

# آمار و احتمال فصل اول

## ۱۸۶ سوال تستی و تشریحی

سرایی

دبیرستان دخترانه جمهوری اسلامی منطقه ۱۹

سال تحصیلی ۹۷-۹۸

## تعاریف فصل ۱ درس اول

تعریف گزاره: گزاره جمله ای خبری است به طوری که بتوان دقیق و بدون ابهام ارزش درستی یا نادرستی آن را مشخص کرد، هر چند در حال حاضر نتوان ارزش آن را تعیین کرد.

جملاتی که کامل نیستند و جمله های پرسشی، امری و عاطفی و بیان کننده احساسات گزاره محسوب نمیشوند.

تعریف حدس یا انگاره: گزاره ای است که ارزش درستی یا نادرستی آن در حال حاضر معلوم نیست و تاکنون کسی نه این گزاره را ثابت کرده و نه رد کرده است (به عبارت دیگر مثال نقضی برای آن پیدا نشده است)

تعریف گزاره نما: هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره نما نامیده می شود. گزاره نماها را بر حسب تعداد متغیرهای به کاررفته در آن ها، یک متغیره، دومتغیره و .... می نامند.

دامنه متغیر گزاره نما: در هر گزاره نما به مجموعه مقادیری که میتوان آن ها را به جای متغیر(های) آن قرار داد تا این گزاره نما تبدیل به گزاره شود؛ دامنه متغیر گزاره نما می گویند و آن را با حرف  $D$  نمایش می دهند.

مجموعه جواب گزاره نما: در هر گزاره نما به مجموعه عضوهایی از دامنه که به ازای آنها گزاره نما تبدیل به گزاره ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره نما می گویند و آن را با حرف  $S$  نمایش میدهند. بدیهی است که  $S \subseteq D$

نقیض یک گزاره: عبارت است از ساختن یک گزاره جدیدی که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش گزاره اصلی باشد

نقیض گزاره  $p$  را با  $\sim p$  نمایش می دهند.

دو گزاره هم ارز: دو گزاره  $p, q$  را هم ارز منطقی (هم ارزش) می گوییم هرگاه ستون مربوط به هر کدام از این دو گزاره در جدول ارزش درستی یکسان باشد.

### گزاره های مرکب:

۱- ترکیب عطفی: برای دو گزاره دلخواه  $p, q$  گزاره مرکب  $(p$  و  $q)$  را ترکیب عطفی میگوییم و با نماد  $p \wedge q$  نمایش میدهم. ارزش آن فقط و فقط وقتی درست است که هر دو درست باشند.

$p$	$q$	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

۲- ترکیب فصلی: برای دو گزاره دلخواه  $p, q$  گزاره مرکب ( $p$  یا  $q$ ) را ترکیب فصلی میگوییم و با نماد  $p \vee q$  نمایش میدهیم. ارزش آن

فقط و فقط وقتی نادرست است که هر دو نادرست باشند.

$p$	$q$	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

۳- ترکیب شرطی: برای دو گزاره دلخواه  $p, q$  گزاره مرکب (اگر  $p$  آنگاه  $q$ ) را ترکیب فصلی میگوییم و با نماد

$p \Rightarrow q$  را مقدم و  $q$  را تالی مینامیم. ارزش آن فقط و فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

\* نکته: اگر مقدم نادرست باشد ( $\square \Rightarrow$ ) ارزش این ترکیب شرطی همواره درست است. در این حالت میگوییم به انتهای مقدم درست است.

\* نکته ۲: اگر تالی درست باشد ارزش ترکیب شرطی همواره درست است. یعنی  $P \Rightarrow$  همواره درست است.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

\* تبدیل یک گزاره شرطی به ترکیب فصلی

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

مثال: با جدول نشان دهید  $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

۳/۱- عکس یک ترکیب شرطی: گزاره  $q \Rightarrow p$  را عکس ترکیب شرطی  $p \Rightarrow q$  می گوئیم. یعنی برای عکس ترکیب شرطی کافی است جای

مقدم و تالی را عوض کنیم.

\* ارزش عکس یک ترکیب شرطی ربطی به ارزش ترکیب شرطی ندارد.

۳/۲- نقیض یک ترکیب شرطی: برای هر دو گزاره دلخواه  $p, q$  نقیض ترکیب شرطی  $p \Rightarrow q$  عبارت است از  $p \wedge \sim q$

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

مثال: با جدول نشان دهید:  $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

۳/۳- عکس نقیض یک ترکیب شرطی: گزاره  $\sim q \Rightarrow \sim p$  را عکس نقیض ترکیب شرطی  $p \Rightarrow q$  میگوییم. در واقع میتوان نشان داد که

هر گزاره شرطی با عکس نقیض خودش هم ارز است.  $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

مثال: با جدول نشان دهید:  $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

۴- ترکیب دو شرطی: برای هر دو گزاره دلخواه  $p, q$ ، ترکیب  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  را ترکیب دو شرطی می نامیم و با نماد  $p \Leftrightarrow q$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

نشان می دهیم.

\* ارزش آن وقتی درست است که هر دو طرف  $\Leftrightarrow$  دارای ارزش یکسان باشند. یعنی اگر دو طرف  $\Leftrightarrow$  ارزش متفاوت داشته باشند نادرست است.

\* برای اثبات درستی گزاره  $p \Leftrightarrow q$  کافی است نشان دهیم  $p \equiv q$ . در این صورت گزاره درست دوشروطی  $p \Leftrightarrow q$  را قضیه دوشروطی می نامیم.

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

\* صورت های مختلف بیان شرطی درست.

در صورتی که گزاره دوشروطی  $p \Leftrightarrow q$  درست باشد، آن را به صورت های زیر بیان می کنند:

\* اگر  $p$  آنگاه  $q$  و برعکس

\* اگر  $p$  اگر و تنها اگر  $q$

\*  $p$  یک شرط لازم و کافی برای  $q$  است.

\*  $q$  یک شرط لازم و کافی برای  $p$  است.

۴/۱- نقیض ترکیب دو شرطی:

$$\begin{aligned} \sim(p \Leftrightarrow q) &\equiv \sim p \Leftrightarrow q \\ \sim(p \Leftrightarrow q) &\equiv p \Leftrightarrow \sim q \end{aligned}$$

برای دو گزاره دلخواه  $p, q$  داریم:

مثال: به کمک جدول رابطه بالا را ثابت کنید.

## سورها

۱- سور عمومی: گزاره ای که خاصیتی را در مورد همه عضوهای یک مجموعه بیان میکند را "گزاره کلی" یا "گزاره با سور عمومی" می گویند.

\* اگر  $p(x)$  گزاره نمایی باشد که خاصیتی را در مورد عضوهای دامنه متغیر گزاره نمای بیان میکند. گزاره ای که این خاصیت را به همه عضوهای

دامنه نسبت می دهد سور عمومی نامیده می شود و به صورت زیر نمایش داده میشود.

$$\forall x: p(x)$$

و اینگونه خوانده می شود: \* همه  $x$  هایی که در خاصیت  $p(x)$  صدق میکنند.

\* به ازای هر  $x$  ای، عبارت  $p(x)$  برقرار است.

۲- سور وجودی: گزاره ای که خاصیتی را در مورد بعضی از عضوهای یک مجموعه بیان میکند را "گزاره با سور وجودی" می گویند.

