) مهرهٔ تمساح در جدول $m\times n$ $(m\geq ۴)$ می‌تواند همهٔ خانه‌های هم‌ستون خودش و همین طور خانه‌های مجاور هم‌سطر خودش را تهدید کند. حداقل چه تعداد مهرهٔ تمساح لازم است در جدول گذاشته شود تا هر خانه دست کم توسط یک تمساح تهدید شود؟ (توجه کنید که همهٔ تمساح ها باید عمودی باشند.)

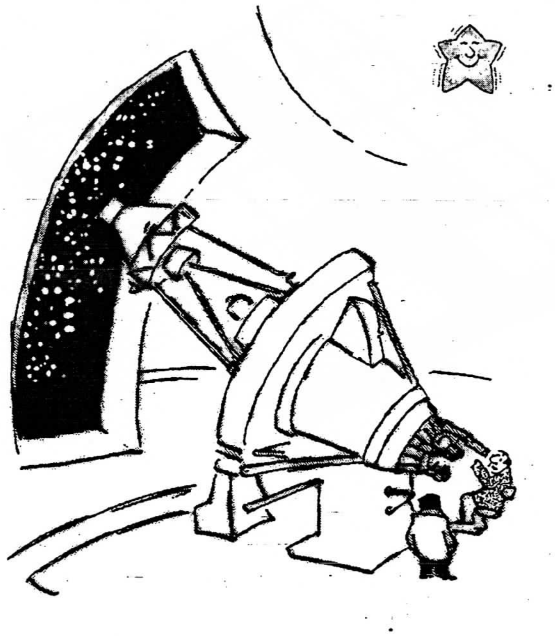


۱) n عددی طبیعی بزرگ‌تر از یک و p عددی اول است که $n|p-۱$ و $p|n^۳-۱$. نشان دهید $۴p-۳$ مربع کامل است.

توضیح. $a|b$ یعنی b بر a بخش‌پذیر است، به عبارت دیگر a مقسوم‌علیه b است. مثلاً $۲|۶$.

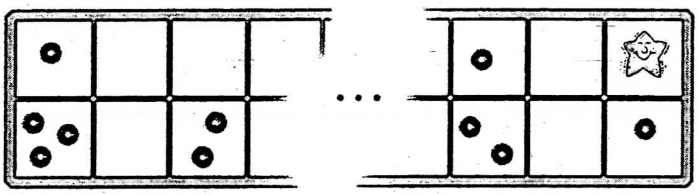
۲) در مثلث ABC، $\widehat{A}=۶۰°$. نقطهٔ متغیر D روی پاره‌خط BC را در نظر بگیرید. فرض کنید $O_۱$ مرکز دایره محیطی مثلث ABD و $O_۲$ مرکز دایره محیطی مثلث ACD باشد. محل تقاطع $BO_۱$ و $CO_۲$ را M و مرکز دایره محیطی مثلث $DO_۱O_۲$ را N می‌نامیم. ثابت کنید خط MN، از نقطه ثابتی می‌گذرد.

۳) کهکشان راه دوغی (!) بیش از یک میلیون ستاره دارد. نشان دهید، هر لحظه، فاصله‌های دوبه‌دوی این ستاره‌ها شامل دست‌کم ۷۹ عدد متمایز است (هر ستاره را یک نقطه فرض کنید).

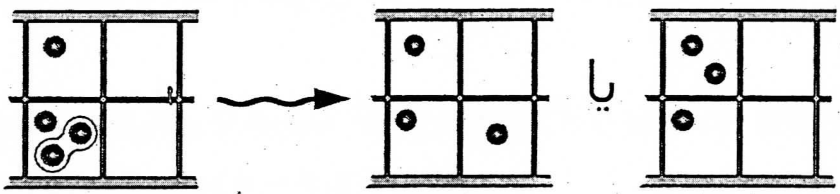


تاریخ: ۸۴/۲/۶ زمان: ۱۴:۰۰ تا ۱۸:۳۰

۴) در برخی از خانه‌های جدولی $2 \times n$ تعدادی مهره قرار دارد.



اگر در خانه‌ای بیش از یک مهره وجود داشته باشد می‌توانیم دو مهره از آن خانه خارج کنیم و در عوض یک مهره در خانه سمت راستش و یا یک مهره در خانه بالایی‌اش قرار دهیم.



فرض کنید در ابتدا دست‌کم 2^n مهره در جدول وجود داشته باشد. ثابت کنید می‌توان مهره‌ها را طوری جابه‌جا کرد که یک مهره به خانه انتهایی، که در شکل با ستاره مشخص شده است، برسد.

۵) BC قطر یک دایره و XY وتری عمود بر BC است. نقاط P و M به ترتیب روی XY و CY یا امتداد آن‌ها به‌گونه‌ای قرار گرفته‌اند که $CY \| PB$ و $CX \| MP$. محل تقاطع CX و PB را K می‌نامیم. ثابت کنید $PB \perp MK$.

۶) تمام توابع $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$،

$$(x+y)f(f(x)y) = x^2 f(f(x)+f(y))$$

منظور از $\mathbb{R}^+$ مجموعه اعداد حقیقی مثبت است (توجه کنید صفر عددی مثبت نیست!).

باسمه تعالی

مرحله‌ی دوم بیست و چهارمین المپیاد ریاضی

زمان: چهارشنبه ۱۳۸۵/۱/۳۰   مدت: چهار و نیم ساعت

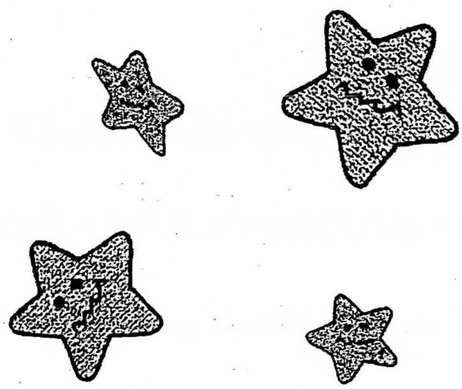
قسمت اول   هر سؤال ۷ نمره دارد.

---

۱) فرض کنید دایره‌ی $C_۲$ از مرکز دایره‌ی $C_۱$ گذشته و آن را در نقاط M و N قطع کرده است. نشان دهید اگر نقاط A و B دو سر قطر دلخواهی از $C_۱$ و A' و B' محل تقاطع خط‌های AM و BN با دایره‌ی $C_۲$ باشند، $A'B'$ برابر شعاع دایره $C_۱$ است.

۲) همه‌ی چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی $P(x,y)$ را بیابید که برای هر x و y داشته باشیم $P(x+y,x-y)=۲P(x,y)$.

۳) در طول شب، ستاره‌های آسمان، در بازه‌های زمانی مختلف، قابل رویت هستند. فرض کنید از بین هر k ستاره ($k>۱$)، دست‌کم دوتایشان را می‌توان در یک لحظه در آسمان دید. نشان دهید می‌توانیم $k-۱$ عکس در لحظات مختلف از سرتاسر آسمان بگیریم که هر کدام از آن ستاره‌ها، دست‌کم در یکی از عکس‌ها دیده شود. (تعداد ستاره‌ها متناهی است. لحظاتی که ستاره‌ی nام در آسمان دیده می‌شود را بازه‌ی بسته $[a_n,b_n]$ بنامید که در آن $a_n<b_n$)



باسمه تعالی

مرحله‌ی دوم بیست و چهارمین المپیاد ریاضی

زمان: پنج‌شنبه ۱۳۸۵/۱/۳۱ مدت: چهار و نیم ساعت

قسمت دوم هر سؤال ۷ نمره دارد.

---

۴) الف) عدد طبیعی m بزرگ‌تر از یک است. ثابت کنید تنها متناهی عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $mn + 1$ بر $m + n$ بخش‌پذیر است.

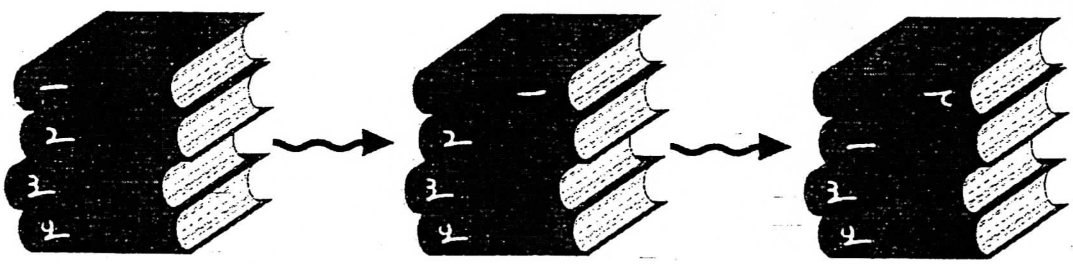
ب) برای اعداد طبیعی متمایز $m, n > 2$ ثابت کنید دنباله‌ی $a_0, a_1, \ldots, a_k$ از اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ موجود است که $a_0 = m$ و $a_k = n$ و برای هر $i = 0, 1, \ldots, k - 1$ داریم $a_i + a_{i+1} \mid a_i a_{i+1} + 1$.

۵) نقاط A و B و C و D، با همین ترتیب، روی دایره‌ای قرار دارند. نشان دهید تعداد نقطه‌های روی دایره، مانند M، که

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MD}{MC}$$

چهار تاست و به‌علاوه قطرهای چهارضلعی حاصل از آن نقطه‌ها بر هم عمودند.

۶) تعدادی کتاب روی هم قرار گرفته‌اند. فردی ابتدا کتاب بالایی را پشت و رو می‌کند، سپس دو کتاب بالایی را هم‌زمان پشت و رو می‌کند، بعد سه کتاب بالایی را هم‌زمان پشت و رو می‌کند و الی آخر. پس از این که به آخرین کتاب رسید همان کار را از ابتدا شروع می‌کند. ثابت کنید پس از تعدادی جابجایی، کتاب‌ها دقیقاً به همان وضع اول برمی‌گردند.

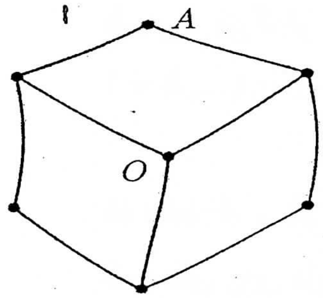


به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

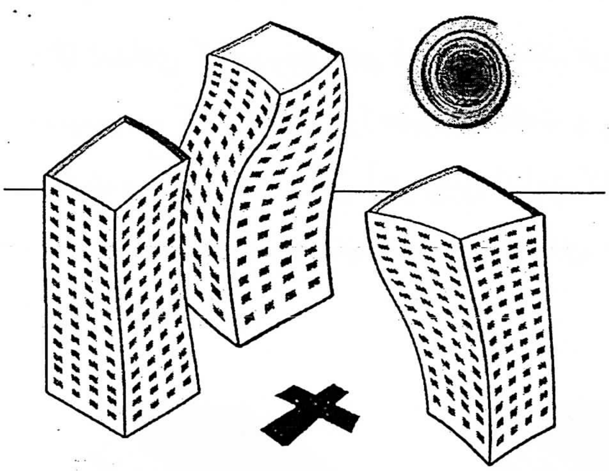
سه‌شنبه، ۴ اردیبهشت ۱۳۸۶ — روز اول — زمان: چهار ساعت و نیم

۱) در مثلث ABC زاویه‌ی A قائمه است. نقطه‌ی M وسط ضلع BC است. نقطه‌ی D را روی ضلع AC به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AD=AM$. محل برخورد دوم دایره‌های محیطی مثلث‌های AMC و BDC را P می‌نامیم. نشان دهید خط CP نیم‌ساز زاویه‌ی ACB است.



۲) دو رأس مکعبی را O و A نامیده‌ایم به طوری که OA قطر یکی از وجوه مکعب است. تعداد مسیرهای به طول ۱۳۸۶ از O به خودش بیش‌تر است یا از O به A؟ (یک مسیر به طول n عبارت است از دنباله‌ای از $n+1$ رأس مکعب که هر دو رأس متوالی در دنباله، دو سر یک ضلع مکعب باشند.)

۳) در شهری تعدادی ساختمان وجود دارد. می‌گوییم ساختمانی به ساختمان دیگر مشرف است اگر خط واصل از بالای ساختمان اول به بالای ساختمان دوم با زمین زاویه‌ای بیش از ۴۵ درجه بسازد. می‌خواهیم در مکانی داده‌شده ساختمان جدیدی بسازیم. نشان دهید اگر ساختمان‌های قبلی به هم مشرف نباشند می‌توان این کار را طوری انجام داد که باز هم هیچ ساختمانی به دیگری مشرف نباشد. شهر را صفحه‌ای افقی و هر ساختمان را پاره‌خطی عمودی بر روی صفحه در نظر بگیرید.



بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

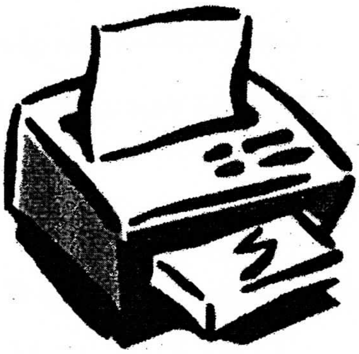
چهارشنبه، ۵ اردیبهشت ۱۳۸۶ | روز دوم | زمان: چهار ساعت و نیم

۴) نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، می‌توان n عدد طبیعی متمایز یافت که مجموع آن‌ها مربع کامل و حاصل‌ضرب آن‌ها مکعب کامل باشد.

۵) دو دایره‌ی C_1 و C_2 در نقطه‌ی P بر هم مماس خارجی هستند و A نقطه‌ای داخل دایره‌ی C_1 است. دو مماس AM و AM' بر دایره‌ی C_2 رسم می‌کنیم (M و M' محل تماس مماس‌ها هستند). نقاط تقاطع دوم AM و AM' با دایره‌ی C_1 را، به ترتیب، N و N' می‌نامیم. نشان دهید

$$\frac{PN}{PN'} = \frac{MN}{M'N'}$$

۶) فرهاد برای جشنواره خوارزمی ماشینی طراحی کرده است که وقتی روشن می‌شود شروع به چاپ کردن اعداد طبیعی ویژه‌ای می‌کند. خاصیت این ماشین این است که برای هر عدد طبیعی n دقیقاً یکی از سه عدد n، $2n$ و $3n$ را چاپ می‌کند. می‌دانیم ماشین عدد ۲ را چاپ می‌کند. ثابت کنید عدد ۱۳۸۲۴ چاپ نمی‌شود.



بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

پنج‌شنبه، ۳ اردیبهشت ۱۳۸۸   روز اول   زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱) فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای درجه دو است که قدرمطلق مقدار آن در سه نقطه‌ی ۱−، ۰ و ۱ کم‌تر یا مساوی یک است. نشان دهید برای هر $x \in [-1,1]$،

$$|p(x)| \leq \frac{5}{4}.$$

۲) یک باغ مربعی‌شکل را به یک شبکه‌ی ۵۰×۵۰ از قطعات ۱ متر در ۱ متر تقسیم کرده‌ایم و در بعضی از قطعه‌ها یک درخت سیب، انار یا هلو کاشته‌ایم. می‌دانیم که مجاور هر درخت انار، دست‌کم یک درخت سیب و مجاور هر درخت هلو دست‌کم یک درخت انار و یک درخت سیب وجود دارد. به‌علاوه مجاور هر قطعه‌ای که در آن درختی نیست، از هر سه نوع درخت وجود دارد. (دو قطعه را مجاور گوییم اگر یک ضلع مشترک داشته باشند.)
نشان دهید تعداد قطعات خالی از ۱۰۰۰ تا بیش‌تر نیست.

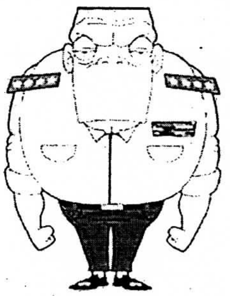
۳) فرض کنید نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A از مثلث ABC ضلع BC را در D و دایره‌ی محیطی مثلث را در M قطع کند. از D خطی رسم می‌کنیم که دو نیم‌خط MB و MC (با نقطه‌ی شروع M) را در نقاط P و Q قطع کند. ثابت کنید $P\widehat{A}Q \geq \widehat{A}$.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

جمعه، ۴ اردیبهشت ۱۳۸۸ | روز دوم | زمان: چهار ساعت و نیم



۴) $n(n+۲)$ سرباز تازه‌کار در n ستون برابر در کنار هم، به فاصله‌ی یک قدم، ایستاده‌اند. با فرمان فرمانده، هر سرباز یا سر جایش می‌ایستد یا به یکی از چهار جهت یک قدم بر می‌دارد! پس از جابه‌جایی، سربازها در $n+۲$ ستون برابر، به شکل منظم، قرار گرفته‌اند، به نحوی که دو سطر اول و آخر حذف و دو ستون به چپ و راست اضافه شده است. ثابت کنید n زوج است.

۵) اعداد طبیعی $a_۱ < a_۲ < \dots < a_n$ دارای این خاصیت هستند که برای هر i و j متمایز، a_i بر $a_j - a_i$ بخش‌پذیر است. نشان دهید برای هر $i < j$،

$$ia_j \le ja_i.$$

۶) ۱۱ نفر دور یک میز دایره‌ای به شکل منظم نشسته‌اند و ۱۱ کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۱ بین آن‌ها پخش شده‌است؛ ممکن است برخی کارتی نداشته باشند و برخی بیش از یک کارت داشته باشند. در هر مرحله یک نفر می‌تواند یکی از کارت‌های خود را به فرد مجاورش بدهد در صورتی که اگر شماره‌ی آن کارت i باشد، قبل و بعد از این عمل، مکان سه کارت $i-۱$، i و $i+۱$ تشکیل یک مثلث حاده‌الزاویه ندهند. (منظور از کارت شماره‌ی ۰ کارت شماره‌ی ۱۱ و منظور از کارت شماره‌ی ۱۲ کارت شماره‌ی ۱ است!)

فرض کنید در ابتدا کارت‌های ۱ تا ۱۱ به ترتیب در جهت عقربه‌های ساعت، به افراد داده شده باشد. ثابت کنید هیچ‌گاه کارت‌ها در دست یک نفر جمع نخواهد شد.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحلهٔ دوم بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

پنج‌شنبه، ۹ اردیبهشت ۱۳۸۹ | روز اول | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱) a و b دو عدد طبیعی‌اند و $a > b$. اگر دو عدد $ab - ۱$ و $a + b$ نسبت به هم اول باشند و دو عدد $ab + ۱$ و $a - b$ نیز نسبت به هم اول باشند، ثابت کنید $(ab + ۱)^۲ + (a - b)^۲$ مربع کامل نیست.

۲) n نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی از آن‌ها بر روی یک خط نیستند. ثابت کنید تعداد مثلث‌هایی که رئوس آن‌ها از بین این n نقطه باشند و مساحت آن‌ها یک باشد، از $\frac{۲}{۳}(n^۲ - n)$ بیش‌تر نیست.

۳) دایره‌های $W_۱$ و $W_۲$ در D و P متقاطع‌اند. A و B به ترتیب روی $W_۱$ و $W_۲$ هستند به طوریکه AB بر دو دایره مماس است. فرض کنید D نزدیک‌تر از P به خط AB باشد. AD دایره‌ی $W_۲$ را برای بار دوم در C قطع می‌کند. اگر M وسط BC باشد، ثابت کنید:

$$D\widehat{P}M = B\widehat{D}C$$

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحلهٔ دوم بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

جمعه، ۱۰ اردیبهشت ۱۳۸۹ | روز دوم | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴) ضریب‌های چندجمله‌ای $P(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ عددهایی حقیقی‌اند و

$$\min\{d, b + d\} > \max\{|c|, |a + c|\}$$

ثابت کنید که معادله‌ی $P(x) = ۰$ در بازه‌ی $[-۱,۱]$ جواب ندارد.

