

به نام خدا

الگوریتم حریصانه

سوالات:

ساده:

۱. فرض کنید F خانواده ای از دایره های توپر است به طوری که اجتماع این دایره ها برابر با مجموعه E است. ثابت کنید n ای وجود دارد که بتوان n دایره توپر $D_1, D_2, \dots, D_n \in F$ انتخاب کرد به طوری که هیچ دوتایی با هم مساحت مشترک نداشته باشند و اجتماع مساحت $3D_1, 3D_2, \dots, 3D_n$ مجموعه E را بپوشاند. منظور از $3D$ ، دایره ای توپر به مرکز دایره D و شعاع ۳ برابر شعاع D است.

متوسط:

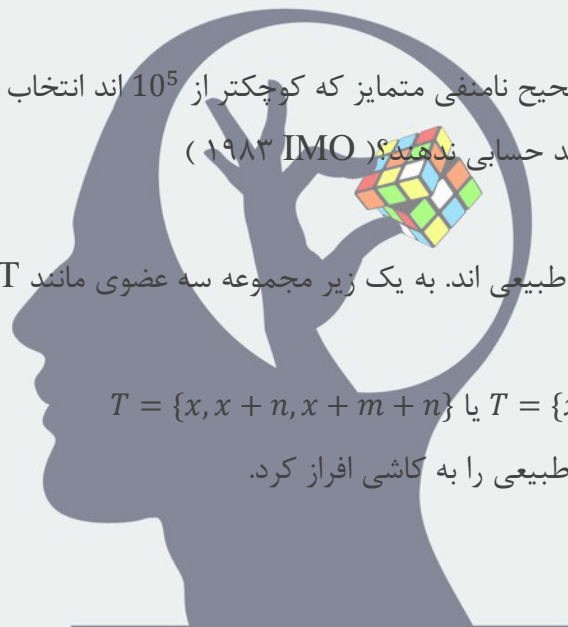
۲. آیا میتوانیم ۱۹۸۳ عدد صحیح نامنفی متمایز که کوچکتر از 10^5 اند انتخاب کنیم، به طوری که هیچ ۳ تایی از آنها تشکیل تضاد حسابی ندهند؟ (IMO ۱۹۸۳)

سخت:

۳. فرض کنید $m < n$ اعداد طبیعی اند. به یک زیر مجموعه سه عضوی مانند T از اعداد طبیعی کاشی میگوییم اگر

$$T = \{x, x + n, x + m + n\} \text{ یا } T = \{x, x + m, x + m + n\}$$

ثابت کنید میتوان اعداد طبیعی را به کاشی افراز کرد.



ذهن زیبا

راهنمایی:

ساده:

۱. هر مرحله بزرگترین دایره ای که میتوان برداشت را بردارید. آنگاه برای این مجموعه مسئله را ثابت کنید.

متوسط:

۲. هر مرحله اولین عددی که تصاعد تشکیل نمیدهد با قبلی ها را بردارید. دنباله این اعداد را حدس بزنید و مسئله را ثابت کنید.

سخت:

۳. فرض کنید $n > m$. به مجموعه $T = \{x, x + n, x + n + m\}$ کاشی بزرگ میگوییم و به دیگری

کاشی کوچک میگوییم. با این الگوریتم کاشی میگذاریم:

در هر مرحله کوچکترین عددی که در کاشی ای نیست را در نظر میگیریم. سپس اگر کاشی کوچک میتوانستیم بگذاریم، میگذاریم. در غیر این صورت کاشی بزرگ میگذاریم. درستی این الگوریتم را ثابت کنید.



ذهن زیبا