\* اگر  $p(x)$  گزاره نمایی باشد که خاصیتی را در مورد عضوهای دامنه متغیر گزاره نمای بیان میکند. گزاره ای که این خاصیت را به برخی از عضوهای دامنه نسبت می دهد سور وجودی نامیده می شود و به صورت زیر نمایش داده میشود.

$$\exists x: p(x)$$

و اینگونه خوانده می شود: \* وجود دارد  $x$  ای که در خاصیت  $p(x)$  صدق میکند.

\* به ازای بعضی مقادیر  $x$  ای، عبارت  $p(x)$  برقرار است.

نقیض گزاره های سوری

$$1- \text{نقیض سور عمومی: } \sim(\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$$

نقیض "همه  $x$  ها در خاصیت  $p(x)$  صدق میکنند" عبارت است از "وجود دارد  $x$  که در خاصیت  $p(x)$  صدق نمیکند."

$$2- \text{نقیض سور وجودی: } \sim(\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$$

نقیض گزاره "به ازای بعضی مقادیر  $x$  عبارت  $p(x)$  برقرار است." عبارت است از "به ازای هر  $x$  ای عبارت  $p(x)$  برقرار نیست."

\* گزاره با سور عمومی وقتی درست است که نتوان مثال نقضی برایش پیدا کرد به عبارتی  $S = D$

\* گزاره با سور وجودی وقتی درست است که بتوانیم حداقل یک عضو از دامنه یافت که به ازای آن گزاره نما به گزاره درست تبدیل شود.

## سوالات درس اول:

۱- کدام جمله یک گزاره نیست؟

۱) در پرتاب یک تاس سالم احتمال آنکه عدد ظاهر شده مضرب ۳ باشد برابر  $\frac{1}{3}$  است.

۲) ای کاش میتوانستم در یک هوای پاک زندگی کنم

۳) هر معادله درجه ۲ دارای دو ریشه حقیقی است

۴) هر عدد زوج بزرگ تر از ۲ را میتوان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.

۲- کدام یک از گزینه ها گزاره نما نیست؟

۱)  $a$  عددی زوج است. ۲) در پرتاب یک تاس؛ احتمال رخداد پیشامد  $A$  برابر  $\frac{1}{4}$  است.

۳) همه اعداد اول فرد هستند. ۴) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر ۶ است.

۳- دامنه متغیر گزاره نمای  $\sqrt{2-|x|} < 1$  کدام است؟

(۱)  $(-2, 2)$ 
(۲)  $(-1, 1)$ 
(۳)  $[-2, 2]$ 
(۴)  $R - [-2, 2]$

۴- مجموعه جواب گزاره نمای  $\frac{1}{\sqrt{2-|x|}} \leq 1$  کدام است؟

- (۱)  $[-1, 1]$  (۲)  $(-1, 1)$  (۳)  $(-2, 2)$  (۴)  $[-2, 2]$

۵- مجموعه جواب هر کدام از گزاره نماهای زیر را با توجه به دامنه متغیر گزاره نما مشخص کنید.

(۱) در پرتاب یک تاس احتمال آنکه پیشامد  $A$  رخ دهد برابر با  $\frac{1}{6}$  است.  $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(۲)  $x$  مضرب ۷ است.  $D = Z$

(۳)  $x^2 + 4x = 2$   $D = R$

(۴) در پرتاب یک تاس  $P(\{x\}) = \frac{1}{6}$   $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(۵)  $x + 1 > 2$   $D = \{0, 1, 2, 3\}$

(۶)  $\frac{2x+1}{3} \leq -1$   $D = Z$

۶- ارزش کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟

(۱)  $\exists x \in Z; x = \frac{1}{x}$  (۲)  $\forall x \in Z; x^2 \geq x$

(۳)  $\forall x \in R; x^2 > 0$  (۴)  $\exists x \in R; x + \frac{1}{x} = -2$

۷- نقیض گزاره  $x > 0; x^2 > x$  را بنویسید.

۸- نقیض گزاره های زیر را بنویسید

(۱) ۲ عددی گویا است. (۲)  $\sqrt{2}$  عددی گنگ است.

(۳) سعدی یک ریاضی دان است.

۹- نقیض گزاره همه دانشجویان بعضی از دانشگاه های تهران باهوشند، کدام است؟

(۱) همه دانشجویان همه دانشگاه های تهران باهوش نیستند.

(۲) بعضی دانشجویان بعضی از دانشگاه های تهران باهوش نیستند.

(۳) بعضی از دانشجویان هر دانشگاهی در تهران باهوش نیست.

(۴) لا اقل یکی از دانشجویان همه دانشگاه های تهران باهوش نیست.

۱۰- نقیض گزاره "مریم ریاضی دان است" ، کدام گزینه نیست؟

(۱) مریم ریاضی دان نیست. (۲) این طور نیست که مریم ریاضی دان است.

(۳) مریم ریاضی کار نمی کند. (۴) مریم ریاضی نمی داند.

۱۱- گزاره "این طور نیست که ۵ عددی اول نیست" معادل با کدام گزینه است؟  
 (۱) ممکن است ۵ عددی غیراول باشد. (۲) ۵ عددی اول است.  
 (۳) ۵ عددی مرکب است. (۴) ۵ عددی اول نیست.

۱۲- ارزش گزاره های زیر را مشخص کنید  
 (۱) ۳ عددی فرد است و  $\sqrt{5}$  عددی گویا است.  
 (۲) خورشید به دور زمین می چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.  
 (۳)  $a \in \{a, b, c\}$  و ۷ عددی اول است  
 (۴) پاریس پایتخت انگلستان است یا تهران پایتخت ایران است.  
 (۵)  $\sqrt{3}$  عددی حقیقی است یا ۲ عددی اول نیست.  
 (۶) عدد  $\pi$  گویا است یا در مستطیل دو قطر برهم عمودند.

۱۳- ارزش کدام گزاره مرکب درست است؟

$$(1) (2 < 3) \wedge (4 + 3 = 10) \quad (2) (5 > 3) \vee (x^2 + 1 = 0)$$

$$(3) \left(\frac{1}{2} \neq \frac{3}{6}\right) \vee (1 \in \{2, 3, 4\}) \quad (4) (\sqrt{2} \notin R) \wedge (\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\})$$

۱۴- اگر گزاره  $p \vee q \sim$  یک گزاره نادرست باشد، ارزش کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟

$$(1) q \quad (2) p \quad (3) p \vee q \quad (4) p \vee \sim q$$

۱۵- اگر  $p \wedge q \sim$  گزاره ای درست باشد، کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

$$(1) p \vee \sim q \quad (2) p \wedge q \quad (3) p \vee q \quad (4) p \wedge \sim q$$

۱۶- اگر عکس گزاره  $q \Rightarrow p$  نادرست باشد، ارزش کدام گزاره نادرست است؟

$$(1) q \Rightarrow q \quad (2) \sim p \vee q \quad (3) p \wedge \sim q \quad (4) \sim p \Rightarrow q$$

۱۷- هرگاه ارزش گزاره  $p \vee q$  درست و ارزش  $q$  نادرست باشد، در مورد ارزش گزاره  $P$  چه می توان گفت؟

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

۱۸- خاصیت شرکت پذیری را با کمک جدول ارزش ها نشان دهید.

۱۹- خاصیت توزیع پذیری (پخشی) را با کمک جدول ارزش ها نشان دهید.

