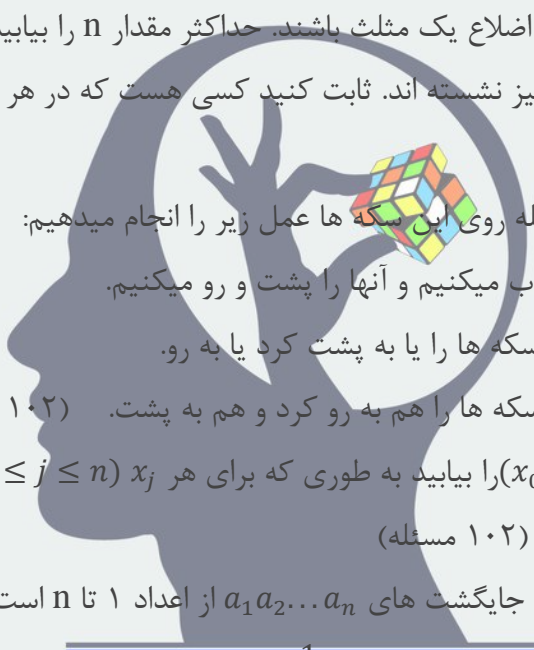


# به نام خدا

## مسائل متفرقه

۱.  $T$  مجموعه توان های ۹ از ۱ تا  $9^{4000}$  است. میدانیم  $9^{4000}$  ، ۳۸۱۷ رقم دارد و رقم سمت چپ آن ۹ است. تعداد اعدادی از  $T$  را بیابید که رقم سمت چپ آنها ۹ است. ( ۱۰۲ مسئله )
۲. فرض کنید اعداد طبیعی به دو مجموعه  $A$  و  $B$  افراز شده اند. ثابت کنید به ازای هر  $n$ ، دو عدد متمایز  $a$  و  $b$  بزرگتر از  $n$  وجود دارد به طوری که:  $\{a, b, a + b\} \subseteq A$  یا  $\{a, b, a + b\} \subseteq B$  ( ۱۰۲ مسئله )
۳. فرض کنید  $A$  مجموعه اعداد طبیعی از ۴ تا  $n$  است. میدانیم هر زیر مجموعه ۱۰ عضوی از  $A$ ، شامل ۳ عضو است که این ۳ میتوانند اضلاع یک مثلث باشند. حداکثر مقدار  $n$  را بیابید. ( ۱۰۲ مسئله )
۴. ۲۵ دختر و ۲۵ پسر دور یک میز نشسته اند. ثابت کنید کسی هست که در هر دو طرفش دختر نشسته باشد. ( ۱۰۲ مسئله )
۵. ۲۰۰۱ سکه داریم. ۲۰۰۱ مرحله روی این سکه ها عمل زیر را انجام میدهیم:  
در مرحله  $i$  ام،  $i$  سکه را انتخاب میکنیم و آنها را پشت و رو میکنیم.  
الف) ثابت کنید میتوان همه سکه ها را یا به پشت کرد یا به رو.  
ب) ثابت کنید نمیتوان همه سکه ها را هم به رو کرد و هم به پشت. ( ۱۰۲ مسئله )
۶. تمام دنباله های  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  را بیابید به طوری که برای هر  $x_j$  ( $0 \leq j \leq n$ ) برابر با تعداد دفعات ظاهر شدن  $j$  در دنباله باشد. ( ۱۰۲ مسئله )
۷. فرض کنید  $f(n)$  برابر با تعداد جایگشت های  $a_1 a_2 \dots a_n$  از اعداد ۱ تا  $n$  است به طوری که  
$$a_1 = 1$$
  
