به نام خدا

سطح ساده

۱. سعی کنید درجه عبارت سمت راست را کم کنید.

۲. از باقیمانده چینی استفاده کنید. جواب اعداد مرکب است.

۳. به استقرا ثابت کنید برای $n = 2^k$ حکم درست است.

۴. ثابت کنید اگر دو عضو این مجموعه نسبت به هم اول باشند مجموعه بی نهایت عضوی است.

۵. فرض خلف کنید و از باقیمانده چینی به پیمانه a_i ها استفاده کنید.

۶. از قضیه فرما استفاده کنید.

۷. با تجزیه به اعداد اول، حکم معادلی مناسب برای بخش پذیر بودن تعداد مقسوم علیه ها بر ۱۳۹۲ بیابید و از باقیمانده چینی استفاده کنید.

۸. فرض خلف کنید که چنین نباشد و از اصل لانه کبوتری استفاده کنید.

۹. بر حسب تعداد اعداد فرد، $4k + 2$، $8k + 4$ و... دسته بندی کنید و رابطه ای صریح برای مقدار مد نظر مسأله بیان کنید.

۱۰. از ریشه اولیه استفاده کنید.

۱۱. روی n استقرا بزنید.

۱۲. دقت کنید که اگر کسر ها ساده شده باشند و مخرج ها متمایز باشند، میتوان همه کسر ها را با مقدار ثابتی جمع کرد تا صورت ها نیز با یکدیگر و مخرجها متمایز شوند. حال ابتدا فرض کنید صورت همه کسرها یک است.

۱۳. ثابت کنید اگر $p = 3k + 2$ ،$p|3x^2 + y^2$ آنگاه $p|x, y$.

۱۴. ثابت کنید n توانی از دو است، به این شکل که عامل فردی از آن مانند pرا در نظر بگیرید و ثابت کنید امکان ندارد $2^p - 1|m^2 + 9$.

۱۵. از تجزیه به عوامل اول بهره بگیرید.

۱۶. ثابت کنید ضرب چهار عدد متوالی نمیتواند مربع کامل باشد.

۱۷. از قضیه های فرما و اویلر استفاده کنید.

۱۸. ثابت کنید جواب مسأله برابر ۳ است. از نزول نامتناهی استفاده می کنید.

۱۹. چند مرحله به پیمانه ۷ در نظر بگیرید و تقسیم کنید.

۲۰. دقت کنید $\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{a_2-a_1}{a_1a_2} < \frac{(a_1,a_2)}{a_1a_2} = \frac{1}{[a_1,a_2]}$.

۲۱. هر مرحله اگر زوج بود عدد را تقسیم بر دو کنید و اگر فرد بود از آن بزرگترین توان سه ممکنه را کم کنید و استقرا بزنید.

۲۲. از لم دوخط استفاده کنید.

۲۳. دقت کنید $x,y < p$ و $x^2 \equiv y^2 \bmod p$ پس از آنجایی که این دو عدد متمایزند، $x+y=p$.

۲۴. دقت کنید که حکم معادل $y^2 - t^2 = z^{11} - P(x)$ است. سمت چپ اختلاف دو مربع کامل است.

۲۵. کافیست تعداد x,y هایی را بیابید که $x^2 \equiv y^2 + 1 \bmod p$

۲۶. از اصل لانه کبوتری و قضیه فرما استفاده کنید.

۲۷. ثابت کنید $\frac{n}{\pi(n)}$ از هر مقداری بزرگتر می شود و از پیوستگی گسسته استفاده کنید.

۲۸. از قضیه فرما استفاده کنید.

۲۹. فرض خلف کنید. فرض کنید $s(n)$ جمع ارقام عدد n باشد.

الف) و ج) در این صورت از جایی به بعد جمع ارقام مدام کاهش می یابد پس جایی صفر می شود.

ب) در این صورت از جایی به بعد جمع ارقام مدام افزایش می یابد، نتیجه بگیرید $s(3^n) \le s(3^{n+1}) - 9$.

د) در این صورت از جایی به بعد جمع ارقام مدام افزایش می یابد، نتیجه بگیرید $s(2^n) \le s(2^{n+6}) - 27$.

سطح متوسط

۳۰. چندجمله ای ها را برحسب ضرب ریشه ها می نویسیم.

