به نام خدا

راهنمایی تمارین چندجمله‌ای ها **تابستان ۹۵**

۱- از درون‌یابی لاگرانژ استفاده کنید.

۲- بدون راهنمایی

۳- جمع مربعات ریشه‌ها را با استفاده از اتحاد ویت حساب کنید.

۴- ثابت کنید $L(x)$ وجود دارد که: $P(x) = (x+2)(x+1)\,x\,(x-1)\,L(x)$

۵- بدون راهنمایی

۶- برهان خلف! و توجه به این‌که اگر چندجمله‌ای در بازه‌ای تغییر علامت داشته باشد، در آن بازه ریشه دارد.

۷- سعی کنید این جمله را درون یک درون‌یابی بیابید.

۸- دنباله‌ی x_i را به‌گونه‌ای قرار دهید که اگر i فرد باشد، $x_i < max\{0, 2\,P(i)\}$ و اگر i زوج باشد $x_i > max\{0, 2\,P(i)\}$

۹- اگر برای عدد مختلط و غیرحقیقی a، z_0 ریشه‌ی معادله‌ی $P(z) = a\,Q(z)$ باشد، چه می‌توان گفت؟

۱۰- با بحث کردن روی درجه، ثابت کنید درجه $P(x)$ برابر ۱ است اگر $P(x)$ ثابت نباشد.

۱۱- با استقرا ثابت کنید $x^{2n}|P_{2n}(x)$ و توجه کنید که $P_{2k}(2) = 0$

۱۲- از اتحاد ویت استفاده کنید.

۱۳- تعریف کنید $f(x) = P(x) - x^n$. حالا از درون‌یابی استفاده کنید.

۱۴- از درون‌یابی لاگرانژ استفاده کنید.

۱۵- از این‌که اگر r_i ها ریشه باشند، Σr_i و $\Sigma r_i r_j$ را با اتحاد ویت می‌توان حساب کرد، کمک بگیرید و در ادامه از نامساوی حسابی هندسی استفاده کنید.

۱۶- در مسأله، x را با $x - y$ جایگذاری کنید سپس y را عدد بزرگتر از $\frac{x}{2}$ درنظر بگیرید.

۱۷- از چندجمله‌ای $P(x) = \prod(x + b_i)$ و اتحاد ویت کمک بگیرید.

۱۸- از استقرا کمک بگیرید.

۱۹- با استقرا سعی کنید حکم را تعمیم دهید. (از درون‌یابی استفاده کنید): $max \geq (\frac{a-1}{2})^{n+1}$

۲۰-

روش اول: $\overline{P(x)} = R(x) - iQ(x)$

روش دوم: $P_n(x) = R_n(x) + iQ_n(x)$. حال از استقرار کمک بگیرید.

۲۱- ابتدا نشان دهید $P \in \mathbb{Q}[x]$. پس به‌جای x قرار دهید x_0 . ریشه معادله $5x = 5x^2 + 1$ و $P(x_0)$ را محاسبه کنید.

۲۲- فرض کنید $|a_m| > \cdots > |a_1|$ و z کوچکترین ریشه $P(x)$ از لحاظ قدرمطلق باشد که در مضرب n بار نیامده: $x = \frac{z}{a_1} \Rightarrow P(z) \times \ldots \times P\left(\frac{a_m z}{a_1}\right) = Q(\frac{z}{a_1})^n$

در نتیجه $\frac{z}{a_1}$ ریشه $Q(x)$ است.

۲۳- سعی کنید دو چندجمله‌ای مانند g و f بیابید که: $P_i = (f(i), g(i))$

۲۴- $r(x,y) = x + xy$ و $s(x,y) = x^2y$

۲۵- بدون راهنمایی

۲۶- معادله‌ی پاره‌خط بین (a_n, b_n) و (a_{n+1}, b_{n+1}) را بنویسید و از استقرا کمک بگیرید.

به نام خدا

تمارین چندجمله‌ای‌ها **تابستان ۹۵**

ساده :

۱-چندجمله‌ای درجه n $P(x)$ به‌گونه‌ای است که اگر تعریف کنیم، باقیمانده i بر ۲ را برابر با a_i ، آن‌گاه:

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} : P(i) = a_i$$

$P(n+1)$ را بیابید.

