

به نام خدا

۱- المپیاد دختران چین - ۲۰۱۵ - دایره محیطی - سطح ساده

۱. از نقطه‌ی D به M' وسط EF، وصل کنید و سعی کنید نشان دهید $DM' \parallel AO$.

۲. AD را امتداد دهید تا دایره محیطی ΔABC را در X قطع کند و همچنین AO را امتداد دهید تا ضلع BC را در Y قطع کند. نشان دهید $\angle AYC = \angle M'DC$.

۲- المپیاد مرحله ۲ چین - ۲۰۱۵ - دایره محیطی - سطح ساده

۱. دایره محیطی مثلث ΔABC را رسم کنید. CD و BD را امتداد دهید تا دایره محیطی ΔABC را به ترتیب در M و N قطع کنند. ثابت کنید MDC و NDB دو مثلث متساوی الساقین مشابه‌اند.

۲. ثابت کنید $AN = MC$ و $AM = BN$.

۳- المپیاد داخلی یونان - ۲۰۱۶ - سطح ساده - دایره محیطی

الف) ثابت کنید $\widehat{CDZ} = \frac{90-A}{2}$ از طرفی داریم:

$$\widehat{ZDE} = 90 - \widehat{CDZ} - \widehat{BDE}$$

ب) کافی است نشان دهید:

$$\widehat{DEM} = \widehat{CDM} = \widehat{DZC} = \widehat{DEK}$$

ج) $\widehat{MBE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BME} = 45^\circ = \widehat{KEC} = \widehat{MEC}$

۴- ارتفاع - سطح متوسط

فرض کنید U و V و W نقطه‌ی تقاطع خط‌هایی باشند که از A و B و C، به ترتیب بر AB و BC و CA عمود می‌شوند. (U مقابل ضلع AB، W مقابل ضلع AC)

۱. نشان دهید چهارضلعی AUBX محاطی است.

۲. UX و VY و WZ ارتفاع‌های مثلث UWV هستند. (به مرکز ارتفاعی H')

۳. ثابت کنید X و Y و Z و H و H' (مرکز ارتفاعی UWV) روی دایره‌ای به قطر HH' هستند.

۵- سطح ساده - میانه

فرض کنید X وسط AP و Y وسط BP باشد. ثابت کنید دو مثلث DXM و DYL هم‌نهشت‌اند.

۶- المپیاد داخلی هند - ۲۰۱۶ - سطح ساده - میانه - دایره محاطی

۱. ثابت کنید: $\cos\left(\frac{3}{2}B\right) = \sin(B) \sin\left(\frac{B}{2}\right)$

سپس نتیجه بگیرید: $\cos(B) = \frac{2}{3}$

۷- المپیادهای داخلی هند - ۲۰۱۵ - سطح ساده - دایره محاطی و محیطی

قرینه‌ی P نسبت به AC را R بنامید. ثابت کنید:

$$\widehat{ADR} = \widehat{PDA} = \widehat{PDB} = \widehat{BDQ} = \widehat{QDC} = 45^\circ$$

۸- المپیادهای داخلی هند - ۲۰۱۴ - سطح ساده - چهارضلع محاطی و میانه

ثابت کنید میانه وارد بر ضلع AD در مثلث‌های ADC و ABD طولی برابر دارند.

سپس از قضیه آپولونیوس استفاده کنید.

۹- انتخابی تیم ایرلند - ۱۹۹۰ - ارتفاع و میانه - ساده

گروه آموزشی آفتاب

ثابت کنید نقطه‌ی وسط AD مرکز ارتفاعی مثلث ABE است.

۱۰- دایره محاطی - ساده

برای هر مثلث داریم: $\Delta = rs$ که Δ مساحت آن، r شعاع دایره محاطی و s نصف محیط است. از طرفی

مساحت هر مثلث به وضوح از مساحت دایره محاطی داخلی‌اش بیشتر است.

