

۱۷۲- یکی از افزایش‌های مجموعه  $A$  به صورت  $\{c\}$  و  $\{a,b\}$  است. تعداد افزایش‌های مجموعه  $A$  که فاقد مجموعه‌های تک عضو است را مشخص کنید.

## فصل ۲: مبانی احتمال

### درس ۱: احتمال

- ۱- فرض کنید کارشناسان یک کارخانه می‌خواهند برای سال آینده، تغییراتی در میزان تولید کالاهای کارخانه به وجود آورند؛ آنها باید مشخص کنند که سرمایه کارخانه به چه نسبت‌هایی صرف تولید محصولات مختلف شود. با توجه به اینکه آنها در مورد آنچه در آینده رخ خواهد داد، اطمینان ندارند، چگونه می‌توانند در این مورد تصمیمی درست بگیرند؟ چگونه می‌توانند از بین دو پیشنهاد مختلف، یکی را بر دیگری ترجیح دهند؟ پاسخ: ابزارهای حل چنین مسائلی، که با نا آگاهی نسبی از شرایط و یا وقایع آینده همراه است، علم ..... و علم ..... است.
- به کمک علم آمار می‌توان اطلاعات سال‌های گذشته کارخانه را به درستی ..... و از آنها توصیفی مناسب از وضعیت تقاضای کالاهای مختلف به دست آورد.
- به کمک علم احتمال می‌کند که به بهترین ..... ممکن برسیم.
- ۲- کدام یک از سؤال‌های زیر مربوط به علم آمار و کدام مربوط به علم احتمال است؟ در هر مورد با دیگران گفت‌وگو کنید.

احتمال	آمار	صورت مسئله
		می‌دانیم ۹۰ تا از ۱۰۰ سیب یک جعبه سالم است. چند تا سیب از جعبه برداریم، تا تقریباً مطمئن باشیم که دست کم یک سیب خراب برداشته ایم؟
		درآمد کارمندان شهرداری چقدر است؟
		۹۰ نفر از ۱۰۵ دانش آموز پایه یازدهم به ورزش شنا علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از این دانش آموزان را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کمتر از ۱۵ نفر از آنها به شنا علاقه مند باشند؟
		در انتخابات هفتم اسفند ۱۳۹۴، شهرستان سواد کوه شمالی با مشارکت بیش از ۹۸/۲ درصد رکورددار بوده است. اگر از ۱۰ نفر واجد شرایط پرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده اند یا خیر، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟
		چه تعداد از دانش آموزان پایه یازدهم مدرسه شما به ورزش شنا علاقه دارند؟

۳- ریاضی دان ها چگونه به علم احتمال می پردازند؟

پاسخ: ریاضی دانان معمولاً برای حل مسائل سخت و پیچیده، ابتدا کار را از طراحی و حل مسائلی ..... شروع می کنند و سپس قدم به قدم با ساختن بنایی استوار از ..... ، ..... ، قضیه ها و ...به سراغ مسائلی می روند که شاید در نگاه اول دست نیافتنی به نظر می رسیدند .

۴- برق کاری نیاز به یک لامپ سالم دارد . دو جعبه داریم که در اولی و دومی، به ترتیب، ۱۵ و ۳۰ لامپ وجود دارد، ولی فقط برخی از این لامپ ها سالم اند؛ در اولی ۹ لامپ و در دومی ۲۱ لامپ سالم است . او باید یکی از دو جعبه را انتخاب کند و از آن جعبه یک لامپ، به تصادف، بردارد . به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟ چرا؟

اگر او از آن جعبه، دو لامپ، بدون آزمایش، بردارد . به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟ چرا؟

## یا آوری برخی از اصطلاحات احتمال

۵- با توجه به آنچه در سال های قبل خوانده اید تعریف اصطلاحات زیر را بنویسید.  
آزمایش تصادفی:

فضای نمونه:

پیشامد:

پیشامد های ناسازگار:

۶- به هر عضو فضای نمونه یک ..... گفته می شود.  
مثال: در پرتاب تاس به هر کدام از ..... برآمد می گوئیم. همچنین در پرتاب سکه به هر کدام از .....  
.....

۷- یک تاس سالم را پرتاب می کنیم اگر فرد آمد سکه ای می اندازیم در غیر اینصورت دوباره تاس را می اندازیم. چند تا از برآمد ها را بنویسید.

۸- در پرتاب یک تاس سالم اگر تاس را پرتاب کنیم و عدد ۲ بیاید، آیا پیشامد  $\{۲, ۴, ۶\}$  رخ داده است؟

۹- رخ دادن یک پیشامد یعنی چه؟

۱۰- در یک آزمایش تصادفی اگر  $A_1$  و  $A_2$  دو پیشامد باشند، آن گاه:

الف) اگر  $A_1 \subseteq A_2$  رخ دادن ..... رخ دادن ..... را نتیجه می دهد.

ب) رخ دادن پیشامد  $A_1 \cap A_2$  ، ..... را نتیجه می دهد.

پ) رخ دادن پیشامد  $A_1 \cup A_2$  یعنی .....

۱۱- هرگاه بخواهیم مسئله ای را با کمک علم احتمال بررسی کنیم گام اول تشخیص ..... است.

۱۲- مثال : در پرتاب یک تاس، مجموعه ..... در پرتاب دو تاس، مجموعه .....

۱۳- یک راننده تاکسی خطی، در ایستگاه منتظر می ایستد تا حداکثر چهار مسافر سوار کند. البته ممکن است با کمتر از چهار مسافر نیز حرکت کند. در مسیر برگشت نیز همین اتفاق می افتد. فضای نمونه تعداد مسافری در رفت و برگشت چیست؟

معنای برآمد  $(3, 4)$  چیست؟

۱۴- در پرتاب دو تاس معنای برآمد  $(3, 4)$  چیست؟

## اصول احتمال

۱۵- در یک آزمایش تصادفی با فضای نمونه  $S$  آیا همیشه احتمال رخ دادن هر پیشامد مانند  $A$  برابر

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

است؟ اگر پاسخ منفی است برای آن یک مثال بزنید؟

پاسخ: .....