۳۱. از اتحاد مزدوج استفاده کنید.

۳۲. ثابت کنید اگر k قدر نسبت تصاعد باشد آنگاه یا $k=1$ یا $k=2$.

۳۳. جواب مسأله، ۵ است.

۳۴. از نزول نامتناهی (ویتا جامپینگ) استفاده کنید.

۳۵. ابتدا دقت کنید n فرد است. حال از لم دو خط استفاده کنید.

۳۶. از مرتبه و تقابل مربعی استفاده کنید.

۳۷. برای یک n مناسب قرار دهید $(m+1)=(n+1)^2$

۳۸. روابط عاد کردن را به تساوی تبدیل کنید و از نامساوی های مناسب استفاده کنید.

۳۹. از اصل لانه کبوتری و قضیه کوچک فرما استفاده کنید.

۴۰. ثابت کنید اگر $p \equiv 1 \; mod \; 4$ عددی اول باشد عدد طبیعی n وجود دارد که $p|n^2+1, n \le \frac{p-\sqrt{p-4}}{2}$

۴۱. از استقرا استفاده کنید.

۴۲. برای حل این سوال ثابت کنید همنهشتی $Ax^2+By^2+c \equiv 0 \mod p$ که میدانیم $(A,p)=1$، $(B,p)=1$ برحسب x,y همواره جواب دارد.

۴۳. قرار دهید $x=2^{tr}, y=2^{nr}$.

۴۴. بررسی کنید هنگامی که $\lfloor x_n \rfloor > \lfloor x_{n-1} \rfloor$ چه اتفاقی میفتد.

۴۵. از مسأله ۹ استفاده کرده و استقرا بزنید.

۴۶. ثابت کنید اعداد گویا هستند و از لم دوخط استفاده کنید.

۴۷. از ریشه اولیه استفاده کنید.

۴۸. ثابت کنید امکان ندارد که $m=8k+4$. برای اثبات آن ثابت کنید اگر $p|3x^2+1$ که p اول و فرد است آنگاه $p \equiv 1 \pmod 3$.

۴۹. فرمی از n ارائه دهید یا یک جواب بیابید و از استقرا استفاده کنید.

۵۰. از استقرا استفاده کنید.

۵۱. دقت کنید که حکم برای حالتی که n فرد باشد بدیهی است. برای حالت n زوج، سعی کنید $k >t$ خوبی ارائه دهید که $k|n^k-t$.

سطح ممتاز

۵۲. ثابت کنید یا همه زوجند و یا همه فردند. سپس روی بزرگترین این اعداد استقرا بزنید.

۵۳. برای هر n یک دنباله از اعداد طبیعی متمایز بیابید که $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k}=1$ و $x_k=n$.

۵۴. عاد کردن مسأله را به صورت یک رابطه برحسب چندجمله ای ها بنویسید و ریشه ها را بررسی کنید.

۵۵. حداکثر تعداد اعدادی که به این صورت قابل نمایش هستند و از N کوچکتر هستند را برحسب N بیابید.

۵۶. ابتدا ثابت کنید 100عدد طبیعی متوالی پرطمطراق وجود دارند. حال از پیوستگی گسسته استفاده کنید.

۵۷. ابتدا ثابت کنید m فرد است.سپس n را بیابید.

۵۸. جواب این سوال "بله" است. ابتدا سعی کنید ۷ را بسازید.

۵۹. ثابت کنید مجموعه عوامل اول a, b یکسان است و اگر $(a, p) = 1$ آنگاه $\mathrm{ord}_p b | \mathrm{ord}_p a$.

۶۰. ثابت کنید اگر $(a, p) = (b, p) = 1$ آنگاه $\mathrm{ord}_p a = \mathrm{ord}_p b$.

۶۱. سعی کنید فرمی برای xy بیابید.

در حقیقت اگر $x = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc, y = t^3 + u^3 + v^3 - 3tuv$ آنگاه اگر $m = at + cu + bv$ و $n = bt + au + cv$ و $p = ct + bu + xv$ آنگاه $xy = m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp$.

۶۲. قرار دهید $a = \frac{m-n}{2}, b = \frac{m+n}{2}$ و با بازنویسی عبارت، از نزول نامتناهی استفاده کنید.

۶۳. عبارت مسأله را به فرم رابطه ای درجه دو بنویسید و از اتحاد ویت استفاده کنید.