۱۱- دایره محاطی - ساده

۱. ثابت کنید: $BQ \cdot DP = \frac{1}{3}$

۲. ثابت کنید: $PQ = BQ + DP - 1$

۱۲- چهارضلعی محاطی - ساده

نشان دهید چهارضلعی ADOE محاطی است و سپس نشان دهید $AO = BO = CO$

۱۳- چهارضلعی محاطی و دوران - ساده

نشان دهید اگر M وسط BC باشد آنگاه $BPRM$ محاطی است. سپس ثابت کنید $\angle PRS = 30^\circ$. برای این کار می‌توانید از دوران استفاده کنید.

۱۴- چهارضلعی محاطی و نیمساز - ساده

نقطه‌ی M را روی ضلع AD طوری انتخاب کنید که $AM = AB$ و $DM = CD$.

محل برخورد نیمساز C با AO را N بنامید. ثابت کنید $BNMC$ محاطی است.

۱۵- منلائوس - ساده

محل برخورد PQ با AC را X بنامید. ثابت کنید S و R و X طبق منلائوس همخط‌اند.

۱۶- قضیه پاسکال - متوسط

نقاط $PSQCR$ روی یک دایره واقع‌اند. جفت اضلاع مقابل زیر را در نظر بگیرید:

(PS, CR) و (SQ, RT) و (QC, TP)

۱۷- قضیه‌ی سِوا - ساده

می‌دانیم سه خط سوایی AD ، BD و CD و همچنین سه خط سوایی AE ، BE و CE هم‌رس‌اند. با

توجه به نتایج به دست آمده و صورت سینوسی قضیه سِوا، نتیجه بگیرید:

AH ، BD و CE هم‌رس‌اند.

۱۸- قضیه منلائوس - ساده

اگر امتداد AP ، ضلع BC را در نقطه F' قطع کند، در مثلث ABC سه خط سوایی AF' ، BD و CE

هم‌رس‌اند. ثابت کنید: $\frac{BF'}{CF'} = \frac{BF}{CF}$ یا $\frac{FB}{FC} \times \frac{CD}{AD} \times \frac{AE}{BE} = 1$

۱۹- المپیاد داخلی ایتالیا - ۲۰۱۶ - چهارضلعی محاطی و نیمساز - ساده

$$I \text{ را مرکز دایره محاطی } \triangle ABC \text{ بگیرید.} \quad \widehat{EDI} = \widehat{EAI} = 90 - \frac{C}{2} - \frac{A}{2} = \frac{B}{2}$$

۲۰- دوره نهایی المپیادهای کره - ۲۰۱۶ - ارتفاع و دایره محیطی - متوسط

۱. ثابت کنید نقاط S و D و F و T همخطاند.

۲. ثابت کنید دایره محیطی $\triangle CST$ بر دایره محیطی $\triangle ABC$ در نقطه‌ی C مماس است.

اگر O' مرکز دایره محیطی $\triangle ABC$ باشد نتیجه بگیرید:

$$AO \perp DE \iff XO \perp DE \quad \text{AQ} \parallel \text{XO}$$

۲۱- دوره نهایی المپیادهای کره - ۲۰۱۶ - دایره محاطی - متوسط

۱. نشان دهید $\triangle KQP \sim \triangle IBA$

لم: $\angle BLC = \angle BKC$ و نقاط BLKC هم دایره‌اند.

نشان دهید:

۲. $QL = KL \cdot MQ$ و $QK \cdot ML = QL \cdot MK$

$\angle KMC$

۳. $LC = 2LT'$ و $\angle KQP = \angle KLC = \angle KBC$

$$\angle LKC = 90 + \angle LKB = 90 + \frac{1}{2} \angle C = \angle AIB$$

۲۲- المپیادهای کره - ۲۰۱۶ - دایره محیطی - متوسط

۱. ثابت کنید C و D نسبت به AH قرینه‌اند.

۲. ثابت کنید AB قطر دایره محیطی ADP است.

۳. از تساوی $\angle DTB = 2 \angle DAB = \angle DQB$ نتیجه بگیرید T روی دایره محیطی BDQ است. (T را مرکز

دایره محیطی ABH بگیرید.)