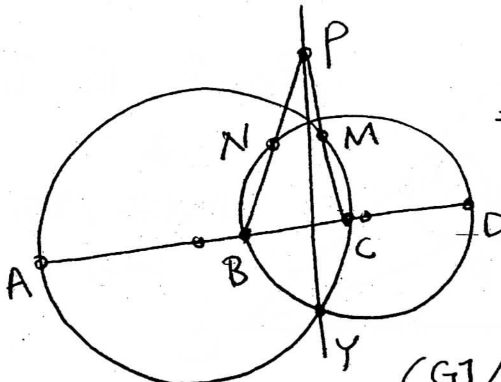
۵) در مثلث ABC، $\widehat{A} = ۶۰^\circ$. اضلاع AB و AC را از طرف B و C امتداد می‌دهیم و به ترتیب E و F را روی این امتدادها طوری در نظر می‌گیریم که $BE = CF = BC$. نقطه‌ی K محل برخورد دایره‌ی محیطی مثلث ACE با EF (به غیر از E) است. ثابت کنید K روی نیم‌ساز زاویه‌ی A قرار دارد.

۶) مدرسه‌ای n دانش‌آموز دارد و تعدادی کلاس فوق برنامه برای آن‌ها تدارک دیده شده است که هر دانش‌آموز می‌تواند در هر تعداد از کلاس‌ها ثبت نام کند. در هر کلاس حداقل دو دانش‌آموز ثبت نام کرده‌اند. می‌دانیم که اگر دو کلاس مختلف، حداقل دو دانش‌آموز مشترک داشته باشند، آن‌گاه تعداد اعضای آن دو کلاس، متفاوت است. ثابت کنید تعداد کلاس‌ها از $(n-۱)^۲$ بیشتر نیست.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

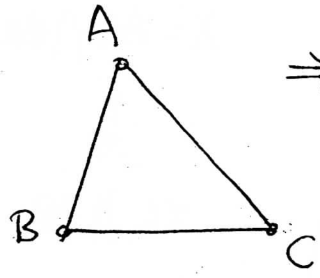
سوالات پیشنهادی المپیاد جهانی

- در این بخش مجموعه سوالات هندسه shortlist که ابتدا برای خودم و با نیت گردآوری و مرور نوشته بودم و کم کم به این نتیجه رسیدم که به عنوان تمرین برای دانش آموزان نیز مناسب است، آمده اند.
- حل کامل سوالات این بخش برای دانش آموزان دوره طلا و یا افرادی که هندسه خیلی قوی دارند مناسب است.



$\Rightarrow$ PY, DN, AM همرسند

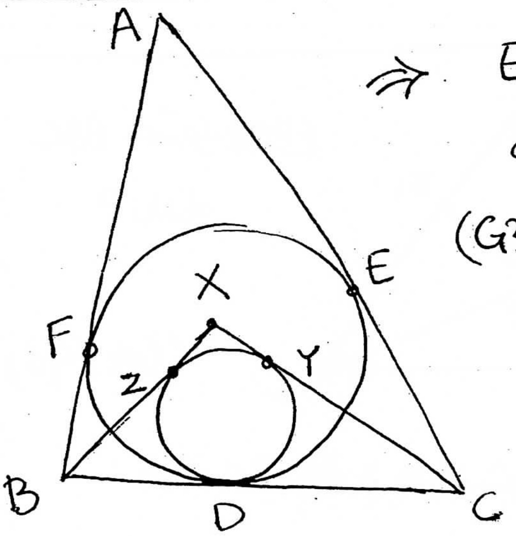
(G1/IMO01/95)



$\Rightarrow \exists X$ تنها :

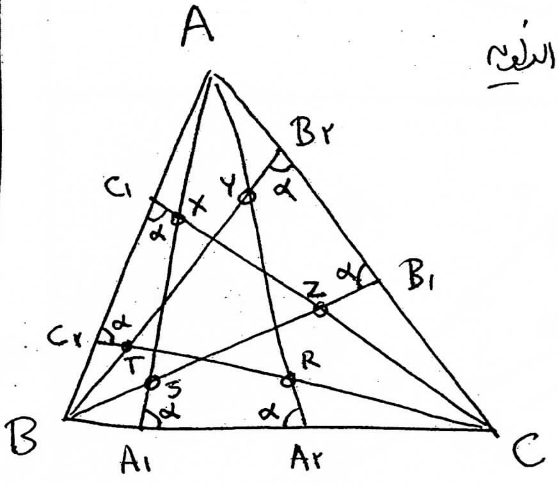
$XA^2+XB^2+AB^2$
$=XB^2+XC^2+BC^2$
$=XC^2+XA^2+CA^2$

(G2/95)



$\Rightarrow$ $EFZY$ محاطی

(G3/95)

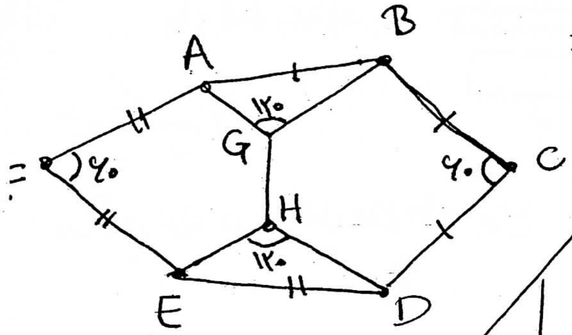


ABC حاده‌الزاویه

$\Downarrow$

$XYZRST$ محاطی

(G4/95)



$\Rightarrow GA+GB+GH+HD+HE \geq CF$

(G5/IMO05/95)

$A_1A_2A_3A_4$ چهاروجهی

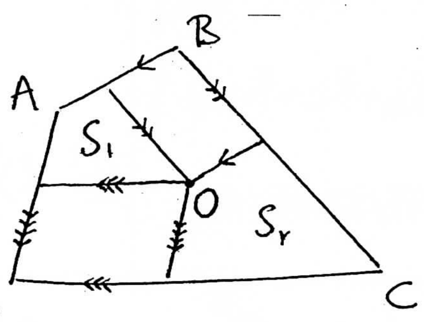
C کره محیطی آن

G مرکز ثقل ״

$A'_i = C \cap GA_i$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{I) } \prod GA_i \leq \prod GA'_i \\ \text{II) } \sum \frac{1}{GA'_i} \leq \sum \frac{1}{GA_i} \end{cases}$$

(G6/95)



O دلخواه

$\Downarrow$

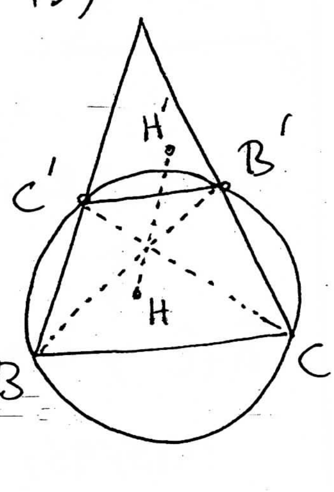
$\sqrt{S} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$

$\downarrow$

کل $ABCD$

(G7/95)

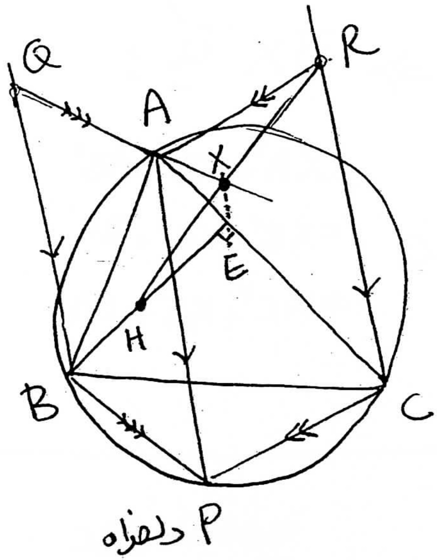
(G8/95)



$H = H_{\overset{\triangle}{ABC}}$
$H' = H_{\overset{\triangle}{AB'C'}}$

$\Downarrow$

BB'، CC' و HH' همرسند

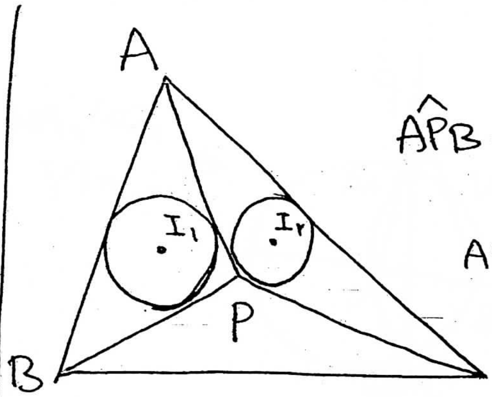


$X = AQ \cap HR$

$\Downarrow$

$XE \parallel AP$

(G1/96)

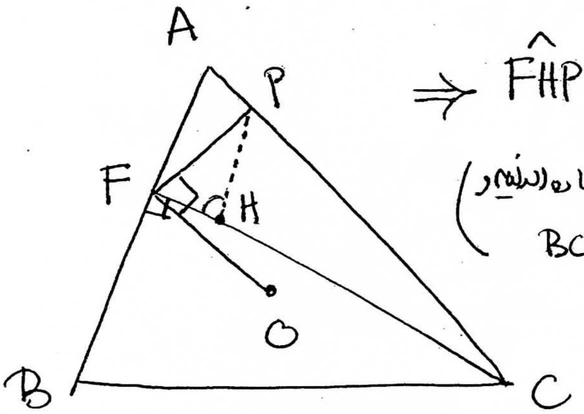


$\hat{APB}-\hat{C}=\hat{APC}-\hat{B}$

$\Downarrow$

AP و CI_2 و BI_1 همرسند

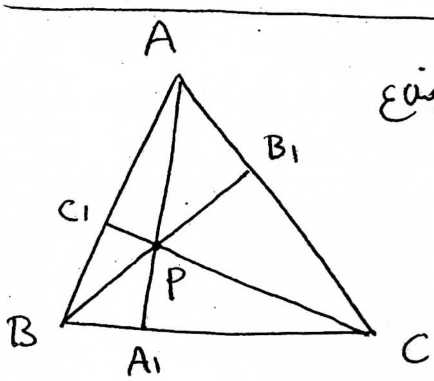
(G2/IMO2/96)



$\Rightarrow \hat{FHP}=\hat{A}$

(ABC حاده‌الزاویه، $BC > AC$)

(G3/96)

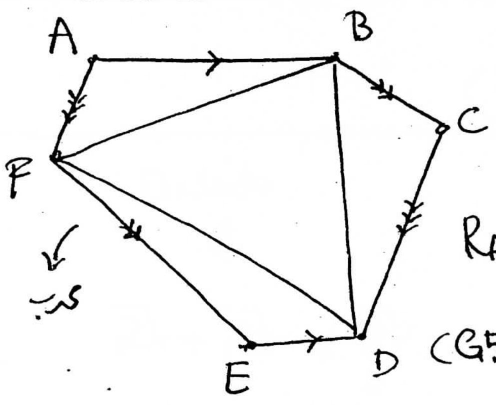


ABC متساوی‌الاضلاع

P دلخواه

(G4/96)

$\Rightarrow A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot C_1A_1 \geq A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A$



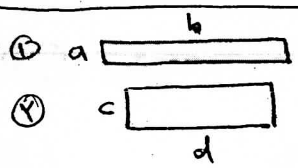
$R_A = R_{\hat{ABF}}$

$\Downarrow$

$R_A+R_C+R_E \geq \frac{P}{2}$

محیط

(G5/IMO05/96)



$a<c\leq d<b$

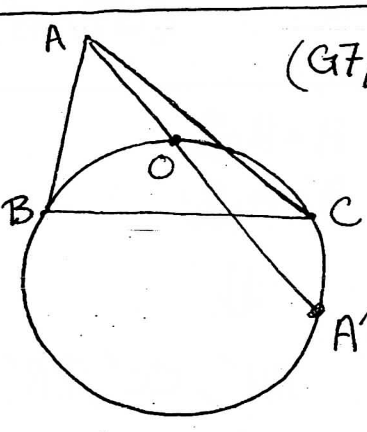
ثابت کنید:

مستطیل اول در مستطیل دوم جای می‌گیرد

$\Updownarrow$

$(b^2-a^2)^2 \leq (bd-ac)^2+(bc-ad)^2$

(G6/96)

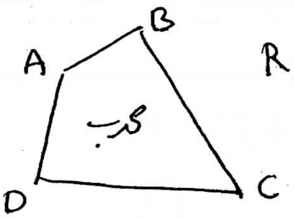


(G7/96)

$\Downarrow$

$OA'\cdot OB'\cdot OC' \geq 8R^3$

تساوی؟



$R_A = R_{\hat{DAB}}$

ثابت کنید

$R_A+R_C > R_B+R_D$

$\Updownarrow$

$\hat{A}+\hat{C} > \hat{B}+\hat{D}$

(G8/96)

F چندضلعی (نه لزوماً محدب)

O دلخواه

P = محیط F

D = مجموع فواصل O تا رئوس F

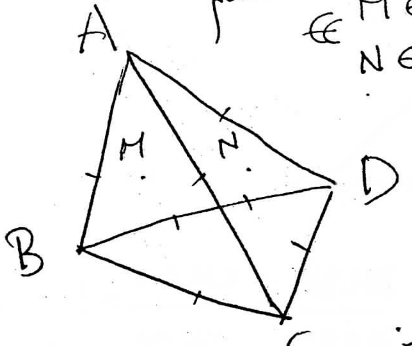
H = « « O « اضلاع «

$\Downarrow$

$D^2-H^2 \geq \frac{P^2}{4}$

(G9/96)

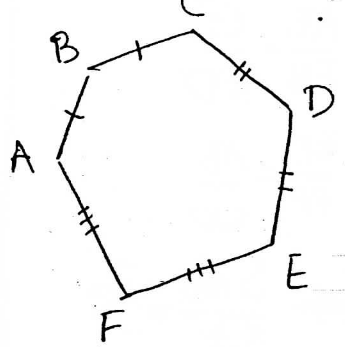
منتظم



(SL97)

$\in$ $M \in ABC$, $N \in ADC$ $\Rightarrow$ MN و BN و DM مثلث می‌سازند

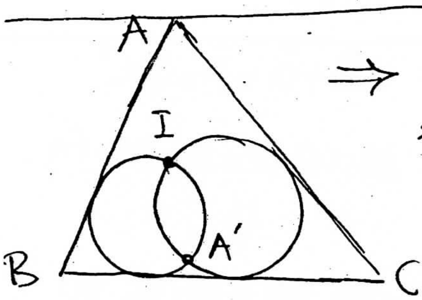
محدب



$\Rightarrow \dfrac{BC}{BE} + \dfrac{DE}{DA} + \dfrac{FA}{FC} \geqslant \dfrac{۳}{۲}$

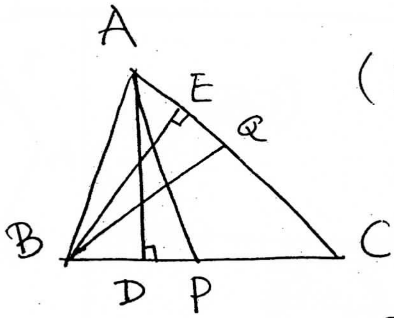
تساوی؟

(SL97)



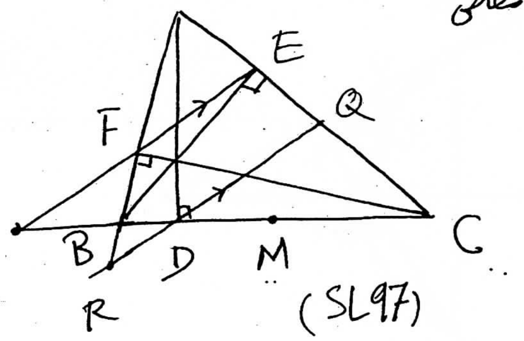
$\Rightarrow O_{AIA'}$, $O_{BIB'}$, $O_{CIC'}$ هم‌خط

(SL97)



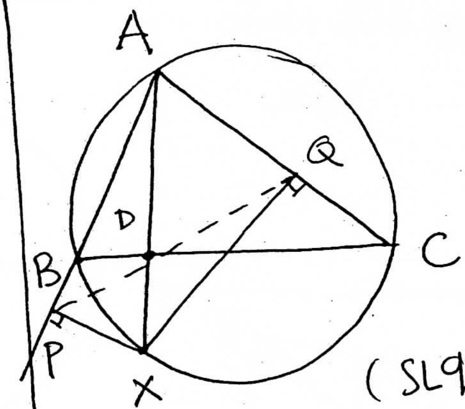
(SL97)

D, I, E هم‌خط $\Leftrightarrow$ P, O, Q هم‌خط



$\Rightarrow$ PRMQ محاطی

(SL97)



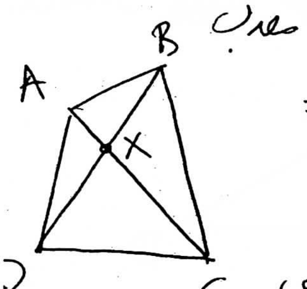
XD بر دایره به قطر PQ مماس است

$\Updownarrow$

$AB = AC$

(SL97)

محدب

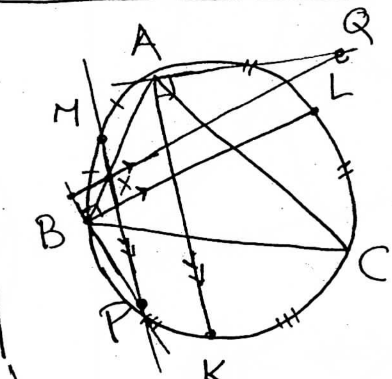


$XA.\sin A + XC.\sin C$
$= XB.\sin B + XD.\sin D$

$\Downarrow$

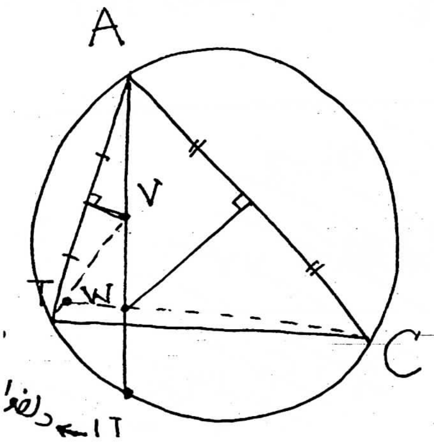
ABCD محاطی

(SL97)



KP, LQ, MX همرسند

(SL97)



A کمترین زاویه است

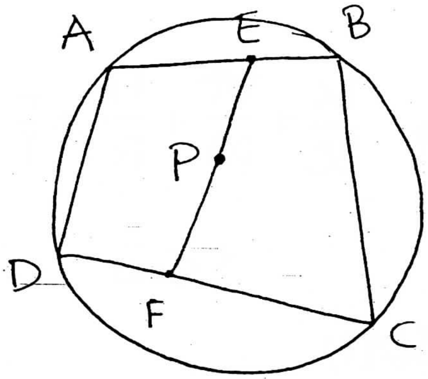
$\Downarrow$

$AU = BT + TC$

(IMO97/2)

IT ← دقیقه

احسنت

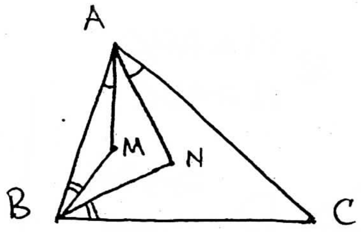


$$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}$$

$$\frac{EP}{PF}=\frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{APD}}}{S_{\overset{\triangle}{BPC}}}= \text{[illegible]}$$

(G2/98)



