# به نام خدا

## استقرای ریاضی

سوالات:

ساده:

۱. آیا میتوان اعداد ۱ تا ۱۰۰۰ را طوری روی یک خط چید به طوری که میانگین هیچ دو عددی از آنها، بینشان نباشد؟ ادعای خود را ثابت کنید. (۱۰۲ مسئله)

۲. چند دسته از سنگریزه ها داریم، به طوری که روی هم ۶۴ سنگریزه در این دسته ها هست. در هر مرحله میتوانیم ۲ دسته p و q سنگریزه ای انتخاب کنیم که $p \geq q$. سپس از دسته p تایی q تا سنگریزه برداریم و به دسته q تایی اضافه کنیم. ثابت کنید با این فرآیند میتوان همه سنگریزه ها را در یک دسته جمع آوری کرد. (۱۰۲ مسئله)

۳. ثابت کنید:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

۴. ثابت کنید عدد فیبوناچی n ام بر ۳ بخش پذیر است اگر و تنها اگر n بر ۴ بخش پذیر باشد.

۵. ثابت کنید در میان هر $2^{n+1}$ عدد طبیعی، $2^n$ عدد وجود دارند که مجموعشان بر $2^n$ بخش پذیر است.

۶. در n قوطی ۲n شکلات قرار دارد. دو نفر با هم بازی میکنند. به این صورت که هر نفر در نوبت خود یک شکلات بر میدارد. ثابت کنید که نفر دوم میتواند طوری بازی کند که دو شکلات آخر از یک قوطی باشند.

متوسط:

۷. ساختمان روشنایی تعداد زیادی چراغ و کلید دارد. هر کلید به بعضی از چراغ‌ها متصل است و با زدن آن وضعیت همه آن چراها تغییر می‌کند. می‌دانیم هر چراغ دست کم به یک کلید متصل است. نشان دهید اگر در ابتدا همه چراغ ها خاموش باشند می‌توان با زدن بعضی از کلید ها به حالتی رسید که بیش از نیمی از چراغ‌ها روشن باشند. (المپیاد کامپیوتر! ۱۳۸۸)

۸. فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند که $k \leq n$ و S مجموعه‌ای شامل n عدد حقیقی باشد. ثابت کنید در بین زیر مجموعه‌های k عضوی S حداقل $k(n-k)+1$ زیر مجموعه می‌توان یافت که مجموع اعضا هیچ دوتا برابر نباشد. (پیشنهاد المپیاد جهانی ۱۹۹۳)

۹. فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_{2010}$ زیر مجموعه هایی از مجموعه n عضوی X باشند به طوری که هر یک بیش از $\frac{n}{2}$ عضو داشته باشند. ثابت کنید مجموعه ای ۱۰ عضوی می توان یافت که با هر یک از $A_i$ ها اشتراک داشته باشد . (پرتقال ۲۰۱۰)

۱۰. ثابت کنید میتوان هر مربع $2^n \times 2^n$ را که یک خانه اش حذف شده است، به L افراز کرد ( L یک مربع ۲x۲ است که یک گوشه آن حذف شده است)

۱۱. بدست بیاورید که n دایره صفحه را به حداکثر چند ناحیه تقسیم میکنند. (محافل )

۱۲. در صفحه ای چندتا دایره وجود دارد. در هر یک از آنها یک وتر رسم شده است. ثابت کنید که ناحیه های این صفحه را میتوان طوری با ۳ رنگ، رنگ کرد که رنگ های هر دو ناحیه مجاور متفاوت باشد. (محافل )

۱۳. ۹۱ مهره سفید در ۹۱ خانه از جدول $10 \times 10$ قرار دارد. در هر مرحله یک مهره سفید از جدول برمیداریم و یک مهره سیاه در خانه ی خالی شده قرار میدهیم. ثابت کنید در لحظه ای دو مهره ناهمرنگ مجاورند.

۱۴. در صفحه n مستطیل داریم که اضلاعشان عمودی و افقی اند. ثابت کنید که اگر هر دوتایی با هم اشتراک داشته باشند ، همه ی آنها نیز با هم اشتراک دارند.