برای هر  $1 \leq i \leq n - 1$   $|a_i - a_{i+1}| \leq 2$  باقیمانده  $f(1994)$  بر ۳ را بیابید.
۸. به ازای چه  $n$  هایی میتوان یک مربع را به  $n$  مستطیل متشابه تقسیم کرد به طوری که همه با هم برابر نباشند؟
۹. ثابت کنید تعداد راه های افراز یک مستطیل  $3 \times 200$  به مستطیل های  $2 \times 1$  و  $1 \times 2$  بر ۳ بخشپذیر است.
۱۰. در یک جدول  $2n \times 2n$ ، حداقل چند قطعه  $n \times 1$  یا  $1 \times n$  بدون همپوشانی میتوان گذاشت به طوری که دیگر نتوان چنین قطعه ای گذاشت؟
۱۱. در یک جدول  $2n \times 2n$  نصف خانه های آن سفید و نصف خانه های آن سیاه هستند. ثابت کنید حداقل  $n$  پاره خط واحد وجود دارد که مرز بین یک خانه سفید و یک خانه سیاه است.



# ذهن زیبا

۱۲. در یک جدول  $2n \times 2n$  می خواهیم در تعدادی از خانه های آن علامت بگذاریم به طوری که هر خانه ی جذوب اعم از علامتدار و بی علامت حداقل یک همسایه ی علامتدار داشته باشد. حداقل علامت چه تعداد است؟

۱۳. یک جدول  $2n - 1 \times 2n - 1$  را با کاشی های زیر و دوران های آنها کاشی کاری کرده ایم. ثابت کنید حداقل  $4n - 1$  کاشی از نوع ۳ مربعی است. (تریمینو  $L$  تترامینوی مربعی تترامینوی  $Z$ )

۱۴. ۵ وزنه مشابه با وزن های متفاوت داریم. هر بار یک ترتیب سه تایی را می توان پرسید. آیا با ۹ بار پرسیدن میتوان ۵ وزنه را مرتب کرد؟

۱۵. از یک جدول  $n \times n$  ،  $n - 1$  خانه آلوده هستند. در هر مرحله ، خانه ی سالمی که حداقل دو مجاور ضلعی آلوده دارد ، آلوده میشود. آیا آلودگی به تمام خانه ها سرایت میکند؟

۱۶. ۱۰۰ مهره در یک کیسه وجود دارد. هر مرحله یک کیسه انتخاب میکنند و مهره های آن را به دو کیسه منتقل میکنند. ثابت کنید لحظه ای وجود دارد که در دقیقا ۳۰ تا از دسته ها مجموعا (دقیقا) ۶۰ مهره وجود دارد.

۱۷. دور یک میز  $n$  پسر و  $2n + 1$  دختر نشسته اند. ثابت کنید دختری وجود دارد که از هر نفر تا آن دختر تعداد پسر ها از دختر ها کمتر باشد.

۱۸. یک جدول  $18 \times 18$  داریم که ابتدا همه ی خانه های آن سیاه هستند. در هر مرحله یک سطر یا ستون را انتخاب کرده و تمام خانه های غیر آن و سفید را سیاه و تمام خانه های سیاه را سفید میکنیم. آیا امکان دارد به ۱۶ خانه ی سیاه برسیم؟

۱۹. در یک آزمون ۱۶ نفر شرکت کرده اند. هر مساله ۴ گزینه دارد و هر فرد ۱ گزینه از هر یک را علامت زده است. در پایان معلوم شد هر دو نفری حداکثر یک پاسخ مشترک داشته اند. ثابت کنید تعداد مساله های این آزمون از ۵ بیشتر نیست. (چین ۱۹۹۲)

۲۰.  $S$  خانواده ای ،  $n$  عضوی از زیر مجموعه های اعداد طبیعی است که اجتماع هر دو تا از اعضای  $S$  هم عضو  $S$  است. مجموعه های داخل  $S$  حداقل  $k$  عضو دارند ( $k \geq 2$ ). ثابت کنید  $X$  ای وجود دارد که حداقل در  $\frac{n}{k}$  مجموعه ها آماده است. (China Second Round ۲۰۱۵)

۲۱. گراف  $n$  راسی که در بین هر ۴ راس ، یا ۳ راس هست که همه به هم متصل هستند ، یا ۳ راس هست که هیچ کدام به هم متصل نیستند. ثابت کنید راس های گراف را می شود ۲ دست کرد که یکی مستقل و دیگری کامل باشد.