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

۲۰- قانون جذب و شبه جذب (همپوشانی) را با کمک جدول نشان دهید.

$$\begin{aligned} p \wedge (p \vee q) &\equiv p \\ p \vee (p \wedge q) &\equiv p \end{aligned} \quad \text{الف) جذب}$$

$$\begin{aligned} p \wedge (\sim p \vee q) &\equiv p \wedge q \\ p \vee (\sim p \wedge q) &\equiv p \vee q \end{aligned} \quad \text{ب) شبه جذب}$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

۲۱- قانون دمرگان را با جدول ارزش ثابت کنید.

۲۲- نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

(۱) عدد ۴ فرد است و ۳ عددی اول است

(۲) قطرهای مستطیل برابرند یا  $\pi$  عددی گویاست.

$$23\text{-} \text{نقیض گزاره زیر را بنویسید.} \quad \left( \exists x \in Z; \frac{1}{x-1} \in Z \right) \vee \left( \forall x \in R; \sqrt{x} \in R \right)$$

۲۴- نقیض گزاره  $p \wedge q$  در کدام گزینه به درستی آمده است؟

$$p \Rightarrow \sim q \quad (4) \quad q \Rightarrow p \quad (3) \quad \sim p \Rightarrow q \quad (2) \quad p \Rightarrow q \quad (1)$$

۲۵- گزاره  $(\sim (p \wedge q) \wedge \sim p) \vee p$  با کدام گزاره هم ارز است؟

$$p \quad (1) \quad p \vee q \quad (2) \quad \sim q \vee p \quad (3) \quad \text{همواره درست است.} \quad (4)$$

۲۶- گزاره  $p \Rightarrow (\sim q \wedge p)$  معادل با کدام است؟

$$p \quad (1) \quad \sim p \quad (2) \quad q \quad (3) \quad \text{همواره درست است.} \quad (4)$$

۲۷- کدام گزینه در مورد گزاره  $p \Rightarrow (q \Rightarrow \sim (p \Rightarrow \sim q))$  درست است؟

$$(1) \text{ هم ارز با } p \Rightarrow q \text{ است.} \quad (2) \text{ هم ارز با } \sim p \Rightarrow q \text{ است.}$$

$$(3) \text{ همواره نادرست است.} \quad (4) \text{ همواره درست است.}$$

۲۸- نقیض گزاره  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  کدام گزینه است؟

$\sim p \wedge q$  (۴)       $p \wedge \sim q$  (۳)       $p \Leftrightarrow \sim q$  (۲)       $p \Leftrightarrow q$  (۱)

۲۹- ارزش گزاره زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید و سپس نقیض آن را بنویسید.

$$(\forall x \in R; x^2 > 0) \Rightarrow (\forall x \in R; x^2 < 0)$$

۳۰- عکس نقیض گزاره ی "اگر او متدین باشد، آنگاه درستکار است." کدام گزینه است؟

(۱) اگر او درستکار باشد، آنگاه او متدین است.

(۲) اگر او متدین نباشد، آنگاه او درستکار نیست.

(۳) اگر او درستکار نباشد، آنگاه او متدین نیست.

(۴) او درستکار نیست ولی او متدین است.

۳۱- جدول زیر قسمتی از یک جدول ارزش گزاره ها را نشان می دهد. گزاره  $X$  کدام می تواند باشد؟

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$	$X$
ن		د	ن

$q \Rightarrow \sim p$  (۲)       $p \vee q$  (۱)

$p \Rightarrow q$  (۴)       $q \Rightarrow p$  (۳)

۳۲- به کمک جدول ارزش گزاره ها نشان دهید گزاره زیر همواره درست است.  $p \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (\sim q \Rightarrow p)]$

۳۳- به کمک جدول، ارزش گزاره  $p \wedge [(p \Rightarrow q) \wedge \sim q]$  را مشخص کنید.

۳۴- بدون استفاده از جدول و با کمک ویژگی ها هم ارزش مقابل را ثابت کنید.

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim r \Rightarrow \sim p)$$

۳۵- اگر ارزش گزاره  $p \Rightarrow [\sim q \Rightarrow (r \Rightarrow q)]$  درست و ارزش گزاره  $q$  نادرست باشد، ارزش گزاره  $p \Rightarrow \sim r$  را با ذکر دلیل بیان کنید.

۳۶- هرگاه  $\sim p, q$  نادرست باشند، با ذکر دلیل و بدون استفاده از جدول ارزش گزاره  $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$  را تعیین کنید

۳۷- نشان دهید برای هر سه گزاره دلخواه  $r, q, p$  گزاره های زیر همواره درست اند.

الف)  $p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)$       ب)  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

پ)  $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$       ت)  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)]$

۳۸- برای سه گزاره  $r, q, p$  هم ارزی های منطقی زیر را بدون جدول ثابت کنید.

الف)  $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$

ب)  $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \wedge r \equiv r \text{ (پ)}$$

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r \text{ (ت)}$$

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r) \text{ (ث)}$$

۳۹- اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند ارزش گزاره  $(p \wedge \sim q) \Rightarrow p$  کدام است؟

$$T \text{ (۱)} \quad F \text{ (۲)} \quad T \text{ (۳)} \quad F \text{ (۴)} \text{ اگر } P \text{ درست باشد}$$

۴۰- اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره دلخواه باشند ارزش گزاره  $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$  هم ارزش با کدام یک از گزاره های زیر است؟

$$p \vee q \text{ (۱)} \quad p \Rightarrow q \text{ (۲)} \quad p \vee q \text{ (۳)} \quad q \Rightarrow p \text{ (۴)}$$

۴۱- اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، عکس نقیض گزاره  $\sim q \Rightarrow p$  با کدام یک از گزاره های زیر هم ارز است؟

$$\sim(p \vee q) \text{ (۱)} \quad p \Rightarrow q \text{ (۲)} \quad p \vee \sim q \text{ (۳)} \quad \sim p \Rightarrow q \text{ (۴)}$$

۴۲- نقیض گزاره  $p \Rightarrow q$  کدام است؟

$$p \wedge q \text{ (۱)} \quad p \Rightarrow \sim q \text{ (۲)} \quad p \wedge \sim q \text{ (۳)} \quad \sim p \wedge q \text{ (۴)}$$

۴۳- اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره  $\sim(q \vee \sim p)$  هم ارز با کدام یک از گزاره های زیر است؟

$$p \wedge q \text{ (۱)} \quad \sim p \Rightarrow \sim q \text{ (۲)} \quad p \wedge \sim q \text{ (۳)} \quad \sim p \wedge q \text{ (۴)}$$

۴۴- اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره  $p \vee (\sim p \Rightarrow q)$  هم ارز است با :

$$p \wedge q \text{ (۱)} \quad p \vee q \text{ (۲)} \quad p \vee \sim q \text{ (۳)} \quad \sim p \vee q \text{ (۴)}$$

۴۵- اگر  $p$  درست  $q$  و گزاره  $r$  های دلخواه باشند کدام یک از گزاره های زیر همواره درست است؟

$$(\sim p \wedge q) \Rightarrow r \text{ (۱)} \quad (\sim p \vee q) \Rightarrow r \text{ (۲)} \quad (p \wedge q) \Rightarrow r \text{ (۳)} \quad (p \vee q) \Rightarrow r \text{ (۴)}$$

۴۶- گزاره  $p \Rightarrow \sim[(q \Rightarrow p) \wedge \sim q]$  هم ارز است با :

$$q \Rightarrow p \text{ (۱)} \quad p \Rightarrow \sim q \text{ (۲)} \quad p \text{ (۳)} \quad \sim q \Rightarrow \sim p \text{ (۴)}$$