مثال: تاسی را در نظر می گیریم که روی پنج وجه آن عدد ۱ و روی یک وجه آن عدد ..... باشد. در اینصورت

$$S = \dots\dots\dots \text{ و برای پیشامد } A = \{1\} \text{ خواهیم داشت } P(A) = \dots\dots\dots \text{ در حالی که } \frac{n(A)}{n(S)} = \dots\dots\dots \text{ این یعنی}$$

$$P(A) \neq \dots\dots\dots$$

۱۶- در سال گذشته در درس ریاضی ۲ با احتمال و قوانین آن آشنا شده اید. آیا می توانید مهمترین نقص مطالعه احتمال را در آنجا نام ببرید.

پاسخ: با توجه به مثال بالا احتمال هر پیشامد  $A$  همیشه از قانون .....

برای رفع مشکل بالا ( تعریف احتمال هر پیشامد) اصولی را بیان می کنیم.  
۱۷- در یک آزمایش تصادفی برای هر پیشامد مانند  $A$  احتمال رخ دادن  $A$  را با  $P(A)$  نمایش داده می شود که در اصول زیر صدق می کند.

$$\text{الف) } 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$\text{ب) } P(S) = 1$$

پ) برای هر دو پیشامد ناسازگار  $A$  و  $B$  داریم  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

۱۸- قضیه : در یک آزمایش تصادفی برای پیشامد های دلخواه :

$$\text{الف) } P(A') = 1 - P(A)$$

$$\text{ب) } P(\emptyset) = 0$$

پ) اگر  $A, B, C$  پیشامدهایی دو به دو ناسازگار باشند، آن گاه  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

ت) برای هر دو پیشامد دلخواه  $A$  و  $B$  داریم  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

ث) برای هر دو پیشامد دلخواه  $A$  و  $B$  داریم  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- ۱۹- مشخص کنید که در هر قسمت دو پیشامدی که آمده است با هم سازگارند یا ناسازگار؟  
الف) دانش آموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می کنید  
A: متولد ماه مهر باشد.  
B: متولد یکی از ماه های فصل تابستان باشد.  
ب) سکه ای که سه بار پرتاب می کنید،  
A: هر سه بار مشابه بیاید.  
B: زوج بار رو بیاید.  
پ) وضعیت جوی فردا :  
A: خورشید در آسمان دیده شود.  
B: باران ببارد.  
ت) تاسی را پی در پی پرتاب می کنید  
A: برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید.  
B: تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید.

## تمرین کتاب صفحه ۴۶

۲۰- احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟ فضای نمونه چند عضو دارد؟ در چه تعداد از برآمدها احمد برنده بازی است؟

۲۱- یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آنها یکی پس از دیگری وارد سالن می شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آنها اهمیت داشته باشد، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال اینکه اولین کسی که وارد می شود، بلند قدترین عضو تیم باشد چقدر است؟

۲۲- در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص می شود: دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صاف یا ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب و هوا را به این شکل خلاصه می کنیم :

آیا از نظر دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می وزد یا نمی وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضا چند عضو دارد؟

۲۳- فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات شده، گزاره های زیر را ثابت کنید:

الف) اگر  $B \subseteq A$  ثابت کنید  $P(A - B) = P(A) - P(B)$

ب) اگر  $B \subseteq A$  ثابت کنید  $P(A) \leq P(B)$

۲۴- عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می کنیم. احتمال های زیر را محاسبه کنید:

الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد.

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشد، ولی به ۳ بخش پذیر نباشد.

پ) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش پذیر باشد و نه بر ۳.

## درس ۲: احتمال غیر هم شانس

۲۵- به نظر شما احتمال بارش باران و آفتابی بودن هوا در تمام روزهای سال با یکدیگر برابر است؟

۲۶- یک تاس طوری ساخته شده که روی سه وجه آن عدد ۱، روی دو وجه آن عدد ۲ و روی وجه باقی مانده عدد

۳ مشاهده می شود. اگر این تاس را پرتاب می کنیم.

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

ب) احتمال آمدن عدد ۱ را به دست آورید.

پ) آیا در این آزمایش می توانید از رابطه  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$  برای احتمال رخ دادن پیشامد  $A$  استفاده کنیم؟

هر زیرمجموعه تک عضوی از فضای نمونه ای را ..... می نامیم. در پیشامدهای ساده، معمولاً به جای،

$$P(\{a\}) \text{ می نویسیم } P(a)$$

ت)  $P(۲)$  و  $P(۳)$

ث) آیا احتمال وقوع پیشامدهای ساده  $\{۱\}$ ،  $\{۲\}$  و  $\{۳\}$  با یکدیگر برابرند؟

ج) مجموع احتمالات تمام پیشامدهای ساده را به دست آورید.

۲۷- هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه ای  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ، احتمال نابرابر داشته باشند  $S$  را

فضای نمونه ای با ..... می نامیم.

۲۸- در فضای نمونه ای متناهی با احتمال غیرهم شانس، اگر  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  فضای نمونه ای و

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  یک زیرمجموعه  $k$  عضوی  $S$  باشد ثابت کنید:

$$\text{الف- } P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$$

$$\text{ب- } P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_n) = 1$$

۲۹- در یک مسابقه چهارجانبه فوتبال، تیم های  $a, b, c$  و  $d$  حضور دارند. اگر احتمال قهرمانی تیم های  $a, b, c$  و

با یکدیگر برابر باشند، ولی احتمال قهرمانی تیم  $d$  دو برابر هر یک از تیم های دیگر باشد، احتمال قهرمانی هریک

از تیم ها را به دست می آورید.