۲۳- مثلث QAP را به صورت زیر بسازید:

متوسط

$\Rightarrow \angle ABP = 10^\circ$

ذهن زیبا

۲۴- نیمساز - متوسط

۱. باید ثابت کنیم $\angle BAP = \frac{2}{3} \angle BAC$

۲. شکل را نسبت به عمود منصف BC قرینه کنید. اگر A' قرینه A نسبت به عمود منصف BC باشد مثلث

$\triangle APA'$ متساوی الاضلاع است.

به نام خدا

۱- مثلث مختلف الاضلاع $\triangle ABC$ را در نظر بگیرید که $AB > AC$. O را مرکز دایره محیطی و D را وسط ضلع BC بگیرید. دایره به قطر AD، اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط E و F قطع می‌کند. خطی که از D به موازات AO رسم می‌شود، EF را در M قطع می‌کند. نشان دهید $EM = MF$.

۲- مثلث متساوی الساقین $\triangle ABC$ را در نظر بگیرید. $(AB = AC)$. I مرکز دایره محاطی است و نقطه‌ی D را درون مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که چهار نقطه D و C و B و I روی یک دایره واقع شوند. خطی که از C موازی BD رسم می‌شود، امتداد AD را در E قطع می‌کند. ثابت کنید: $CD^2 = BD \cdot CE$.

۳- مثلث حاده الزاویه‌ی $\triangle ABC$ را در نظر بگیرید. $(AB = AC)$. ارتفاع CD از $\triangle ABC$ را رسم می‌کنیم. دایره‌ای به شعاع CD و مرکز C، $C_1(C, CD)$ ، AC را در K و امتداد آن را در Z قطع می‌کند. دایره $C_2(C, BD)$ ، دایره‌ی C_2 را دوباره در E قطع می‌کند. همچنین خط DZ دایره C_1 را در M قطع می‌کند. نشان دهید:

$$\text{الف) } \widehat{ZDE} = 45^\circ$$

ب) نقاط E و M و K هم خط‌اند.

$$\text{ج) } BM \parallel EC$$

۴- در مثلث $\triangle ABC$ ، O را مرکز دایره محیطی و H مرکز ارتفاعی بگیرید. AO، BH را در X قطع می‌کند. BO، CH را در Y قطع می‌کند و همچنین CO، AH را در Z قطع می‌کند. ثابت کنید نقاط H و X و Y و Z هم دایره‌اند.

۵- فرض کنید P نقطه‌ای دلخواه درون مثلث ABC باشد. طوری که $\angle PAC = \angle PBC$. L و M به ترتیب پای عمود وارد از P بر اضلاع BC و AC هستند. D را وسط ضلع AB بگیرید. ثابت کنید:

$$DL = DM$$

۶- مثلث متساوی الساقین $\triangle ABC$ را در نظر بگیرید. $(AB = AC)$. فرض کنید مرکز ارتفاعی این مثلث بر روی دایره محاطی آن واقع شود. نسبت $\frac{AB}{BC}$ را بیابید.

۷- در مثلث $\triangle ABC$ داریم: $\hat{B} = 90^\circ$. پای ارتفاع وارد از B بر ضلع AC را D بنامید. فرض کنید P و Q و I به ترتیب مراکز دایره محاطی مثلث‌های ABD و CBD و ABC باشند. نشان دهید مرکز دایره محیطی مثلث PIQ روی وتر AC قرار دارد.

۸- در مثلث $\triangle ABC$ ، نقطه‌ی D روی ضلع BC را طوری در نظر بگیرید که $AB + BD = AC + CD$. (حتماً چنین نقطه‌ای وجود دارد. چرا؟) اگر مراکز ثقل مثلث‌های ABD و ACD و نقاط B و C ، هم دایره باشند ثابت کنید: $AB = AC$

۹- در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ ، D پای ارتفاع نظیر رأس A و E وسط DC است AB را از طرف B به اندازه‌ی خود امتداد می‌دهیم تا به نقطه F برسیم. ثابت کنید FD و AE بر هم عمودند.