۴۷- اگر گزاره  $X \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)]$  همواره درست باشد، گزاره  $X$  کدام است؟

$$p \text{ (۱)} \quad q \text{ (۲)} \quad \sim p \text{ (۳)} \quad \sim q \text{ (۴)}$$

۴۸- مجموعه های  $B, A$  هر یک دارای ۶ گزاره هستند که ۳ تا از گزاره ها درست و ۳ تای دیگر نادرست است. اگر گزاره های  $p, q$  به تصادف از مجموعه های  $B, A$  انتخاب شوند، احتمال آن که گزاره  $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$  درست باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{2} (۱) \quad \frac{3}{4} (۲) \quad \frac{2}{3} (۳) \quad \frac{1}{3} (۴)$$

۴۹- مجموعه های  $C, B, A$  هر یک شامل ۴ گزاره هستند که نصف آنها ارزش درست دارند. اگر گزاره  $p$  به تصادف از  $A$  و گزاره  $q$  به تصادف از  $B$  و گزاره  $r$  به تصادف از  $C$  انتخاب شود، احتمال آن که گزاره  $(p \wedge q) \Rightarrow r$  درست باشد، کدام است؟

$$\frac{5}{8} (۱) \quad \frac{3}{8} (۲) \quad \frac{7}{8} (۳) \quad \frac{1}{8} (۴)$$

۵۰- نقیض گزاره "اگر  $a$  زوج باشد،  $a+1$  فرد است." کدام است؟

(۱) نه  $a$  زوج است و نه  $a+1$  فرد است.

(۲) هم  $a$  زوج است و هم  $a+1$  فرد است.

(۳)  $a$  زوج است ولی  $a+1$  فرد نیست.

(۴)  $a$  زوج نیست ولی  $a+1$  فرد است.

۵۱- کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

$$(۱) (5 > 13) \vee (2 + 1 = 4) \quad (۲) 2 < 3 \Rightarrow -4 < -6$$

(۳) اگر ۴ فرد است آنگاه مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ است و بلعکس

$$(۴) 3 < 5 \Rightarrow 4 \in \{1, 2, 3\}$$

۵۲- به کمک جدول ارزش گزاره ها نشان دهید گزاره دو شرطی زیر یک گزاره همیشه درست است.

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Leftrightarrow \sim p$$

۵۳- برای سه گزاره دلخواه  $p, q, r$  بدون استفاده از جدول نشان دهید هر یک از گزاره های زیر یک قضیه دوشروطی هستند. (راهنمایی: کافی

است نشان دهید دو طرف هر گزاره دوشروطی هم ارز منطقی هستند.)

$$(الف) [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Leftrightarrow \sim p$$

$$(ب) [\sim(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$$

۵۴- ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید.

$$(الف) (\exists x \in Z; x^2 = 16) \Rightarrow (\forall x \in N; x^2 > 1) \quad (ب) \forall a, b \in Z; (a > b \Rightarrow a^2 > b^2)$$

$$(پ) \forall x \in R; \tan x \cdot \cot x = 1$$

$$(ت) (\forall x \in N; x^2 > 1) \Rightarrow (\exists x \in Z; x^2 = 9)$$

۵۵- بدون استفاده از جدول هم ارزی ثابت کنید:

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow \sim [(p \vee q) \Rightarrow r] \equiv \left( \forall x \in R; \frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2 \right)$$

۵۶- گزاره سوری "عددی حقیقی وجود دارد که از هر عدد دیگر بزرگتر است" را به زبان ریاضی بنویسید. سپس نقیض آن را بنویسید.

۵۷- ثابت کنید گزاره های زیر همیشه درست اند.

$$\forall x; p(x) \Rightarrow \exists x; p(x) \quad \text{الف)}$$

$$[\forall x; p(x)] \vee [\forall x; q(x)] \Rightarrow \forall x; [p(x) \vee q(x)] \quad \text{ب)}$$

۵۸- نقیض گزاره سوری زیر را بنویسید.  $\forall n \in N \exists a \in Z; 1 < n! \leq n^n$

۵۹- ارزش گزاره سوری  $\forall x \in R \exists y \in R; x + y > 0$  را مشخص کنید و سپس نقیض آن را بنویسید.

۶۰- نقیض گزاره سوری  $\exists x \forall y; p(x) \wedge \sim q(y)$  را بنویسید.

۶۱- عکس نقیض گزاره شرطی زیر را بنویسید.

$$(\forall a, b \in Z; a < b) \Rightarrow (\exists a, b \in Z; a^2 > b^2)$$

## تعاریف درس ۲ فصل اول

**تعریف مجموعه:** هر مجموعه دسته ای از اشیای دلخواه است که بدون هیچ ابهامی بتوان معلوم کرد که یک شی معین در آن قرار دارد یا نه.

**زیرمجموعه:** مجموعه  $A$  را یک زیرمجموعه  $B$  مینامیم اگر و تنها اگر هر عضوی از  $A$ ، عضوی از  $B$  باشد که در این صورت می

$$A \subseteq B \text{ پس: } A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

چنانچه عضوی در  $A$  وجود داشته باشد، به طوری که آن عضو متعلق به مجموعه  $B$  نباشد، در این صورت  $A$  زیرمجموعه  $B$  نیست

$$\text{و مینویسیم } A \not\subseteq B \text{ پس: } A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$$

**دومجموعه مساوی:** دو مجموعه  $A, B$  با مرجع  $U$  را مساوی میگوییم اگر و تنها اگر هر عضو  $A$ ، عضوی از  $B$  و هر عضو  $B$ ،

$$A = B \Leftrightarrow [\forall x; (x \in A \Leftrightarrow x \in B)]$$

عضوی از  $A$  باشد. به عبارت دیگر:

$$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

**تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه:**

اگر  $A$  یک مجموعه  $n$  عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه های  $A$  برابر است با:  $2^n$

\* اگر از زیر مجموعه های یک مجموعه، خود مجموعه را کنار بگذاریم، سایر زیرمجموعه ها را محض یا سره آن مجموعه میگوییم.

**مجموعه توانی:** مجموعه همه زیرمجموعه های مجموعه  $A$  را، مجموعه توانی  $A$  مینامیم و با  $P(A)$  نمایش می دهیم:

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

واضح است که اگر مجموعه  $A$  دارای  $n$  عضو باشد، در این صورت  $P(A)$  دارای  $2^n$  عضو است.

$$X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$$

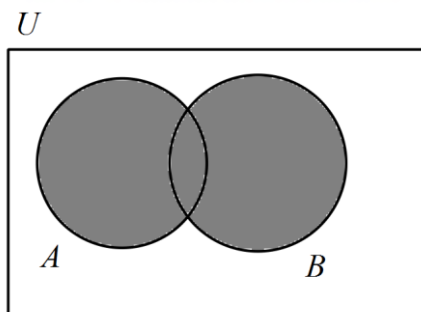
**جبر مجموعه ها :**

همان گونه در میتوان دو یا چند عدد را جمع، ضرب یا تفریق نمود و اعدادی جدید به دست آورد، در مورد مجموعه ها هم می توانیم مشابه این اعمال را انجام دهیم و مجموعه هایی جدید به دست آوریم.