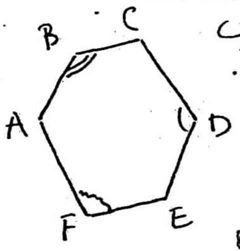
$$\Rightarrow \frac{AM.AN}{AB.AC}+\frac{BM.BN}{BA.BC}+\frac{CM.CN}{CA.CB}=1$$

(G4/98)

A′ قرینه A نسبت به BC

A′, B′, C′ هم‌خط $\Leftrightarrow OH=2R$

(G5/98)



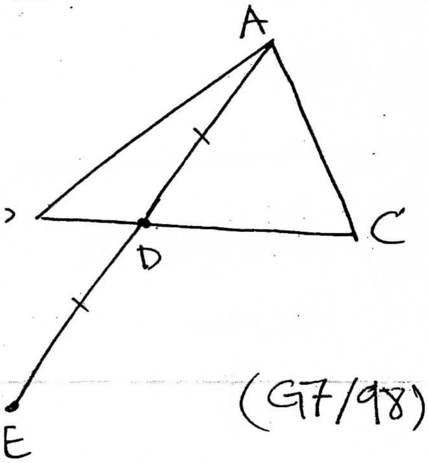
محدب $\hat{B}+\hat{D}+\hat{F}=360^\circ$

$AB.CD.EF=BC.DE.FA$

$\Downarrow$

$BC.DF.EA=EF.AC.BD$

(G6/98)

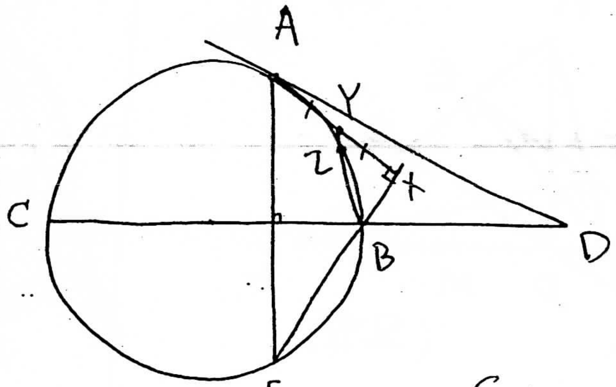


$\hat{C}=2\hat{B}$

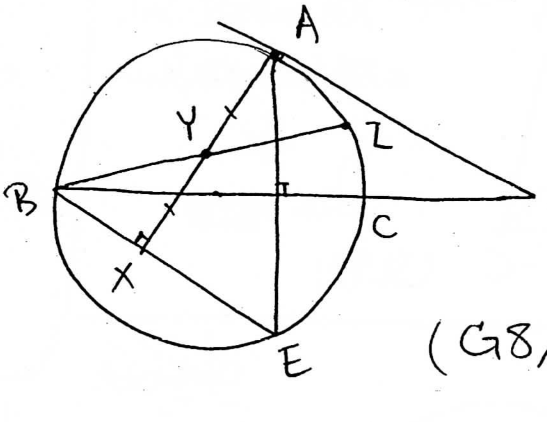
$CD=2BD$

$\Rightarrow E\hat{C}B+180^\circ=2E\hat{B}C$

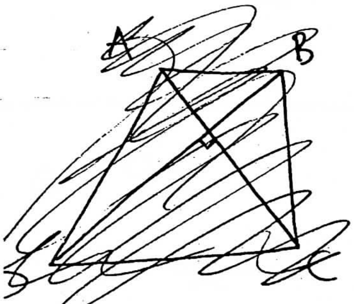
(G7/98)

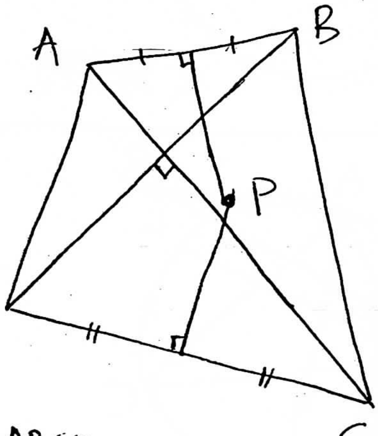


⇒ $C_{\overset{\triangle}{ADZ}}$ مماس بر BC



(G8/98)





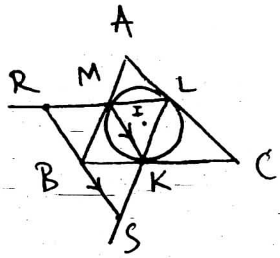
$AB \nparallel CD$

P داخل BCD

ABCD محاطی $\Leftrightarrow S_{\overset{\triangle}{PAB}} = S_{\overset{\triangle}{PCD}}$

(G1/98)

(IMO98/1)



⇒ $R\hat{I}S$ = حاده

(G3/98)

(IMO98/5)

P داخل مثلث ABC

$\Rightarrow \sum PA + \min\{PA,PB,PC\} \le a+b+c$

(G1/99)

---

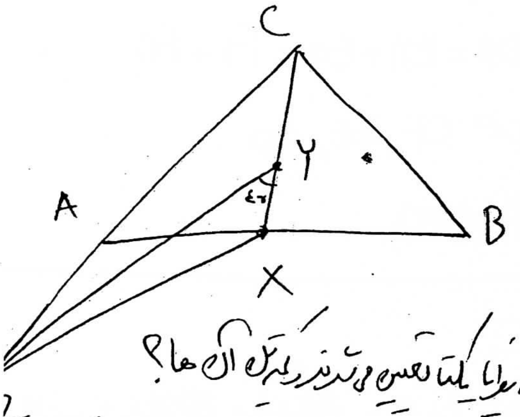
۵ نقطه

هیچ ۳ تایی هم خط نیستند

" ۴ " " دایره "

⟸ فقط ۴ تا از ۱۰ دایره‌ای که از ۳ تا از نقاط می‌گذرد، شامل دقیقاً یکی از ۲ نقطه دیگر است.

(G2/99)



$\frac{AX}{XB} = \frac{4}{5}$

$CY = 2XY$

$\hat{CXZ} + \hat{B} = 180°$

$\hat{XYZ} = 45°$

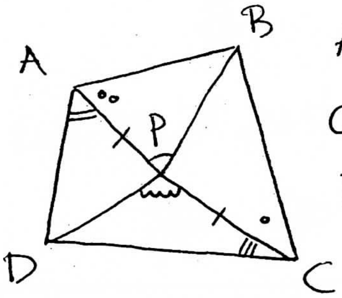
⟸ نشان دهید زوایا کاملاً تعیین می‌شوند و تعیین آن‌ها!

(G4/99)

A' محل برخورد دوم دایره گذرنده از A و B، عمود بر دایره محاطی و دایره گذرنده از A و C، عمود بر دایره محاطی است.

$\Rightarrow R_{A'B'C'} = \frac{r}{2}$

(G5/99)



$\hat{APB} = \hat{PAD} + \hat{PCD}$

$\hat{CPD} = \hat{PAB} + \hat{PCB}$

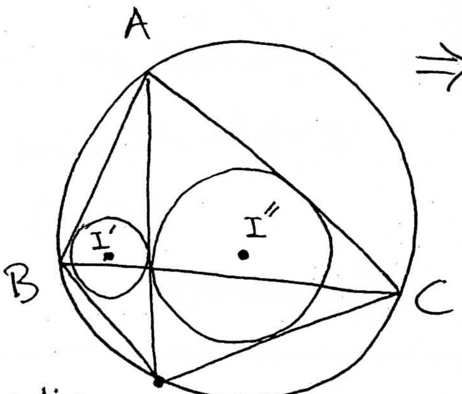
$PA = PC$

$\Downarrow$

$AB \cdot PC = BC \cdot PD$

و $CD \cdot PA = DA \cdot PB$

(G7/99)



X (دلخواه)

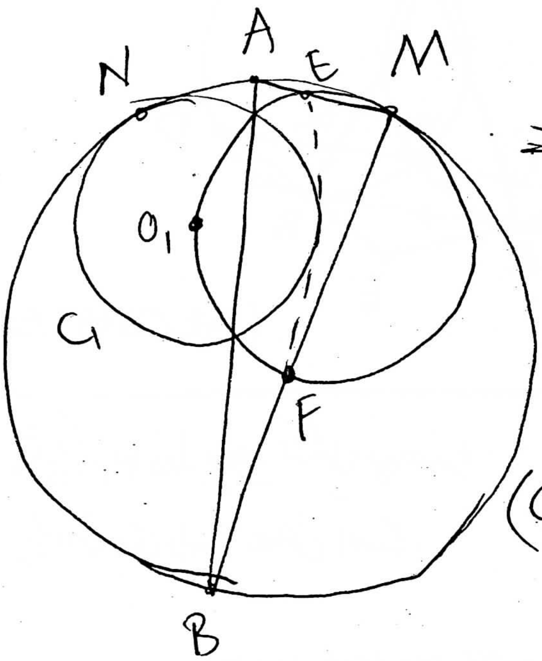
⟹ $C_{XI'I''}$ از نقطه‌ای ثابت می‌گذرد.

($\hat{ABC}$ روی دایره محیطی)

(G8/99)

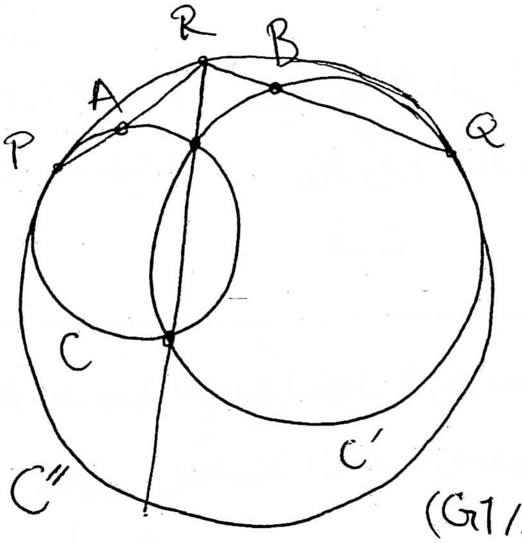
همه مجموعه‌های متناهی S شامل حداقل ۳ نقطه را بیابید که برای هر دو نقطه متمایز A و B در S، عمود منصف AB یک محور تقارن برای S باشد.

(G3/IMO1/99)



⟹ EF بر C_1 مماس است.

(G6/IMO5/99)

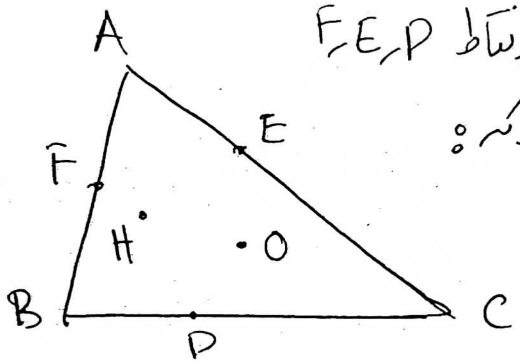


AB مماس مشترک C و C' است.

(تعمیم سؤال)

(C'' دلخواه)

(G1/2000)



ثابت کنید نقاط D، E، F وجود دارند که:

$DH+DO = EH+EO = FH+FO$

و AD، BE، CF همرسند.

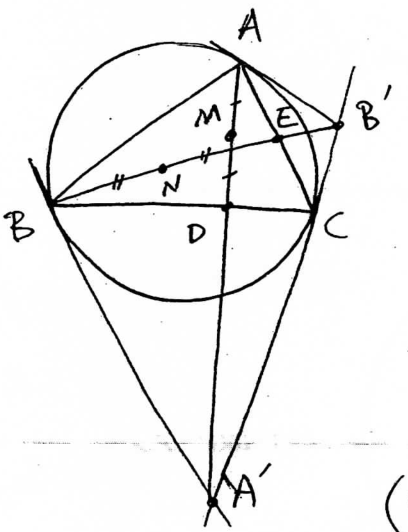
(G3/2000)

(G4/2000) $P_1P_2\dots P_n$ محاطی

$\Updownarrow$

اعداد a_i، b_i وجود دارند که:

$\forall i<j: \; P_iP_j = a_ib_j - a_jb_i$

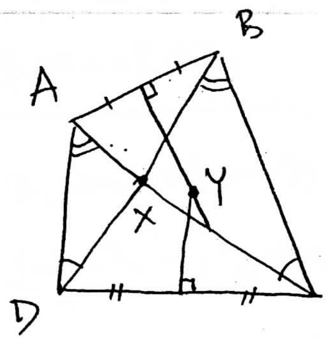


الف) $\hat{ABM} = \hat{BAN}$

ب) وقتی $\hat{ABM}$ ماکزیمم است، AC و BC را بیابید.

$(AB=1)$

(G5/2000)



$\hat{ADX} = \hat{BCX} < 90^\circ$

$\hat{DAX} = \hat{CBX} < 90^\circ$

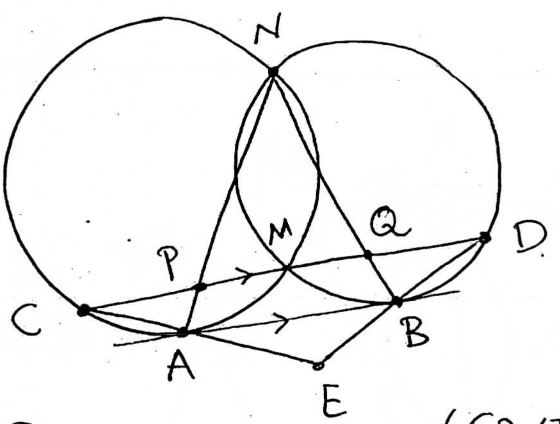
$\Rightarrow \hat{AYB} = 2\hat{ADX}$

(G6/2000)

۱۰ گانگستر ـ هیچ ۳ تایی هم‌خط نیستند.

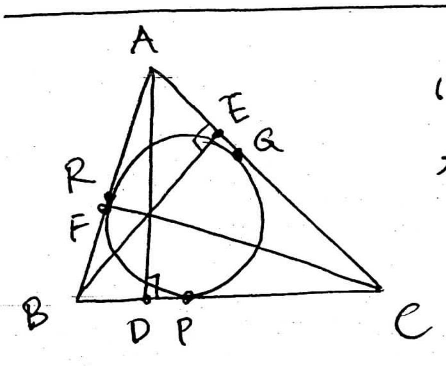
رأس ساعت هر کس نزدیکترین را می‌کشد.

G7/2000) حداکثر چند نفر زنده می‌مانند؟



$\Rightarrow PE = QE$

(G2/IMO1/2000)



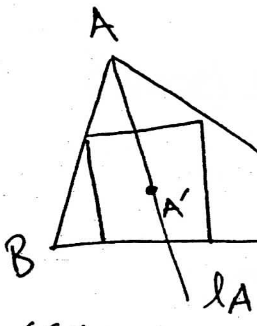
DE را نسبت به PQ قرینه می‌کنیم،

" " QR " " EF و

" " RP " " FD.

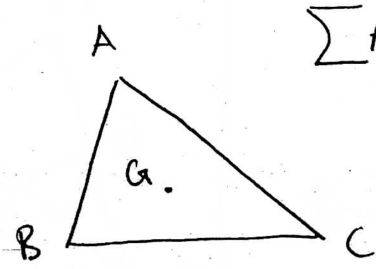
$\Longrightarrow$ مثلثی که ۳ خط جدید تشکیل می‌دهند، رئوسش روی دایره محاطی است.

(G8/IMO6/2000)



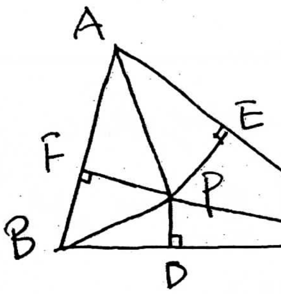
ℓ_A ، ℓ_B و ℓ_C را رسم کنید:

(G1/2001)



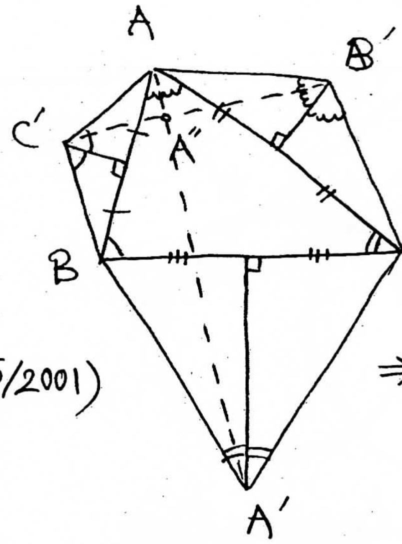
نقطه P کجا باشد تا $\sum AP.AG$ مینیمم شود؟ هم مقدار مینیمم را برحسب a، b، c بیابید.

(G~~2~~3/2001)



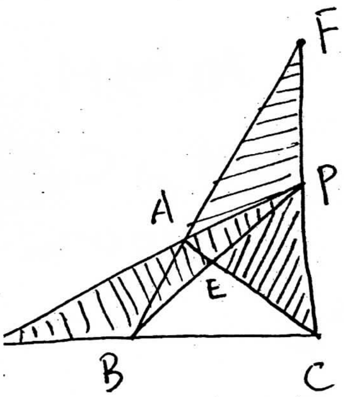
P کجا باشد تا $\prod \frac{PD}{PA}$ ماکزیمم شود؟ ماکزیمم در چه مثلث هایی؟

(G4/2001)



$\Rightarrow \sum \frac{A'A}{A'A''} = ?$

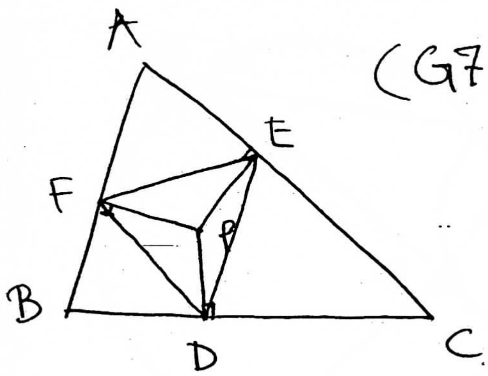
(G5/2001)



$K = S_{PAF} = S_{PBD} = S_{PCE}$

$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = K$

(G6/2001)



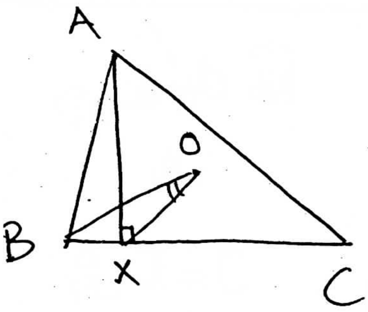
(G7/2001)

$P_{AEF} \leqslant P_{DEF}$

$P_{BFD} \leqslant P_{DEF}$

$P_{CDE} \leqslant P_{DEF}$

$\Longleftrightarrow P = O_{\overset{\triangle}{ABC}}$

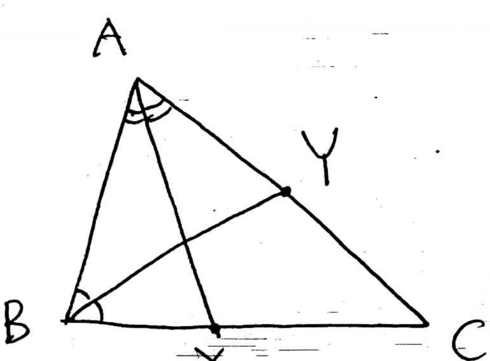


ABC حاده الزاویه

$\hat B > \hat C + 30°$

$\Rightarrow \hat A + B\hat O X < 90°$

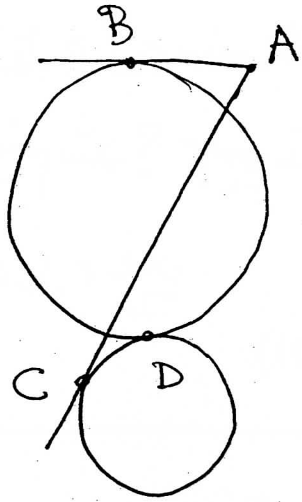
(G2/IMO1/2001)