۳۰- در یک آزمایش تصادفی  $S = \{x, y, z\}$  فضای نمونه ای است. اگر  $P(\{x, y\}) = \frac{2}{3}$  و  $P(\{x, z\}) = \frac{1}{4}$

احتمال وقوع هریک از پیشامدهای ساده را به دست آورید.

- ۳۱- یک تاس به گونه ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال مشاهده اعداد ۲ یا ۳ را به دست آورید.

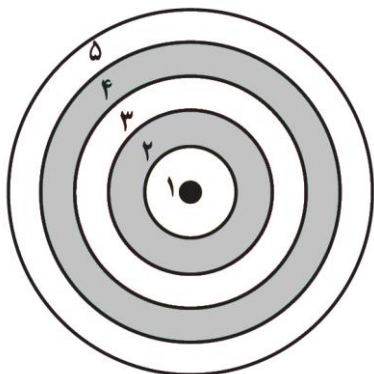
امضای ولی:	تاریخ پاسخ گویی در منزل:	تمرین کتاب صفحه ۵۱ کتاب
	تاریخ بازدید در کلاس:	نام و نام خانوادگی

- ۳۲- در پرتاب یک سکه ناسالم، احتمال آمدن "رو" نصف احتمال آمدن "پشت" است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن "رو" و احتمال ظاهر شدن "پشت" را به دست آورید.

- ۳۳- در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده، کمتر از ۴ باشد را تعیین کنید.

- ۳۴- اگر  $S = \{a, b, c, d, e\}$  فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی و  $A = \{a, b\}$ ،  $B = \{a, b, c, d\}$  و  $C = \{a, b, e\}$  سه پیشامد باشند به طوری که  $P(A) = \frac{2}{5}$  و  $P(B) = \frac{3}{5}$  مقدار  $P(C')$  را به دست آورید.

- ۳۵- در یک تجربه تصادفی  $S = \{x, y, z\}$  فضای نمونه ای است. اگر  $P(x)$ ،  $P(y)$  و  $P(z)$  یک دنباله حسابی با قدر نسبت  $\frac{1}{4}$  تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از این پیشامدها را به دست آورید.



۳۶- در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره ای شکل، مطابق شکل روبه روبرو که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه اول  $x$  باشد، اگر احتمال اصابت به ناحیه  $k$  ام  $(2k-1)x$  باشد:

الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید.

ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه های اول، سوم یا چهارم بیشتر است، یا اصابت به دو ناحیه دوم یا پنجم؟

### درس سوم احتمال شرطی

۳۷- در یک قرعه کشی بین ۲۰ نفر قرار است از بین کارت هایی با شماره های ۱ تا ۲۰، یکی را به تصادف انتخاب کنند. شماره کارت اکبر ۱۵ و شماره کارت بهرام ۷ است.

الف) احتمال اینکه اکبر برنده شود چقدر است؟ احتمال برنده شدن بهرام چقدر است؟

ب) وقتی مجری کارت را انتخاب می کند، قبل از اینکه آن را به دیگران نشان بدهد، می گوید شماره برنده، دو رقمی است اکنون اکبر و بهرام احتمال برنده شدن خود را چقدر می دانند؟

۳۸- در کلاس درس دو تاس را با هم پرتاب می کنیم اما قبل از آن دو پیشامد را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$A$ : آمدن مجموع کمتر از ۷  
 $C$ : آمدن دو عدد اول

رضا یکی از این دو پیشامد را انتخاب می کند و علی پیشامد دیگر را. اگر  $A$  رخ داد شخصی که  $A$  را انتخاب



کرده برای کل دانش آموزان ( و معلم ) بستنی می خرد و اگر  $C$  رخ داد شخص دیگر بستنی می خرد. همچنین در صورت وقوع هر دو پیشامد، دو نفر با هم برای کلاس بستنی می خردند و اگر نه  $A$  رخ دهد و نه  $C$  به سراغ دو نفر بعدی می رویم.  
انتخاب پیشامد  $A$  اقتصادی تر است یا  $C$ ؟ چرا؟

۳۹- در مسئله بالا قبل از انتخاب، دو تاس را پرتاب کرده ایم و تاس ها به داخل راهرو رفته اند. یکی از دانش آموزان کلاس های دیگر در حال عبور با اشاره به رضا می گوید ۱ نیامده.  
اکنون با توجه به این اطلاعات اضافی رضا کدام پیشامد را انتخاب کند بهتر است؟

نیامدن ۱ را پیشامد  $B$  می نامیم. پس ما باید ابتدا احتمال رخ دادن ..... به شرط آنکه ..... رخ داده باشد را محاسبه کنیم. در ریاضیات این را با ..... نشان می دهند.

$$P(A | B) = \text{با کمی دقت معلوم می شود}$$

در صورت ..... جای ..... را در محاسبه  $P(A)$  ( در شرایط اولیه ) می گیرد زیرا .....

در مخرج نیز ..... جای ..... را در محاسبه  $P(A)$  می گیرد زیرا .....

بنابراین :

$$P(A | B) =$$

۴۰- در حالت کلی فرمول احتمال شرطی را به صورت زیر تعریف می کنیم.

در صورتی که  $B$  پیشامدی باشد که  $P(B) > 0$  برای هر پیشامد  $A$  احتمال رخ دادن  $A$  به شرط رخ دادن  $B$  به شکل زیر تعریف می شود:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

۴۱- در صورتی که  $P(B) = 0$  احتمال هیچ پیشامدی به شرط .....

۴۲- سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم. می دانیم که دست کم یک بار رو آمده است. در این صورت، احتمال اینکه هر سه بار رو آمده باشد چقدر است؟

۴۳- دو تاس سبز و قرمز را پرتاب می کنیم.