۶۴. یک p در نظر بگیرید و a, b, c را طوری بسازید که $p = f(a) = f(b) = f(c)$. همینطور برای چهار عدد.

۶۵. فرض کنید $n^7 + 128 = x^2 + 121$.

۶۶. رابطه را به صورت $a^4 + b^4 + 4c^4 = d^4$ بازنویسی کنید و سعی کنید x, y, z را برحسب چندجمله ای ها بیان کنید.

۶۷. عبارت مسأله را به صورت ضرب دو چندجمله ای بنویسید و سعی کنید از نامساوی ها استفاده کنید.

۶۸. فرض کنید $n \geq 2$. دقت کنید عبارت مسأله مربع کامل نیست، حال از لم دوخط استفاده کنید و نامساوی هایی برای n و توان بزنید.

۶۹. فرض کنید $p > 2$. ابتدا دقت کنید $n^p - 1 \geq p^n - 1$ پس $\frac{p}{\log(p)} \leq \frac{n}{\log(n)}$ و نتیجه بگیرید $n \leq p$. حال دقت کنید $\frac{n^p-1}{n-1} \equiv 1 \pmod p$.

۷۰. الف) فرض کنید $n = dx$ و $\lfloor n\sqrt{2} \rfloor = dy$. ثابت کنید $d < x\sqrt{8}$.

ب) از معادله پل استفاده کنید.

به نام خدا

سطح ساده

۱.همه a, b های طبیعی را بیابید که $ab^2 + b + 7 | a^2b + a + b$.

۲.همه n هایی را بیابید که $b_1, \dots, b_n$ یافت شوند که همگی برابر نباشند و برای هر k طبیعی داشته باشیم

$(b_1 + k)(b_2 + k) \dots (b_n + k)$ توان کامل است.

۳.فرض کنید برای یک a, b, c طبیعی داشته باشیم $a + b + c | a^2 + b^2 + c^2$. ثابت کنید بی نهایت n طبیعی یافت می شود که $a + b + c | a^n + b^n + c^n$.

۴.همه مجموعه های متناهی و ناتهی از اعداد طبیعی مانند S را بیابید که برای هر $x, y \in S$ که $x \neq y$ داشته باشیم: $\frac{x+y}{(x,y)} \in S$

۵.فرض کنید $p(x)$ یک چند جمله ای با ضرایب صحیح باشد و $a_1, \dots, a_n$ اعدادی صحیح باشند که برای هر x صحیح، i بین 1 تا n یافت شود به طوری که $a_i | p(x)$. ثابت کنید i بین 1 تا n یافت می شود که برای هر x صحیح، $a_i | p(x)$.

۶.برای هر k نشان دهید یک n وجود دارد که $2^n + 3^n - 1, 2^n + 3^n - 2, \dots, 2^n + 3^n - k$ همگی مرکب باشند.

۷.آیا 2016 عدد طبیعی متوالی یافت می شود که تعداد مقسوم علیه های هر کدام مضربی از 1392 باشد؟

۸.ثابت کنید در بین هر n عدد طبیعی، جمع تعدادی بر n بخش پذیر است.

۹.فرض کنید $p(n)$ بزرگترین مقسوم علیه فرد n باشد. ثابت کنید:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{p(k)}{k} > 2/3$$

۱۰. p عددی اول است. فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ جایگشتی از $\{1, \dots, p-1\}$ باشد. فرض کنید $b_1 = a_1$ و $b_i = a_i b_{i-1}$ برای $2 \le i \le p-1$. آیا ممکن است برای هر $1 \le j \le p-1$، یک $1 \le i \le p-1$ یافت شود که $i \equiv b_j (mod\ p)$

۱۱. فرض کنید $N = 2^{n-1}$. ثابت کنید:

$$(2^{n+1}-1)(2^n-1)^2(2^{n-1}-1)^4(2^{n-2}-1)^8 \dots (2^2-1)^N | (2^{n+1}-1)!$$

۱۲. ثابت کنید برای هر k تصاعد حسابی $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_k}{b_k}$ از اعداد گویا وجود دارد که برای هر $1 \le i \le k$، کسر $\frac{a_i}{b_i}$ ساده شده است و اعداد طبیعی $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$ دو به دو متمایزند.

