به نام خدا

راهنمایی تمارین معادلات تابعی **تابستان ۹۵**

۱)پوشایی و جمعی بودن و یک‌به‌یکی

فرض کنید $f(x_0) = 0$ سعی کنید ثابت کنید $f(9x_0) = 0$ و نتیجه بگیرید که $x_0 = 9x_0 = 0$

۲)یک‌به‌یکی و مقدارگذاری

به سادگی ثابت می‌شود f یک‌به‌یک است. با برابر گذاشتن x, y می‌توان با کمی تأمل نتیجه گرفت که: $f(xf(x) - 1) = x^2 - 1$ از طرفی اگر به‌جای x، $-x$ بگذاریم با استفاده از یک‌به‌یکی داریم: $f(x) = -f(-x)$. حال سعی کنید ثابت کنید برای مقادیر طبیعی n، $f(n) = n$ و با اثبات رابطه‌ی $f(y-1) = f(y) - 1$ مسأله را حل کنید.

۳)متناوبی و مقدارگذاری

همه‌ی مقادیر $x = y + \frac{z}{6}$ را برای $z = 0, 1, \dots, 5$ جایگذاری کنید و شش معادله بدست بیاورید. حال سعی کنید از این معادلات نتیجه بگیرید که:

$$f(y+1) + f\left(y + \frac{1}{7}\right) = f\left(y + \frac{8}{7}\right) + f(y)$$

حال با طریقی مشابه و مقادیری معقول سعی کنید نتیجه بگیرید که:

$f(y) + f(y+2) = 2f(y+1)$ و با استفاده از این رابطه ثابت کنید $f(y) = f(y+1)$

۴)پوشایی

به‌جای x قرار دهید 1 و نتیجه بگیرید که $f\big(y + f(y)\big) = 2y$ پس تابع پوشاست و y_0 وجود دارد که $f(y_0) = 1$. حال با قرار دادن y_0 به جای y ثابت کنید: $f(x) = cx$

۵)مقدارگذاری و استقرا

مقادیر $(x, y) = (1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (2,3)$ را جایگذاری کنید و نتیجه بگیرید $\frac{1}{2}$ یا $f(1) = 1$ و مسأله را در دو حالت جداگانه بررسی کنید و برای بدست آوردن f در هر دو حالت سعی کنید از استقرا استفاده کنید.

۶)متناوبی و یک‌به‌یکی

سعی کنید ثابت کنید اگر تابع یک‌به‌یک نباشد قطعاً متناوب است و متناوب بودن را به تناقض برسانید. حال سعی کنید x , y را طوری تعیین کنید که $x + f(x - y)$ در طرف راست تساوی برابر صفر شود و نتیجه می‌شود $f\big(x + f(y)\big) = f(x)$ و یک‌به‌یکی نتیجه می‌دهد که $f(y) = 0$ و باز هم یک‌به‌یکی نتیجه می‌دهد y باید عددی ثابت باشد.

۷)مقدارگذاری

مقادیر $\sqrt{3} , -\sqrt{3} , f(\sqrt{3}) , f(-\sqrt{3})$ را در تابع جاگذاری کنید.

۸)یک‌به‌یکی

سعی کنید ثابت کنید برای هر n طبیعی $f(n) \le n$. ثابت کنید اگر برای n ای $f(n) > n$ آنگاه برای هر $i \ge 2$ داریم $f^{i}(n) < f(n)$ و از اصل لانه کبوتری استفاده کنید.

۹)مقدارگذاری و استقرا

سعی کنید برای n های طبیعی نتیجه بگیرید $f(n) = \frac{1}{n^2}$ و رابطه‌ی ذیل را بدست آورید:

$\forall k \in N, f(x + k) = \frac{f(x)}{(2xk+k^2)f(x)+1}$ و سپس فرض کنید $x = \frac{p}{q}$ و با گذاشتن مقداری خوب به جای y استفاده از رابطه فوق نتیجه بگیرید $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{q^2}{p^2}$.

۱۰)متناوبی و یک‌به‌یکی

اگر تابع یک‌به‌یک نباشد قطعاً متناوب است. از طرفی $f\big(f(y)\big) = f(y) + 1$ حال با قرار دادن $f(y)$ به جای y سعی کنید نتیجه بگیرید که برای هر $f(x + 1) = f(x) + 1$. حال با توجه به تعریف شده بودن تابع در $[0 , 1]$ می‌دانیم در این بازه تابع کراندار است حال سعی کنید با توجه به این موضوع و $f(x + 1) = f(x) + 1$ فرض تناوب را به تناقض برسانید.

۱۱)مقدارگذاری و یک‌به‌یکی

تعریف کنید $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ و خواهیم داشت $\frac{g(x)g(y)}{g(xy)} = \frac{g(x)+g(y)}{g(x+y)}$

حال فرض کنید $c = \frac{1}{g(1)}$ و نتیجه بگیرید $g(x+1) = cg(x) + 1$. حال با استفاده از این رابطه برای $n \in N$ ، $g(n)$ را برحسب c محاسبه کنید و با استفاده از رابطه‌ی $2g(n^2) = g(n)\, g(2n)$ سعی کنید ثابت کنید: $|c| = 1$

۱۲)مقدارگذاری و یک‌به‌یکی

سعی کنید x, y را طوری انتخاب کنید که $x + y = yf(x)$ و نتیجه بگیرید برای هر x : $f(x) \leq 1$ در نتیجه f نزولی است. حال سعی کنید ثابت کنید برای هر x : $f(x) < 1$ و در غیر اینصورت تابع ثابت یک خواهد بود. حال با فرض یک‌به‌یک بودن و مقدارگذاری مناسب مسأله را حل کنید.

