

طراح: زین‌العابدین غلامی	مرکز سنجش آموزش مدارس برتر	نام و نام خانوادگی:	آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)
صفحه ۱ از ۴	مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه	مدرسه:	کلاس:
	رشته: ریاضی	نام درس: هندسه ۱	پایه: دهم

سوال ۱	بارم: ۱ نمره
نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید. (آ) همه فلزات جامدند. (ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.	
سوال ۲	بارم: ۱/۵ نمره
زاویه $xOy$ مفروض است. روش رسم نیمساز زاویه را با رسم شکل به صورت کامل شرح دهید.	
سوال ۳	بارم: ۱ نمره
ثابت کنید هر نقطه روی عمود منصف پاره خط $AB$ ، از دو سر آن به یک فاصله است.	
سوال ۴	بارم: ۱/۲۵ نمره
درون زاویه $xOy$ چند نقطه می‌توان یافت که از $Ox$ به فاصله ۲ و از $Oy$ به فاصله ۳ باشد؟ روش یافتن آن را با رسم شکل کامل شرح دهید.	
سوال ۵	بارم: ۱/۵ نمره
ثابت کنید در هر مثلث نیمسازهای زوایای داخلی هم‌رسند.	
سوال ۶	بارم: ۱/۲۵ نمره
ثابت کنید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.	

بارم: ۱/۵ نمره

سوال ۷

- برای موارد زیر مثال نقض بیاورید.  
 (آ) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، همنهشت هستند.  
 (ب) هر چهارضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.  
 (ج) به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ، مقدار عبارت  $n^2 + n + 41$  عددی اول است.

بارم: ۱ نمره

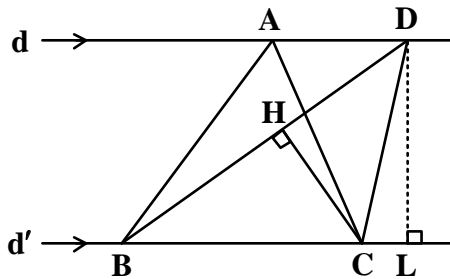
سوال ۸

ثابت کنید در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع وارد بر آنها برابر است.

بارم: ۱ نمره

سوال ۹

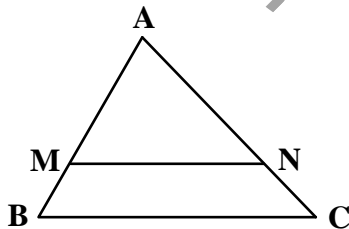
در شکل مقابل  $d \parallel d'$  و مساحت مثلث  $ABC$ ،  $8\text{cm}^2$  است. اگر  $BD = 6\text{cm}$  باشد، فاصله نقطه  $C$  از  $BD$  را به دست آورید.



بارم: ۱/۵ نمره

سوال ۱۰

عکس قضیه تالس:  
 ثابت کنید اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظر متناسب جدا کند، آنگاه با ضلع سوم مثلث موازی است.



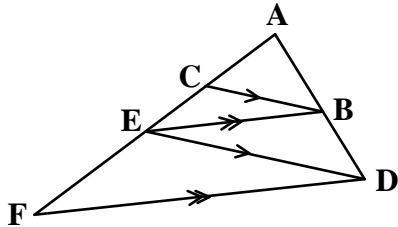
فرض :  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

حکم :  $MN \parallel BC$

بارم: ۱ نمره

سوال ۱۱

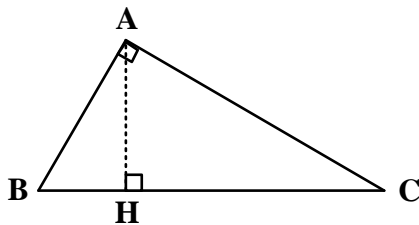
در شکل مقابل می‌دانیم که:  $BC \parallel DE$  و  $BE \parallel DF$ . با نوشتن نسبت‌های تالسی ثابت کنید:  $AE^2 = AC \times AF$



بارم: ۱ نمره

سوال ۱۲

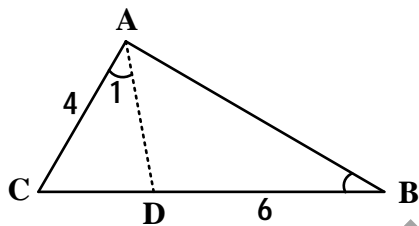
در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ، ارتفاع  $AH$  رسم می‌شود. به وسیله تشابه مثلث‌ها ثابت کنید:  $AH^2 = BH \times CH$  ( $\hat{A} = \hat{H} = 90^\circ$ )



بارم: ۱/۵ نمره

سوال ۱۳

در شکل مقابل داریم:  $\hat{A}_1 = \hat{B}$ . اگر  $AC = 4$  و  $BD = 6$  باشد با نوشتن تشابه مثلث‌ها طول  $BC$  را به دست آورید.