۱۳. ثابت کنید $x^2 + 3$ عامل اولی به فرم $3k + 2$ ندارد.

۱۴. همه اعداد طبیعی n را بیابید که عدد طبیعی m موجود باشد که $2^n - 1 | m^2 + 9$.

۱۵. اگر m, n, k سه عدد طبیعی باشند به طوری که:

$$m^n | n^m, \qquad n^k | k^n$$

آنگاه ثابت کنید $m^k | k^m$.

۱۶. اگر برای عدد طبیعی n داشته باشیم $n + 1, 2n + 1, 3n + 1$ مربع کامل هستند، ثابت کنید $6n + 1$ مربع کامل نیست.

۱۷. ثابت کنید برای هر n طبیعی،

$$1989 \,|\, n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$$

۱۸. فرض کنید $ab \mid a^2 + b^2 + 1$. همه مقادیر ممکن $\frac{a^2+b^2+1}{ab}$ را بیابید.

۱۹. دو عدد طبیعی a, b مثال بزنید که $\left(7, ab(a+b)\right) = 1$ و $7^7 | (a+b)^7 - a^7 - b^7$.

۲۰. فرض کنید $a_1 < \dots < a_n$ اعدادی طبیعی باشند. ثابت کنید:

$$\frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_2, a_3]} + \dots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} < 1$$

۲۱. ثابت کنید هر عدد طبیعی را میتوان به صورت جمع تعدادی عدد به فرم $2^a 3^b$ نوشت که هیچ دوتایی همدیگر را نشمارند.

۲۲. ثابت کنید $2011^{2011} | 2010^{2011^{2012}} + 2012^{2011^{2010}}$.

۲۳. همه اعداد اول مانند p را بیابید که معادلات $p + 1 = 2x^2$ و $p^2 + 1 = 2y^2$ در اعداد صحیح جواب داشته باشند.

۲۴. فرض کنید $P(x)$ چند جمله ای با ضرایب صحیح باشند. ثابت کنید معادله

$$P(x) + y^2 = z^{11} + t^2$$

جواب دارد.

۲۵. برای p اول، تعداد اعضای مجموعه زیر را بیابید:

$$\{x^2 | x \in \mathbb{Z}_p\} \cap \{y^2 + 1 | y \in \mathbb{Z}_p\}$$

۲۶. ثابت کنید اگر n بیشتر از یک باشد و $h(1) = 2$ و $h(i) = 2^{h(i-1)}$ آنگاه داریم:

$$h(n) \equiv h(n-1) \pmod n$$

۲۷. فرض کنید $\pi(n)$ نمایانگر تعداد اعداد اول کوچکترمساوی n باشد. ثابت کنید بی نهایت n وجود دارد که $\pi(n)|n$.

۲۸. همه $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ هایی را بیابید که برای هر $n\in\mathbb{N}$ و هر p اول، $f(n)^p\equiv n\ (mod\ f(p))$.

۲۹. الف)ثابت کنید بی نهایت عدد n یافت می شود که جمع ارقام 2^{n} از $2^{\mathrm{n}+1}$ نابیشتر باشد.

ب) ثابت کنید بی نهایت عدد n یافت می شود که جمع ارقام 3^{n} از $3^{\mathrm{n}+1}$ ناکمتر باشد.

ج) ثابت کنید بی نهایت عدد n یافت می شود که جمع ارقام 3^{n} از $3^{\mathrm{n}+1}$ نابیشتر باشد.

د) ثابت کنید بی نهایت عدد n یافت می شود که جمع ارقام 2^{n} از $2^{\mathrm{n}+1}$ ناکمتر باشد.

سطح متوسط

۳۰. تمام چند جمله ای های P,Q را بیابید که هر دو تکین و درجه n و دارای n ریشه صحیح متما یز باشند و $P(x)-Q(x)=1$

۳۱. همه p های اول و فرد را بیابید که x طبیعی وجود داشته باشد $\frac{2^{p-1}-1}{p}=x^2$.

۳۲. همه n های طبیعی را بیابید که دستگاه مخفف مانده ها به پیمانه n یک تصاعد حسابی باشد.