۱۳)مقدار گذاری و پوشایی

سعی کنید ثابت کنید: $f\big(2f(x) - 2f(y)\big) = (2f(x) - 2f(y))^2 + f(0)$

و با اثبات اینکه یا $f(x) - f(y)$ پوشاست و یا f ثابت صفر است مسأله حل خواهد شد.

۱۴)مقدارگذاری و یک‌به‌یکی

$x\,,y$ را طوری قرار دهید $x + yf(x) = y$ و نتیجه بگیرید برای هر x : $f(x) \geq 1$ حال سعی کنید با استدلالی حدّی ثابت کنید برای هر $x \in R$ ، $f(x) \geq 2$ و در نتیجه تابع صعودی است و برای اثبات اکیداً صعودی بودن مانند مسأله ۱۲ عمل کنید.

۱۵)متناوبی و یک‌به‌یکی

ثابت کنید اگر تابع یک‌به‌یک نباشد قطعاً متناوب است. در واقع ابتدا سعی کنید ثابت کنید اگر $f(x_0) = f(y_0)$ آنگاه $f(2x_0) = f(2y_0)$. همچنین با یک مقدارگذاری خوب و با توجه به مثبت بودن مقادیر f می‌توانید ثابت کنید برای هر $x \in R\ :\ f(x) \geq x$ و با استفاده از این رابطه متناوب بودن را به تناقض برسانید.

۱۶)پوشایی و یک‌به‌یکی

ثابت کنید f پوشا و یک‌به‌یک است و سپس فرض کنید $f(a) = 1$ و ثابت کنید $a = 1$ حال سعی کنید با استفاده از پوشایی ثابت کنید اگر $a + b = c + d$ آنگاه $f(a) + f(b) = f(c) + f(d)$ و با استفاده از این رابطه سعی کنید ثابت کنید f جمعی است و مسأله را حل کنید.

۱۷)مقدارگذاری و پوشایی

سعی کنید ثابت کنید $f(x) = -f(-x)$ و سپس ثابت کنید: $f\big(x\,f(z)\big) = xz$

(از جایگذاری $y \longrightarrow z - x$ و $y \longrightarrow -z - x$ استفاده کنید)

حال برای اتمام مسأله فرض کنید $f(k) = 1$ و نتیجه بگیرید $f(x) = kx$

به نام خدا

تمارین معادلات تابعی **تابستان ۹۵**

ساده :

۱)همه توابع$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که:$f\big(2f(x)+f(y)\big) = 2x+y$

۲)همه توابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که:$f(x)f\big(y\,f(x)-1\big) = x^2 f(y) - f(x)$

۳)$f: \mathbb{R} \to [-1,1]$ و می‌دانیم: $f\left(x+\frac{13}{42}\right)+f(x) = f\left(x+\frac{1}{6}\right)+f\left(x+\frac{1}{7}\right)$

ثابت کنید f متناوب است.

۴)همه توابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که:

$$f(x\,f(y)+y)+f(xy+x) = f(x+y)+2xy$$

۵)همه توابع $f: Q^+ \to R^+$ را بیابید که: $f(xy) = f(x+y)(f(x)+f(y))$

۶)همه توابه $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که: $f\big(x+f(y)\big) = f(x)+x+f(x-y)$

متوسط :

۷)همه توابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که: $f\big(f(x)\big) = x^2+x+3$

۸)همه‌ی توابع یک‌به‌یک $f: N \to N$ را بیابید که برای هر $n \in N$ داریم:

$$f\big(f(n)\big) \le \frac{n+f(n)}{2}$$

۹)همه‌ی توابه $f: Q^+ \to R$ را بیابید که:

$$\forall\, x,y \in Q^+ \quad : \quad f(x)+f(y)+2xyf(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)}$$

۱۰)همه‌ی توابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که: $f\big(x+f(y)\big) = f(x+y)+1$

۱۱)همه‌ی توابع یک‌به‌یک $f: R-\{0\} \to R-\{0\}$ را بیابید که:

$$f(xy) = f(x+y)\,(f(x)+f(y))$$

۱۲)همه‌ی توابع $f: R^+ \to R^+$ را بیابید که: $f(x+y) = f(x)\,f(y\,f(x))$

۱۳)همه‌ی توابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که: $f\big(f(x)+y\big) = f\big(f(x)-y\big)+4\,f(x)y$

سخت :

۱۴) همه‌ی توابع $f:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ را بیابید که: $f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$

۱۵) همه‌ی توابع $f:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ را بیابید که: $f(x + f(x) + y) = f(2x) + f(y)$

۱۶) همه‌ی توابع $f:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ را بیابید به‌طوری‌که:

$$(z + 1)f(x + y) = f(x\,f(z) + y) + f(y\,f(z) + x)$$

۱۷) همه‌ی توابع $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را بیابید که: $f\big(x\,(x + y)\big) = f\big(y\,f(x)\big) + x^2$