به نام خدا

۱-در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، نقطه‌ی P، نقطه‌ای روی ضلع AB است. نقطه‌ی Q را طوری در نظر می‌گیریم که $AP = CQ$ و Q روی ضلع AC باشد. ثابت کنید با تغییر P روی AB، عمودمنصف پاره‌خط PQ از نقطه‌ی ثابتی رد می‌شود.

۲-متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را در نظر بگیرید. پای عمود وارد از A بر ضلع BC را H می‌نامیم و وسط ضلع AB را M می‌نامیم. محل برخورد خط CM با دایره محیطی مثلث ABC را K می‌نامیم. ثابت کنید چهارضلعی $KHCD$ محاطی است.

۳-نقاط P و Q روی اضلاع CA و AB از مثلث ABC قرار دارند. دایره‌ی K از وسط اضلاع BP و CQ و PQ می‌گذرد. اگر دایره‌ی K بر خط PQ مماس باشد ثابت کنید $OP=OQ$. (O مرکز دایره محیطی مثلث ABC است.)

۴-فرض کنید $A_1A_2A_3A_4$ یک چهارضلعی غیرمحاطی باشد. فرض کنید O_1 و r_1 به‌ترتیب مرکز و شعاع دایره محیطی مثلث $A_2A_3A_4$ باشند. O_2 و O_3 و O_4 و r_2 و r_3 و r_4 نیز به‌ترتیب مشابه تعریف می‌شوند، نشان دهید.

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{O_iA_i^2 - r_i^2} = 0$$

۵-قضیه اویلر: در مثلث ABC، O مرکز دایره محیطی و R شعاع آن است. و نیز I مرکز دایره محاطی و r شعاع آن است. نشان دهید: $OI^2 = R^2 - 2Rr$

۶-مثلث حاده ABC را در نظر بگیرید. دایره‌ای با قطر AB، ارتفاع CC' و امتدادش را به ترتیب در M و N قطع می‌کند. دایره‌ای با قطر AC، ارتفاع BB' و امتدادش را در P و Q قطع می‌کند. ثابت کنید چهار نقطه‌ی M و N و P و Q روی یک دایره قرار دارند.

۷-در مثلث ABC، نیمساز A، ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. می‌دانیم $BC.CD = AD^2$ و $A\hat{D}B = 45°$، زوایای مثلث را بیابید.

۸-در مثلث ABC، AD نیمساز زاویه A است و E و F تصاویر B و C روی آن هستند. نقاط M و N روی اضلاع AB و AC طوری قرار دارند که مساحت مثلث‌های BME و CNF برابر باشد. اگر O مرکز دایره محیطی مثلث AMN باشد، ثابت کنید $OB = OC$.

۹-D را پای ارتفاع وارد از A بر ضلع BC در مثلث ABC می‌نامیم. فرض کنید W دایره‌ای باشد که در D بر ضلع BC مماس است و از نقطه‌ی A رد می‌شود. خطی که از D موازی AC رسم می‌شود، AB را در E قطع می‌کند و خطی که از D موازی AC رسم می‌شود، AC را در F قطع می‌کند. خط EF، دایره W را در P و Q قطع می‌کند. ثابت کنید چهار نقطه‌ی B و C و Q و P روی یک دایره قرار دارند.

۱۰-دو دایره W_1 و W_2 برهم مماس خارج‌اند. AD مماس مشترک خارجی آن‌هاست (A روی W_1 و D روی W_2 قرار دارند) نقطه C را دلخواه روی W_1 در نظر می‌گیریم. B نقطه‌ای روی CD است، به‌طوری که خط مماس دارد از B بر W_1 با AD موازی است. نشان دهید دایره محیطی مثلث ABC بر خط AD مماس است.

۱۱-نقاط D و E روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC قرار دارند. خطوط BE و CD در N متقاطع‌اند. نشان دهید A و D و E و N روی یک دایره قرار دارند اگر و تنها اگر

$$BC^2 = BN.BE + CN.CD$$

۱۲-نیم‌ساز زاویه A از مثلث ABC، دایره محیطی آن را در P قطع می‌کند. عمود و منصف اضلاع AB و AC نیم‌ساز A را در K و L قطع می‌کند. اگر M و N اوساط AB و AC باشند، ثابت کنید:

$$S_{PKM} = S_{PLN}$$

۱۳-نقاط A و D روی اضلاع BE و CE از مثلث EBC قرار دارند. نشان دهید $A\hat{D}C = A\hat{B}C$ اگر و تنها اگر $AC^2 = CD.CE - AB.AE$.

به نام خدا

۱-قوت P و Q را نسبت به دایره محیطی مثلث ABC حساب کنید. (متوسط)

۲-محل برخورد خطوط HM و AD را S بنامید. ثابت کنید که پنج‌ضلعی SKHCD محاطی است.

۳-(متوسط) IMO 2009: ثابت کنید $\overset{\Delta}{MKL} \sim \overset{\Delta}{APQ}$ که M و K و L به‌ترتیب اوساط خطوط PQ، PB و CQ هستند سپس قوت نقاط P و Q را نسبت به دایره محیطی مثلث ABC بیابید.

۴-(متوسط) Imo short list 2011:

فرض کنید W_1 دایره محیطی مثلثی با مرکز O_1 و شعاع r_1 باشد و M محل برخورد A_1A_3 و A_2A_4 باشد. محل برخورد W_1 با A_1A_3 را B_1 می‌نامیم. فرض کنید $MA_1 = x$ و $MA_2 = y$ و $MA_3 = z$ و $MA_4 = w$ باشد. ثابت کنید: $O_1A_1^2 - r_1^2 = A_1B_1.A_1A_3$ و توجه کنید $MB_1 = \frac{yw}{z}$ پس $O_1A_1^2 - r_1^2 = \left(\frac{yw}{z} - x\right)(z - x)$

۵-(ساده) قوت I را نسبت به دایره محیطی مثلث ABC حساب کنید.

۶-(ساده) به قوت مرکز ارتفاعی مثلث ABC توجه کنید.

۷-(متوسط) قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به D روی دایره محیطی مثلث ABC است. اگر O و A' را به ترتیب مرکز دایره محیطی و روبه‌رو قطری A در نظر بگیریم، داریم A'D = DA

۸-(ساده) کافی است ثابت کنید قوت C و B نسبت به دایره محیطی مثلث AMN برابر است.

۹-(ساده) محل برخورد EF و BC را X بنامید. و قوت X را بنویسید.

۱۰-(ساده) نقطه‌ی D که محل تماس W_1 و W_2 است و همچنین نقطه‌ی تماس خط مماس از B بر W_1 هم‌خطاند. حال قوت D را نسبت به دایره محیطی ABC بنویسیم.

۱۱-(متوسط) قسمت اول: محل برخورد دایره محیطی مثلث DNB با ضلع BC را X بگیرید. ثابت کنید چهارضلعی XNEC نیز محاطی است. قسمت دوم سؤال نیز به طور مشابه اثبات می‌شود.

۱۲-(ساده) ثابت کنید OL = OK (O مرکز دایره محیطی مثلث ABC).

۱۳-(متوسط) خط AC را ادامه دهید تا دایره محیطی مثلث EBC را قطع کند.