الف) اگر بدانیم مجموع دو تاس ۱۰ شده است، احتمال اینکه تاس سبز (تاس دوم) ۶ آمده باشد چقدر است؟

ب) اگر بدانیم که تاس سبز ۶ آمده است، احتمال اینکه مجموع دو تاس ۱۰ شده باشد چقدر است؟

۴۴- تیم ملی والیبال ایران، ۱۴ بازیکن دارد که قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر یکی از بازیکن ها را به تصادف انتخاب کنیم.

الف) احتمال اینکه آن بازیکن، بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

ب) بازیکن دیگری را به تصادف انتخاب می کنیم و مشاهده می کنیم که از بازیکن اول کوتاه قدتر است. در این صورت، احتمال اینکه بازیکن اول بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

۴۵- در مدرسه ای سه کلاس یازدهم، با نام های ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳ وجود دارد که به ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش آموز دارند. در آزمونی مشترک از این سه کلاس، به ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمره کامل شده اند. یکی از دانش آموزان را به تصادف انتخاب می کنیم.

الف) احتمال اینکه دانش آموز انتخاب شده نمره کامل گرفته باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه او، دانش آموز کلاس ۱۱۱ باشد چقدر است؟

پ) فرض کنید بعد از انتخاب، بفهمید که او دانش آموز کلاس ۱۱۱ است. چقدر احتمال می دهید که او موفق به کسب نمره کامل شده باشد؟

۴۶- فرض کنید  $B$  پیشامدی با احتمال مثبت باشد. نشان دهید:

الف) اگر  $A_1$  و  $A_2$  دو پیشامد ناسازگار باشند:

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$$

ب) برای هر پیشامد  $A$  داریم:

$$P(A' | B) = 1 - P(A | B)$$

### قانون ضرب احتمال

۴۷- در صورتی که  $B$  پیشامدی باشد که  $P(A) > 0$  برای هر پیشامد  $B$  طبق فرمول احتمال شرطی داریم  
 $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  از طرفین وسطین کردن این رابطه داریم  $P(A \cap B) = \dots\dots\dots$  که به قانون ضرب  
احتمال معروف است.

۴۸- با توجه به  $P(A | B)$  نیز داریم  $\dots\dots\dots$

پس اگر بخواهیم قانون ضرب احتمال را با یک جمله بیان کنیم داریم:  
احتمال اشتراک دو پیشامد برابر است با احتمال وقوع یک کدام ضرب در  $\dots\dots\dots$

۴۹- در کیسه ای ۱ گوی سبز، ۳ گوی سفید و ۲ گوی قرمز است. از کیسه دو گوی به ترتیب و بدون جای گذاری  
خارج می کنیم. مطلوب است احتمال آن که:  
گوی اول سبز و گوی دوم سفید باشد.  
هر دو گوی سفید باشد.

۵۰- به مسئله بالا با اطلاعات سال قبل پاسخ دهید.

۵۱- (قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد) اگر  $A, B, C$  پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند، ثابت کنید:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B | A)P(C | A \cap B)$$

۵۲- کیسه ای حاوی ۳ گوی سبز، ۵ گوی سفید و ۴ گوی قرمز است. اگر سه گوی را به ترتیب و بدون جای  
گذاری خارج کنیم، احتمال اینکه اولی سبز، دومی سفید و سومی قرمز باشد چقدر است؟

۵۳- بسکتبالیستی هر بار که اقدام به پرتاب می کند، اگر روحیه خوبی داشته باشد، پرتابش به احتمال ۹۰ درصد  
گل می شود و اگر روحیه اش ضعیف باشد، احتمال گل شدن پرتابش ۶۰ درصد است. به علاوه می دانیم او اگر

پرتابی را گل کند، در پرتاب بعدی روحیه خوبی دارد و در غیر این صورت، روحیه اش ضعیف خواهد شد. فرض کنید بسکتبالیست، پیش از اولین پرتاب، روحیه خوبی داشته باشد. احتمال اینکه از سه پرتاب متوالی، دقیقاً دو پرتاب آخر گل شود چقدر است؟

۵۴- فرض کنید سه کارت داریم. دو روی کارت اول سبز و دو روی کارت دوم قرمز است و یک روی کارت سوم سبز و روی دیگرش قرمز است. کاردتی را به تصادف برمی داریم و مشاهده می کنیم که یک روی آن سبز است. احتمال اینکه هر دو روی آن سبز باشد چقدر است؟

## فرمول احتمال کل

۵۵- فرض کنید  $B_1$  و  $B_2$  پیشامدهایی ناسازگار با احتمال ناصفر باشند و  $B_1 \cup B_2 = S$  در این صورت ثابت کنید برای هر پیشامد دلخواه  $A$ :

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2)$$

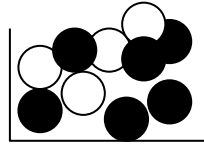
اثبات:

$$\begin{aligned} A &= A \cap S \Rightarrow A = A \cap (B_1 \cup B_2) \Rightarrow A = (A \cap \dots) \cup (A \cap \dots) \\ \Rightarrow P(A) &= P((A \cap \dots) \cup (A \cap \dots)) \end{aligned}$$

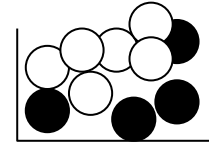
۵۶- فرض کنید  $B_1, B_2, \dots, B_n$  پیشامدهایی دوبرو ناسازگار با احتمال ناصفر باشند و همچنین داشته باشیم:  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$  در این صورت برای هر پیشامد دلخواه  $A$  ثابت کنید:

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) + \dots + P(B_n)P(A | B_n)$$

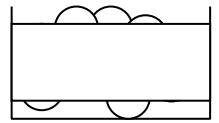
۵۷- یکی از سه ظرف زیر را به تصادف انتخاب می کنیم ( ظرف سوم فقط شامل مهره های سفید است که تعداد آنها را نمی دانیم ) و از آن مهره ای خارج می کنیم احتمال سفید بودن مهره خارج شده چقدر است ؟