بارم: ۱ نمره

سوال ۱۴

طول اضلاع یک مثلث ۳، ۴ و ۵ است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ می‌باشد. محیط و مساحت مثلث دوم را محاسبه کنید.

بارم: ۱ نمره

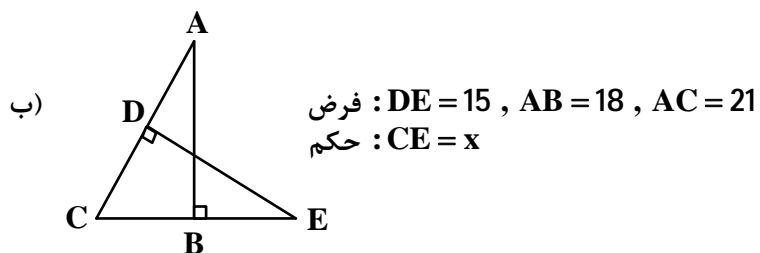
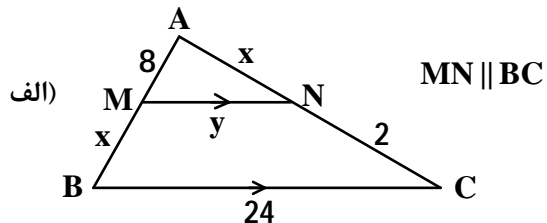
سوال ۱۵

ثابت کنید اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت میان‌های نظیر آنها برابر با نسبت تشابه است.

بارم: ۲ نمره

سوال ۱۶

در شکل‌های مقابل مقادیر مجهول را حساب کنید.



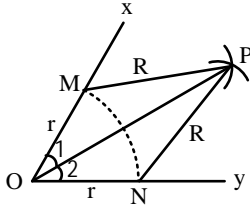
مرکز سنجش آموزش مدارس برتر

مرکز سنجش آموزش مدارس برتر  
**آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)**  
**پاسخنامه آزمون: هندسه ۱**

**پاسخ سؤال ۱:**

(آ) بعضی فلزات جامد نیستند.  
 (ب) مستطیلی وجود دارد که مربع است.

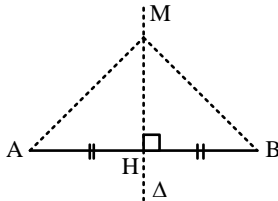
**پاسخ سؤال ۲:**



مطابق شکل، ابتدا به مرکز نقطه O و شعاع r دایره‌ای رسم می‌کنیم تا Ox و Oy را در M و N قطع کند. دو دایره به شعاع‌های یکسان R و به مرکزهای M و N رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در P قطع کنند به شرط آنکه  $R > \frac{MN}{2}$ . به این ترتیب دو مثلث  $\triangle OMP$  و  $\triangle ONP$  به حالت تساوی سه ضلع هم‌نهشت هستند، پس:  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ . یعنی OP نیمساز زاویه  $\angle xOy$  است.

**پاسخ سؤال ۳:**

مطابق شکل خط  $\Delta$  عمود منصف AB است. داریم:



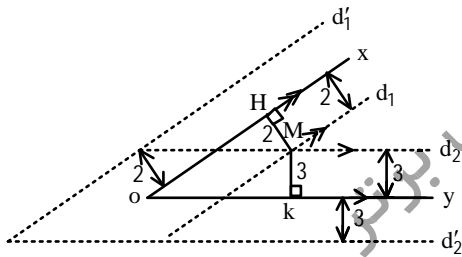
$$AH = BH, \hat{H} = 90^\circ, \text{MH مشترک}$$

$$\Rightarrow \triangle AMH \cong \triangle BMH \Rightarrow AM = MB$$

به این ترتیب فاصله هر نقطه روی  $\Delta$  از A و B یکسان است.