$AB + BX = AY + YB$, $\hat A = 60°$

$\Rightarrow \hat B = ?$ (همه مقادیر)

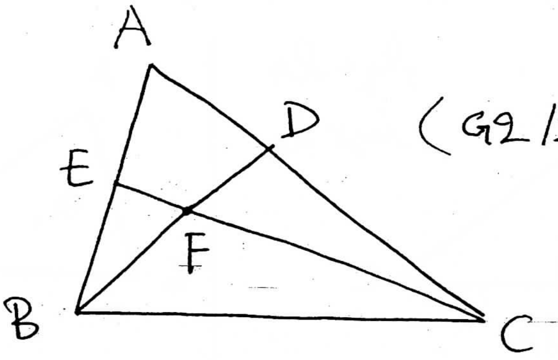
(G8/IMO5/2001)



در شکل:

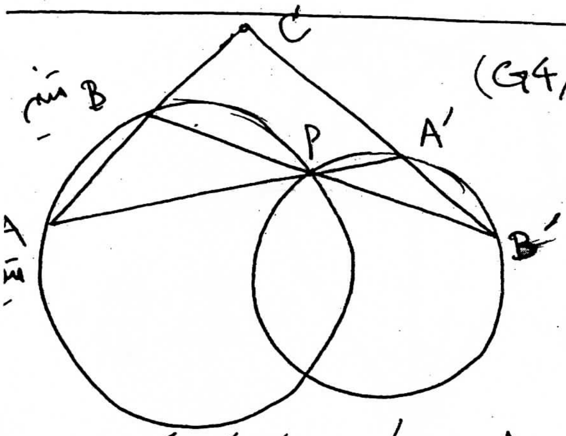
$\Rightarrow O_{\overset{\triangle}{BCD}} \in C_{\overset{\triangle}{ABC}}$

(G1/2002)



(G2/2002)

فرما $F\ (\widehat{AFB}=\widehat{BFC}=۱۲۰^\circ) \Rightarrow AB+AC \geq ۲DE$



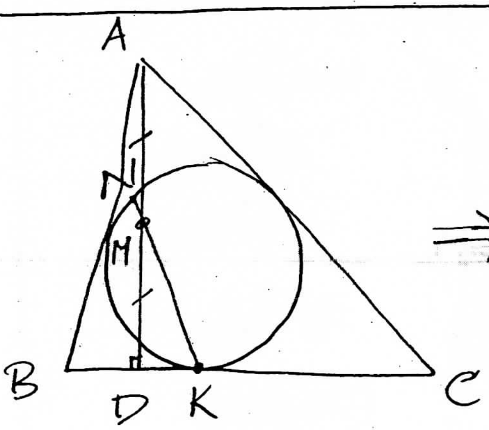
(G4/2002)

$\Rightarrow O_{\overset{\triangle}{AA'C}}$ روی یک دایره ثابت حرکت می‌کند

n نقطه در صفحه ـ هیچ ۳ تایی هم‌خط نیستند.

M و m بیشترین و کمترین مساحت از میان مساحت مثلث‌ها

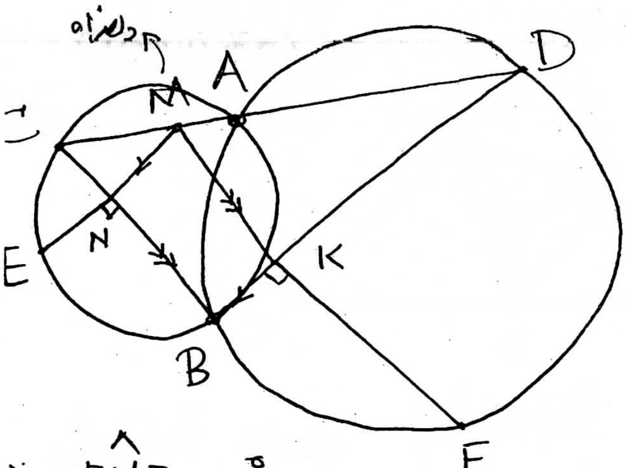
$\min\left\{\frac{M}{m}\right\} = ?$ (G5/2002)



M وسط AD

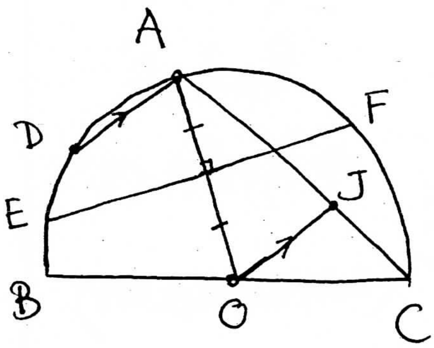
$\Rightarrow N$ در $C_{\overset{\triangle}{NBC}}$ مماس بر دایره محاطی

(G7/2002)



$\Rightarrow \widehat{EMF} = ۹۰^\circ$

(G8/2002)



D وسط کمان $\overset{\frown}{AB}$

$\Downarrow$

$J = I_{\overset{\triangle}{CEF}}$

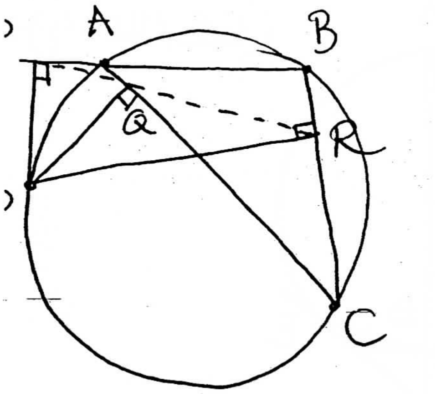
(G3/IMO2/2002)

n دایره واحد با مراکز O_1 و O_2 و ... و O_n در صفحه

هیچ خطی بیش از ۲ دایره را قطع نمی‌کند.

$$\Rightarrow \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{1}{O_iO_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{۴}$$

(G6/IMO6/2002)



$PQ = QR$

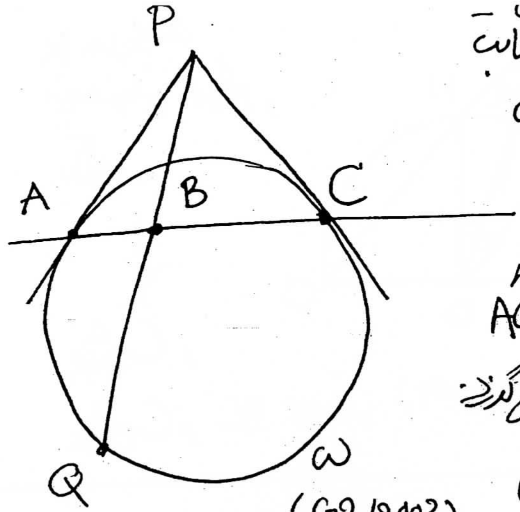
$\Updownarrow$

نیمساز $\hat{ABC}$ ،

" $\hat{ADC}$ و

AC همرسند.

(G1/IMO4/2003)



(G2/2003)

A ، B ، C ثابت

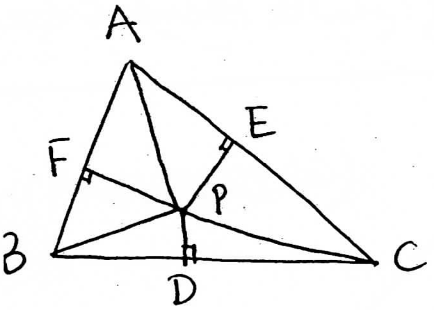
ω دلخواه

$\Downarrow$

نیمساز $\hat{AQC}$

از نقطه ثابتی می‌گذرد.

(روی AC)



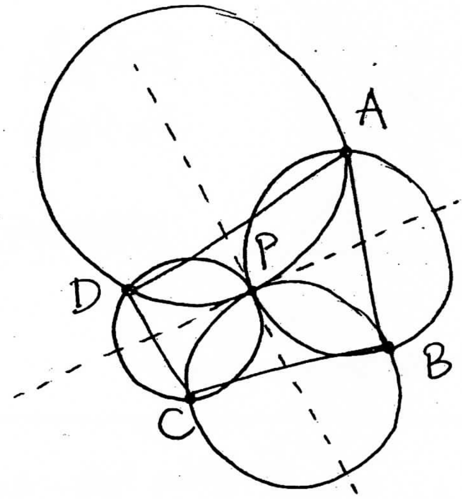
(G3/2003)

$$AP^2 + PD^2 = BP^2 + PE^2 = CP^2 + PF^2$$

$\Downarrow$

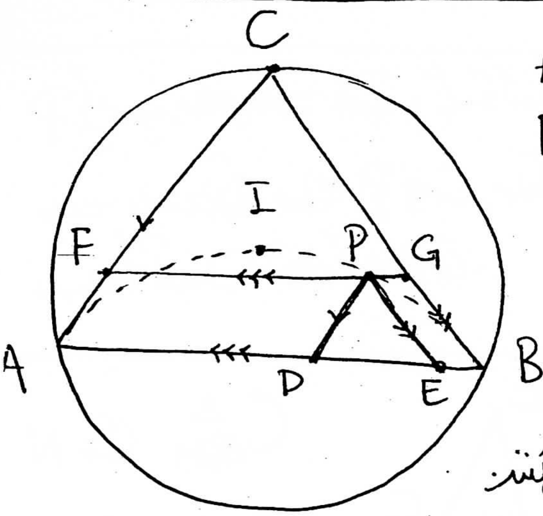
$P = O_{I_A I_B I_C}$

مرکز دایره محاطی خارجی



(G4/2003)

$$\Rightarrow \frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}$$



$AC = CB$

$P \in C_{\overset{\triangle}{AIB}}$

$\Downarrow$

EG و FD

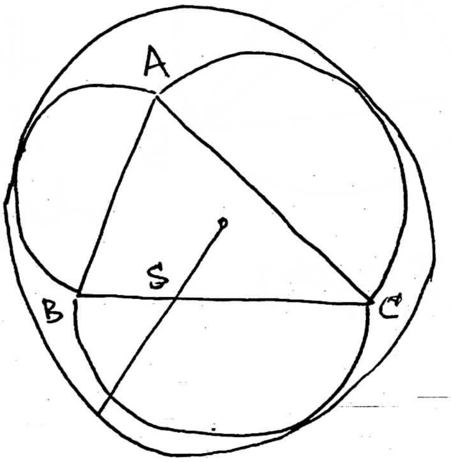
روی C_{ABC}

همدیگر را قطع می‌کنند.

(G5/2003)

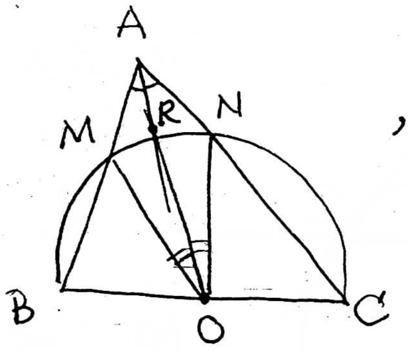
یک ۶ ضلعی محدب دارای این خاصیت است که فاصله میان مراکز هر دو ضلع روبرویش $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر جمع طول این دو ضلع است. ثابت کنید همه زاویه‌هایش با هم برابرند.

(G6/IMO3/2003)



$$\Rightarrow \frac{P}{2} < S \leq \frac{P}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) r$$

(G7/2003)

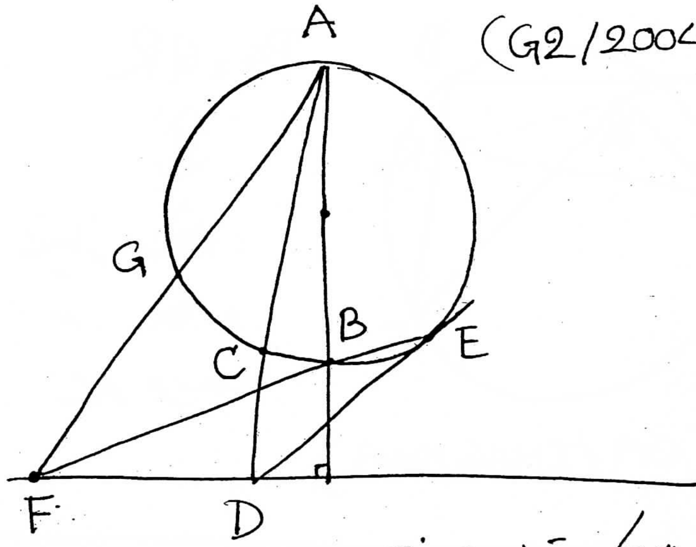


R محل برخورد نیمسازهای $\hat{MAN}$ و $\hat{MON}$.

$\Downarrow$

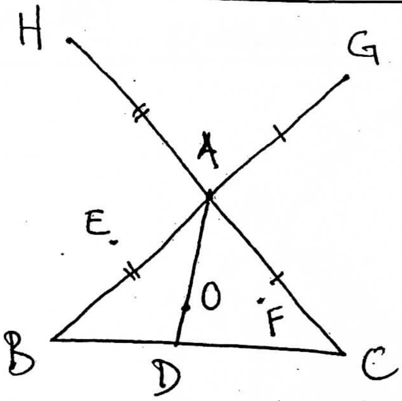
$C_{\triangle BMR}$ و $C_{\triangle CNR}$ و BC همرسند.

G1/IMO1/2004)



(G2/2004)

$\Longleftarrow$ ثابت کنید قرینه G نسبت به AB روی FC است.

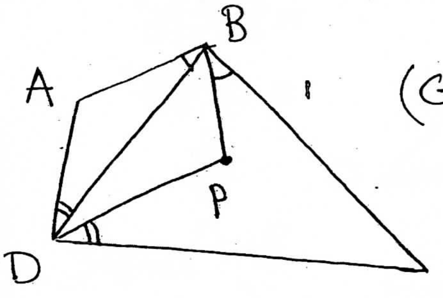


$E=O_{\triangle ABD}$

$F=O_{\triangle ACD}$

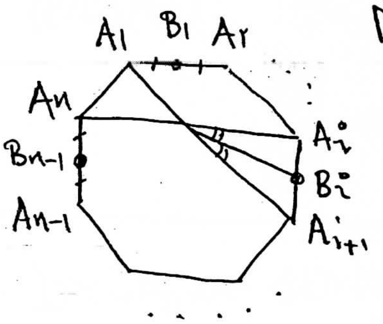
(G3/2004)

مستطیل EFGH $\Longleftrightarrow$ $\hat{C}-\hat{B}=90^\circ$



(G4/IMO5/2004)

AP=PC $\Longleftrightarrow$ ABCD محاطی



$A_1A_2\ldots A_n$ n ضلعی منتظم

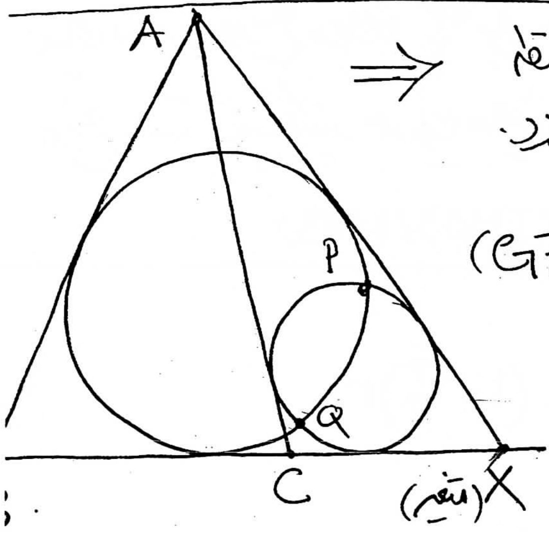
$\Downarrow$

$$\sum_{i=1}^{n-1} A_1\hat{B_i}A_n=180^\circ$$

(G5/2004)

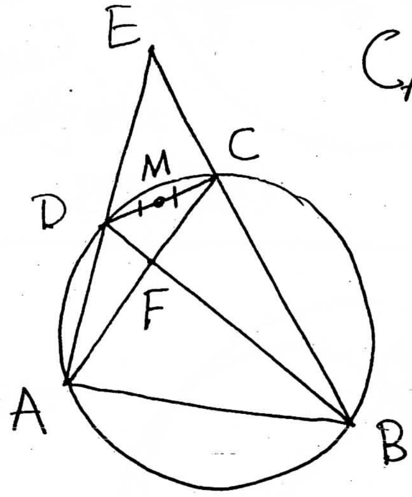
P یک چندضلعی محدب است. ثابت کنید یک شش ضلعی محدب وجود دارد که درون P است و حداقل ۷۵ درصد مساحت آن را اشغال کرده است.

(G6/2004)



$\Longrightarrow$ PQ از نقطه ثابت می‌گذرد.

(G7/2004)



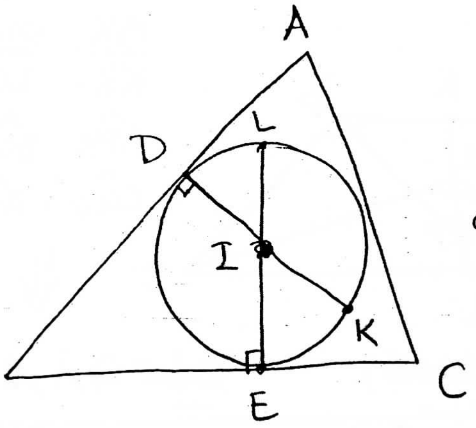
N روی $C_{\triangle ABM}$

$$\frac{AN}{BN}=\frac{AM}{BM}$$

$\Downarrow$

N, F, E هم‌خطند.