۲-$P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ و درجه‌اش زوج است و ضرایب آن فرد. ثابت کنید $P(x)$ ریشه گویا ندارد.

۳-آیا دو مجموعه‌ی متناهی مانند A و B وجود دارند به‌طوری‌که اعضای آن همگی حقیقی و ناصفر بوده و برای هر $n \in N$ ، چندجمله‌ای درجه n با ضرایب در A و ریشه‌ها در B موجود باشند؟

۴-همه‌ی چندجمله‌ای‌ها مانند $P(x)$ را بیابید به‌گونه‌ای که برای هر $x \in R$ داشته باشیم.

$$(x^3+3x^2+3x+2)P(x-1) = (x^3-3x^2+3x-2)P(x)$$

۵-تمام چندجمله‌ای‌های $P(x,y) \in R[x,y]$ را بیابید به‌گونه‌ای که برای هر a, b, c حقیقی داریم:

$$bP(a,c) + aP(c,b) = 2cP(a,b)$$

۶-$f(x)$ و $g(x)$ در چندجمله‌ای تکین هستند و می‌دانیم $f\big(g(x)\big) = 0$ و $g\big(f(x)\big) = 0$ ریشه حقیقی ندارند. ثابت کنید حداقل یکی از $f\big(f(x)\big) = 0$ و $g\big(g(x)\big) = 0$ ریشه حقیقی ندارند.

متوسط :

۷-$a_1, \dots, a_n$ اعداد طبیعی متمایز هستند. برای هر k طبیعی ثابت کنید عبارت زیر عددی صحیح است.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

۸-ثابت کنید هر چندجمله‌ای تکین و درجه n با ضرایب حقیقی را می‌توان به‌صورت میانگین دو چندجمله‌ای تکین با ضرایب حقیقی نوشت که تمام ریشه‌هایشان حقیقی است.

۹-چندجمله‌ای‌های غیرثابت $P(z)$ و $Q(z)$ با ضرایب مختلط دارای این خاصیت هستند:

به ازای هر عدد مختلط مانند z ، $P(z)\overline{Q(z)}$ عدد حقیقی است. ثابت کنید عدد حقیقی λ وجود دارد که

$$P(z) = \lambda Q(z)$$

۱۰-تمام چندجمله‌ای‌های $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ را بیابید به‌طوری‌که چندجمله‌ای یکتای $Q(x)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$\begin{cases} 1)\ Q(0) = 0 \\ 2)\ \forall x, y \in R\ :\ \ x + Q\big(y + P(x)\big) = y + Q(x + P(y) \end{cases}$$

۱۱-اگر $P_0(x) = x^3 - 4x$ و برای هر $n \ \geq\ 1$ داشته باشیم:

$$\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{x}) = \mathrm{P}_n(\mathrm{x}+1)\mathrm{P}_n(1-\mathrm{x}) - 1$$

ثابت کنید تکرر ریشه صفر در $P_{2016}(x)$ ، حداقل برابر 2016 است.

۱۲-تمام چندجمله‌ای‌هایی را بیابید که ضرایب آن عضو $\{1$ و $-1\}$ باشد و تمام ریشه‌های آن حقیقی باشد.

۱۳-برای چندجمله‌ای $P(x) = x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ \dots\ + a_0$ ثابت کنید:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \Rightarrow \quad |P(i)| \geq \frac{n!}{\binom{n}{i}}$$

۱۴- a_n , ... , a_0 اعدادی حقیقی هستند به‌طوری‌که برای هر $x \in [-1,1]$ داریم:

$$|a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n| \leq 1$$

ثابت کنید:

$$\forall x \in [-1,1] \quad |a_n + \cdots + a_0x^n| \leq 2^{n-1}$$

۱۵-همه‌ی اعداد طبیعی n را بیابید به‌گونه‌ای‌که دنباله‌ی $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ با شرط زیر موجود باشد:

هر جایگشتی از a_i ها که به‌عنوان ضریب چندجمله‌ای در نظر گرفته شوند، ریشه‌های چندجمله‌ای حاصل همگی حقیقی باشند.