۳۳. کمترین مقدار k را بیابید که چندجمله ای های $f_1(x),\dots,f_k(x)$ با ضرایب گویا وجود داشته باشند به طوری که:

$$f_1(x)^2+f_2(x)^2+\dots+f_k(x)^2=x^2+7$$

۳۴. الف) ثابت کنید اگر a,b اعداد طبیعی باشند به طوری که $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ عددی طبیعی باشد، آنگاه این عدد مربع کامل نیز هست.

ب) اگر a,b,c اعداد طبیعی باشند به طوری که $0<a^2+b^2-abc\le c$ آنگاه عدد a^2+b^2-abc مربع کامل است.

۳۵. همه جفت اعداد طبیعی (n,p) که p اول است و $n^{p-1}|(p-1)^n+1$ را:

الف) با شرط $n<2p$

ب) بدون هیچ شرط اضافه ای

بیابید.

۳۶. ثابت کنید اگر $k=2^t+1$ آنگاه k اول است اگر و فقط اگر $k|3^{\frac{k-1}{2}}+1$.

۳۷. ثابت کنید بی نهایت جفت عدد طبیعی (m,n) وجود دارند که مجموعه عوامل اول m,n یکسان باشند و نیز مجموعه عوامل اول $m+1,n+1$.

۳۸. a,b,c اعدادی طبیعی هستند که $c^2+1|a+b$ ،$ab|c(c^2-c+1)$. ثابت کنید $\{a,b\}=\{c,c^2-c+1\}$.

۳۹. فرض کنید A زیر مجموعه ای از اعداد اول باشد با این خاصیت که اگر $a_1,a_2,\dots,a_n\in A$ آنگاه همه عوامل اول $a_1a_2\dots a_n-1$ نیز در A باشند. ثابت کنید A شامل تمام اعداد اول است.

۴۰. ثابت کنید بی نهایت عدد طبیعی n داریم که n^2+1 عامل اولی بزرگ تر از $2n+\sqrt{2n}$ داشته باشد.

۴۱. ثابت کنید $a_1,a_2,\dots,a_n$ طبیعی وجود دارند که $a_1a_2\dots a_n\equiv a_i \pmod{a_i^2}$ برای هر $1\le i\le n$.

۴۲. تمام n های طبیعی را بیابید که برای هر k طبیعی، a طبیعی یافت شود که:

$$n|a^3+a-k$$

۴۳. ثابت کنید اگر $(m,t)=(n,m)=1$ معادله $x^n+y^t=z^m$ بینهایت جواب طبیعی دارد.

۴۴. ثابت کنید اگر $x_1>1$ یک عدد گویا باشد و برای هر n طبیعی $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{\lfloor x_n\rfloor}$ آنگاه دنباله x_i ها شامل عددی طبیعی است.

۴۵. کپه بزرگی از کارتها داریم. روی هر کارت یکی از اعداد $1,\dots,n$ نوشته شده است. می دانیم جمع اعداد روی همه کارت ها برابر $k.n!$ است. ثابت کنید می توان کارتها را به k دسته تقسیم کرد که جمع اعداد روی کارتهای هر دسته برابر $n!$ باشد.

۴۶. فرض کنید a,b اعدادی حقیقی باشند و برای هر k طبیعی، a^k-b^k طبیعی است. ثابت کنید $a,b\in\mathbb{Z}$.

۴۷. برای $k\in\mathbb{N}$ ثابت کنید بی نهایت عدد اوّل p وجود دارد که $\omega\in\mathbb{Z}$ وجود داشته باشد که $(\omega^2-1,p)=1$ و $\mathrm{ord}_p\omega=\mathrm{ord}_{p^k}\omega$.

۴۸. ثابت کنید $\frac{(m+3)^n+1}{3m}$ هیچ گاه عددی زوج نیست.

۴۹. ثابت کنید بی نهایت عدد مرکب n وجود دارد که $n|3^{n-1}-2^{n-1}$.

۵۰. ثابت کنید اگر $f(x)=x^3+17$ آنگاه برای هر n طبیعی، یک m یافت می شود که $3^{n+1}|f(m)$.

۵۱. ثابت کنید اگر n عددی طبیعی باشد، مجموعه $\{\lfloor\frac{n^k}{k}\rfloor | k\in\mathbb{N}\}$ شامل بی نهایت عدد فرد است.

سطح سخت

۵۲. $2n+1$ عدد طبیعی داریم که با کنار گذاشتن هر کدام، می توان $2n$ عدد باقیمانده را به دو دسته n تایی با مجموع برابر تقسیم کرد. ثابت کنید همه این اعداد برابرند.

