به نام خدا

نظریه ترکیبیاتی مجموعه ها

سوالات:

قضیه ها: (سعی کنید اثبات کنید. در حل مسائل می توانید از قضیه ها استفاده کنید)

۱. خانواده $F = \{A_1, A_2, \dots, A_f\}$ شامل زیرمجموعه هایی غیرتهی از $x = \{1,2,\dots,n\}$ مفروض است. به طوری که برای هر i و j متمایز داریم $A_i \not\subseteq A_j$ ، آنگاه $|F| \le \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$
(قضیه اسپرنر)

۲. اگر $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ خانواده ای از زیرمجموعه های kعضوی $k \le \frac{n}{2}$ مجموعه $\{1,2,\dots,n\}$ باشد به طوری که برای هر $i \ne j$، $A_i \cap A_j \ne \emptyset$ ، در این صورت $m \le \binom{n-1}{k-1}$.
(قضیه Erdos-ko-rado)

۳. فرض کنید $U,V \subseteq P(X), |X| = n$ با این شرط که

$$a \in U, b \subseteq a \Rightarrow b \in U$$
$$a \in V, b \subseteq a \Rightarrow b \in V$$

آنگاه $|U|.|V| \le 2^n |U \cap V|$، و اگر در شرط (۲)، به جای $b \subseteq a$ ،$a \subseteq b$ را قرار دهیم داریم:

$$|U|.|V| \ge 2^n |U \cap V|$$

۴. فرض کنید $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$خانواده ای از مجموعه های a عضوی و $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$خانواده ای از مجموعه های b عضوی از $\{1,2,\dots,n\}$باشند که، $A_i \cap B_j = \emptyset \leftrightarrow i = j$ ثابت کنید: $m \le \binom{a+b}{a}$
(قضیه بالاباش)

۵. فرض کنید $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$خانواده ای از مجموعه های a عضوی و $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$خانواده ای از مجموعه های b عضوی از $\{1,2,\dots,n\}$باشند که، $|A_i \cap B_i| = t$ و $|A_i \cap B_j| > t$ ثابت کنید: $m \le \binom{a+b-t}{a-t}$
(تعمیم قضیه بالاباش)

ساده:

۱. $F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ خانواده ای از زیرمجموعه های مجموعه X است.برای هر $x \in X$, تعریف می کنیم $d(x)$ تعداد عضوهای f که x را دارند. ثابت کنید: $\sum_{i,j=1}^{m} |A_i \cap A_j| = \sum_{x \in X} d(x)^2$

۲. الف) خانواده ای از زیرمجموعه های مجموعه X ($|X| = n$) مانند F را خوب می نامیم با این شرط که اگر $A,B \in F$ باشند آنگاه $A \cap B \ne \emptyset$. نشان دهید $|F| \le 2^{n-1}$.

ب) در مسأله بالا نشان دهید اگر $|F| < 2^{n-1}$ باشد، می توان یک عضو از $P(X)$ را که در F نیامده است به F اضافه کرد و F همچنان خوب باقی بماند.

۳. $n \geq 2k$ نشان دهید تابعی یک به یک مانند $f: F_k \to F_{k+1}$ که $\forall A \in F_k: A \subseteq f(A)$ وجود دارد. (F_iخانواده ی زیر مجموعه‌های i عضوی $\{1,2,\dots,n\}$است)

۴. $n \geq 2k$، $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های k عضوی$\{1,2,\dots,n\}$که اجتماع هیچ دوتایی کل نیست ثابت کنید:

$$m \leq \left(1 - \frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}$$

۵. $F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ خانواده ای از زیرمجموعه های مجموعه $\{1,2,\dots,n\}$ است برای هر i و j متمایز داریم $A_i \nsubseteq A_j$ و $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ ← $i \neq j$ و $\forall i: |A_i| \leq k \leq \frac{n}{2}$ نشان دهید: $m \leq \binom{n-1}{k-1}$.

متوسط:

۱. $S := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. k ثابت است، اجتماع هر k تا از A_i ها برابر S است و اجتماع هر k − ۱ تا از A_iها برابر S نیست.نشان دهید:$|S| \geq \binom{n}{k-1}$ و اگر تساوی رخ دهد $|A_i| = \binom{n-1}{k-1}$

سخت:

۱. الف) F خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های $\{1,2,\dots,n\}$ تفاضل متقارن هر دو عضو F بیشتر از ۲ عضو دارد ثابت کنید$|F| \leq 2^{n-1}$ و حالت بیشینه را بدست آورید.

ب) $|X| = n$. خانواده F از زیر مجموعه‌های X دارای خاصیت P است اگر وجود داشته باشه $A, B \in F$ که $A \subset B$ و $|B - A| = 1$.

i) مینیمم m را بیابید که هر $|F| > m$ ویژگی P رو داشته باشه.

ii) کل خانواده‌های F با $|F| = m$ را بیابید که خاصیت P را نداشته باشد.

۲. $F \subseteq P(X)$ مفروض است. اگر $|X| = n$ و به ازای هر $A, B \in F$، $A \cap B \neq \emptyset$ و $A \cup B \neq X$ در این صورت نشان دهید $|F| \leq 2^{n-2}$.

۳. خانواده ای از زیرمجموعه های مجموعه n عضوی X مانند F را خوب می نامیم با این شرط که اگر $A, B \in F$ باشند آنگاه $A \cap B = \emptyset \to A \cup B = X$. نشان دهید $|F| \leq 2^{n-1} + \binom{n-1}{[\frac{n-2}{2}]}$.

راهنمایی ها:

قضیه ها:

سعی کنید که خودتون اثباتشون کنید چون تواناییشو دارید. :-)

برای راه حل ها مراجعه شود به:

برای اثبات اسپرنر می توانید از سوال ۴ ساده استفاده کنید.

آشنایی مقدماتی با نظریه مجموعه ها:

daneshnameh.roshd.ir/mavara/mavara-index.php?page=آشنایی+مقدماتی+با+نظریه+مجموعه+ها&SSOReturnPage=Check&Rand=0

و کتاب Extremal Combinatorics نوشته ی S.Jukna

(Exercises 10.8 - 8.4 The Bollobás theorem - 8.3 Sperner's theorem - 7.2 The Erdős–Ko–Rado theorem)

ساده:

۱. $\sum d(x)^2 = 2\sum\binom{d(x)}{2} + \sum d(x)$.

۲. الف) مکمل هیچ مجموعه با خودش در F نیست.

ب) A, A^cوجود دارد که در F نیست.

۳. از قضیه هال می تونید استفاده کنید.

۴. مکمل !!

۵. خودتون حل کنید.

متوسط:

۱. مکمل های اجتماع انتخاب های ۱ − k تایی از A_iها را بررسی کنید.

سخت:

۱. $m = 2^{n-1}$، مشابه سوال ۱ متوسط.

۲. سوال چالش برانگیزیست برای خودتان :)

۳. به ۳ ساده توجه کنید.