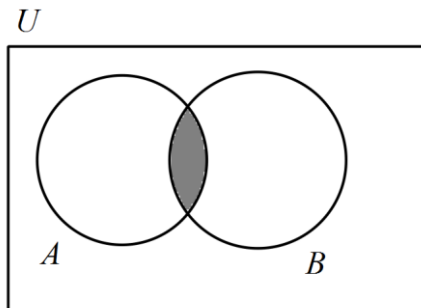
۱- اجتماع دو مجموعه: مجموعه ای است که عضوهای آن "متعلق به  $A$  یا متعلق به  $B$  یا متعلق به هر دو" می باشد. با نماد  $A \cup B$

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$



۲- اشتراک دو مجموعه: مجموعه ای است که عضوهای آن "متعلق به  $A$  و متعلق به  $B$ " می باشد. با نماد  $A \cap B$  نمایش داده



$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

۳- افراز (بخش بندی یک مجموعه) *partition*

بخش بندی یک مجموعه به زیرمجموعه های ناتهی که دو به دو به هم اشتراک ندارند و اجتماع همه آن ها برابر مجموعه اولیه است را افراز یک مجموعه میگویند.

۶۲- ثابت کنید اگر  $A \subseteq \emptyset$  آنگاه  $A = \emptyset$

۶۳- کدام یک از گزاره های زیر یک مجموعه را بیان نمی کند؟

(۱) دسته افراد فرد طبیعی کوچکتر از عدد ۲۰ (۲) دسته شامل اعداد بزرگ

(۳) دسته اعداد اول یک رقمی (۴) دسته اعداد طبیعی مربع کامل بزرگتر از عدد ۵۰

۶۴- مجموع تمام عضوهای مجموعه  $A = \{k^2 + 1; k \in N, k < 5\}$  کدام است؟

(۱) ۳۴ (۲) ۳۵ (۳) ۳۶ (۴) ۳۷

۶۵- کدام مجموعه تهی است؟

(۱)  $A = \{x \in Z; x^2 = 4, 3x = 6\}$

(۲)  $B = \{x \in Z; x + 5 = 5\}$

(۳)  $C = \{x \in Z; x > 3, 2^x < 10\}$

(۴)  $D = \{x \in N; x^2 = 8x\}$

۶۶- اگر مجموعه مرجع را اعداد طبیعی فرض کنیم، متمم مجموعه  $A = \{x \in N; x^2 < 3^x\}$  چند عضو دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۶۷- اگر  $A = \{x, \{x\}, \{x, \{x\}\}\}$  کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام نادرست است؟ (با ذکر دلیل)

(الف)  $\{x\} \subseteq A$  (ب)  $\{\{x\}\} \in A$

۶۸- اگر  $A = \{2\}$  و  $B = \{2, \{2\}\}$  و  $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$  سه مجموعه باشند، کدام رابطه نادرست است؟

(۱)  $B \subseteq C$  (۲)  $A \subseteq B$  (۳)  $A \in B$  (۴)  $B \in C$

۶۹- اگر چهار مجموعه  $A = \{x \mid x \text{ مستطیل است}\}$  و  $B = \{x \mid x \text{ لوزی است}\}$  و  $C = \{x \mid x \text{ مربع است}\}$  و

$D = \{x \mid x \text{ متوازی الاضلاع است}\}$  مفروض باشند، آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱)  $A \subseteq C$  (۲)  $C \subseteq B$  (۳)  $A \subseteq B$  (۴)  $D = A \cap B$

۷۰- اگر  $A = \{a, \{a\}, \{\{b\}\}\}$  آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

(۱)  $\{a\} \in A$  (۲)  $a \in A$  (۳)  $\{b\} \in A$  (۴)  $\{\{b\}\} \in A$

۷۱- هر یک از مجموعه های زیر را به صورت گزاره نما نشان دهید.

$A = \{-1, 0, 1, 8, 27, \dots\}$   $B = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

۷۲- کدام یک از مجموعه های زیر ناتهی است؟

$$\{x \in Z | x + 8 = 8\} \quad \{x \in Z | (x^2 = 9) \wedge (2x = 4)\}$$

$$\{x \in N | x^2 = -7x\} \quad \{x \in Z | x \neq x\}$$

۷۳- اگر  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{a, b, \{a, b\}\}$ ,  $C = \{a, b, \{b\}, \{a, b\}\}$  کدام گزینه درست است؟

$$B \in C \quad A \in C \quad A \subseteq B \quad A \in B$$

۷۴- فرض کنید  $A = \{1, 2, \dots, 9\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $D = \{3, 4, 5\}$ ,  $E = \{3, 5\}$  در هر یک از حالت های زیر

مشخص کنید  $X$  می تواند کدام یک از این مجموعه ها باشد؟

$$X \subseteq C \text{ ولی } X \subseteq A \quad X, B \text{ عضو مشترکی ندارند.}$$

$$X \subseteq D \text{ ولی } X \not\subseteq B \quad X \subseteq C \text{ ولی } X \not\subseteq A$$

۷۵- مجموعه های  $A, B$  را طوری مشخص کنید که:

$$A \subseteq B, A \in B \quad \text{الف)}$$

$$A \subseteq B, A \notin B \quad \text{ب)}$$

$$A \not\subseteq B, A \in B \quad \text{پ)}$$

۷۶- کدام گزاره نادرست است؟

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\} \quad \emptyset \in \{\emptyset\} \quad \emptyset = \{\emptyset\} \quad \emptyset \subseteq \{\emptyset\}$$

۷۷- فرض کنید  $A = \{1, 2\}$  با ذکر دلیل توضیح دهید کدام یک از مجموعه های زیر با مجموعه  $A$  مساوی است؟

$$\{x \in N | 1 \leq x \leq 2\} \quad \{x \in Q | 2x^2 + 3x + 1 = 0\} \quad \{x \in R | 1 \leq x \leq 2\} \quad \{x \in Q | x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

۷۸- اگر  $A = \{2, x + 2y, 4\}$ ,  $B = \{4, 5, x - y\}$ ,  $A = B$  در این صورت دوتایی  $(x, y)$  کدام است؟

$$(3, 1) \quad (1, 3) \quad (2, 3) \quad (2, 1)$$

۷۹- مجموعه  $A = \{a, \{a\}, \emptyset\}$  چند زیر مجموعه دارد؟

۸۰- اگر  $A_n = \{m \in Z, m > -n, 2^m \leq 2n\}, n \in N$  انگاه مجموعه  $(A_n - A_{n-1}) \cup A_1$  چند عضو دارد؟ کنکور ریاضی ۹۶

$$7(4)$$

$$6(3)$$

$$5(2)$$

$$8(1)$$

۸۱- تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه های  $(k+3)$  عضوی ۵۶ واحد بیشتر از زیرمجموعه های یک مجموعه  $k$  عضوی است.  $k$  را بیابید.