ظرف اول



ظرف دوم



ظرف سوم

1

۵۸- در شکل روبرو یک مهره به تصادف از ظرف اول خارج کرده در ظرف دوم قرار می دهیم سپس از ظرف دوم مهره ای به تصادف خارج می کنیم احتمال آنکه مهره نهایی سفید باشد چقدر است ؟

ظرف اول

ظرف دوم

۵۹- در تمرین قبل بعد از آنکه مهره ای از ظرف اول به ظرف دوم اضافه نمودیم ، دو مهره به رنگ مخالف آن از ظرف دوم خارج می کنیم و سپس مهره ای از ظرف دوم خارج می کنیم احتمال آنکه مهره نهایی سفید باشد چقدر است ؟

۶۰- میوه فروشی ده صندوق سیب از سه باغ مختلف خریده است . ۳۰ صندوق از باغ شمالی، ۵ صندوق از باغ مرکزی و ۲ صندوق از باغ جنوبی . در این سه باغ احتمال اینکه یک سیب لکه دار باشد، به ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد است . با فرض اینکه تعداد سیب در صندوق های مختلف برابر است، احتمال اینکه سیبی که از یکی از صندوق ها بر می داریم لکه دار باشد چقدر است ؟

۶۱- از یک کلاس سی نفره ۷۰٪ و از یک کلاس چهل نفره ۶۰٪ برای اردوی علمی ثبت نام نموده اند. کلاسی را به تصادف انتخاب کرده و شخصی را برمی‌گزینیم. احتمال آنکه شخص برگزیده در اردوی علمی ثبت نام کرده باشد چقدر است؟

۶۲- در تمرین قبل دانش آموزان در سالن اجتماعات گرد هم آمده اند. شخصی را به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال آنکه شخص برگزیده در اردوی علمی ثبت نام کرده باشد چقدر است؟

۶۳- ۵۲٪ از افراد یک شهر را زنان تشکیل می‌دهند. ۲۵٪ از زنان و ۱۵٪ از مردان بی سواد هستند. چند درصد از مردم این شهر باسوادند؟

۶۴- جعبه ای شامل ۱۵ لامپ سالم و ۵ لامپ معیوب می‌باشد و جعبه ای دیگر شامل ۸ لامپ سالم و ۷ لامپ معیوب است. از ظرف اول ۵ لامپ و از ظرف دوم ۳ لامپ انتخاب کرده در ظرف جدیدی قرار می‌دهیم سپس از ظرف نهایی لامپی را انتخاب می‌کنیم احتمال آنکه لامپ انتخاب شده سالم باشد چقدر است؟

۶۵- دسته ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می‌کنیم. احتمال اینکه قرمز باشد چقدر است؟

## قانون بیز

۶۶- یکی از سه ظرف شکل زیر را انتخاب می کنیم و ظرفی را به تصادف انتخاب می کنیم. به سوالات زیر پاسخ دهید.  
الف- احتمال انتخاب کدام ظرف از بقیه بیشتر است؟

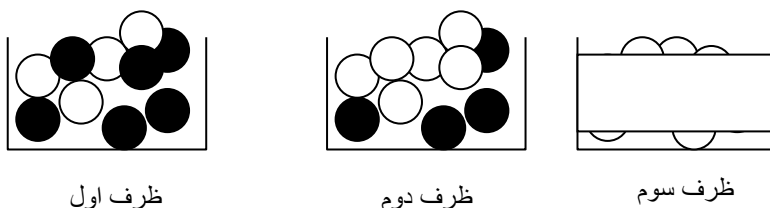


ب- اگر از ظرف انتخاب شده مهره ای خارج کنیم و مشاهده کنیم که رنگ آن سفید است، اکنون احتمال انتخاب کدام ظرف از بقیه بیشتر است؟

پ- اگر پیشامد سفید بودن مهره را با  $A$  و پیشامد انتخاب ظرف  $i$ ام را با  $B_i$  نشان دهیم، در قسمت ب کدام احتمال را باید حساب کنیم.

۶۷- آیا می توان با کمک قانون ضرب احتمال از  $P(A | B)$  مقدار  $P(B | A)$  را که به قانون بیز معروف است را نتیجه بگیرید؟

۶۸- یکی از سه ظرف زیر را به تصادف انتخاب می کنیم (ظرف سوم فقط شامل مهره های سفید است که تعداد آنها را نمی دانیم) و از آن مهره ای خارج می کنیم. اگر مهره خارج شده سفید باشد احتمال آنکه ظرف سوم انتخاب شده باشد را به دست آورید.



۶۹- در مسئله قبل احتمال آنکه ظرف اول و همچنین احتمال آنکه ظرف دوم انتخاب شده باشد را حساب کنید.

۷۰- فرض کنید  $B_1, B_2, \dots, B_n$  پیشامدهایی دودو ناسازگار با احتمال ناصفر باشند و همچنین داشته باشیم :  
 $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$  در این صورت برای هر  $i$  مقدار  $P(B_i | A)$  را (قانون بیز در حالت کلی) به دست آورید.