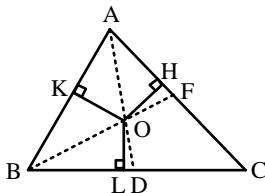
**پاسخ سؤال ۴:**

می‌دانیم که مجموعه نقاطی که از یک خط به فاصله معلوم L باشند، دو خط موازی با آن و به فاصله معلوم L می‌باشند. دو خط  $d_1$  و  $d'_1$  مجموعه نقاطی هستند که از Ox به فاصله ۲ می‌باشد و با Ox موازی‌اند. به همین ترتیب دو خط  $d_2$  و  $d'_2$  مجموعه نقاطی هستند که از Oy به فاصله ۳ می‌باشد و با Oy موازی‌اند. محل برخورد  $d_1$  و  $d_2$  که درون زاویه قرار دارد نقطه M می‌باشد که تنها پاسخ مسأله می‌باشد.



**پاسخ سؤال ۵:**

در شکل مقابل نیمسازهای AD و BF یکدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند. می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و برعکس. داریم:



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{AD نیمساز زاویه A, } \hat{H} = \hat{K} = 90^\circ \Rightarrow OH = OK \\ \text{BF نیمساز زاویه B, } \hat{K} = \hat{L} = 90^\circ \Rightarrow OK = OL \end{array} \right. \Rightarrow OH = OL$$

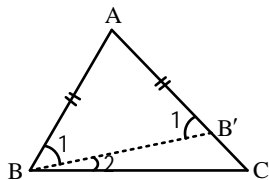
بنابراین O روی نیمساز زاویه C قرار دارد و سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث ABC در نقطه O هم‌رسند.

**پاسخ سؤال ۶:**

مطابق شکل می‌دانیم:  $AC > AB$ . می‌خواهیم ثابت کنیم:  $\hat{B} > \hat{C}$ . را بر AC انتخاب می‌کنیم که:  $AB = AB'$  داریم:

مرکز سنجش آموزش مدارس برتر  
آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)

پاسخنامه آزمون: هندسه ۱



$$AB = AB' \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}'_1 \quad (1) \quad , \quad \hat{B}'_1 = \hat{B}_2 + \hat{C} \Rightarrow \hat{B}'_1 > \hat{C} \quad (2)$$

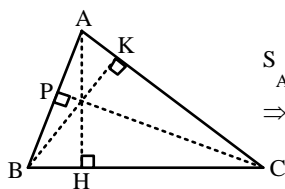
$$(1), (2) \Rightarrow \hat{B}_1 > \hat{C} \quad , \quad B_1 < B \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

پاسخ سؤال ۷:

آ) دو مثلث، یکی با ارتفاع ۳ و قاعده ۴ و دیگری با قاعده ۳ و ارتفاع ۴ هر دو دارای مساحت یکسان  $\frac{3 \times 4}{2} = 6$  هستند ولی هم‌نهشت نیستند.  
ب) لوزی چهار ضلع برابر دارد ولی زوایای آن قائمه نیست.

پاسخ سؤال ۸:

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصلضرب ارتفاع در قاعده. داریم:



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} BK \times AC$$

$$\Rightarrow AH \times BC = BK \times AC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{BK}$$

به این ترتیب می‌توان برای ارتفاع‌ها و قاعده‌های دیگر هم رابطه بالا را ثابت کرد. در نتیجه:

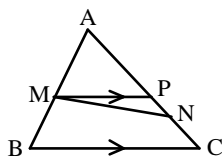
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{CP} \quad , \quad \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{CP}$$

پاسخ سؤال ۹:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} DL \times BC \quad , \quad S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} DL \times BC \Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBC} = 8$$

$$S_{\triangle DBC} = 8 = \frac{1}{2} \times CH \times BD \Rightarrow 16 = CH \times 6 \Rightarrow CH = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

پاسخ سؤال ۱۰:



فرض:  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  حکم:  $MN \parallel BC$

مطابق شکل اگر MN با BC موازی نباشد، MP را موازی با BC رسم می‌کنیم. داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} MP \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} \\ \text{فرض: } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \end{array} \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AP = AN \right.$$

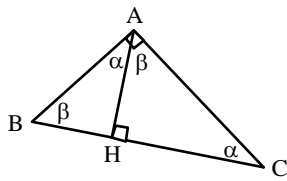
بنابراین دو نقطه P و N بر هم منطبق هستند. پس:  $MN \parallel BC$ .