۸۲- اگر ۲ عضو به اعضای مجموعه  $A$  اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه های آن ۴۸ واحد افزایش می یابد. در این صورت مجموعه  $A$  دارای چند زیر مجموعه سره ناتهی است؟

۸۳- اگر تعداد زیرمجموعه های مجموعه  $A$ ، ۶۴ برابر تعداد زیرمجموعه های مجموعه  $B$  باشد و این دو مجموعه روی هم ۱۰ عضو داشته باشند، تعداد عضوهای این دو مجموعه به صورت دوتایی  $(A, B)$  کدام است؟

۸۴- اگر تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه  $2k$  عضوی، ۴۸ واحد کمتر از تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه  $3k$  عضوی باشد، آنگاه برای  $k$  چند جواب وجود دارد؟

۱                      ۲                      ۳                      ۴

۸۵- اگر ۲ عضو از مجموعه  $A$  حذف کنیم، تعداد زیر مجموعه های آن ۳۸۴ واحد کم می شود. مجموعه  $A$  چند زیر مجموعه دارد؟

۸۶- اگر  $A = \{a, b\}$  مجموعه  $P(P(A))$  چند عضو دارد؟

۸۷- تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه  $n$  عضوی برابر با  $8^{3n-8}$  است. تعداد زیر مجموعه های محض مجموعه  $n+2$  عضوی کدام است؟

۳۱                      ۱۵                      ۱۴                      ۳۰

۸۸- اگر  $A = \{x | x \in Z, x^2 - 4 \leq 0\}$ ,  $B = \{x | x \in N, x^2 < 20\}$  مجموعه  $(A \times B) - (B \times A)$  چند زیرمجموعه دارد؟

۸۹- مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  چند زیرمجموعه شامل عضو  $a$  و فاقد عضو  $b$  دارد؟

۳۲                      ۶۲                      ۱۶                      ۱۴

۹۰- اگر  $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$ ، مجموعه  $A - \{A\}$  چند زیرمجموعه سره غیرتهی دارد؟

۲                      ۷                      ۶                      ۱۴

۹۱- مجموعه های  $B = \{\emptyset, 3\}$ ,  $A = \{\emptyset, \{\emptyset, 3\}\}$  مفروض اند

الف) مجموعه  $A \cap B$  را با نوشتن اعضا مشخص کنید ب) مجموعه توانی  $A$  را بنویسید

۹۲- اگر  $n \in N$  و  $A_n = \{m \in Z | (-n \leq m) \wedge (2^m \leq n)\}$ ، آنگاه تعداد عضوهای  $A_4 \cup A_5$  چه تعداد بیشتر از تعداد عضوهای

$A_4 \cap A_5$  است؟ ۷                      ۶                      ۵                      ۴

۹۳- اگر  $A = \{x \in Z | x^2 < 1\}$ ,  $B = \left\{ \frac{x-1}{2} \mid x \in N \wedge x \leq 2 \right\}$  آنگاه  $A \cup B$  و  $A \cap B$  را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

۹۴- اگر  $A = \{\emptyset, 3\}$ ,  $B = \{\emptyset, \{\emptyset, 3\}\}$ , آنگاه مجموعه  $P(A \cup B)$  دارای چند زیرمجموعه دارد؟

۹۵- اگر  $A = \{a\}$  باشد تعداد عناصر  $p(p(A))$  و تعداد زیرمجموعه های آن را بیابید.

۹۶- کدام دو مجموعه جدا از هم می باشند؟

$$\begin{cases} A = \{x \in Z \mid \Delta x^2 + 2x - 3 = 0\} \\ B = \{x \in Z \mid (x+1)(x+2) = 6\} \end{cases} \text{ (الف)}$$

$$\begin{cases} A = \left\{ \frac{x^2 + 4}{3x + 2} \in Z \mid x \in N \wedge (x < 5) \right\} \\ B = \left\{ \frac{3x - 1}{2} \in Z \mid x \in Z \wedge (-5 \leq x \leq 5) \right\} \end{cases} \text{ (ب)}$$

$$\begin{cases} A = \left\{ k \in N \mid k = \frac{x}{3} \wedge (x - 12)(x - 21) = 0 \right\} \\ B = \left\{ k \in N \mid (k = \sqrt{3x + 1}) \wedge (x^2 - 25 = 0) \right\} \end{cases} \text{ (پ)}$$

$$\begin{cases} A = \{x \in N \mid (x = 5k) \wedge (x < 20)\} \\ B = \{x \in N \mid (x = 2k + 1) \wedge (x < 20)\} \end{cases} \text{ (ت)}$$

۹۷- اگر  $A_i = [-i, 10 - i]$  و  $i \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  آنگاه مجموعه های  $\bigcap_{i=1}^{10} A_i$ ,  $\bigcup_{i=1}^{10} A_i$  را مشخص کنید.

۹۸- اگر  $A_n = (-n, n)$ ,  $n \in N$ , آنگاه  $\bigcap_{i=1}^n A_i$ ,  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  را مشخص کنید.

۹۹- فرض کنید  $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ , کدام یک از حالت های زیر یک افراز برای  $X$  محسوب نمیشود؟

$$\{a, b, c, d, e, f, g\} \quad \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}$$

$$\{a, e, g\}, \{c, d\}, \{b, e, f\} \quad \{a, b, e, g\}, \{c\}, \{d, f\}$$

۱۰۰- هر یک از مجموعه های زیر دارای چند افراز مختلف هستند؟

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$A = \{1, 2\}$$

۱۰۱- مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  چند افراز فاقد مجموعه یک عضوی دارد؟

۷

۶

۵

۴

۱۰۲- اگر  $\{a\}, \{b\}, \{\{a,b\}\}, \{c\}$  یک افراز مجموعه  $A$  باشد، آن گاه مجموعه  $A$  دارای چند افراز دو مجموعه ای است؟

۵                      ۲                      ۷                      ۶

۱۰۳- برای مجموعه  $A = \{a,b,c,d,e\}$ ، چند افراز مختلف وجود دارد به طوری که سه عضو  $c, b, a$  در یک مجموعه قرار داشته باشند؟

۸                      ۷                      ۵                      ۴

۱۰۴- مجموعه  $A = \{a,b,c,d\}$  دارای چند افراز سه عضوی است؟

۴                      ۵                      ۷                      ۶

۱۰۵- اگر  $A_k = [-k, k]$  و  $n \in N$  آنگاه  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  برابر کدام است؟

$R$                        $Q$                        $Z$                        $N$

۱۰۶- اگر  $n \in N, A_n = (n-1, n+2)$ ، آنگاه  $(A_1 \cup A_2) - (A_1 \cap A_2)$  چند عضو طبیعی دارد؟

۶                      ۵                      ۴                      ۳

۱۰۷- اگر  $B, A$  دو مجموعه دلخواه از مرجع  $U$  باشند، حاصل  $(A' \cap B') \cap A$  برابر کدام است؟

$U$                        $B$                        $A$                        $\emptyset$

۱۰۸- برای سه مجموعه  $C, B, A$  از مرجع  $U$  ثابت کنید:

$$(A-B)' \cap (A-C)' = (B-C) \cup A'$$

۱۰۹- اگر  $B, A$  دو مجموعه دلخواه از مرجع  $U$  باشند، مجموعه  $(A \cap B) \cup (B' \cap A)$  برابر است با:

$U$                        $B$                        $A$                        $\emptyset$

۱۱۰- اگر  $B, A$  دو مجموعه دلخواه از مرجع  $U$  باشند، حاصل  $(A \cup B) \cap (A' \cap B')$  برابر کدام است؟

$U$                        $B$                        $A$                        $\emptyset$

۱۱۱- با استفاده از قوانین جبرمجموعه ها درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$(A-B) \cup (A \cup B)' = B'$$

۱۱۲- اگر  $B, A$  دو مجموعه دلخواه از مرجع  $U$  باشند، حاصل  $(A \cup B) \cap (B' \cup A)$  برابر کدام است؟

$U$                        $B$                        $A$                        $\emptyset$

۱۱۳- اگر  $B, A$  دو مجموعه دلخواه از مرجع  $U$  باشند، مجموعه  $A \cup (B \cup A')$  برابر کدام است؟

$U$                        $B$                        $A$                        $\emptyset$

۱۱۴- اگر  $B, A$  دو مجموعه دلخواه از مرجع  $U$  باشند، حاصل  $\left[ (A \cap B')' \cup (B \cap A')' \right] \cup (A \cap B)$  کدام است؟

$U$                        $B$                        $A$                        $\emptyset$



