@sampaadia_math

به نام خدا

اصل لانه کبوتری

سوالات:

ساده:

۱. در یک کنفرانس ۹ نفر یکدیگر را ملاقات می کنند و پی میبرند که در میان هر سه‌تای آن ها لااقل دو نفر به زبانی مشترک صحبت می کنند. اگر هر فرد حداکثر سه زبان بداند، ثابت کنید سه نفر یافت می شوند که بتوانند با زبانی مشترک با هم صحبت کنند. (آمریکا-۱۹۷۹)

۲. آیا اعداد ۱ تا $۲۰۰۲^۲$ را می توان در خانه های یک جدول 2002×2002 نوشت به طوری که برای هر سطر و ستون ۳ خانه در آن ها وجود داشته باشند که یکی برابر حاصل ضرب دو عدد دیگر باشد؟ (روسیه-۲۰۰۲)

۳. راس های یک ۱۲ ضلعی منتظم را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کرده ایم. میدانیم در هر ۳ راس از آن که تشکیل مثلث متساوی الاضلاع میدهند حداقل ۲ تایشان قرمز اند. ثابت کنید ۴ راس ازین ۱۲ ضلعی را میتوان انتخاب کرد به طوری که تشکیل مربع بدهند و حداقل ۳ تایشان قرمز رنگ باشند.

۴. حداکثر چند شاه روی صفحه شطرنج میتوان گذاشت به طوری که هیچ دو تایی یکدیگر را تهدید نکنند؟ (محافل)

۵. ثابت کنید در هر گروه ۵ نفری ۲ نفر هستند که تعداد دوستانشان در این گروه یکی است(دوستی یک رابطه دو طرفه است) (محافل)

۶. ۵۱ نقطه درون مربعی به طول ضلع ۱ متر پراکنده اند. ثابت کنید مجموعه ای از سه تا از این نقطه ها را میتوان با مربعی به طول ضلع ۲۰ سانتیمتر پوشاند.(محافل)

۷. ثابت کنید تفاضل دو تا از توانهای ۲ مضربی از ۱۹۸۷ است. (محافل)

۸. ثابت کنید در هر جماعت ۶ نفره، سه نفر هستند که یا دو به دو یکدیگر را میشناسند یا دو به دو یکدیگر را نمیشناسند(شناختن یک رابطه دو طرفه است)

۹. هر یک از یال های گرافی کامل و ۱۷راسی را یا قرمز کرده ایم یا آبی یا سبز. ثابت کنید سه راس وجود دارند که همه یالهایی که آنها را به هم میکند، همرنگ باشند.

۱۰. هر یک از ۱۰۲ دانش آموز مدرسه ای با دست کم ۶۸ دانش آموز دیگر دوست است. ثابت کنید چهار دانش آموز وجود دارند که تعداد دوست هایشان برابر است. (محافل)

۱۱. یک دایره به ۲۰۰ قسمت مساوی تقسیم شده است که ۱۰۰ تا از آنها سفید و ۱۰۰ تای دیگر سیاه شده اند. دایره ای دیگر به شعاع کوچکتر با همان مرکز نیز به ۲۰۰ قسمت تقسیم شده و به دلخواه رنگ شده . نشان دهید دورانی از دایره کوچک وجود دارد که حد اقل ۱۰۰ قطاع همرنگ روی هم افتادند.

متوسط:

۱. در یک کنفرانس دانشمندانی از n کشور شرکت کرده‌اند. می‌دانیم این افراد را می‌توان دور یک میز نشاند به طوری که اگر دو نفر از یک کشور باشند دو نفری که در سمت راست این دو نفر نشسته‌اند از دو کشور مختلف باشند. حداکثر چند نفر در این کنفرانس شرکت کرده‌اند؟ (آمریکای جنوبی-۱۹۹۸)

۲. ۲۸ تیم در یک دوره مسابقات فوتبال شرکت کرده اند(هر دو تیم یک بار بازی کرده اند) در هر مسابقه به برنده ۲ امتیاز و به بازنده ۰ امتیاز و در صورت تساوی به هر دو تیم ۱ امتیاز داده میشود. بیش از ۷۵٪ بازی ها مساوی شده است ثابت کنید دو تیم امتیاز برابر دارند. (تورنمنت شهر ها ۱۹۸۶)

۳. ۱۶ عدد طبیعی متمایز داریم که حداکثر تا ۱۰۰ اند. ثابت کنید ۴ عدد متمایز a، b، c و d ازین اعداد وجود دارند که $a + b = c + d$. (۱۰۲ مسئله)

۴. حداکثر چند عدد از مجموعه {۱,۲,...,۲۰۰۱} میتوان انتخاب کرد به طوری که جمع هیچ دوتای متمایزی از آنها توانی از ۲ نشود؟