۲۲. گراف بی‌نهایت راسی داریم راس‌های هر زیرگراف محدود آن را با ۱۰ رنگ می‌شود رنگ کرد ثابت کنید کل رس‌ها را می‌شود با ۱۰ رنگ رنگ کرد. (۲۰۱۵ Indian TST)

۲۳.  $m$  تا شهر و  $n$  تا جاده داریم که  $n \leq \frac{3(m-1)}{2}$  و  $m \geq 2$  ثابت کنید می‌شود شهرها را دو دست ناتهی کرد که اگر فقط یال‌های بین دست‌ها را در نظر بگیریم درجه هر راس کمتر مساوی ۱ باشد. (Japan ۲۰۱۶)

۲۴. در گراف  $n$  راسی مینیمم تعداد دسته‌هایی را که هر دسته کامل باشند را  $a$  و عدد رنگی را  $b$  می‌نامیم مکس  $a+b$  چند است؟ (Japan ۲۰۱۴)

۲۵. عدد صحیح  $n$  داده شده اگر مجموعه‌های  $F_1, F_2, \dots, F_m$  موجود باشد که دو خاصیت زیر را دارا باشند، ثابت کنید  $m$  کوچکتر مساوی  $n$  است.

۱- مجموعه‌های  $F_1, F_2, \dots, F_m$  زیرمجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$  باشند.

۲- برای هر  $1 < i < j < n$  مینیمم اعضای  $F_i - F_j$  و  $F_j - F_i$  برابر یک باشد. (کره ۲۰۱۵)

۲۶.  $G$  گرافی ۲۰۱۶ راسی و  $k$  یالی است. ما می‌خواهیم به مجموعه مستقل را از گراف حذف کنیم بگونه‌ای که بقیه گراف بی‌ارتباط بشوند. اگر بشود این کار را انجام داد (با یال‌گذاری‌های خودمان) ماکزیم  $k$  را بیابید. (Turkey JBMO TST ۲۰۱۶)

۲۷. مرتضی و حسین با گراف کامل ۲۰۱۴ راسی بازی میکنند. شروع حرکت با مرتضی است و در هر حرکت یک یال که جهت دار نیست را جهت دار می‌کند. و حسین در هر حرکت عددی همچون  $m$  از عدد ۱ تا ۱۰۰۰ انتخاب می‌کند و  $m$  تا یال غیر جهت دار را جهت دار می‌کند. بازی زمانی تمام می‌شود که تمام یالا جهت در شوند. اگر دور جهت دار داشته باشیم مرتضی برنده است. نشان دهید مرتضی استراتژی برد دارد. (Turkey JBMO TST ۲۰۱۴)

۲۸. گراف ۱۰۰ راسی ساده غیر جهت دار و ۲۰۱۳ یالی داریم. می‌دونیم ۲ راس مثل  $a, b$  وجود دارد که با ۱ یا ۲ یال نمی‌شود از  $a$  به  $b$  رفت. تمام یال‌ها را با  $n$  رنگ، رنگ می‌کنیم، بگونه‌ای که برای هر جفت از راس‌ها، با یک رنگ به هم متصل باشند. ماکزیم  $n$  را بیابید. (Turkey Second Round 2013)

۲۹. کشوری ۲۰۱۶ شهر دارد. می‌خواهیم جوری خطوط هوایی بسازیم که هر شهر دقیقاً ۱ خروجی دارد. مینیمم  $k$  را بیابید که هر جوری که خطوط هوایی باشند، بشود شهرها را  $k$  گروه کرد که نشود با حداکثر ۲۸ حرکت از هر شهر داخل گروه به شهری دیگر داخل همان گروه رفت. (APMO ۲۰۱۶)

۳۰. در گراف  $n$  راسی  $G$  هر گراف القایی  $1 - n$  راسی تطابق دارد ثابت کنید از هر راس دور فرد می‌گذرد.