(G8/2004)

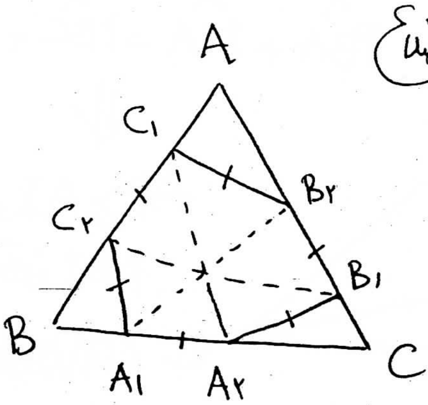


$a+c=3b$

$\Downarrow$

ACKL محاطی

(G1/2005)

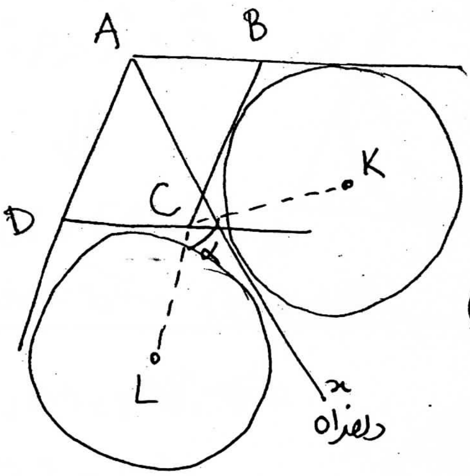


ABC متساوی الاضلاع

$\Downarrow$

A_1B_2 و B_1C_2 و C_1A_2 همرسند

(G2/IMO1/2005)

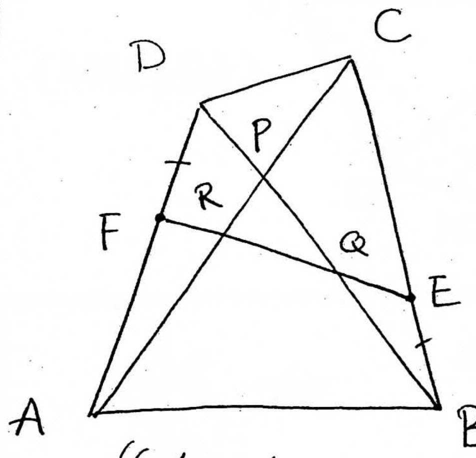


Ax دلخواه

$\Downarrow$

$\hat{\alpha} =$ ثابت

(G3/2005)



$AD=BC$

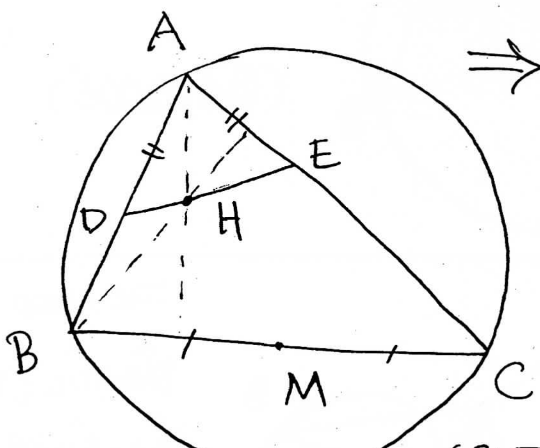
F و E متغیر

$\Downarrow$

$C_{\triangle PQR}$ نقطه ثابت دارد

(غیر از P)

(G4/IMO5/2005)



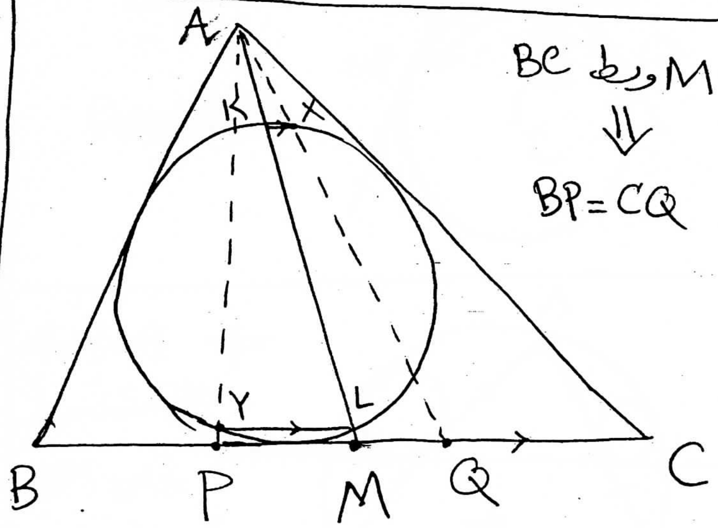
$\Rightarrow$ MH بر وتر مشترک

C_{ABC} و

C_{ADE}

عمود است

(G5/2005)

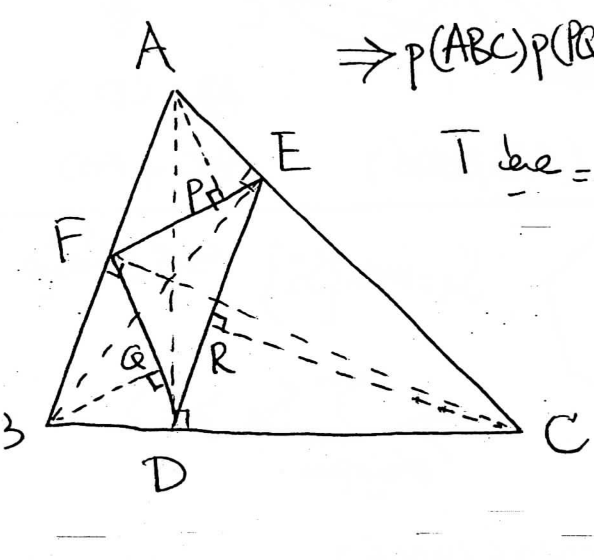


M وسط BC

$\Downarrow$

$BP=CQ$

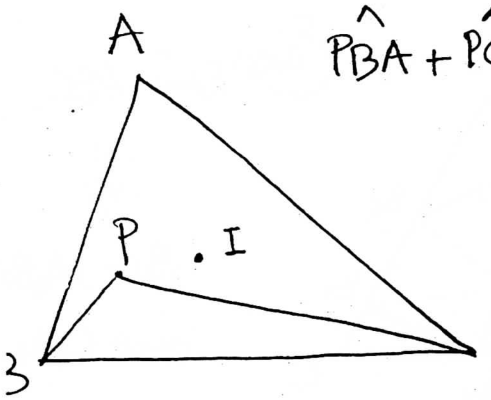
(G6/2005)



$\Rightarrow p(ABC)p(PQR) \geq p(DEF)^2$

محیط T $= p(T)$

(G7/2005)



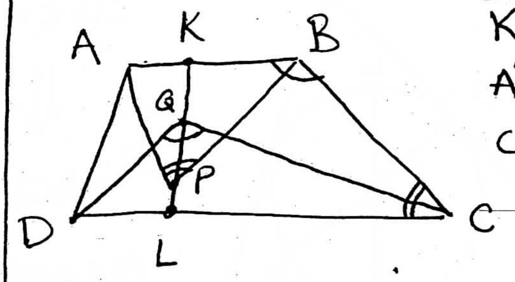
$P\hat{B}A + P\hat{C}A = P\hat{B}C + P\hat{C}B$

$\Downarrow$

$AP \geq AI$،

تساوی وقتی $P \triangleq I$.

(G1/IMO1/2006)



$\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$

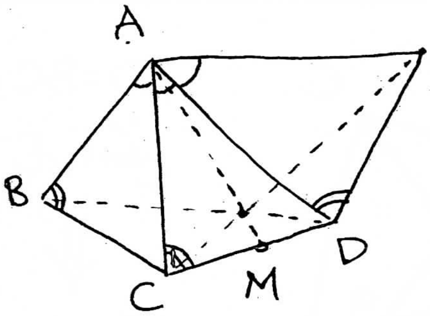
$A\hat{P}B = B\hat{C}D$

$C\hat{Q}D = A\hat{B}C$

$\Downarrow$

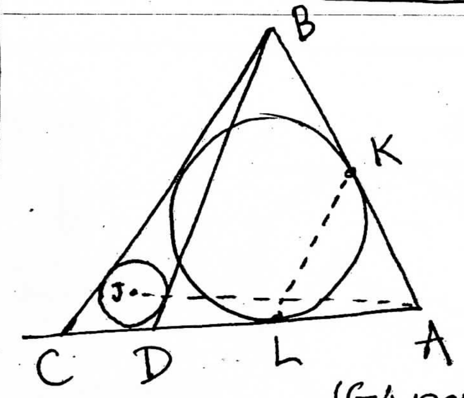
B, C, P, Q هم‌دایره‌اند

(G2/2006)



$\Rightarrow CM = DM$

(G3/2006)



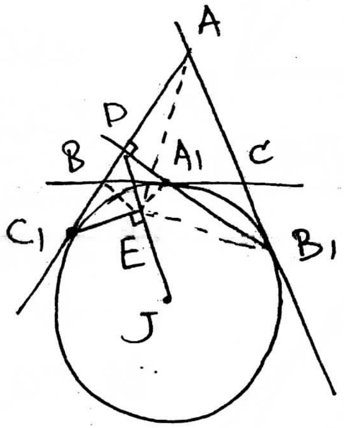
$BA = BD$

$\hat{C} < \hat{A} < 90^\circ$

$\Downarrow$

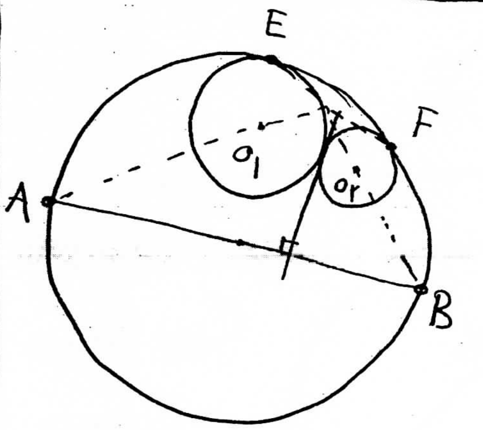
KL، AJ را نصف می‌کند

(G4/2006)



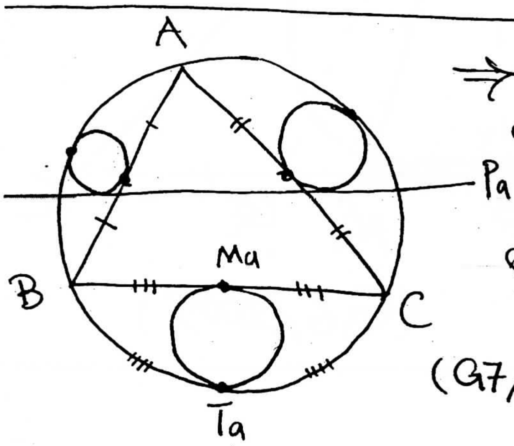
$\Rightarrow B\hat{E}A_1$, $A\hat{E}B_1$ را بیابید.

(G5/2006)



$\Rightarrow BO_2$ و AO_1، EF همرسند.

(G6/2006)



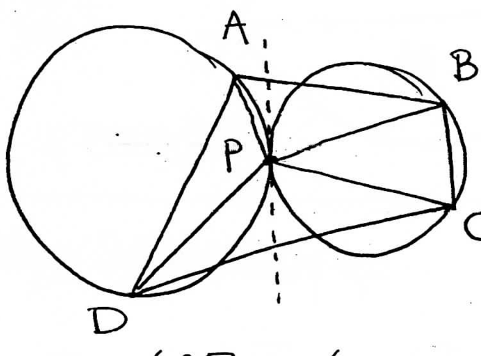
$\Rightarrow P_c, P_b, P_a$

یک مثلث مشابه ABC می‌سازند

نسبت تشابه = ؟

(G7/2006)

ABCD محدب



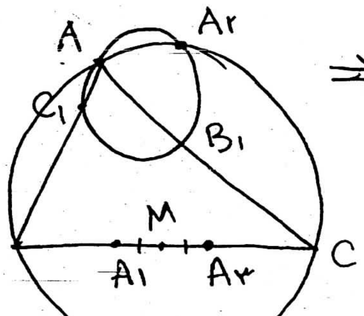
$P\hat{A}B + P\hat{D}C \leq 90^\circ$

و $P\hat{B}A + P\hat{C}D \leq 90^\circ$

$\Downarrow$

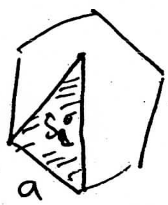
$AB + CD \geq BC + AD$

(G8/2006)



$\Rightarrow \triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_3B_3C_3$

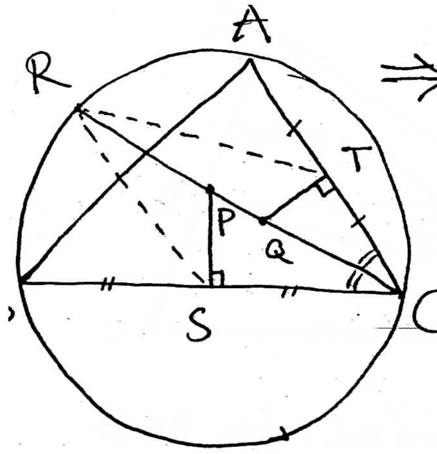
(G9/2006)



$S_a = \max\{S_i\}$ چندضلعی محدب

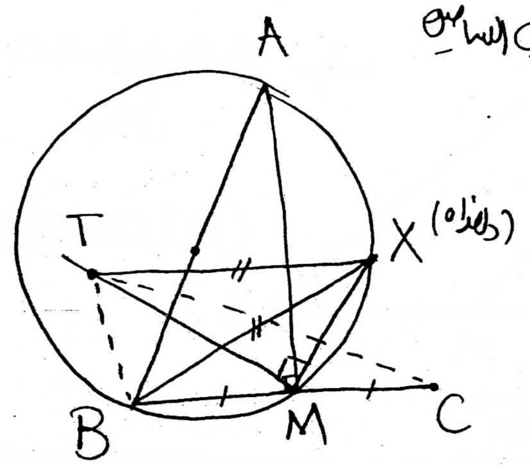
$\Rightarrow \sum_{\text{ضلع چندضلعی } a} S_a \geq 2S$

(G10/IMO06/2006)



$\Rightarrow S_{\triangle RTQ} = S_{\triangle RSP}$

(G1/IMO4/2007)



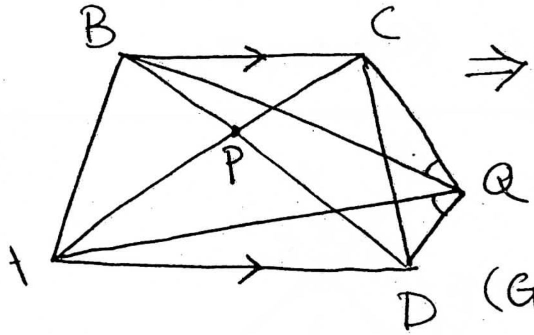
ABC متساوی الساقین

X دلخواه

$\Downarrow$

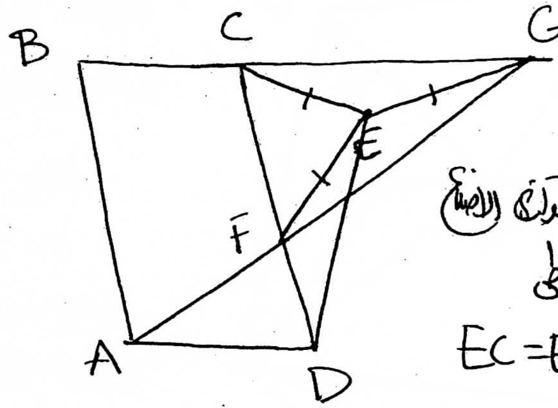
$\hat{MTB} - \hat{MTC} =$ ثابت

(G2/2007)



$\Rightarrow \hat{BQP} = \hat{DAQ}$

(G3/2007)



ABCD متوازی الاضلاع

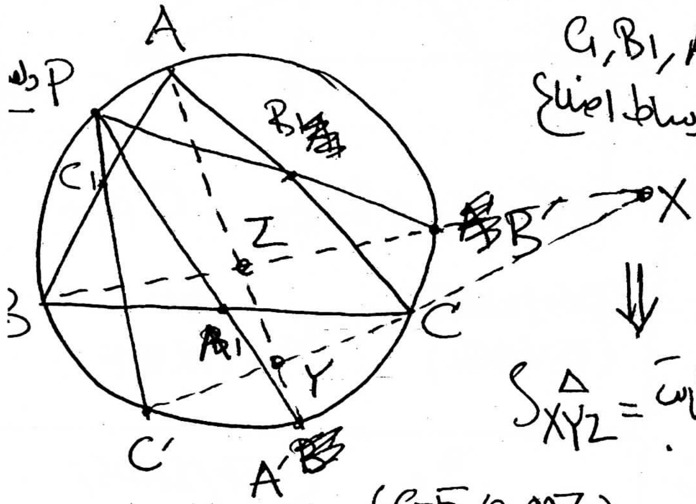
BCED محاطی

$EC = EF = EG$

$\hat{BAF} = \hat{DAF} \Leftarrow$

(IMO2 & G4/2007)

P دلخواه



C_1, B_1, A_1

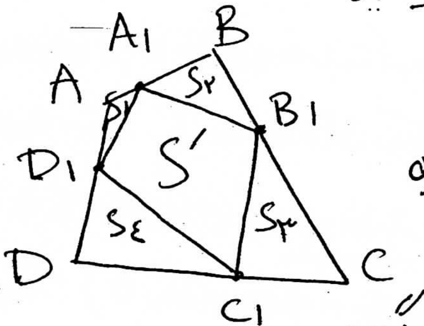
اوساط اضلاع

$\Downarrow$

$S_{\triangle XYZ} =$ ثابت

(G5/2007)

کوچکترین k حقیقی را بیابید که:



ABCD محدب

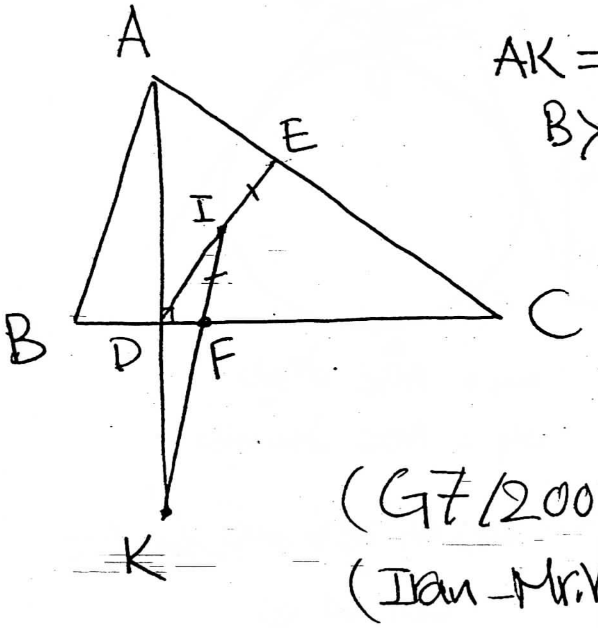
D_1, C_1, B_1, A_1 دلخواه

از بین $S_1, S_2, \dots, S_4$،

مجموع دو تا کمترها را S بگیرید

(G6/2007)

$kS' \geq S \Leftarrow$



$AK = 2R$

$B > C$

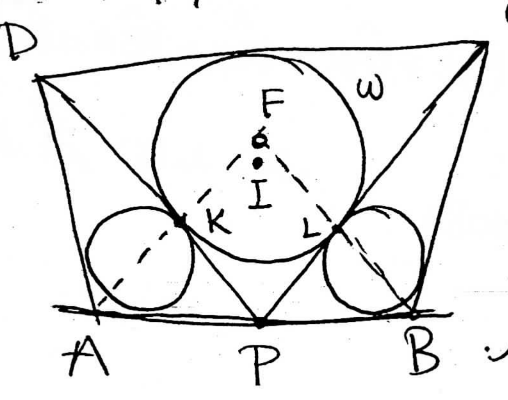
$\Downarrow$

$\hat{B} < 3\hat{C}$

(G7/2007)

(Iran_Mr.Vakili)

(G8/2007)



ABCD محدب

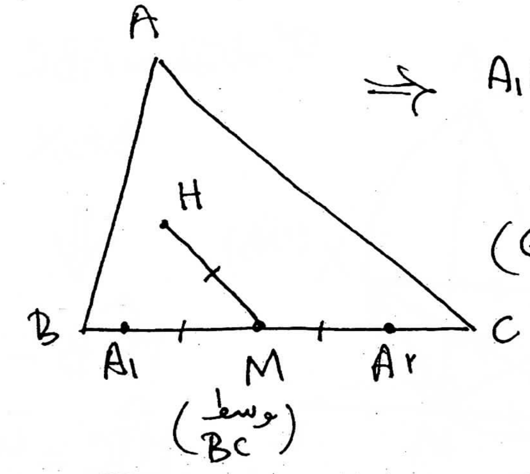
P دلخواه

I مرکز ω

$E = AC \cap BD$

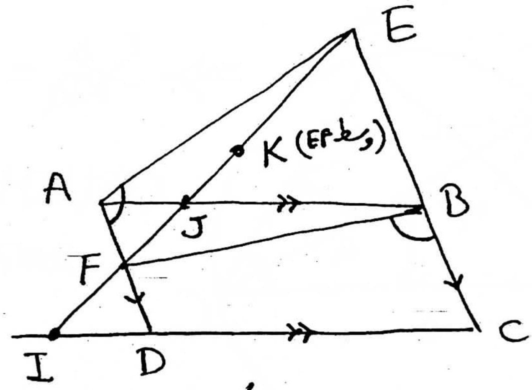
$\Downarrow$

F, I, E هم خطند



$\Rightarrow$ $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ محاطی

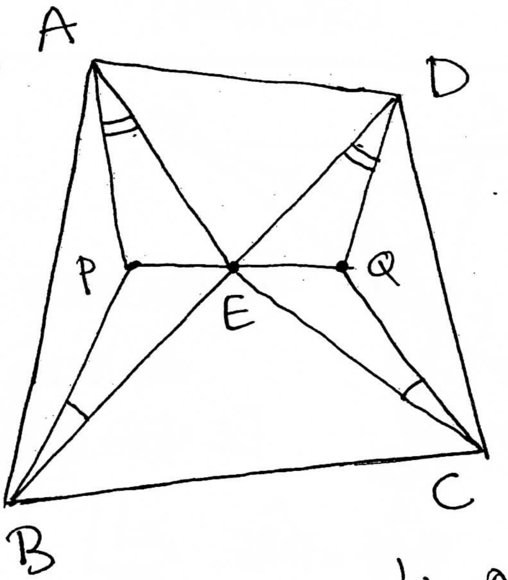
(G1/IMO1/2008)



AEBF محاطی، ثابت کنید:

IAKB محاطی $\Longleftrightarrow$ KCDJ محاطی

(G2/2008)



نقاط P، Q، E درون چهارضلعی محدب ABCD وجود دارند به طوری که:

ADQP محاطی

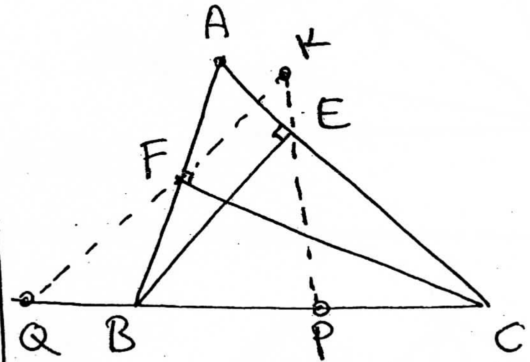
〃 BCQP

$E\hat{A}P = E\hat{D}Q$

$E\hat{B}P = E\hat{C}Q$

$\Leftarrow$ ABCD محاطی

(G3/2008)



C_{AFP} و C_{AFQ} بر BC مماس‌اند

$\Downarrow$

AKEF محاطی

(G4/2008)
(D.Vakili)

(G5/2008)

$n,k \in \mathbb{Z}$ و $0 \leqslant k \leqslant n-2$

L مجموعه ای از n خط در صفحه است که هیچ ۲ تایی موازی و هیچ ۳ تایی همرس نیستند. I مجموعه نقاط تقاطع خطهای L است. نقطه $X \in I$ را قرمز می‌کنیم اگر پاره‌خط باز OX حداکثر k تا از خطوط L را قطع کند. (O نقطه‌ای دلخواه که روی هیچ خطی نیست!)