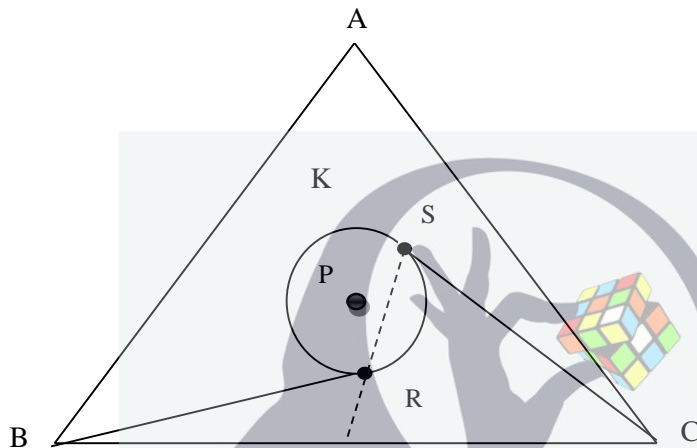
۱۰- نشان دهید محیط هر مثلث با مساحت $\frac{1}{\pi}$ از ۲ بیشتر است.

گروه آموزشی آفتاب

۱۱- مربع واحد $ABCD$ و دایره محاط شده درون آن داده شده است. L و M به ترتیب وسط ضلع‌های CD و AD هستند. نقطه P را روی پاره خط CL انتخاب کرده و از A خطی موازی MP رسم می‌کنیم تا BC را در Q قطع کند. نشان دهید P را هرگونه که انتخاب کنیم، PQ بر دایره محاطی مربع $ABCD$ مماس خواهد بود.

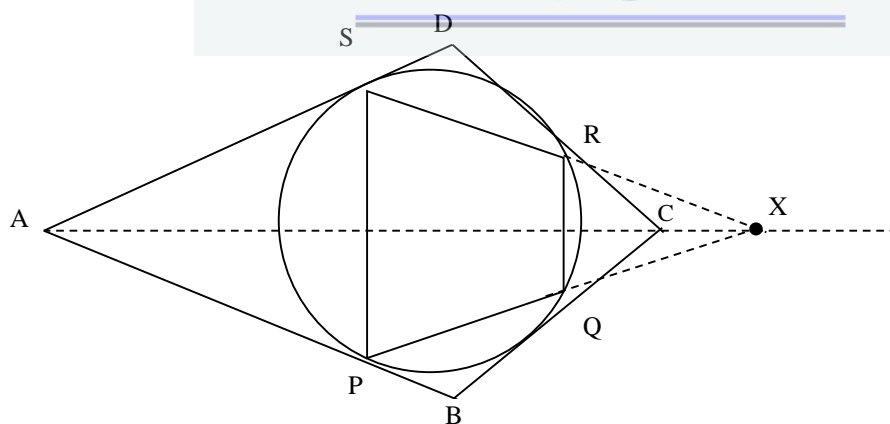
۱۲- در مثلث $\triangle ABC$ ، نقاط D و E روی اضلاع AB و AC طوری انتخاب می‌کنیم که $BD = DE = EC$. اگر $\angle A = 60^\circ$ نشان دهید نقطه تقاطع BE و DC مرکز دایره محیطی مثلث ABC است.

۱۳- در مثلث متساوی الاضلاع ABC ، مرکز ثقل و K دایره‌ای درون این مثلث و به مرکز P می‌باشد. مطابق شکل، مماس‌های BR و CS را بر این دایره رسم می‌کنیم. نشان دهید SR ضلع BC را نصف می‌کند.



۱۴- در چهارضلعی محاطی $ABCD$ داریم: $AD = AB + CD$. ثابت کنید نیمسازهای زوایای B و C روی AD به هم می‌رسند.

۱۵- P, Q, R, S را محل تماس اضلاع چهارضلعی محیطی $ABCD$ با دایره‌ی محاطی آن بگیرید. و نشان دهید که دو ضلع PQ و SR از چهارضلعی $PQRS$ و قطر AC از چهارضلعی $ABCD$ هم‌رسند.