۷۱- فرض کنید  $B$  پیشامدی باشد که احتمال آن مخالف صفر و یک است. در این صورت، برای هر پیشامد

$$P(B | A) = \frac{P(B)P(A | B)}{P(B)P(A | B) + P(B')P(A | B')} \quad \text{دلخواه } A \text{ ثابت کنید}$$

۷۲- دسته ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به تصادف از

این دسته انتخاب می کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می کنیم اگر این رو قرمز باشد:

الف) احتمال اینکه دیگر آن سبز باشد چقدر است؟ (کارت دورنگ باشد)

ب) احتمال اینکه دیگر آن قرمز باشد چقدر است؟ (کارت تک رنگ باشد)

۷۳- سه صندوق سیب، هر کدام شامل ۱۰۰ سیب داریم. سیب های صندوق اول سبز؛ سیب های صندوق دوم،

قرمز و صندوق سوم شامل ۲ سیب سبز و ۹۸ سیب قرمز است. صندوقی را به تصادف انتخاب می کنیم. فرض

کنید دست در صندوق کنیم و سیبی را تصادفاً در آوریم و ببینیم که سبز است. احتمال اینکه همه سیب های

صندوق سبز باشد چقدر است؟

۷۴- فرض کنید سه صندوق سیب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ ها، به ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب ها لکه دارند. یکی از صندوق ها را به تصادف انتخاب میکنیم و نمی دانیم که صندوق انتخابی مربوط به کدام باغ است. سببی را از آن صندوق خارج می کنیم و مشاهده می کنیم که لکه دار است. در این صورت، احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، چقدر است؟

۷۵- یک کارخانه شیر پاستوریزه، وقتی خط تولید سالم است، تنها ۲ درصد از پاکت ها کمتر از ۲۹۷ سی سی شیر دارند، ولی وقتی یکی از قطعات اصلی خط تولید دچار عیب م ی شود، این مقدار به ۱۰ درصد افزایش پیدا می کند. تجربه نشان داده است که احتمال خراب شدن خط تولید که تقریباً همیشه ناشی از معیوب شدن آن قطعه است، پس از یک ماه، ۵ درصد است. ماه گذشته آخرین باری بوده است که مسئول فنی، خط تولید را به طور کامل سرویس کرده است. مسئول کنترل کیفیت کارخانه، به تصادف یک پاکت شیر را مورد بررسی قرار می دهد و مشاهده می کند که حاوی کمتر از ۲۹۷ سی سی شیر است. در این صورت احتمال خراب بودن خط تولید چقدر است؟

امضای ولی:	تاریخ پاسخ گویی در منزل:	تمرین کتاب صفحه ۶۴ کتاب
	تاریخ بازدید در کلاس:	نام و نام خانوادگی

۷۶-

۷۷- درباره خانواده ای چهار فرزندی، می دانیم که دست کم یکی از فرزندان آنها پسر است. احتمال اینکه دقیقاً ۲ پسر داشته باشند چقدر است؟

۷۸- ستاد مرکزی معاینه فنی خودروهای تهران در اواخر سال ۳۹۵ اعلام کرد "امسال پرکارترین سال در عرصه معاینه فنی خودروهای کشور از ابتدای تأسیس تاکنون بوده و ۸۷۰ هزار خودرو در تهران معاینه فنی شده اند. امسال یکی از سخت ترین سال های مبارزه با آلودگی هوا بود" در این طرح، سیزده مرکز مسئولیت معاینه فنی خودروهای سبک را به عهده داشتند. فرض کنید جدول زیر آمار خودروهای مراجعه کرده و خودروهای مردودی در معاینه فنی باشد. تعداد به هزار دستگاه است.

شماره مرکز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
تعداد مراجعه	۶۰	۷۷	۸۶	۸۵	۷۹	۷۹	۵۶	۵۹	۴۸	۵۰	۵۵	۵۱	۸۵
تعداد مردودی	۲۸	۱۶	۱۲	۱۷	۲۶	۱۰	۱۴	۱۴	۲۹	۳۰	۲۲	۲۲	۱۸

خودرویی را از بین خودروهای مراجعه کرده انتخاب می کنیم.  
الف) خودروی انتخابی به چه احتمالی مردود شده است؟

ب) اگر بدانیم آن خودرو به مرکز شماره ۵ مراجعه کرده، جواب سؤال قبل چند است؟

پ) اگر بدانیم آن خودرو مردود شده است، احتمال اینکه به مرکز شماره ۵ مراجعه کرده باشد چقدر است؟

۷۹- بررسی های آماری نشان داده است که اگر یک روز ساحل جزیره هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی است و اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد فردای آن روز به احتمال ۵۰ درصد آرام و به احتمال ۵۰ درصد طوفانی است. اگر امروز ساحل آرام باشد، احتمال اینکه در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چقدر است؟

۸۰- قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد را ثابت کنید:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

۸۱- قانون ضرب احتمال  $n$  پیشامد را بنویسید. اگر بخواهیم از این قانون برای محاسبه احتمال اشتراک  $n$  پیشامد استفاده کنیم، به چند حالت مختلف این کار قابل انجام است؟

۸۲- جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهینامه تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه گواهینامه تراکتور داشته باشد چقدر است؟

۸۳- دو ظرف داریم. در اولی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اول یک مهره به طور تصادفی برمی داریم و بدون مشاهده آن را به ظرف دوم منتقل می کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می آوریم؛ با چه احتمالی این مهره سبز است؟

۸۴- در شهری ۶۰ درصد راننده ها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال اینکه یک راننده مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند ۰/۰۵ است و زن ها چنین تخلفی را به احتمال ۰/۰۱ انجام می دهند. احتمال اینکه یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی روی خط عابر توقف کند چقدر است؟

۸۵- در دو جعبه به ترتیب، ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه اول ۴ لامپ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب است. از هر کدام از جعبه ها ۵ لامپ به تصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار می دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبه جدید، معیوب باشد را محاسبه کنید.