۱۲۸- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه ی غیر تهی و  $A \cap B' = B \cap A'$  آن گاه مجموعه ی  $(A \Delta B) - A$  کدام است؟ ریاضی خارج ۹۰

(۱)  $\emptyset$       (۲)  $A$       (۳)  $B$       (۴)  $B'$

۱۲۹- کدام یک از روابط شرطی زیر بازگشت پذیر است؟ کنکور خارج ریاضی ۹۶

(۱)  $A = B \Rightarrow A \cap C = B \cap C$       (۲)  $A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$

(۳)  $A - B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$       (۴)  $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

۱۳۰- اگر  $B, A$  دو مجموعه ناتهی باشند به طوری که  $(A \times B) \subseteq (B \times A)$  در این صورت کدام مجموعه تهی است؟

(۱)  $A \cap B$       (۲)  $A \cup B$       (۳)  $A \cap B'$       (۴)  $A \cup (B - A)$

۱۳۱- اگر  $A = \{k : k \in \mathbb{N}; k \leq 5\}$ ,  $B = \{2k : k \in \mathbb{Z}; 0 \leq k \leq 3\}$  باشد، مجموعه های  $A \times A, B \times B$  چند عضو مشترک دارند؟

(۱) ۵      (۲) ۱      (۳) ۹      (۴) ۴

۱۳۲- ثابت کنید:

(الف)  $A - B = B' - A'$

(ب)  $A - B = A - (A \cap B)$

۱۳۳- ثابت کنید: (تفاضل از راست داریم)

(الف)  $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$       (ب)  $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

۱۳۴- ثابت کنید: (تفاضل از چپ قانونی ندارد)

(الف)  $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$       (ب)  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

۱۳۵- توزیع پذیری اشتراک روی تفاضل را ثابت کنید:  $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

۱۳۶- نشان دهید اگر  $B, A$  دو مجموعه دلخواه از مرجع  $U$  باشند آنگاه:  $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

۱۳۷- ثابت کنید رابطه های زیر همواره برقرارند:

(الف)  $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

(ب)  $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A - B) \cup (B - A) = A \cup B$

(ج)  $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

(د)  $A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$

۱۳۸- به کمک جبرمجموعه ای ثابت کنید اگر  $A \subseteq (B \cap C)$ ، آنگاه  $(A-B) \cup (A-C) = \emptyset$

۱۳۹- برای دو پیشامد  $B, A$  از مرجع  $U$  نشان دهید:  $(A-B) \subseteq (A-B)' \Rightarrow A' \cup B = U$

۱۴۰- نشان دهید اگر  $B, A$  دو مجموعه دلخواه از مرجع  $U$  باشند، آنگاه:

الف)  $A - (B - A) = A$       ب)  $(A - B)' = A' \cup B$

پ)  $(A - B) \cup (A \cup B)' = B'$       ت)  $(A' \cup B) - (A' \cap B) = (B' \cup A) - (B' \cap A)$

۱۴۱- ساده کنید:  $[(A \cup B) - (A \cap B)] \cap [A' - (A \cap B)']$

۱۴۲- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه ی غیر تهی باشند مجموعه ی  $[AU(A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]$  برابر کدام است؟

۱)  $A' - B'$       ۲)  $\emptyset$       ۳)  $A'$       ۴)  $(A - B)'$       ریاضی ۸۹

۱۴۳- نشان دهید:

الف)  $A - (B - C) = (A - B) - C$       ب)  $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

۱۴۴- اگر  $C, B, A$  سه مجموعه ی غیر تهی باشند به طوری که  $A \subseteq B$  آن گاه مجموعه ی  $(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C)$  کدام است؟

۱)  $B \cap C$       ۲)  $A \cap C$       ۳)  $A$       ۴)  $A \cap C'$       ریاضی ۹۰

۱۴۵- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه ی غیر تهی باشند  $(A \cap B') - (B - A)$  برابر کدام مجموعه است؟ ریاضی خارج ۹۱

۱)  $B'$       ۲)  $\emptyset$       ۳)  $A \cap B$       ۴)  $A - B$

۱۴۶- متمم مجموعه  $(B - A)' - A$  کدام است؟ ریاضی خارج ۸۸

۱)  $A \cup B$       ۲)  $A \cap B$       ۳)  $A$       ۴)  $B$

۱۴۷- با ارائه یک مثال مناسب نشان دهید تفاضل خاصیت حذف پذیری ندارد. یعنی اگر  $A - B = A - C$  نمیتوان نتیجه گرفت  $B = C$

۱۴۸- مجموعه های  $A = \{2\}$ ،  $B = \{3, 5, \{2\}\}$ ،  $C = \{\{2\}, 3, 5, 2\}$  مفروض اند، کدام بیان در مورد آن ها نادرست است؟

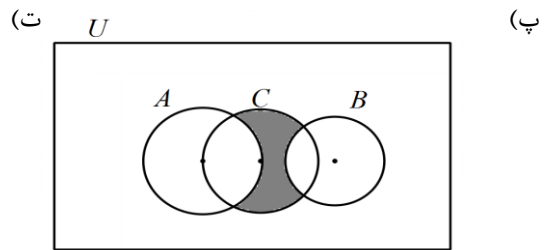
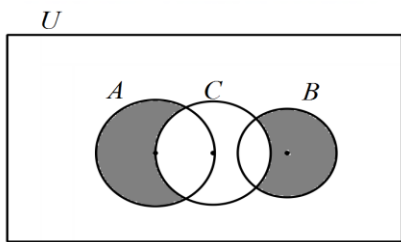
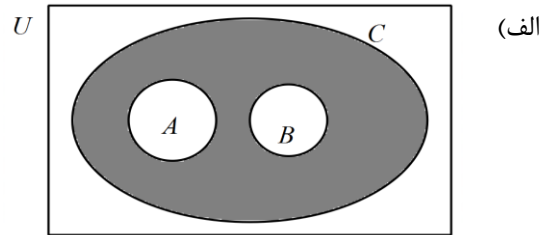
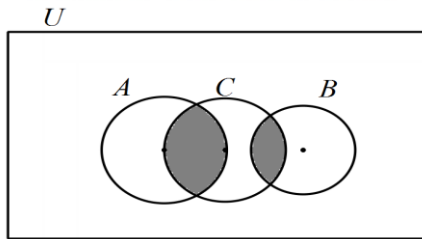
۱)  $A \in B$       ۲)  $A \in C$       ۳)  $B \in C$       ۴)  $A \subseteq C$

۱۴۹- اگر  $a = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}, 2\}$ ،  $B = \{x \mid x^2 + 2 = 3x\}$ ، آن گاه زیر مجموعه های سره و غیر تهی مجموعه ی  $A - B$  کدام

است؟ ریاضی خارج ۹۲

۱) ۲      ۲) ۴      ۳) ۶      ۴) ۱۴

۱۵۰- نمودار ون مربوط به مجموعه  $C - (A \cup B)'$  کدام می‌تواند باشد؟



ضرب دکارتی دو مجموعه:

ضرب دکارتی مجموعه  $A$  در مجموعه  $B$  مجموعه ای است شامل تمام زوج مرتب های مرتبی که مولفه اول آن ها از مجموعه  $A$  و

مولفه دوم آنها از مجموعه  $B$  می باشد. با نماد  $A \times B$  نمایش می‌دهیم و داریم:  $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

\* اگر  $A = B$  آنگاه  $A \times A$  را ضرب دکارتی مجموعه  $A$  در خودش می‌نامیم و با  $A^2$  نمایش می‌دهیم:

$$A^2 = A \times A = \{(x, y); x \in A \wedge y \in A\}$$

\* در حالتی که عضوی در ضرب دکارتی نباشد:

$$(x, y) \notin (A \times B) \Leftrightarrow [(x \in A \wedge y \notin B) \vee (x \notin A \wedge y \in B) \vee (x \notin A \wedge y \notin B)]$$

### ۵ ویژگی مهم ضرب دکارتی:

۱- اگر  $A$  مجموعه ای دلخواه از مرجع  $U$  باشد:  $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

۲- برای دو مجموعه  $A, B$  از مرجع  $U$  داریم:  $A \times B = B \times A \Leftrightarrow (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset) \vee (A = B)$

۳- برای چهار مجموعه ناتهی  $A, B, C, D$  از مرجع  $U$  داریم:  $(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \Leftrightarrow (A \times B) \subseteq (C \times D)$

۴- ضرب دکارتی روی تمام عملگرهای مجموعه ای  $(\cup, \cap, -)$  توزیع پذیر است، هم از راست و هم از چپ.