۱۶-همه‌ی چندجمله‌ای‌های $P(x) \in \mathbb{R}(x)$ را بیابید به‌طوری‌که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$2yP(x+y) + (x-y)\ (P(x) + P(y))\ \geq\ 0$$

۱۷- n عددی طبیعی و زوج می‌باشد و a_n , ... , a_1 و b_n , ... , b_1 ، $2n$ عدد مختلط متمایز باشند و در خانه‌ی $(i\,,j)$ جدول $n \times n$ ، عدد $a_i + b_j$ نوشته شده است. اگر ضرب اعداد هر سطر برابر با 1 باشد، ثابت کنید ضرب اعداد هر ستون برابر -1 است.

سخت :

۱۸- $P_n(x,y)$ به شکل زیر تعریف می‌شوند.

$$P_1(x,y) = 1$$

$$P_{n+1}(x,y) = (x+y-1)(y+1)P_n(x,y+2) + (y-y^2)P_n(x,y)$$

برای هر n ثابت کنید: $P_n(x,y) = P_n(y,x)$

۱۹-$a \geq 3$ عددی حقیقی است و $P(x)$ چندجمله‌ای از درجه n با ضرایب حقیقی است، ثابت کنید:

$$\max_{i=0,\dots,n+1} \left|a^i - P(i)\right| \geq 1$$

۲۰-$P(x)$ چندجمله‌ای باضرایب مختلط و درجه n می‌باشد و با فرض $i^2 = -1$ ، ریشه‌های آن اعداد $i-1, i-2, \dots, i-n$ هستند. اگر $P(x) = R(x) + iQ(x)$ که $Q(x)$ و $R(x)$ ضرایب حقیقی دارند، ثابت کنید تمام ریشه‌های $R(x)$ حقیقی هستند.

۲۱-همه‌ی چندجمله‌ای‌های $P(x) \in \mathbb{R}(x)$ را بیابید به‌طوری‌که برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$P(5x)^2 - 3 = P(5x^2 + 1)$$

۲۲-همه‌ی چندجمله‌ای‌های $P(x)$ را بیابید به‌طوری‌که اعداد حقیقی و متمایز مانند $a_1, \dots, a_m$ و چندجمله‌ای $Q(x)$ موجود باشد به‌طوری‌که: $P(a_1x)\,P(a_2x)\,\dots\,P(a_mx) = Q(x)^m$

۲۳-ثابت کنید مجموعه‌ای از نقاط صفحه مانند $\dots, P_{-1}, P_0, P_1, \dots$ وجود دارد به‌طوری‌که P_a, P_b, P_c هم-خط باشند اگر و فقط اگر $a+b+c = 2014$

۲۴-چندجمله‌ای $P(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ را خوب می‌گوییم اگر برای هر x و y حقیقی داشته باشیم $P(x,y) = P\left(xy, \frac{1}{y}\right)\ (y \neq 0)$ ثابت کنید چندجمله‌ای‌های خوب $r(x,y)$ و $s(x,y)$ وجود دارند که برای هر $P(x)$ خوب، چندجمله‌ای $f(x,y)$ باشد بطوری‌که:

$$P(x,y) = f(r(x,y), s(x,y))$$

۲۵-$P(x,y)$ چندجمله‌ای با ضریب حقیقی است به‌گونه‌ای که $P(x+2y, x+y) = P(x,y)$ ثابت کنید $Q(x) \in \mathbb{R}(x)$ وجود دارد که: $P(x,y) = Q((x^2-2y^2)^2)$

۲۶-$P(x,y), Q(x,y)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب صحیح می‌باشند. دنباله‌های $\{a_i\}$،$\{b_i\}$ در این رابطه صدق می‌کنند: $b_{n+1} = Q(a_n, b_n)$ و $a_{n+1} = P(a_n, b_n)$ و $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$

و می‌دانیم $k > 2$ وجود دارد که $(a_k\,, b_k) = (a_1\,, b_1)$. ثابت کنید تعداد نقاط با مختصات صحیح روی پاره‌خط واصل $(a_n\,, b_n)$ و $(a_{n+1}\,, b_{n+1})$ برای هر n ، ثابت است.