۸۶- ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر  $A$  و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر  $B$  در انتخابات شورای شهر شرکت کرده اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر  $A$  سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر  $B$  باشد و فردی به تصادف از بین رأی دهند ههای این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر  $A$  خواهد بود؟  
احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده ۰/۰۰۲ و برای کودکی که واکسن نزده ۰/۱ است. اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان، واکسن زده باشند، احتمال اینکه یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟

۸۷- قانون بیز را ثابت کنید:

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)}{P(A)} P(A | B_i)$$

۸۸- امیر و بابک عضو تیم ده نفره والیبال مدرسه اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، احتمال اینکه امیر بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟ احتمال اینکه امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چقدر است؟

۸۹- علی و مازیار هر کدام به ترتیب، با احتمال های  $0/3$  و  $0/4$  برای دیدن یک مسابقه ورزشی به ورزشگاه می روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال  $0/08$  به ورزشگاه می رود. فرض کنید علی به ورزشگاه نرفته باشد. با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

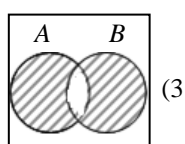
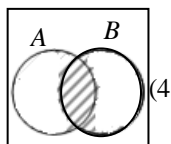
۹۰- خانم ها اکبری، برنا و چمنی نسخه خوان های یک مؤسسه انتشاراتی اند که به ترتیب  $30, 20$  و  $50$  درصد از کارهای نسخه خوانی را انجام می دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه ای که به آنها سپرده شده را بی غلط تصحیح کنند به ترتیب  $0/95$ ،  $0/9$  و  $0/99$  است. صفحه ای نسخه خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟

۹۱- فرض کنید از بین چهار کارت با شماره های ۱ تا ۴، کارتی را به تصادف انتخاب می کنیم و سپس سکه ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید، احتمال اینکه شماره کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟

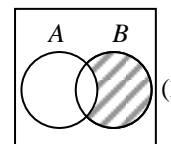
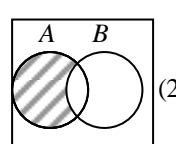
۹۲- یک شرکت بیمه، بیمه گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است؛ گروه "پرخطر" که در یک سال با احتمال  $0/4$  تصادف می کنند و گروه "کم خطر" که احتمال تصادف کردن آنها در یک سال  $0/2$  است. می دانیم که ۳۰ درصد بیمه گزاران پرخطرند.  
الف) احتمال اینکه یک بیمه گزار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.  
ب) اگر یک بیمه گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال اینکه جزء گروه پرخطر باشد چقدر است؟

## تمرین های اضافی فصل ۲

- ۱- در پرتاب یک تاس و یک سکه پیشامد "تاس بیش از ۴ نیاید یا سکه پشت بیاید" را مشخص کنید.
- ۲- اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از یک فضای نمونه باشند در اینصورت پیشامد اینکه دست کم یکی از آنها رخ ندهد را مشخص کنید.
- ۳- در یک خانواده با ۵ فرزند پیشامد داشتن حداقل یک دختر را مشخص کنید.
- ۴- احتمال برابری تعداد پسرها و دخترها در برای خانواده های زیر مشخص کنید.  
الف) خانواده ای که ۶ فرزند دارد (ب) خانواده ای که ۴ فرزند دارد
- ۵- اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از یک فضای نمونه باشند در اینصورت پیشامد "فقط  $B$  دهد" کدام است؟  
 $B$  (۱)     $A'$  (۲)     $A' \cap B$  (۳)     $A' \cup B$  (۴)
- ۶- اگر  $A$  و  $B$  و  $C$  پیشامد از یک فضای نمونه باشند در اینصورت پیشامد "فقط  $B$  دهد" کدام است؟  
 $B \cap A' \cap C'$  (۱)     $B \cap (A \cap C)'$  (۲)     $B \cup (A \cup C)'$  (۴)
- ۷- اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از یک فضای نمونه باشند در اینصورت کدام نمودار مربوط به پیشامد "فقط  $A$  رخ دهد یا فقط  $B$  دهد" می باشد



۷۲



۸- روی یک تاس دو عدد ۱، دو عدد ۲ و دو عدد ۳ وجود دارد. فضای نمونه ی حاصل از دو بار پرتاب این تاس را بنویسید.

۹- سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر پشت ظاهر شود یکبار دیگر انرا پرتاب می کنیم در غیر اینصورت یک تاس را پرتاب می کنیم. فضای نمونه را بنویسید.

۱۰- خانواده ای ۳ فرزند دارد. پیشامد آنکه خانواده دو دختر داشته باشد را مشخص کنید.

۱۱- یک سکه سالم را ۳ بار پرتاب می کنیم، مطلوب است :

الف) فضای نمونه ای

ب) پیشامد  $A$  آنکه حداقل دو بار رو بیاید.

پ) پیشامد  $B$  آن که فقط دو بار رو بیاید.

ت) پیشامد  $A \cap B'$  را مشخص کنید.

۱۲- یک سکه و یک تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم، مطلوب است :

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد  $A$  که تاس زوج یا سکه رو بیاید.

پ) پیشامد  $B$  که تاس زوج و سکه رو بیاید.

ت) پیشامد  $A' \cup B'$  را مشخص کنید.

۱۳- دو تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم، مطلوب است :

الف) پیشامد  $A$  که مجموع دو تاس ۷ باشد

ب) پیشامد  $B$  که هر دو تاس زوج باشد

پ) پیشامد  $C$  که مجموع دو تاس کمتر از ۷ باشد

۱۴- یک سکه سالم را ۳ بار پرتاب می کنیم، مطلوب است :

الف) فضای نمونه ای

ب) پیشامد  $A$  آنکه حداقل دو بار پشت بیاید.

پ) پیشامد  $B$  هر سه بار یک طرف بیاید.