۱۶- از نقطه‌ی دلخواه P درون مثلث ABC ، عمودهای PQ و PR را بر اضلاع BC و AC فرود می‌آوریم. از

رأس C نیز عمودهای CS و CT را بر AP و BP رسم می‌کنیم. ثابت کنید که U، محل برخورد QS و RT روی AB می‌افتد.

۱۷- دو مثلث قائم الزوایه و مشابه ABE و ACD ($E\hat{A}B = D\hat{A}C$ و $\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$) را در خارج مثلث ABC رسم می‌کنیم. ثابت کنید محل تقاطع دو پاره‌خط BD و CE روی ارتفاع AH از مثلث ABC قرار دارد.

۱۸- نقطه‌ی F را بر امتداد ضلع BC از مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $AC = CF$. دایره‌ای که از نقاط A، C و F می‌گذرد، دایره به قطر BC را در نقطه P قطع می‌کند. اگر خطوط BP و CP اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط D و E قطع کنند، ثابت کنید D و E و F همخط اند.

۱۹- در مثلث ABC، D و E تصویر A بر روی نیمسازهای داخلی زاویه‌های B و C هستند. ثابت کنید DE موازی BC است.

۲۰- در مثلث حاده الزویه ABC، D و E به ترتیب پای ارتفاع وارد بر AC و AB است. قرینه‌ی E نسبت به AC را S و قرینه E نسبت به BC را T بنامید.

دایره محیطی مثلث GST، AC را در X قطع می‌کند. ($X \neq C$)

نقطه O را مرکز دایره محیطی GST بگیرید. ثابت کنید: $XO \perp DE$

۲۱- مثلث حاده الزویه ABC را در نظر بگیرید. I مرکز دایره محیطی ABC است و دایره محیطی ABC، اضلاع BC و CA و AB را به ترتیب در D و E و F قطع می‌کند. همچنین خطوط BI و CI و BC و DI، خط EF را به ترتیب در K و L و M و Q قطع می‌کنند. خطی که وسط پاره‌خط CL و نقطه‌ی M را به هم وصل می‌کند با CK در P تقاطع دارد. ثابت کنید:

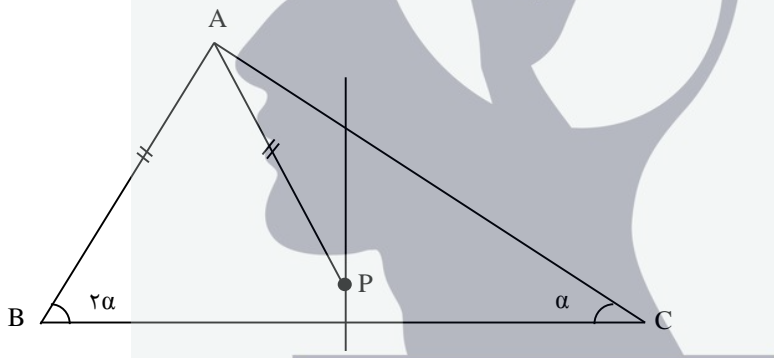
$$PQ = \frac{AB \cdot KQ}{BI}$$

۲۲- مثلث $\triangle ABC$ را یک مثلث حاده الزویه بگیرید. H مرکز ارتفاعی مثلث است. دایره محیطی $\triangle ABH$ ، BC را در D قطع می‌کند. DH و AC یکدیگر را در P قطع می‌کنند و Q را مرکز دایره محیطی $\triangle ADP$ بگیرید. ثابت کنید مرکز دایره محیطی $\triangle ABH$ روی دایره محیطی $\triangle BDQ$ است.

۲۳- در مثلث $\triangle ABC$ ، $AB = AC$ و $\angle A = 20^\circ$. نقطه‌ی P را روی ضلع AC طوری در نظر می‌گیریم که $AP = BC$ زاویه‌ی $\angle PBC$ را بیابید.

۲۴- در مثلث $\triangle ABC$ ، $\angle B = 2\angle C$ و نقطه‌ی P داخل مثلث، محل برخورد دایره‌ی به مرکز A و شعاع AB و عمودمنصف ضلع BC است. ثابت کنید:

$$\angle BAP = 2\angle PAC$$



ذهن زیبا