$\Leftarrow$ حداقل $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ نقطه قرمز در I هست!

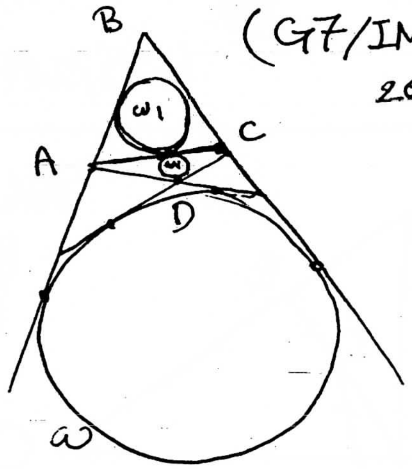
ثابت کنید نقطه P درون چهارضلعی محدب ABCD وجود دارد به طوری که:

$$P\hat{A}B + P\hat{D}C = P\hat{B}C + P\hat{A}D = P\hat{C}D + P\hat{B}A = P\hat{D}A + P\hat{C}B = 90^\circ$$

اگر و فقط اگر $AC \perp BD$.

(G6/2008)

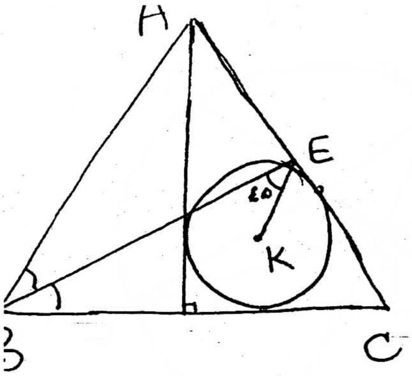
(G7/IMO6/2008)



$\omega_1 = $ دایره محاطی $\overset{\triangle}{ABC}$

$\omega_2 = $ دایره محاطی ADC

$\Leftarrow$ مرکز تجانس خارجی ω_1 و ω_2 روی ω است.



$AB = AC$

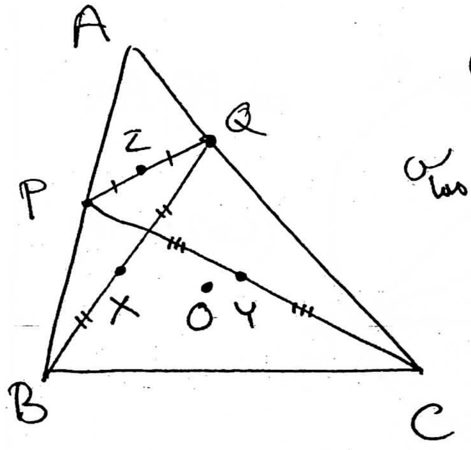
$B\hat{E}K = 45^\circ$

$\Downarrow$

$\hat{A} = ?$

(همه حالات!)

(G1/IMO4/2009)



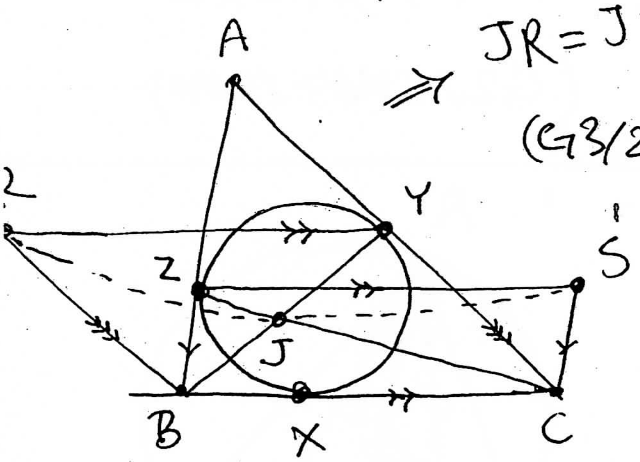
$O = O_{\triangle ABC}$

PQ بر $C_{\triangle XYZ}$ مماس

$\Downarrow$

$OP = OQ$

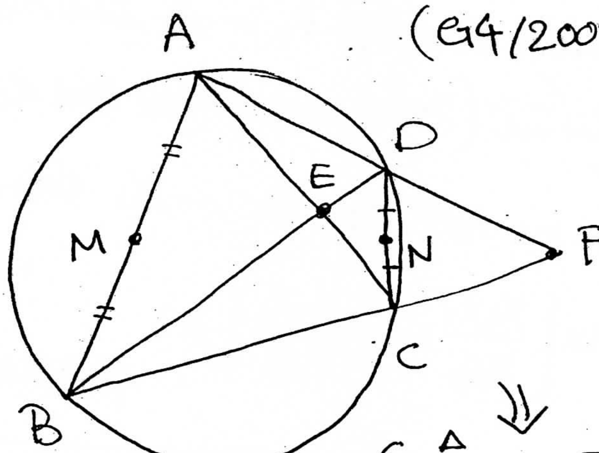
(G2/IMO2/2009)



$\Rightarrow JR = JS$

(G3/2009)

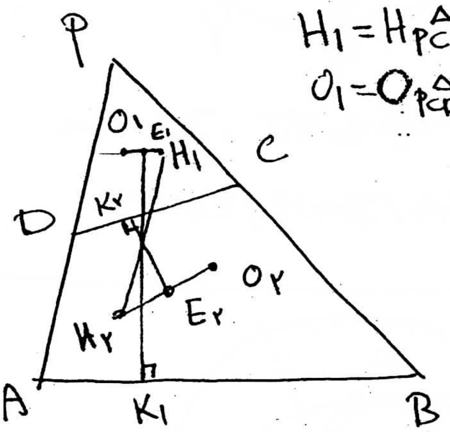
(H. KarkeAbadi)



(G4/2009)

$\Downarrow$

$C_{\triangle EMN}$ بر EF مماس است.



$H_1 = H_{\triangle PCD}$, $H_2 = H_{\triangle PAB}$

$O_1 = O_{\triangle PCD}$, $O_2 = O_{\triangle PAB}$

O_1H_1 وسط E_1

O_2H_2 " E_2

$\Downarrow$

E_2K_2 , E_1K_1 و H_1H_2 هم‌رسند.

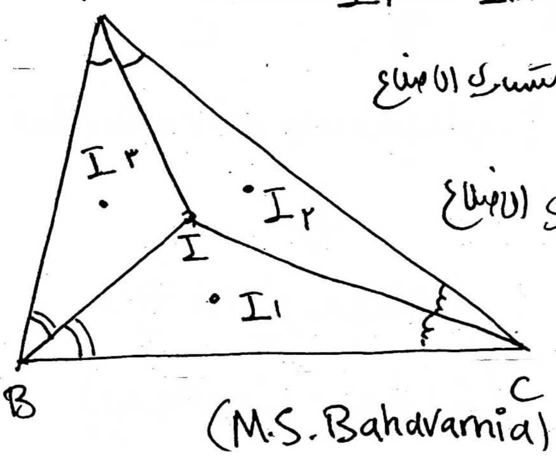
(G6/2009)

P یک چندضلعی محدب است که مرکز تقارن دارد.

$\Leftarrow$ وجود دارد متوازی‌الاضلاع R که $P \subset R$,

$$\frac{S(R)}{S(P)} \leqslant \sqrt{2}$$

(G5/2009)



$I_1 = I_{\triangle IBC}$, ...

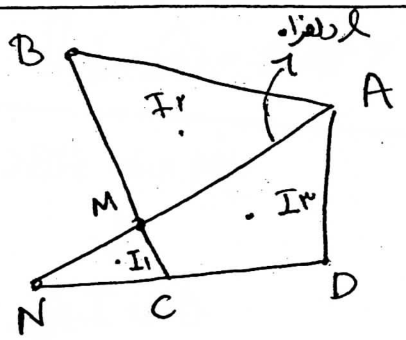
$I_1I_2I_3$ متساوی‌الاضلاع

$\Downarrow$

ABC متساوی‌الاضلاع

(G7/2009)

(M.S. Bahavarnia)



ABCD محیطی

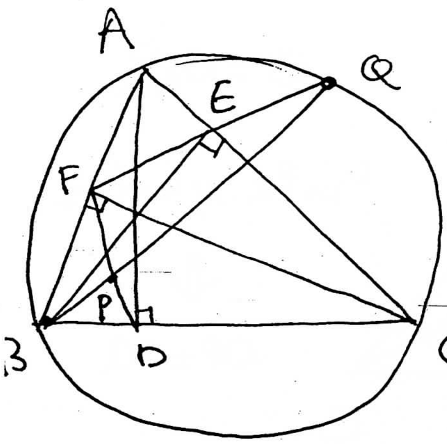
خط l دلخواه

$I_1 = I_{\triangle CMN}$, $I_2 = I_{\triangle ABM}$

$I_3 = I_{\triangle ADM}$

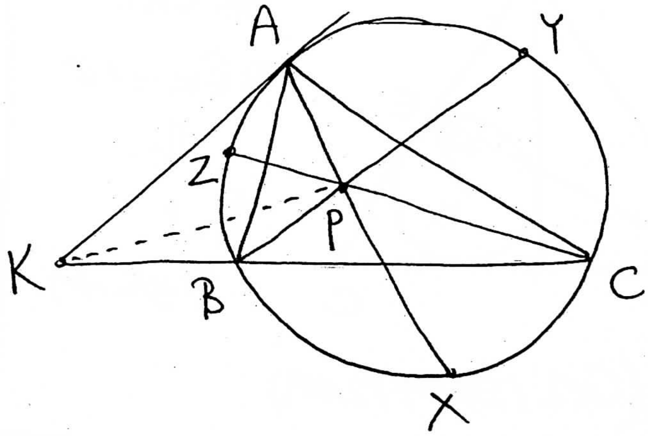
$\Rightarrow$ $H_{I_1I_2I_3}$ روی l است!

(G8/2009)



$\Rightarrow AP = AQ$

(G1/2010)



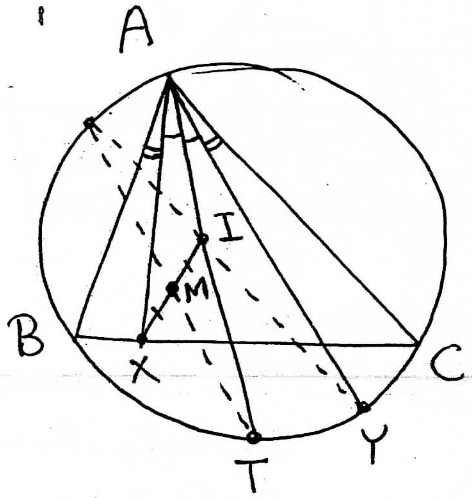
$KA = KP \iff XY = XZ$

(G2/IMO4/2010)

نقطه P درون n ضلعی محدب $A_1A_2\dots A_n$ طوری قرار دارد که تصاویر $P_1, \dots, P_n$ از آن بر روی $A_1A_2, \dots, A_nA_1$ بر روی اضلاع می‌افتند. (و نه در امتداد آن‌ها!) ثابت کنید برای نقاط دلخواه $X_1, \dots, X_n$ بر روی $A_1A_2, \dots, A_nA_1$ داریم:

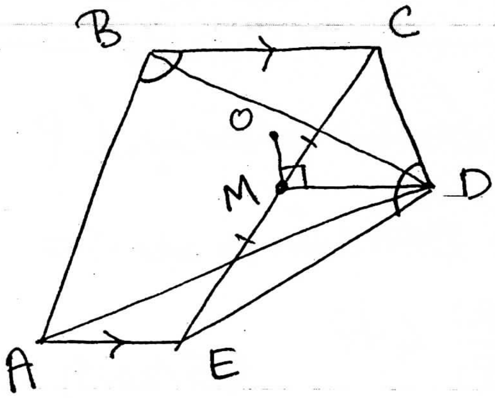
$$\max\left\{\frac{X_1X_2}{P_1P_2}, \dots, \frac{X_nX_1}{P_nP_1}\right\} \geq 1$$

(G3/2010)



$\Leftarrow$ IY و MT روی دایره متقاطعند!

(G4/IMO2/2010)



$ABCDE$ محدب

$BC \parallel AE$

$AB = AE + BC$

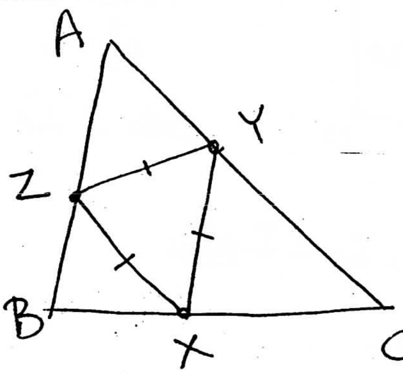
$\hat{ABC} = \hat{CDE}$

M وسط CE

$O = O_{\triangle BCD}$

$\hat{DMO} = 90^\circ$

(G5/2010) $2\hat{BDA} = \hat{CDE} \Leftarrow$



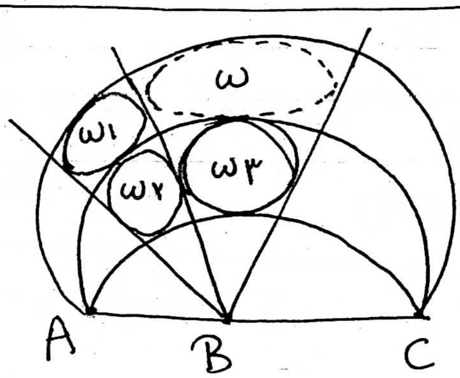
ABC حاده الزاویه

$\Downarrow$

$I_{\triangle ABC}$ داخل $\triangle XYZ$ است!

(G6/2010)

(G7/2010)



دوایر ω_1، ω_2 و ω_3 وجود دارند!

$\Downarrow$

دایره ω نیز وجود دارد!

(چهارضلعی محدب، محیطی است)

آزمون

- در این بخش آزمون‌هایی که در سال‌های اخیر در دبیرستان‌ها، برای داوطلبان شرکت در المپیاد برگزار شده آمده‌اند.
- به علاوه برخی از آزمون‌های برگزار شده در باشگاه، در دوره ۴۰ نفر و دوره طلا، و برخی از آزمون‌های انتخاب تیم.

مدت آزمون: ۴ ساعت	آزمون المپیاد ریاضی پایه دوم

۱. مقدار عبارت زیر را محاسبه کنید

$$\left(\frac{۱+i\tan\frac{\pi}{۸۰۴۴}}{۱-i\tan\frac{\pi}{۸۰۴۴}}\right)^{۲۰۱۱}$$

(می‌دانیم $i^{۲}=-۱$)

۲. مربع $ABCD$ مفروض است. E نقطه‌ای دلخواه روی ضلع BC، P پای عمود وارد از E بر BD، و Q پای عمود وارد از B بر امتداد DE می‌باشد. ثابت کنید سه نقطه A و P و Q هم‌خطند.

۳. برای m,n طبیعی، نشان دهید اگر $mn+۱$ بر ۲۴ بخشپذیر باشد، $m+n$ نیز بر ۲۴ بخشپذیر است.

۴. یک کارخانه، توپ‌هایی در k رنگ مختلف تولید می‌کند و برای بسته‌بندی از جعبه‌هایی استفاده می‌کند که در آن‌ها n توپ جای می‌گیرد. فرض کنید این کارخانه nk توپ تولید کرده است (با تعداد دلخواهی توپ از هر رنگ)، ثابت کنید می‌توان این nk توپ را در k جعبه جای داد به طوری‌که در هر جعبه بیش از ۲ رنگ متفاوت ظاهر نشود.

موفق باشید

عقیقی

مدت آزمون: ۴ ساعت	آزمون المپیاد ریاضی پایه سوم

۱. الف) اگر نقطه z روی خط عمود منصف پاره‌خط واصل بین نقاط $A\,,B$ با مختصات $\alpha\,,\beta$ باشد. آنگاه نشان دهید

$$(\bar{\beta}-\bar{\alpha})z+(\beta-\alpha)\bar{z}=|\beta|^{۲}-|\alpha|^{۲}$$

ب) با توجه به قسمت الف ثابت کنید عمودمنصف‌های یک مثلث هم رسند .

۲. چهارضلعی محدب $ABCD$ مفروض است. نقاط P و Q به ترتیب محل‌های برخورد نیمساز $\angle ACB$ با AB، و نیمساز $\angle ACD$ با AD می‌باشند. همچنین R محل برخورد نیمساز خارجی $\angle BCD$ با امتداد BD است. ثابت کنید P, Q, R هم‌خطند.

۳. برای m, n طبیعی نشان دهید اگر $A=\frac{(m+۳)^{n}+۱}{۳m}$ عددی طبیعی باشد، آن‌گاه فرد است.

۴. یک کارخانه، توپ‌هایی در k رنگ مختلف تولید می‌کند و برای بسته‌بندی از جعبه‌هایی استفاده می‌کند که در آن‌ها n توپ جای می‌گیرد. فرض کنید این کارخانه nk توپ تولید کرده است (با تعداد دلخواهی توپ از هر رنگ)، ثابت کنید می‌توان این nk توپ را در k جعبه جای داد به طوری‌که در هر جعبه بیش از ۲ رنگ متفاوت ظاهر نشود.