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

۵- برای چهار مجموعه ناتهی  $A, B, C, D$  از مرجع  $U$  داریم:  $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

۱۵۱- اگر  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = (3, 3)$  آنگاه  $x, y$  را بیابید.

۱۵۲- اگر  $(x^2 + y^2, 6) = (13, xy)$  آنگاه مقادیر مثبت  $x, y$  را بیابید.



۱۶۶- چند زیر مجموعه از مجموعه  $A = \{a, b, \{a, b\}, \{b, a\}\}$  عضو  $\{a, b\}$  ندارد؟ ریاضی ۹۱

۴(۱) ۶(۲) ۸(۳) ۱۲(۴)

۱۶۷- تعداد افزایهای مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e\}$  که شامل فقط یک مجموعه  $A$  است؟

۱۰(۱) ۱۲(۲) ۱۵(۳) ۲۰(۴) ریاضی ۹۳

۱۶۸- تعداد افزایهای مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  که شامل فقط مجموعه های دو عضوی باشند، کدام است؟ کنکور ریاضی ۹۵

۸(۱) ۱۰(۲) ۱۲(۳) ۱۵(۴)

۱۶۹- اگر  $B, A$  دو مجموعه دلخواه و ناتهی باشند، با ارائه یک مثال نقض مناسب نشان دهید  $P(A \times B) \neq P(A) \times P(B)$

۱۷۰- اگر  $A = \{x \in N \mid 1 \leq x \leq 3\}$ ,  $B = \{x \in N \mid 1 \leq x \leq 2\}$  آنگاه مجموعه های  $A \times B$ ,  $A^c$ ,  $A^c - (A \times B)$  را مشخص کنید.

۱۷۱- اگر  $A = \{y + 2, 5, z\}$ ,  $B = \{x + 1, 4, -2\}$  در این صورت با فرض  $A \times B = B \times A$  حاصل  $x + y + z$  را بیابید.

۱۷۲- اگر  $B, A$  دو مجموعه غیرتهی از مرجع  $U$  باشند و  $(A \times B) - (B \times A) = \emptyset$  آنگاه  $A - B$  برابر کدام است؟

$A$  (۱)  $\emptyset$  (۲)  $B$  (۳)  $A^c$  (۴)

۱۷۳- اگر  $C, B, A$  سه مجموعه از مرجع  $U$  باشند و  $B \subseteq C, A \subseteq C$  آنگاه نشان دهید  $(A \times C) \cap (C \times B) = A \times B$

۱۷۴- اگر  $A = \{x \in Z \mid -1 \leq x \leq 1\}$ ,  $B = \{x^2 \mid x \in Z \wedge |x| \leq 2\}$  آنگاه مجموعه  $(A \times B) \cap (B \times A)$  دارای چند زیرمجموعه

سره غیرتهی است؟

۱۷۵- اگر  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{-1, -2, 0\}$  آنگاه مجموعه های  $A \times B$ ,  $B \times A$  را مشخص نمایید و سپس نمودار مختصاتی هر کدام را رسم کنید.

۱۷۶- اگر  $A = \{2^x \mid x \in Z, |x| \leq 1\}$  و  $B = \{x \in Z \mid x^2 + x - 20 = 0\}$  آنگاه نمودار مختصاتی  $A \times B$ ,  $B \times A$  را رسم کنید.

۱۷۷- اگر  $A = \{4^x \mid x \in Z \wedge -1 \leq x \leq 1\}$ ,  $B = \{x \mid x \in Z \wedge x^2 \leq 3\}$  عضوهای مجموعه  $(A \times B) - A^c$  را مشخص کنید و نمودار آن

را رسم کنید.

۱۷۸- اگر  $A = \{x \in R \mid 1 \leq x \leq 3\}$ ,  $B = \{4\}$  آنگاه نمودار مختصاتی  $A \times B$  را رسم کنید.

۱۷۹- اگر  $A = (1, 4]$ ,  $B = \{1, 2\}$  آنگاه نمودار مختصاتی هر یک از مجموعه های  $A \times B$ ,  $B \times A$  را رسم کنید.

۱۸۰- اگر  $A = \{x \in R \mid 1 \leq x \leq 3\}$  آنگاه نمودار مختصاتی  $A^c$  را رسم کنید.

۱۸۱- در هر یک از حالات زیر نمودار مختصاتی  $B \times A, A \times B$  را رسم کنید.

الف)  $B = (-2, 0], A = [-3, 2)$       ب)  $B = [3, \infty), A = (-\infty, -2)$

پ)  $B = N, A = [1, 4]$       ت)  $B = R, A = \{1, 4\}$

۱۸۲- اگر  $A = \{x \in N \mid 8 < x^2 < 58\}$ ،  $B = \{3k + 1 \mid k \in Z \wedge 2 \leq k \leq 5\}$  آنگاه مجموعه  $A \times B$  دارای چند عضو است؟

۱) ۱۲۱      ۲) ۲۰      ۳) ۲۵      ۴) ۱۶

۱۸۳- اگر  $A = \{x \in Z \mid x^2 < 1\}$ ،  $B = \{x \in Z \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$  آنگاه کدام زوج مرتب متعلق به مجموعه  $(A \times B) - B^c$  است؟

۱)  $(0, 2)$       ۲)  $(1, 2)$       ۳)  $(1, 1)$       ۴)  $(1, -1)$

۱۸۴- اگر  $A = \{512, 3^{2x+y}\}$ ،  $B = \{2^{3x-2y}, 81\}$  و  $A \times B = B \times A$ ، آنگاه حاصل عبارت  $5x + 4y$  کدام است؟

۱)  $\frac{51}{7}$       ۲)  $\frac{57}{7}$       ۳)  $\frac{59}{7}$       ۴)  $\frac{61}{7}$

۱۸۵- اگر  $A = \{x \in N \mid x < 5\}$ ،  $B = \{1, 4, 5\}$ ، آنگاه مجموعه  $A^c - B^c$  دارای چند زوج مرتب است؟

۱) ۱۲      ۲) ۱۴      ۳) ۱۶      ۴) ۱۸

۱۸۶- اگر  $A = \{x \in R \mid |x| \leq 2\}$ ،  $B = \{x \in R \mid 1 \leq x \leq 4\}$ ، آنگاه مساحت نمودار مختصاتی مجموعه  $A \times B$  کدام است؟

۱) ۱۶      ۲) ۶      ۳) ۸      ۴) ۱۲

با ارادت: سرایی