پاسخ سؤال ۱۱:

$$\left\{ \begin{array}{l} BC \parallel DE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \\ BE \parallel DF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF} \end{array} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^2 = AC \times AF \right.$$

مرکز سنجش آموزش مدارس برتر  
 آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)  
 پاسخنامه آزمون: هندسه ۱

پاسخ سؤال ۱۲:



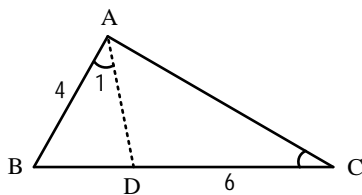
فرض:  $\hat{A} = \hat{H} = 90^\circ$  حکم:  $AH^2 = BH \times CH$

$$\begin{cases} \hat{BAH} = 90^\circ - \hat{HAC} \\ \hat{AHC} : \hat{C} = 90^\circ - \hat{HAC} \end{cases} \Rightarrow \hat{BAH} = \hat{C}$$

$$\begin{cases} \hat{BAH} = \hat{C} \\ \hat{AHB} = \hat{AHC} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{BH}{AH} = \frac{AH}{CH} \Rightarrow AH^2 = BH \times CH$$

(زز)

پاسخ سؤال ۱۳:



فرض:  $\hat{A}_1 = \hat{B}$  حکم:  $BC = ?$

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B} \\ \hat{C} \text{ مشترک} \end{cases} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ABC$$

$$\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2 = BC \times CD$$

$$16 = (CD + 6)CD \Rightarrow CD^2 + 6CD - 16 = 0 \Rightarrow (CD + 8)(CD - 2) = 0 \Rightarrow CD = 2 \Rightarrow BC = 8$$

پاسخ سؤال ۱۴:

می دانیم که نسبت محیط های دو مثلث متشابه همان نسبت تشابه است. داریم:

$$K = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \frac{4}{x} = \frac{3}{y} \Rightarrow x = 8, y = 6 \Rightarrow \text{محیط مثلث دوم} = 24$$

می دانیم که:  $3^2 + 4^2 = 5^2$  پس مثلث با اضلاع ۳، ۴ و ۵ قائم الزاویه است. اگر S مساحت این مثلث باشد داریم:

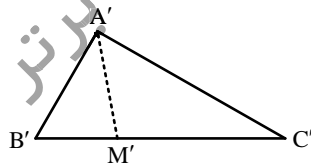
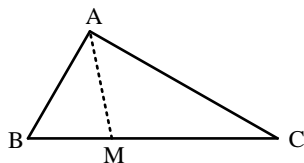
$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

نسبت مساحت های دو مثلث متشابه، مربع نسبت تشابه است. پس داریم:

$$K^2 = \frac{1}{4} = \frac{6}{S'} \Rightarrow S' = 24$$

پاسخ سؤال ۱۵:

مطابق شکل دو مثلث متشابهند و AM و A'M' میانه هستند. داریم:



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}', \text{ نسبت تشابه } k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$\hat{B} = \hat{B}', \frac{A'B'}{AB} = \frac{\frac{B'C'}{2}}{\frac{BC}{2}} = \frac{B'M'}{BM} \Rightarrow \triangle A'B'M' \sim \triangle ABM$$

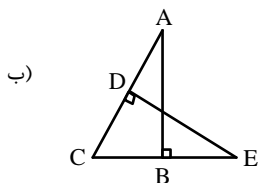
$$\Rightarrow \frac{A'M'}{AM} = \frac{A'B'}{AB} = k \text{ نسبت تشابه}$$

دو ضلع متناسب و زاویه بین برابر

پاسخ سؤال ۱۶:

الف)  $MN \parallel BC$  — تالس —  $\frac{8}{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

$$\frac{8}{x+8} = \frac{y}{24} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{y}{24} \Rightarrow y = 16$$



$$\hat{C}, \hat{D} = \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DCE$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{21}{x} = \frac{18}{15} \Rightarrow x = 17,5$$