به نام او

آزمون هندسه

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، شهریور ۱۴۰۱ — مدت زمان آزمون: ۲۷۰ دقیقه

---

۱. مثلث ABC مفروض است. نقطه T تقاطع دوم میانه متقارن رأس A با دایره محیطی مثلث ABC است و نقطه $D \neq A$ روی خط AC به گونه‌ای قرار دارد که $BA = BD$. خطی که در D بر دایره محیطی مثلث ADT مماس می‌شود، دایره محیطی مثلث DCT را برای بار دوم در K قطع می‌کند. ثابت کنید $\angle BKC = ۹۰^\circ$ (میانه متقارن رأس A، قرینه میانه رأس A نسبت به نیمساز همین رأس است).

۲. نقاط ثابت B و C روی دایره ω قرار دارند. نقطه وسط BC را M می‌نامیم. فرض کنید A نقطه‌ای متغیر روی ω و H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد. از نقطه H خطی عمود بر MH رسم می‌کنیم تا خطوط AB و AC را به ترتیب در X و Y قطع کند. ثابت کنید با حرکت A روی ω، مرکز ارتفاعی مثلث AXY نیز روی یک دایره حرکت می‌کند.

۳. نقطه M وسط ضلع BC از مثلث حاده‌الزاویه ABC است و نقاط E و F به ترتیب پای عمود از M بر اضلاع AC و AB هستند. نقاط X و Y در صفحه به گونه‌ای قرار دارند که $\triangle CEY \sim \triangle XEC$ و $\triangle XBF \sim \triangle BYF$ (رئوس مثلث‌ها به همین ترتیب در تشابه‌ها متناظرند) و نقاط E و F روی خط XY قرار ندارند. ثابت کنید $AM \perp XY$.

موفق باشید!

به نام او

آزمون جبر

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، شهریور ۱۴۰۱ — مدت زمان آزمون: ۲۷۰ دقیقه

---

۱. چندجمله‌ای $Q \in \mathbb{R}[X]$ را ساده می‌گوییم اگر بر x بخش‌پذیر باشد ولی بر $x^۲$ بخش‌پذیر نباشد.
برای چندجمله‌ای $P \in \mathbb{R}[X]$ می‌دانیم چندجمله‌ای ساده‌ی $Q(x)$ وجود دارد که

$$P(Q(x)) - Q(۲x)$$

بر $x^۲$ بخش‌پذیر است. نشان دهید چندجمله‌ای ساده‌ی $R(x)$ موجود است به طوری که

$$P(R(x)) - R(۲x)$$

بر $x^{۱۴۰۱}$ بخش‌پذیر می‌باشد.

۲. همه‌ی تابع‌های مانند $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را پیدا کنید به طوری که برای هر x, y طبیعی داشته باشیم

$$۱ \geq y + f(x) - f^{f(y)}(x) \geq ۰$$

که در این‌جا

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\cdots(f}_{\text{مرتبه } n}(x))\cdots).$$

۳. n عددی طبیعی است. نشان دهید عددهای مختلط $w_۱, w_۲, \cdots, w_n$ روی دایره‌ی واحد وجود دارند به طوری که

$$\left|\sum_{j=۱}^{n} w_j\right| = \left|\sum_{j=۱}^{n} w_j^۲\right| = n - ۱$$

اگر و تنها اگر $n = ۲$.

موفق باشید!

به نام او

آزمون نظریه اعداد

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، شهریور ۱۴۰۱ | مدت زمان آزمون: ۲۷۰ دقیقه

---

۱. عدد طبیعی $n \geq ۲$ را در نظر بگیرید. امین و علی بازی زیر را به نوبت انجام می‌دهند:
در هر مرحله، بازیکنی که نوبتش فرا رسیده است، اندیس i را از مجموعه $\{۰, ۱, \cdots, n\}$ برمی‌گزینند، به طوری که هیچ‌یک از دو بازیکن این اندیس را در مراحل قبل انتخاب نکرده باشند؛ همچنین این بازیکن در این مرحله عدد گویای ناصفر a_i را نیز تعیین می‌کند. علی اولین حرکت را انجام می‌دهد. بازی تمام می‌شود زمانی که همه‌ی اندیس‌های $i \in \{۰, ۱, \cdots, n\}$ انتخاب شده باشند. در انتها، از روی اعداد انتخاب شده چندجمله‌ای زیر ساخته می‌شود:

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_۱ x + a_۰$$

هدف علی این است که چندجمله‌ای فوق ریشه گویا داشته باشد و هدف امین این است که از این امر جلوگیری کند. تمام $n \geq ۲$ طبیعی را بیابید که علی بتواند طوری بازی کند که مطمئن باشد مستقل از نحوه بازی امین به هدف خود می‌رسد.

۲. برای دو عدد گویای r, s می‌گوییم:

$$r \mid s$$

هرگاه $k \in \mathbb{Z}$ وجود داشته به طوری که:

$$s = kr$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد طبیعی دو به دو نسبت به هم اول و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از اعداد طبیعی متمایز است. فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{a_i} \mid \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{b_i}$$

ثابت کنید **برای هر** $n \in \mathbb{N}$ داریم: $a_n = b_n$.

۳. عدد طبیعی m را **زیبا** می‌گوییم، اگر هر عدد طبیعی n با شرط $۱ \leq n \leq m$ را بتوان به صورت مجموع مقسوم علیه‌های مثبت و متمایز m نوشت. نشان دهید بی‌شمار عدد زیبا به شکل $k^۲ + k + ۲۰۲۲$ $(k \in \mathbb{N})$ وجود دارد.

موفق باشید!

به نام او

آزمون ترکیبیات

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، شهریور ۱۴۰۱ — مدت زمان آزمون: ۲۷۰ دقیقه

---

۱. به ازای هر عدد طبیعی k کمترین n را بیابید که در هر تورنمنت با n راس، رأسی با درجه‌ی ورودی و خروجی حداقل k وجود داشته باشد.
(تورنمنت گراف جهت‌دار کامل است.)

۲. صفحه شطرنجی $m \times n$ با موزاییک‌های ۲ × ۲ و ۳ × ۱ (افقی و عمودی) فرش شده است. ثابت کنید تعداد راه‌های انتخاب یک مستطیل ۲ × ۱ (افقی و عمودی) به گونه‌ای که یک خانه از آن توسط موزاییک ۲ × ۲ و خانه دیگر توسط موزاییک ۳ × ۱ پر شده باشد عددی زوج است.

۳. $n \geq ۳$ نقطه در صفحه داریم که هیچ سه‌تایی هم‌خط نیستند. ثابت کنید می‌توان این نقاط را $P_۱, P_۲, ..., P_n$ نامید، طوری که به ازای هر $۱ < i < n$، زاویه $\angle P_{i-۱}P_iP_{i+۱}$ حاده باشد.

موفق باشید!