۵. ۱۱ عدد طبیعی متمایز که هیچ یک از آنها از ۲۰ بزرگتر نیست داده شده اند. ثابت کنید که میتوان دوتا از این عددها را طوری انتخاب کرد که یکی بر دیگری بخشپذیر باشد. (محافل)

۶. ثابت کنید میتوان زیر مجموعه ای ناتهی از مجموعه ای n عضوی از اعداد صحیح انتخاب کرد به طوری که مجموع عضو هایش بر n بخش پذیر باشد. (محافل)

۷. یال های گرافی کامل و ۱۸ راسی را با دو رنگ آبی و قرمز رنگ کرده ایم. ثابت کنید ۴ راس پیدا میشوند که همه یال های بینشان یکرنگ باشد. (محافل)

سخت:

۱. هر عدد طبیعی با یکی از k رنگ ، رنگ شده است ثابت کنید اعداد متمایز و همرنگ a و b و c و d وجود دارند به طوری که $ab = cd$ و $\frac{b}{a}$ توانی از ۲ و $\frac{c}{d}$ توانی از ۳ باشد. (کرواسی ۲۰۰۹)

۲. خانه های یک جدول ۱۰۰ در ۱۰۰ با ۴ رنگ ، رنگ آمیزی شده به طوری که در هر سطر و هر ستون ۲۵ خانه از هر رنگ وجود دارد. ثابت کنید دو سطر و دو ستون وجود دارند به طوری که ۴ خانه واقع در تقاطعشان دو به دو غیر هم رنگ باشند. (روسیه ۲۰۰۰)

۳. یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع n را به n^2 مثلث به ضلع واحد تقسیم کرده ایم. یک مسیر در امتداد اضلاع مثلث‌ها از هر راس دقیقا ۱ بار گذشته است ثابت کنید این مسیر در n نقطه زاویه حاده دارد. (شوروی ۱۹۹۰)

۴. یک جدول $2n \times 2n$ داریم. قوتل مهره ای است که جدول $n \times n$ ای را که خودش گوشه پایین چپ آن است، را تهدید میکند. حداکثر چند قوتل میتوان در جدول گذاشت به طوری که هیچ دو قوتلی یکدیگر را تهدید نکنند؟ (آزمون اکسترمال!)

@sampaadia_math

راهنمایی ها:

ساده:

۱. دو حالت زیر را بررسی کنید:

۱) دو نفر هستند که زبان مشترک ندارند

۲) هر دو نفر زبان مشترک دارند

۲. سطر و ستونی داریم که تمام اعدادشان بزرگتر از ۲۰۰۱ است.

۳. حداقل تعداد رئوس قرمز کل را بیابید.

۴. صفحه را ناحیه بندی کنید!

۵. اگر کسی ۴ دوست داشته باشید کسی ۰ دوست ندارد و بلعکس

۶. مربع را به ۲۵ مربع به طول ۲۰ سانتیمتر افراز کنید.

۷. باقیمانده توانهای ۲ به ۱۹۸۷ را درنظر بگیرید.

۸. یک نفر یا حداقل ۳ نفر را میشناسد یا حداقل ۳ نفر را نمیشناساد. این ۳ نفر را با آن نفر اول در نظر بگیرید

۹. از مسئله ۸ استفاده کنید.

۱۰. بدون توضیح!!

۱۱. بدون توضیح!!

متوسط:

۱. ثابت کنید جواب n^2 است.

۲. $(٪۲۵)\binom{28}{2} < ۱ + ۲ + \ldots + ۱۴$

۳. جای $a + b = c + d$، این رابطه را درنظر بگیرید: $a - c = b - d$

۴. اعداد را به دسته های دوتایی و یکی ای افراز کنید.

۵. اعداد را به دسته های دو تایی افراز کنید.

۶. اعداد را روی یک خط بگذارید. سپس برای هر عدد، جمع اعداد از اول خط تا آن عدد را در نظر بگیرید. با این اعداد جدید کار کنید.

۷. یک راس را در نظر بگیرید، این راس یا حداقل ۹ یال آبی دارد یا حداقل ۹ یال قرمز. با این راس و ۹ راسی که به آنها یال همرنگ دارد، مسئله را بررسی کنید.

@sampaadia_math

سخت:

۱. اعداد a، b، c و d را به صورت $2^x \times 3^y$ نمایش دهید.

حال سوال را به بررسی توان ها تبدیل و حل کنید.

۲. راهنمایی اول) ثابت کنید دوتا سطر داریم که در لااقل ۷۶ ستون با هم متمایزند.(سعی کنید روی جفت سطر ها لانه بزنید)

راهنمایی دوم) زرد ها را سبز و قرمز ها را آبی کنید حالا فکر کنید :-)

۳. شطرنجی کنید.

۴. جدول را به $2n + 2$ ناحیه تقسیم کنید که در هر ناحیه حداکثر یک قوتل بتوان گذاشت.

آموزشگاه علمی ذهن زیبا
WWW.Amoozz.ir