سخت:

۱۵. دو تیم هر یک شامل ۱۰۰۰ بازیکن است. هر بازی کن از یک تیم با هر بازیکن از تیم دیگر یک بار مسابقه می‌دهد (تساوی نداریم). ثابت کنید ۱۰ بازیکن از یک تیم می‌توان انتخاب کرد به طوری که هر بازیکن از تیم دیگر حداقل به یکی از این ۱۰ بازیکن باخته باشد. (بالتیک-۱۹۹۸)

۱۶. اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ اعداد حقیقی غیر منفی دلخواهی باشند، ثابت کنید:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

۱۷. محاسبه کنید که n صفحه نامتنهایی فضا را حداکثر به چند ناحیه افراز میکنند.

۱۸. چند مربع داده شده اند. ثابت کنید که میتوان آنها را به تکه هایی برید و این تکه ها را طوری کنار هم چید که یک مربع بزرگ تشکیل شود.

۱۹. میگوییم n خوب است اگر بتوانیم اعداد ۱ تا ۳n را به n دسته ۳ تایی افراز کنیم به طوری که در هر دسته، جمع دو عضو کوچک برابر با بزرگترین عضو باشد.

ثابت کنید تعداد اعداد خوب نا متناهی است.

راهنمایی ها:

ساده:

۲۰. فرد ها را یک طرف و زوج ها را در طرف دیگر بگذارید. میانگین هیچ زوج و فردی بینشان نیست، زیرا اصلا طبیعی نمیشود آن عدد. مابقی را با استقرا پیش ببرید.

۲۱. همه دسته ها را زوج کنید.

۲۲. بدون توضیح!

۲۳. بدون توضیح!

۲۴. ۳ دسته متمایز $2^{n-1}$ تایی بیابید که مجموع اعداد هر دسته بر $2^{n-1}$ بخشپذیر است.

۲۵. اگر قوطی ای یک شکلات داشته باشد ....

متوسط:

۲۶. فرض کنید یک کلید به تعدادی لامپ وصل است. آن کلید و لامپ های متصل به آن را حذف کنید و استقرا بزنید.

۲۷. استقرا روی n می زنیم n=k بدیهی است.

فرض کنید برای $n-1$ حل شده است.$S=\{a_1,\dots,a_n\}$، زیرمجموعه های k عضوی $\{a_{n-k},\dots,a_n\}$ را به جواب های برای $S'=\{a_1,\dots,a_{n-1}\}$ اضافه کنید.

۲۸. عضوی وجود دارد که در بیش از نیمی از مجموعه ها آمده است.

۲۹. روی توان دوی طول ضلع مربع استقرا بزنید!

۳۰. هر دو دایره همدیگر را حداکثر در ۲ نقطه قطع میکنند.

۳۱. استقرا بزنید بعد از اضافه کردن دایره جدید. یک روش خاصی برای رنگ کردن نواحی جدید( با توجه به رنگ قبلیشان! ) ارائه بدهید که، شرط مسئله برقرار بماند.

۳۲. سعی کنید در خانه های آلوده یک چیز ناوردا پیدا کنید.

۳۳. مستطیل ها را در محور مختصات ، روی محور ها تصویر کنید.

سخت:

۳۴. ثابت کنید در هر گراف جهت دار متناهی، راسی داریم که درجه خروجی آن بیشتر از ورودی آن است. حال استقرا بزنید.

۳۵. از $n$ به $2n$ استقرا بزنید و از $n$ به $n-1$ نیز استقرا بزنید. برای $n$ به $n-1$ یکی از متغیر ها را مقدار دهی جالبی بکنید.

۳۶. وقتی یک صفحه جدید میگذرانیم، تقاطعش با هر صفحه دیگر یک خط میشود. این خطوط آن صفحه جدید را به تعدادی ناحیه افراز میکند.

۳۷. کافیست برای دو مربع اینکار را انجام دهید.

۳۸. از $n$ به $4n$ استقرا بزنید.