۵۳. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ تابعی یک به یک است. برای هر $x_1,\dots,x_n$ طبیعی متمایز که داشته باشیم $\sum\frac{1}{x_i}\in\mathbb{N}$ داریم: $\sum\frac{1}{f(x_i)}\in\mathbb{N}$ ثابت کنید f تابع همانیست.

۵۴. همه جفت اعداد طبیعی (m,n) را بیابید که هر دو از دو بیشتر باشند و بینهایت عدد طبیعی a یافت شود که

$$\frac{a^m+a-1}{a^n+a^2-1}$$

نیز عددی طبیعی شود.

۵۵. ثابت کنید بی نهایت عدد طبیعی وجود دارد که به صورت $a^3+b^5+c^7+d^9+e^{11}+f^{13}$ قابل نمایش نیستند.

۵۶. عدد طبیعی n را پرطمطراق میگوییم اگر $a,b>1$ وجود داشته باشد که $n=a^b+b$. آیا 100 عدد طبیعی متوالی وجود دارند که در میانشان دقیقا 95 عدد پرطمطراق وجود داشته باشد؟

۵۷. همه $m,n>3$ های طبیعی را بیابید که $m^2-1|3^m+(n!-1)^m$.

۵۸. فرض کنید $\alpha\geq 2$ عددی گنگ باشد و برای هر k طبیعی، α^k نیز عددی گنگ باشد. سکه هایی به ارزش α^i که i عددی صحیح و نامنفی است ضرب کرده ایم، و از هر سکه ۶ تا در اختیار داریم. آیا ممکن است تمامی مقادیر طبیعی قابل پرداخت باشند؟

۵۹. a,b اعدادی طبیعی هستند به طوری که برای هر n طبیعی داریم $\mathrm{a^n+n|b^n+n}$. ثابت کنید $\mathrm{a=b}$.

۶۰. ثابت کنید اگر برای هر n طبیعی $\mathrm{(a^n-1)(b^n-1)}$ مربع کامل شود ab مربع کامل است.

۶۱. فرض کنید $\mathrm{A=\{a^3+b^3+c^3-3abc|a,b,c\in\mathbb{Z}\}}$. ثابت کنید اگر $x,y\in A$ آنگاه $\mathrm{xy\in A}$.

۶۲. اگر m,n اعدادی فرد باشند و $m^2-n^2+1|n^2-1$ و $m\geq n$ ثابت کنید m^2-n^2+1 مربع کامل است.

۶۳. همه جفت اعداد طبیعی (a,b) را بیابید که $\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ عددی طبیعی باشد.

۶۴. الف) فرض کنید $f(a)$ برابر بزرگترین عامل اول a^2+1 باشد. ثابت کنید بی نهایت سه تایی از اعداد طبیعی مثل a,b,c وجود دارد که $f(a)=f(b)=f(c)$.

ب) مسأله فوق را برای چهار عدد حل کنید.

۶۵. ثابت کنید n^7+7 هیچ گاه مربع کامل نیست.

۶۶. ثابت کنید معادله $x^4+y^4+4z^4=1$ بینهایت جواب گویا دارد.

۶۷. ثابت کنید $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$ در $\mathbb{Z}[x]$ تحویل ناپذیر است.

۶۸. اگر $p(k)$ نشان دهنده k امین عدد اول باشد، همه n هایی را بیابید که $p(1)p(2)\dots p(n)-1$ توان کامل شود.

۶۹. تمام اعداد اول p و اعداد طبیعی n را بیابید که $\frac{n^p-1}{p^n-1}$ طبیعی شود.

۷۰. فرض کنید n عددی طبیعی باشد.

الف) ثابت کنید $n\sqrt{8} > \left(n,\lfloor n\sqrt{2}\rfloor\right)^2$.

ب) ثابت کنید بی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد که $\left(n,\lfloor n\sqrt{2}\rfloor\right)^2 < n\sqrt{7.99}.$

۷۱. آیا m,n طبیعی یافت می شوند که مجموعه عوامل اول m,n یکسان باشند، مجموعه عوامل اول $m+1,n+1$ هم یکسان باشند و مجموعه عوامل اول $m+2,n+2$ نیز یکسان باشند؟(اختیاری)