موفق باشید

عقیقی

آزمون المپیاد ریاضی پایه دوم	مدت آزمون: ۴ ساعت

۱. برای تمام اعداد حقیقی و مثبت $x\,,y\,,z$ ثابت کنید

$$\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{yz}{y+z}\leq\frac{x+y+z}{۲}$$

۲. نقاط E,F به ترتیب پای ارتفاع‌های رئوس B,C از مثلث ABC می‌باشند. همچنین نقاط X,Y به ترتیب پای عمودهای مرسوم از B,C بر EF (یا امتداد آن) می‌باشند. ثابت کنید $XF=EY$.

۳. اگر p عددی اول و به‌صورت $۴k+۳$ باشد، نشان دهید $\left(\frac{p-۱}{۲}\right)!$ به پیمانه p همنهشت با ۱ یا ۱- است.

۴. ثابت کنید دو مسیر با طول ماکزیمم در یک گراف، لزوماً رأس مشترک دارند.

موفق باشید

گروه ریاضی

آزمون المپیاد ریاضی پایه سوم	مدت آزمون: ۴ ساعت

۱. برای تمام اعداد حقیقی و مثبت $a\,,b\,,c$ نشان دهید

$$\sqrt{2a(a+b)^3}+b\sqrt{2(a^2+b^2)}\leq 3(a^2+b^2)$$

۲. مثلث ABC مفروض است. نقاط D,N,M به ترتیب روی اضلاع AB,BC,CA قرار دارند به طوری که $\angle ADC=\angle ANC$ و $\angle BDC=\angle BMC$. اگر O مرکز دایره محیطی مثلث CMN باشد، ثابت کنید OD (یا امتداد آن) بر AB عمود است.

۳. ثابت کنید بی‌نهایت n وجود دارد که تعداد مقسوم علیه های n^2+n+1 از ۱۳۹۱ بیشتر باشد.

۴. فرض کنید $x_1,x_2,\dots,x_n$ اعدادی حقیقی می‌باشند. ثابت کنید حداکثر $\frac{n^2}{4}$ جفت از آن‌ها مانند x_i,x_j وجود دارند که $1<|x_i-x_j|<2$.

موفق باشید

گروه ریاضی

آزمون المپیاد ریاضی پایه دوم	مدت آزمون: ۴ ساعت

۱. اگر $a_۱, a_۲, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ و تعریف می‌کنیم $s = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$، آن‌گاه ثابت کنید

$$\frac{s}{s-a_۱} + \frac{s}{s-a_۲} + \cdots + \frac{s}{s-a_n} \geq \frac{n^۲}{n-۱}$$

۲. برای هر عدد اول p، ثابت کنید بی‌نهایت n وجود دارد که $۲^n - n$ بر p بخش‌پذیر باشد.

۳. چهارضلعی محدب $ABCD$ در صفحه مفروض است. نقاط F, E به ترتیب محل‌های برخورد AD, BC، و AB, CD می‌باشند. اگر نقطه P محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های $\angle AEB$ و $\angle BFC$ باشد، ثابت کنید $\angle EPF = ۹۰$ اگروفقط اگر $ABCD$ محاطی باشد.

۴. فرض کنید $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند و S_k مجموع همهٔ حاصلضرب‌های kتایی $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ باشد، نشان دهید رابطه‌ی

$$S_k S_{n-k} \geq \left(\binom{n}{k}\right)^۲ a_۱ a_۲ \dots a_n$$

به ازای $k = ۱,۲, \dots, n-۱$ برقرار است.

موفق باشید

گروه ریاضی

آزمون المپیاد ریاضی پایه سوم	مدت آزمون: ۵ ساعت

۱. تمامی توابع $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ را بیابید که برای هر $m,n\in\mathbb{Z}$ داشته باشیم:

$$f(mn-1)+f(m+n)=f(m)f(n)+2$$

۲. یک مدرسه ۲۰۰۷ دانش‌آموز اولی و ۲۰۰۷ دانش‌آموز دومی دارد. هر دانش‌آموز در حداکثر ۱۰۰ باشگاه عضو است. هر اولی و هر دومی با هم حداقل در یک باشگاه عضو هستند. ثابت کنید باشگاهی هست که در آن حداقل ۱۱ اولی و حداقل ۱۱ دومی هستند.

۳. چهارضلعی محدب $ABCD$ و نقاط E,F محل برخورد امتداد اضلاع روبروی آن مفروضند. اگر P محل برخورد قطرهای AC و BD باشد و Q پای عمود وارد از P بر EF باشد، ثابت کنید $\angle AQD=\angle BQC$.

۴. همه x,y های طبیعی را بیابید که $x^2=y^3+23$.

موفق باشید

گروه ریاضی

آزمون شماره ۱	**مدت آزمون: ۵ ساعت**

۱. N نقطه‌ای دلخواه روی نیمساز زاویه $\angle BAC$ است. P و O به ترتیب نقاطی روی خط‌های AB و AN هستند به طوری که $\angle APO = \angle ANP = ۹۰^\circ$ بوده و Q نقطه‌ای دلخواه روی NP است و یک خط دلخواه از Q، خطوط AB و AC را به ترتیب در نقاط E و F قطع می‌کند. ثابت کنید که زاویه $\angle OQE$ قائمه است اگر و فقط اگر $QE = QF$.

۲. دنباله‌ای از اعداد صحیح به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_۰ = ۰, a_۱ = ۱, a_n = ۲a_{n-۱} + a_{n-۲}\ (n > ۱)$$

ثابت کنید a_n بر ۲^k بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر n بر ۲^k بخش‌پذیر باشد.

۳. V را مجموعه‌ای متناهی از نقاط در فضای ۳ بعدی و V_x، V_y و V_z را به ترتیب تصویر این نقاط بر روی صفحه‌های yz، zx و xy بگیرید، ثابت کنید:

$$|V|^۲ \leq |V_x| . |V_y| . |V_z|$$

($|x|$ یعنی تعداد اعضای مجموعه x)

۴. m و n اعداد صحیح مثبت هستند. $A = \{a_۱, a_۲, \dots, a_m\}$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\{۱,۲, \dots n\}$ است و می‌دانیم که هرگاه $(۱ < i < j < m)$ $a_i + a_j < n$، $a_i + a_j$ به مجموعه A تعلق دارد. ثابت کنید که:

$$\frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_m}{m} \geq \frac{n+۱}{۲}$$

موفق باشید

عقیقی

مدت آزمون: ۴.۵ ساعت	آزمون شماره ۲

۱. در چهارضلعی $ABCD$ داریم $AB = AD + BC$ همچنین نقطه P درون آن و به فاصله x از ضلع CD قرار دارد، به نحوی که $AP = x + AD$ و $BP = x + BC$ است. ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

۲. فرض کنید $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 2$ که در آن $n \geq 3$ و a_1 و a_2 و ... و a_n اعداد صحیح متمایزی هستند. اگر $f(x) = g(x)h(x)$ که $g(x)$ و $h(x)$ هر دو چندجمله‌ای‌های غیرثابت با ضرایب صحیح باشد، ثابت کنید $n = 3$.

۳. ریاضیدان عجیبی نردبانی n پله‌ای دارد که با قانون زیر از آن بالا رفته یا پایین می‌آید. هر بار که می‌خواهد قدمی به طرف بالا بردارد از a پله صعود می‌کند و هربار که قدمی به طرف پایین برمی‌دارد از b پله پایین می‌آید. کمترین مقدار n را بیابید که این ریاضیدان بتواند با این تعداد پله و با قانون ذکر شده از پایین به بالاترین نقطه نردبان رفته و سپس به همان نقطه اولیه برگردد.

موفق باشید

عقیقی

آزمون شماره ۳	مدت آزمون: ۴.۵ ساعت

۱. فرض کنید D نقطه‌ای درون مثلث ABC با زوایای حاده باشد به طوری که:

$$\angle ADB = \angle ACB + ۹۰^\circ$$
$$AC.BD = AD.BC$$

الف) مقدار عددی نسبت $\frac{AB.CD}{AC.BD}$ را محاسبه کنید.

ب) ثابت کنید خطوط مماس در نقطه C بر دایره‌های محیطی مثلث‌های ACD و BCD بر هم عمودند.

۲. تمامی اعداد اول p و q را بیابید به طوری که $p(p+۱)+q(q+۱)=n(n+۱)$.

۳. دور یک میز گرد تعداد زوجی از افراد مشغول به بحث با یکدیگرند. پس از اعلام یک تنفس شرکت‌کنندگان به ترتیب دیگری دور میز می‌نشینند. ثابت کنید حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد شرکت‌کنندگانی که مابین این دو نفر نشسته‌اند قبل و بعد از تنفس یکی است.

موفق باشید

عقیقی

مدت آزمون: ۴.۵ ساعت	آزمون شماره ۴

۱. مثلث ABC و خط l را که از رأس C به موازات AB رسم شده است را در نظر بگیرید. فرض کنید نیمساز داخلی زاویه A، ضلع BC و خط l را به ترتیب در D و E و نیمساز داخلی زاویه B، ضلع BC و خط l را به ترتیب در F و G قطع کنند. اگر $GF = DE$ باشد ثابت کنید $AC = BC$.

۲. اگر $f(n)$ نشان دهنده مجموع ارقام بسط مبنای ۲ی n، و $g(n)$ نشان دهنده توان ۲ در n باشند، ثابت کنید:

$$n = f(n) + g(n!)$$

۳. به ازای چه مقادیری از n جدول $n \times n$ متشکل از عناصر ۱- و ۰ و ۱ وجود دارد که ۲n مجموع سطرها و ستون‌ها همه متمایزند.

موفق باشید

عقیقی

بسمه تعالی

اولین آزمون آزمایشی المپیاد ریاضی دوره عید دبیرستان علامه حلی سال ۸۹

روز اول زمان:۲۷۰ دقیقه

سؤال ۱– همه توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید که برای هر x,y حقیقی داشته باشیم:

$$f(f(x)) + f(f(y)) = f(x-y) + ۲y$$

سؤال ۲– در مثلث ABC، $\angle B > ۹۰^o$. نقطه H روی ضلع AC به گونه ای قرار دارد که AH=BH و BH بر BC عمود است. D, E به ترتیب وسطهای AB, BC هستند. از H خطی موازی AB رسم می کنیم تا DE را در نقطه F قطع کند. ثابت کنید: $\angle BCF = \angle ACD$.

سؤال ۳– صفحه شطرنجی ۱۰۰×۹۹ به دومینوها (مستطیلهای ۲×۱) افراز شده است. می دانیم برای هر افراز دیگر صفحه شطرنجی به دومینوها، دومینویی وجود دارد که در هر دو افراز مشترک است. ثابت کنید در افراز اولیه دو ستون متوالی می توان یافت که همه خانه های آن به دومینوهای افقی افراز شده باشد.

بسمه تعالی

اولین آزمون آزمایشی المپیاد ریاضی دوره عید دبیرستان علامه حلی سال ۸۹

روز دوم   زمان: ۲۷۰ دقیقه

سؤال ۴– طول هر ضلع از یک چهارضلعی محدب کوچکتر از ۷ است. ثابت کنید چهار دایره به مرکز رئوس این چهارضلعی و به شعاع ۵، تمام سطح چهارضلعی را می پوشانند.

سؤال ۵– $a_۱, a_۲, \ldots, a_{۲۰۰۵}$، ۲۰۰۵ عدد متمایزند. هربار سه اندیس متمایز i, j, k انتخاب می کنیم و به ما مجموعه $\{a_i, a_j, a_k\}$ (بدون ترتیب) داده می شود. با حداقل چند پرسش می توانیم مقدار هر یک از a_iها را مشخص کنیم؟

سؤال ۶– اعداد طبیعی $k_۱, k_۲, \ldots, k_n$، همگی کوچکتر یا مساوی $۲n$ هستند. می دانیم کوچکترین مضرب مشترک هر دو تا از این اعداد، بزرگتر از $۲n$ است. ثابت کنید کوچکترین عدد در بین k_iها، از $\left[\frac{۲n}{۳}\right]$ بزرگتر است. ($[x]$ نشان دهنده جزء صحیح x است.)

۱ــ ثابت کنید اگر $x \geq y \geq 0$ و $x^3+y^3=x-y$ آنگاه $x^2+y^2<1$.

۲ــ نقطه P را نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC و روی کمان ACB متمایز از نقاط A، B، C فرض می‌کنیم. X، Y به ترتیب دو نقطه روی AP و BP یا امتداد آن‌ها در نظر می‌گیریم به طوری که $AX=AC$ و $BY=BC$. ثابت کنید با تغییر دادن P، XY از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۳ــ فرض کنید n و k اعداد صحیح مثبتی باشند و S مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه باشد به طوری که:

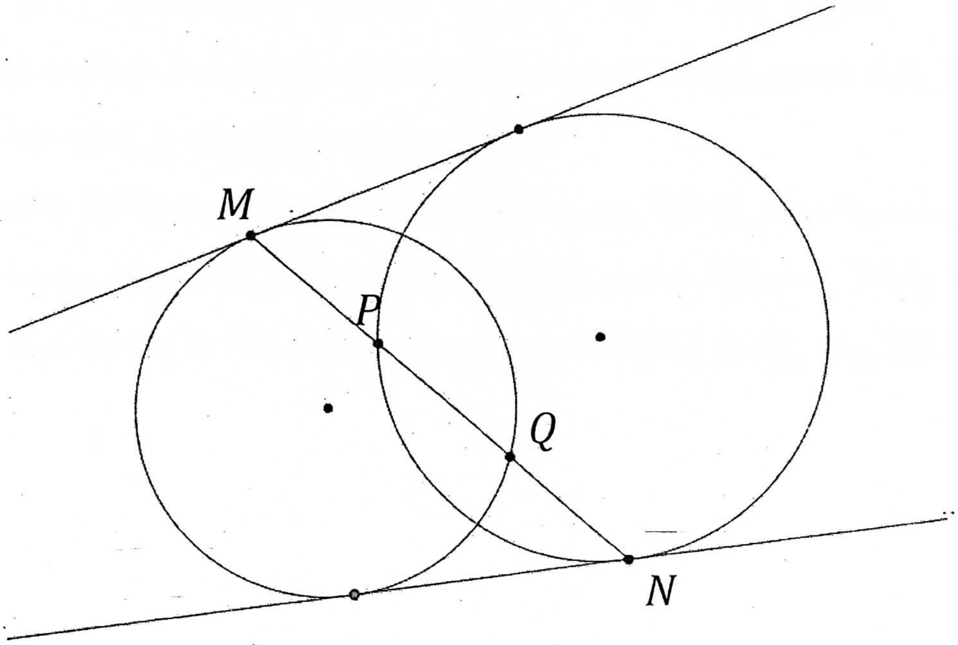
I) هیچ سه نقطه‌ای از S در یک امتداد نباشند.

II) برای هر نقطه P از S، حداقل k نقطه از S وجود داشته باشد که از P به یک فاصله باشند.

ثابت کنید: $k<\frac{1}{2}+\sqrt{2n}$

۱. مثلث ABC مفروض است. نقاط D، E و F به ترتیب محل تماس دایره محاطی داخلی این مثلث با اضلاع BC، CA و AB می‌باشند. همچنین نقاط D'، E' و F' به ترتیب محل‌های تماس دایره محاطی خارجی نظیر رأس A با اضلاع BC، CA و AB می‌باشند. ثابت کنید DF و $D'F'$ روی نیمساز A یکدیگر را قطع می‌کنند.

۲. در شکل زیر ثابت کنید $MP = QN$.



۳. خط l و نقاط A، B و C (به همین ترتیب) روی آن قرار دارند. نقطه M در خارج خط l واقع شده است. فرض کنید نقاط O_1، O_2 و O_3 به ترتیب مراکز دوایر محیطی مثلث‌های MAB، MBC و MCA باشند. ثابت کنید نقاط M، O_1، O_2 و O_3 بر روی یک دایره واقع شده‌اند.

امتحان پایه دوم **مدت امتحان: ۴.۵ ساعت**

---

۱. ثابت کنید کسر $\frac{7n+5}{4n+3}$ ساده شدنی نیست.

۲. آیا چندجمله‌ای $P(x)$ با ضرایب صحیح وجود دارد که

$$P(19) = 85\,, P(1) = 19$$

۳. هر یک از خانه‌های یک صفحه شطرنجی $m \times n$ را با یکی از رنگ‌های $a_1, a_2, \cdots, a_t$ زنگ می‌کنیم. اگر $m > t(r-1)$ و $n > t(s-1)\binom{m}{r}$ باشند، ثابت کنید r سطر و s ستون از این صفحه شطرنجی وجود دارند که $r \times s$ خانه حاصل از تقاطع آن‌ها هم‌رنگ می‌باشند.

۴. مثلث ABC مفروض است. نقطه دلخواه D بر روی BC قرار دارد. اگر مماس مشترک خارجی دوایر محاطی مثلث‌های ABD, ACD پاره‌خط AD را در T قطع کند، ثابت کنید $AT = p - a$ که در آن p نصف محیط ABC و a طول ضلع BC می‌باشد.

امتحان پایه سوم **مدت امتحان: ۴.۵ ساعت**

---

۱. بردارهای $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^d$ مفروضند. ثابت کنید برای $1 \le i \le n$ اعداد $\epsilon_i \in \{-1, +1\}$ وجود دارند که $|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i v_i| \le n$.

۲. اگر $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ ثابت کنید عبارت زیر عددی طبیعی است:

$$\prod_{i>j} \frac{(a_i - a_j)}{(i - j)}$$ ،

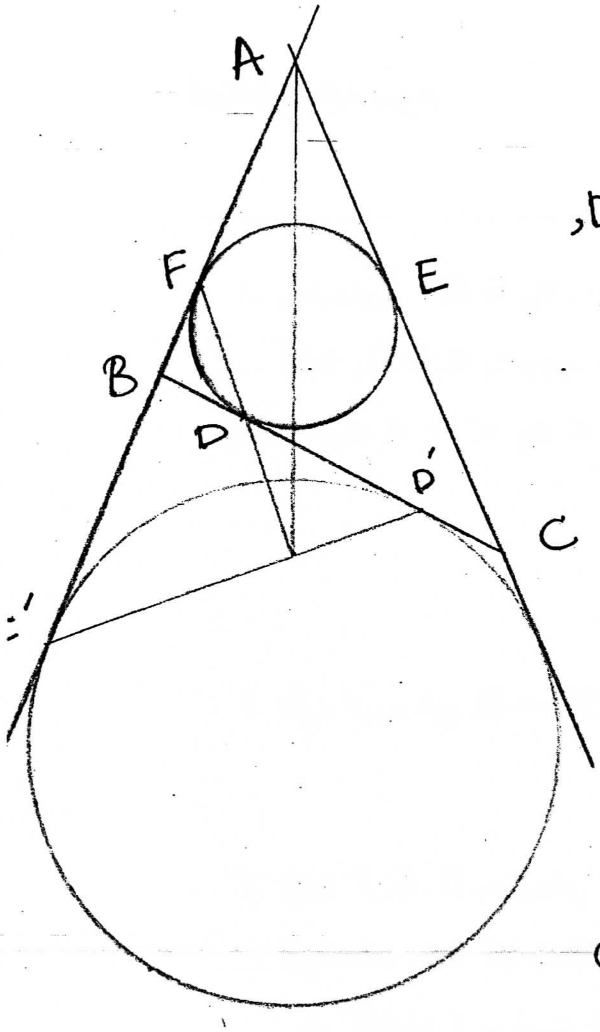
۳. ثابت کنید تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود ندارد که:

$$f(x) = \begin{cases} ۲۰۱۱ & x \notin \mathbb{Q} \\ \sqrt{۲۰۱۱} & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

۴. نقاط D, E, F محل‌های تماس دایره محاطی مثلث ABC با اضلاع BC, CA, AB می‌باشند. خط دلخواه d از مرکز دایره محاطی گذشته و خطوط DE, DF را در B', C' قطع کرده است. ثابت کنید BB' و CC' و عمود مرسوم از D بر d همرسند.

