@sampaadia_math

بـــه نـــام خـــدا

تناظر یک به یک

سوالات:

ساده:

۱. با استفاده از تناظر ثابت کنید:

الف) $\binom{b}{a}=\binom{b-1}{a-1}+\binom{b-1}{a}$(اتحاد پاسکال).

ب) $\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}$(اتحاد واندرموند) و نتیجه بگیرید:$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$

پ) $\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}=\binom{n+1}{k+1}$(اتحاد چوشی چی)

۲. ثابت کنید تعداد کلمات n حرفی با حروف a، b، c و d که تعداد a ها در آن با تعداد b ها برابر است، برابر با $\binom{2n}{n}$است.

۳. فرض کنید $X=\{1,2,\dots,n\}$. تعداد زیر مجموعه های X که هیچ دو عضو متوالی ای ندارد را بیابید.

متوسط:

۱. فرض کنید $N=\{1,2,\dots,n\}$ $n\geq 2$. کوچیک‌ترین عدد t را بیابید که خانواده‌ای شامل t زیر مجموعه از N مانند $F=\{A_1,A_2,\dots,A_t\}$وجود داشته باشد به طوری که هر عضو N متعلق به حداقل یکی از A_i باشد و برای هر دو عضو n مانند x،y اندیس i وجود داشته باشد کهA_iفقط یکی از x،y را داشته باشد. (پیشنهادی المپیاد جهانی ۱۹۹۸)

۲. فرض کنید A مجموعه‌ای متناهی از عدد حقیقی مثبت باشد و$B=\left\{\frac{x}{y}\middle|x,y\in A\right\},C=\{xy|x,y\in A\}$ ثابت کنید: $|A||B|\leq|C|^2$

۳. تعداد ماتریس های $m\times n$ با درایه های ۱ و -۱ را پیدا کنید که حاصل ضرب عناصر هر سطر آن برابر -۱ و حاصل ضرب عناصر هر ستون آن نیز برابر -۱ شود. ادعای خود را ثابت کنید. (مرحله ۲ هفتمین المپیاد کامپیوتر)

۴. فرض کنید a_n تعداد دنباله های دودویی به طول n باشد که شامل هیچ زیررشته متوالی ۰۱۰ نباشند و b_n تعداد دنباله های دودویی به طول n باشد که شامل هیچ زیر رشته ی ۱۱۰۰ یا ۰۰۱۱ نباشند. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$b_{n+1}=2a_n$ (المپیاد ریاضی آمریکا ۱۹۹۶)

ذهن زیبا

۵. یک مثلث متساوی الاضلاع را با n قسمت کردن اضلاع و رسم خطوط به $n \times n$ مثلث کوچک تقسیم کرده ایم. میخواهیم از مثلث ردیف بالا به مثلث وسط پایین برویم طوریکه هر گام به مثلث همسایه مجاور ضلعی برویم، هیچگاه به ردیف بالاتر نرویم و مسیر خانه تکراری نداشته باشد. برای $n = ۱۳۹۵$ چند مسیر وجود دارد؟

سخت:

۱. جایگشت $x_1x_2\dots x_{۲n}$ را از مجموعه اعداد ۱ تا ۲n در نظر بگیرید. این جایگشت خاصیت P را دارد اگر به ازای حداقل یک i بین ۱ تا ۲n − ۱ داشته باشیم: $|x_i - x_{i+1}| = n$

ثابت کنید به ازای هر n، تعداد جایگشت های دارای خاصیت P از تعداد جایگشت هایی که این خاصیت را ندارند بیشتر است. (المپیاد جهانی ریاضی ۱۹۸۹)

۲. یک جدول شبکه ای $n \times n$ را در نظر بگیرید. تعداد راه های انتخاب دو مسیر از گوشه پایین سمت چپ به گوشه بالا سمت راست را بیابید به طوری که این دو مسیر یال مشترک نداشته باشند.

۳. فرض کنید $S = \{1,2,\dots,1990\}$. یک زیر مجموعه ۳۱ عضوی از S خوب نامیده میشود اگر جمع اعضای آن بر ۵ بخشپذیر باشد. تعداد زیر مجموعه های ۳۱ عضوی خوب S را بیابید. (پیشنهادی جهانی ریاضی)

راهنمایی ها:

ساده:

۱. خودتون حل کنید.

۲. $a:=11\,,b:=00\,,c:=01\,,d:=10$ ادامه حل با خودتون.

۳. فیبوناچی!

متوسط:

۱. هر عضو را به رشته باینری t تایی تناظر دهید. ماکسیمم تعداد رشته های باینری متمایز را بیابید.

۲. $B=\left\{\frac{x_1}{y_1},\dots\frac{x_k}{y_k}\right\}$

$$f:A\times B\to C\times C$$
$$f\left(a,\frac{x_i}{y_i}\right)=(ax_i,ay_i)$$

ثابت کنید یک به یک است.

۳. ماتریس $(n-1)\times(m-1)$ بالا چپ ماتریس را در نظر بگیرید. ثابت کنید این ماتریس $(n-1)\times(m-1)$ را هرگونه عددهی کنید بصورت یکتایی ماتریس اصلی پر میشود

۴. یک دنباله که در b_n محسوب میشود را در نظر بگیرید. زیر هر دو عدد متوالی آن دنباله xor شان را بنویسید. دنباله حاصله ازین دنباله را بررسی کنید.

۵. در صفحه دو نوع مثلث دیده میشود. از مثلث های واحدی که به سمت بالا هستند استفاده کنید!!

ذهن زیبا

سخت:

۱. باید یه روشی پیدا کنید که هر جایگشتی که خاصیت P را ندارد را به یک جایگشت که خاصیت P را دارد، تناظر دهید.

۲. رئوس مجاور راس های پایین چپ و بالا راست را در نظر بگیرید! مسئله به این ۴ راس ربط دارد!

۳. فرض کنید اعداد ۱ تا ۱۹۹۰ را دور دایره چیده ایم .ازین ایده استفاده کنید تا بگویید پاسخ یک پنجم تعداد زیرمجموعه های ۳۱ عضوی است .همچنین از اول بودن ۳۱ نسبت به ۱۹۹۰ استفاده کنید.