امتحان هندسه پایه دوم

وقت امتحان: ساعت



(۱) در شکل روبرو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و دوایر محاطی داخلی و محاطی خارجی نظیر رأس A مفروضند. ثابت کنید DF و D′F′ و نیمساز $\hat{A}$ همرسند.

(۲) خط l و نقاط A، B، C (به همین ترتیب) روی آن قرار دارند. نقطه M در خارج خط l واقع شده است. فرض کنید نقاط O۱، O۲، O۳ به ترتیب مراکز دوایر محیطی مثلث های $\overset{\triangle}{MAB}$، $\overset{\triangle}{MBC}$ و $\overset{\triangle}{MCA}$ باشند. ثابت کنید ۴ نقطه M، O۱، O۲، O۳ بر روی یک دایره واقع شده اند.

(۳)

باسمه تعالی

امتحان کلاسی هندسه تاریخ: ۱۳۸۶/۴/۱۱

۱. مربع $ABCD$ و نقطهٔ E روی خط AD را در نظر بگیرید. از B عمود BF را بر CE وارد کنید. از نقطهٔ H، وسط EF، خطی موازی AD رسم کنید تا عمود منصف BF را در G قطع کند. ثابت کنید $AC \leq ۲FG$.

۲. مثلث ABC را در نظر بگیرید. $A_۱$ محل تماس BC با دایرهٔ محاطی مثلث و $A_۲$ وسط کمان BAC از دایرهٔ محیطی مثلث است. نقاط $B_۱$، $B_۲$، $C_۱$ و $C_۲$ را به طور مشابه تعریف کنید. ثابت کنید خطوط $A_۱A_۲$، $B_۱B_۲$ و $C_۱C_۲$ همرسند.

۳. $ABCDE$ یک پنج‌ضلعی است که در آن BC موازی AD و BD موازی AE است. M وسط CD و N وسط DE است. AM و BN یکدیگر را در O قصع می‌کنند. نشان دهید مساحت مثلث ABO با مساحت چهار ضلعی $DMON$ برابر است.

۴. چهارضلعی‌ای محیط بر دایره‌ای به مرکز O را در نظر بگیرید. قرینهٔ هر رأس نسبت به O را به رأس مقابل آن وصل کنید. ثابت کنید چهار خط حاصل موازی‌اند.

۵. $ABCD$ یک متوازی الاضلاع است. E را روی امتداد AB طوری در نظر بگیرید که BE مساوی AD باشد و B بین A و E باشد. از E بر AB و از C نیز بر BD عمود می‌کنیم تا این دو خط یکدیگر را در F قطع کنند. ثابت کنید AF نیمساز زاویهٔ A است.

موفق باشید.

به‌نام‌خدا

امتحان میان نوبت هندسه — تاریخ امتحان : ۱۳۸۶/۵/۱۸ — مدت امتحان : ۴ ساعت

۱) مثلث ABC و نقطه D وسط کمان AC از دایره محیطی مثلث (که شامل B نیست) مفروض می‌باشند. نقطه K محل برخورد عمود منصف AB با خط BD می‌باشد. همچنین نقطه L پای عمود مرسوم از A بر خط BD می‌باشد. ثابت کنید:

$$BD^{2} = AD^{2} + 2BL.KD$$

۲) مثلث ABC مفروض است. نقطه D پای ارتفاع مرسوم از A بر BC، و نقطه M وسط ضلع BC می‌باشند. عمودهای مرسوم از B و C بر نیمساز زاویه A به ترتیب P و Q نام دارند. ثابت کنید:

الف) چهارضلعی $PMQD$ محاطی است. (دایره محیطی این چهارضلعی را ω بنامید.)

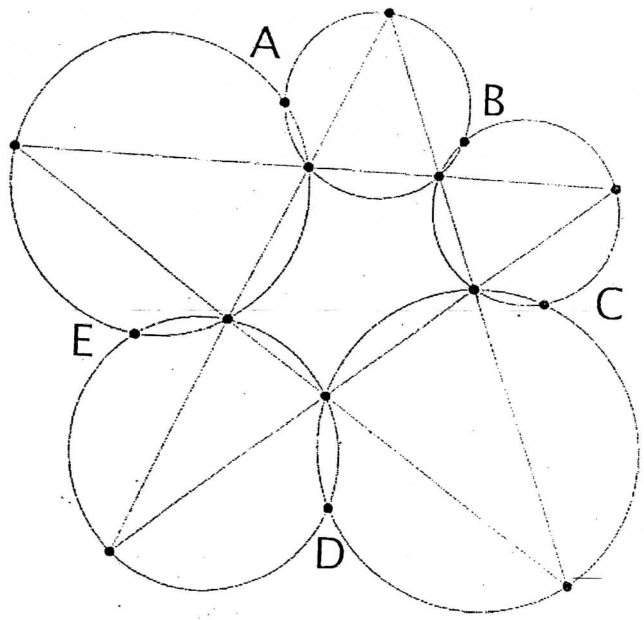
ب) مرکز دایره ω روی دایره نه نقطه مثلث ABC می‌باشد.

ج) مرکز دایره محاطی مثلث PQD روی دایره محاطی مثلث ABC می‌باشد.

۳) مثلث ABC مفروض است. نقاط M و N را روی نیمسازهای زوایای B و C از مثلث طوری انتخاب می‌کنیم که $\widehat{BAM} = \widehat{CAN} = 90^\circ$. خط گذرنده از A و عمود بر MN را l_A بنامید. خط‌های l_B و l_C را نیز به طور مشابه تعریف می‌کنیم. ثابت کنید سه خط l_A و l_B و l_C همرس می‌باشند.

۴) مثلث ABC و دایره محیطی آن مفروض می‌باشند. نقطه N روبرو قطری رأس A در این دایره می‌باشد، مماس بر دایره در نقطه N امتداد ضلع BC را در نقطه X قطع می‌کند. خط XO (که در آن O مرکز دایره است) اضلاع AB و AC را در Y و Z قطع می‌کند. ثابت کنید $OY = OZ$.

۵) در شکل زیر ثابت کنید پنج نقطه A و B و C و D و E همدایره‌اند.



موفق باشید.

گروه هندسه

باسمه تعالی

امتحان هندسه

۷ شهریور ۱۳۸۵ زمان امتحان:۴ ساعت

۱- مثلث ABC مفروض است. ثابت کنید مرکز اصلی دوایر محاطی خارجی این مثلث روی خط GI قرار دارد که در آن G مرکز میانه‌ای مثلث ABC و I مرکز دایره محاطی داخلی این مثلث می‌باشد.

(۱۵ نمره)

۲- مثلث ABC مفروض است و نقاط R,Q,P به ترتیب وسط اضلاع AB,AC,BC قرار دارند. خط AP را رسم می‌کنیم تا RQ را در E و دایره محیطی مثلث ABC را در F قطع کند. از E دو عمود بر RP,PQ رسم می‌کنیم تا به ترتیب پاهای عمود T,S پیدا شوند. فرض کنید F' نقطه روبه‌رو قطری F در دایره محیطی مثلث ABC باشد. F' را به A وصل می‌کنیم تا BC را در E' قطع کند. از E' دو عمود بر AC,AB رسم می‌کنیم تا به ترتیب پاهای عمود T',S' پیدا شوند. ثابت کنید $T'S',TS$ بر هم عمودند.

(۲۰ نمره)

۳- در مثلث حاده‌الزاویه ABC اگر L,M,N به ترتیب وسط اضلاع AB,AC,BC و H مرکز ارتفاعیه مثلث باشند، ثابت کنید:

$$LH^۲ + MH^۲ + NH^۲ \leq \frac{۱}{۴}(AB^۲ + AC^۲ + BC^۲)$$

(۲۰ نمره)

۴- دایره $\Omega(O,R)$ و وتر AB از آن مفروض است و C وسط کمان AB قرار دارد. نقطه متغیر X را روی دایره $\Omega(O,R)$ در نظر بگیرید. از B عمودی بر CX اخراج می‌کنیم تا دایره را در D قطع کند. از C خطی عمود بر DX رسم می‌کنیم تا دایره $\Omega(O,R)$ را در E قطع کند. از A,B,E خطوط $l_۳,l_۲,l_۱$ را به ترتیب موازی با OX,OD,OC رسم می‌کنیم. ثابت کنید این خطوط همرسند و مکان هندسی نقطه همرسی را پیدا کنید.

(۲۵ نمره)

۵- مثلث ABC مفروض است. اگر M وسط ضلع BC و I مرکز دایره محاطی و T وسط $\widehat{BC}$ از دایره محیطی باشد که شامل A نیست. ثابت کنید:

$$\cos B + \cos C = ۱ \Leftrightarrow MI = MT$$

(۲۵ نمره)

باسمه تعالی

امتحان درس هندسه　　　　　　　　　　　　زمان: 3 ساعت

1- (O) دایره محیطی مثلث ABC است. دایره W در D وسط کمان BC (که شامل A نیست) بر (O) مماس داخل و نیز بر ضلع BC مماس است. از A مماس AT را بر W رسم می کنیم. P را روی AB طوری انتخاب می کنیم که AP=AT (B و P در یک طرف A هستند). ثابت کنید $\angle APD=90$

.....

2- در ذوزنقه ABCD (AD موازی BC) داریم: DA=DB=DC و $\angle BCD=72$. K≠D را روی BD طوری انتخاب می کنیم که AD=AK. از A به M وسط CD وصل می کنیم تا BD را در N قطع کند. ثابت کنید: BK=ND

3- در ذوزنقه محیطی ABCD (AD موازی BC) دایره ای به مرکز O محاط شده است که در Q بر CD مماس است. T محل تلاقی قطر های ذوزنقه است. دایره محیطی مثلث OTQ ضلع CD را در مجددا در P قطع می کند. ثابت کنید TP موازی AD است.

4- P را نقطه ای روی ضلع BC از مثلث ABC طوری انتخاب می کنیم که AP≠AB و AP≠AC . I_1 و I_2 به ترتیب مراکز محاطی داخلی مثلث های ABP و ACP هستند. W_1 و W_2 به ترتیب دوایر به مراکز I_1 و I_2 و گذرا از P یکدیگر را در Q و P قطع می کنند. W_1، AB و BC را به ترتیب در Y_1 (تقاطع نزدیکتر به B) و X_1 قطع می کند. W_2، AC و BC را به ترتیب در Y_2 (نزدیکتر به C) و X_2 قطع می کند. ثابت کنید PQ و X_1Y_1 و X_2Y_2 همرسند.

5- دو دایره با شعاع برابر S_1 و S_2 در دو نقطه متقاطع هستند. خط l، S_1 را در D و B و S_2 را در C و A قطع می کند (ترتیب نقاط روی l ،D و C و B و A است). دو دایره W_1 و W_2 از بیرون بر S_1 و از درون بر S_2 و در دو طرف l بر l مماسند. اگر W_1 و W_2 بر یکدیگر نیز مماس باشند ثابت کنید: AB=CD

باسمه تعالی

امتحان سوم ۱۳۸۵/۸/۱۰، زمان ۵ ساعت

۷. τ را ریشه مثبت معادله $x^۲-x-۱=۰$ بگیرید و قرار دهید $A=\{a+b\tau : a,b\in\mathbb{Z}\}$.
نشان دهید احکام زیر معادلند:

- $a+b\tau$ در مجموعه A وارون پذیر است.
- $a^۲+ab-b^۲=\pm ۱$.
- $a+b\tau=\pm\tau^n$ برای یک $n\in\mathbb{Z}$.

۸. مربع ABCD به ضلع a مفروض است. نقاط دلخواه M و N را روی اضلاع AB و CD از این مربع اختیار می کنیم. اگر نقطه P محل برخورد AN و DM و نقطه Q محل برخورد BN و CM باشند ثابت کنید $PQ \geq \frac{a}{۲}$.

۹. نشان دهید در میان همه مثلث هایی که راس های آن ها n نقطه داده شده در صفحه هستند حداکثر n مثلث وجود دارند که مساحت آن ها ماکزیمم باشد.

موفق باشید!

باسمه تعالی

۱۳۸۶/۸/۸، زمان ۵ ساعت

امتحان دوم

۴. همه توابع $f : N \to N$ را بیابید که برای هر $m, n \in N$

$f(m + f(n)) = n + f(m + 1)$.

۵. چهار ضلعی محیطی ABCD مفروض است. نقطه M روی نیمساز زاویه $\widehat{ABC}$ و نقطه ~~M~~ N روی نیمساز زاویه $\widehat{ADC}$ طوری اختیار می کنیم که $\widehat{MAB} = \widehat{NAD} = 90^\circ$. ثابت کنید MN بر AC عمود است.

۶. فرض کنید $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ بر n بخش پذیر نباشد و $a_1 + \dots + a_n$ نیز بر n بخش پذیر نباشد ($n > 1$). ثابت کنید حداقل n تا n تایی $(b_1, \dots, b_n)$ داریم که $b_i \in \{0, 1\}$ و $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \overset{n}{\equiv} 0$.

موفق باشید!

انتخاب تیم بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

یک‌شنبه، ۱۳۸۶/۲/۳۰ — امتحان دوم، روز دوم — مدت: چهار و نیم ساعت

۴) تمام چندجمله‌های درجه سه‌ی P را مشخص کنید که برای هر $x,y \geq 0$

$$P(x+y) \geq P(x) + P(y)$$

.....

۵) مثلث ABC متساوی‌الساقین است ($AB = AC$). از نقطه‌ی A خط l را به موازات BC می‌کشیم. نقاط P و Q را، به ترتیب، روی عمودمنصف‌های AB و AC طوری می‌گیریم که PQ بر BC عمود باشد. نقاط M و N را روی خط l طوری می‌گیریم که زوایای $A\hat{P}M$ و $A\hat{Q}N$ قائمه باشند. ثابت کنید

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} \leq \frac{2}{AB}$$

۶) از نقطه‌ی P درون مربعی که اضلاعش آینه‌اند، پرتوی نوری با زاویه‌ی α نسبت به ضلع افقی می‌تابانیم. فرض کنید شرایط طوری باشد که پرتوی مذکور هیچ‌گاه به هیچ رأسی برخورد نکند. از روی مسیر پرتوی نور دنباله‌ای نامتناهی از ۰ و ۱ می‌سازیم؛ هرگاه پرتو به ضلعی افقی برخورد کرد ۰، و هرگاه به ضلعی عمودی برخورد کرد ۱ می‌گذاریم.

برای $n \geq 1$، مجموعه‌ی همه‌ی nتایی‌های متوالی در دنباله‌ی ساخته‌شده را B بنامید.

الف) نشان دهید B به مکان نقطه P ربطی ندارد.

ب) ثابت کنید اگر $\frac{\alpha}{\pi}$ گنگ باشد تعداد اعضای B دقیقاً برابر $n+1$ است.

امتحان آزمایشی المپیاد ریاضی

تاریخ: ۸۶/۲/۱۹

زمان: ۴/۵ ساعت

۱. فرض کنید $ABCDE$ یک پنج ضلعی محدب باشد که

$$B\widehat{A}C = C\widehat{A}D = D\widehat{A}E \quad \text{و} \quad A\widehat{B}C = A\widehat{C}D = A\widehat{D}E$$

وقطرهای BDو CE در P برخورد کنند، ثابت کنید خط AP ضلع CD را نصف میکند.

۲. دنبالهٔ $\{f(n)\}$ در زیر تعریف شده است:

$$f(n) = \frac{۱}{n}\left(\left[\frac{n}{۱}\right] + \left[\frac{n}{۲}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]\right)$$

که $[x]$ جزء صحیح x است.

الف)ثابت کنید به ازای بی‌نهایت n ، $f(n+۱) > f(n)$

ب)ثابت کنید به ازای بی‌نهایت n ، $f(n+۱) < f(n)$

۳. یک $۲n$-وجهی محدب $(n \geq ۳)$ در نظر بگیرید که همهٔ وجه‌های آن مثلث است. حداکثر تعداد رأس‌های درجهٔ ۳ در چنین چندوجهی را بیابید. (رأس درجهٔ ۳ یعنی رأسی که دقیقاً به ۳ رأس دیگر متصل است.)

بسمه تعالی

امتحان اول انتخاب تیم المپیاد ریاضی — ۱۹ اردیبهشت ۸۸

روز اول — زمان: ۴ ساعت و نیم

---

۱. در مثلث ABC، نقاط A'، B' و C' به ترتیب روی اضلاع BC، CA و AB قرار دارند به طوری که مرکز دایره محاطی $A'B'C'$ بر مرکز دایره‌ی محاطی ABC منطبق است و شعاع دایره‌ی محاطی $A'B'C'$، نصف شعاع دایره‌ی محاطی ABC است. نشان دهید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۲. a عددی طبیعی و ثابت است. ثابت کنید مجموعه‌ی عوامل اول اعداد به شکل $a + ۲^{۲^n}$، $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، نامتناهی است.

۳. a و b و c اعداد حقیقی مثبت هستند و $a + b + c = ۳$. ثابت کنید

$$\frac{۱}{۲ + a^۲ + b^۲} + \frac{۱}{۲ + b^۲ + c^۲} + \frac{۱}{۲ + c^۲ + a^۲} \leq \frac{۳}{۴}.$$

موفق باشید!

بسمه تعالی

امتحان اول انتخاب تیم المپیاد ریاضی - ۲۰ اردیبهشت ۸۸

روز دوم زمان: ۴ ساعت و نیم

---

۱. همه‌ی چندجمله‌ای‌های $f(x)$ با ضرایب صحیح را بیابید که به ازای هر عدد اول p و اعداد طبیعی u و v که $p \mid \mathrm{uv} - 1$ داشته باشیم $p \mid f(\mathrm{u})f(\mathrm{v}) - 1$.

۲. در مثلث ABC، A_1، B_1 و C_1 به ترتیب پای ارتفاعات وارد از رئوس A، B و C هستند. اگر P پای عمود بر A_1B_1 از C_1 باشد و Q روی A_1B_1 طوری باشد که $AQ = BQ$، نشان دهید

$$P\widehat{A}Q = P\widehat{B}Q = P\widehat{C_1}C.$$

۳. در یک شبکه‌ی $n \times n$، مسیر بسته‌ای داریم که از هر رأس دقیقاً یک بار عبور کرده است. نشان دهید دو رأس مجاور در شبکه یافت می‌شوند که اگر مسیر را از آن دو نقطه ببُریم، طول هر یک از دو قطعه حاصل از $\frac{1}{4}$ طول کل مسیر کمتر نباشد.

موفق باشید!

بسمه تعالی

امتحان دوم انتخاب تیم المپیاد ریاضی

روز اول

۲۶ اردیبهشت ۸۸

زمان:۴ ساعت و نیم

---

۱. سه راستای مختلف در صفحه در نظر بگیرید. در هر یک از این سه راستا، ۱۱ خط رسم می‌کنیم. حداکثر تعداد نقاطی که روی سه تا از این خطوط قرار می‌گیرند چند تاست؟

۲. همه‌ی چندجمله‌ای‌های $P(x,y)$ با ضرایب حقیقی را بیابید که

$$P(x^2,y^2) = P\left(\frac{(x+y)^2}{2},\frac{(x-y)^2}{2}\right)$$

۳. در مثلث ABC، D، E و F محل تماس دایره ی محاطی داخلی به مرکز I با اضلاع BC، AC و AB هستند. M پای عمود وارد از D بر EF است و P وسط DM است. اگر H مرکز ارتفاعی مثلث BIC باشد، ثابت کنید PH از وسط EF می‌گذرد.

موفق باشید!