ت) پیشامد فقط هر سه بار یک طرف بیاید یا فقط حداقل دو بار پشت بیاید

۱۵- دو تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم، مطلوب است :

الف) پیشامد  $A$  که مجموع دو تاس ۸ باشد

ب) پیشامد  $B$  که حاصل ضرب دو تاس ۱۵ باشد

پ) پیشامد  $A - B$

۱۶- همه اعداد دورقمی که با ۳,۰۹ و ۵ بدون تکرار رقم می توان نوشت را روی کارت می نویسم و در کیسه ای قرار می دهیم. سپس کارتی را به تصادف خارج می کنیم. مطلوب است :

الف) فضای نمونه ای

ب) پیشامد  $A$  که عدد خارج شده مضرب ۵ باشد

پ) پیشامد  $B$  که عدد خارج شده از ۵۰ باشد

ت) پیشامد  $A \cap B'$

۱۷- یک تاس سالم را دو بار پرتاب می کنیم، مطلوب است :

الف) پیشامد  $A$  که عدد تاس اول ۴ باشد

ب) پیشامد  $B$  که هر دو عدد اول باشد

پ) پیشامد  $C$  که عدد تاس اول ۴ از عدد تاس دوم بزرگتر باشد

۱۸- یک سکه و یک تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم، مطلوب است :

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد  $A$  که تاس بزرگتر از ۴ باشد

پ) پیشامد  $B$  که سکه رو بیاید.

ت) پیشامد  $A \cap B'$  را مشخص کنید.

۱۹- از کیسه ای شامل مهره سفید و دو مهره قرمز دو مهره خارج می کنیم، مطلوب است :

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد  $A$  که فقط یک مهره سفید باشد

پ) پیشامد  $B$  که حداقل یک مهره قرمز باشد

ت) پیشامد  $A \cup B'$  را مشخص کنید.

۲۰- دو تاس را با هم پرتاب میکنیم. پیشامد "مجموع اعداد رو شده فرد" باشد را مشخص کنید.

۲۱- دو تاس را هم زمان پرتاب کردیم. پیشامد "اعداد رو شده یکسان نباشند و مجموعشان هم ۱۰ نباشد"

را مشخص کنید

۲۲- با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ بدون تکرار ارقام، عدد ۲ رقمی به صورت تصادفی می سازیم مطلوب است :

الف) پیشامد  $A$  عدد زوج باشد.

ب) پیشامد  $B$  که عدد کمتر از ۴۰ باشد.

- ۲۳- دو تاس را با هم می اندازیم. پیشامدهای زیر را بنویسید.
- الف - مجموع اعداد رو شده حداکثر ۴ باشد.
- ب - حاصل ضرب اعداد رو شده حداقل ۲۵ باشد.
- ۲۴- دو تاس سفید و یک تاس قرمز را پرتاب می کنیم. پیشامد  $A$  که در آن عدد تاس قرمز کمتر از تاس های سفید باشد را مشخص کنید.
- ۲۵- یک سکه را پرتاب میکنیم. اگر رو ظاهر شود یک بار دیگر سکه را پرتاب میکنیم، در غیر اینصورت تاسی را می اندازیم، مطلوب است:
- الف) فضای نمونه ای
- ب) پیشامد  $A$  که عدد ظاهر شده تاس زوج یا سکه پشت باشد
- ۲۶- در یک خانواده پنج فرزندی پیشامد آنکه تعداد دختران بیشتر از پسر ها باشد چند عضوی است؟
- ۲۷- در یک خانواده شش فرزندی پیشامد آنکه تعداد دختران بیشتر از پسر ها باشد چند عضوی است؟
- ۲۸- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم پیشامد  $A$  که در آن سکه رو و تاس کمتر از ۳ را مشخص کنید.
- ۲۹- دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. فرض کنیم پیشامد  $A$  مجموع کمتر از ۸ و پیشامد  $B$  مجموع بیشتر از ۴ باشد. پیشامد  $A \cap B$  را مشخص کنید.
- ۳۰- از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  دو عدد به تصادف خارج می کنیم. پیشامد  $A$  حداقل یکی از اعداد اول باشند چند عضوی است؟
- ۳۱- از بین ۸ نفر قبول شدگان کنکور ۳ نفر را به تصادف انتخاب می کنیم. تعداد عضو های پیشامد  $A$  که در آن فرد مورد نظر در بین انتخاب شدگان باشد چقدر است؟
- ۳۲- از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  دو عدد به تصادف خارج می کنیم. احتمال آنکه یکی فرد و یکی زوج باشد چقدر است؟
- ۳۳- دو عدد به تصادف از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$  انتخاب می کنیم. احتمال آنکه مجموع دو عدد زوج باشند چقدر است؟
- ۳۴- ظرفی شامل  $a$  مهره ی قرمز و  $b$  مهره ی آبی با شرط  $a+b=6$  می باشد. سه مهره از این ظرف به تصادف خارج می کنیم اگر احتمال قرمز بودن هر سه  $\frac{1}{4}$  باشد تعداد مهره های قرمز را به دست آورید.
- ۳۵- در یک فضای نمونه ۱۲ عضوی با شانس مساوی احتمال وقوع چند پیشامد متمایز برابر  $\frac{1}{6}$  است؟
- ۳۶- دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. احتمال آنکه هر دو زوج باشند و مجموع آنها ۸ باشد چقدر است؟
- ۳۷- در کلاس ۱۱۱ دبیرستان شهید رجایی رقابت برای کسب نفرات اول تا پنجم بین پنج نفر می باشد که دوتای از آنها برادرند (دو قلو). احتمال آنکه رتبه ی دو برادر پشت سر هم باشد چقدر است؟
- ۳۸- حروف کلمه ی " ابن سینا" را بر روی ۷ کارت نوشته درون کیسه ای می ریزیم. سپس ۵ کارت به ترتیب خارج می کنیم. احتمال آنکه کلمه " انسان " تشکیل شود چقدر است؟

- ۳۹- کیسه ای شامل ۵ مهره سفید و تعدادی مهره قرمز است. سه مهره به تصادف خارج می کنیم. اگر احتمال سفید بودن هر سه مهره برابر  $\frac{5}{28}$  باشد، تعداد کل مهره ها چقدر است؟
- ۴۰- در کیسه ای شامل مهره  $a$  سفید و  $a+2$  مهره سیاه می باشد. دو مهره همزمان به تصادف خارج می کنیم اگر احتمال هم رنگ نبودن مهره ها برابر  $\frac{13}{28}$  باشد در اینصورت تعداد کل مهره های کیسه چقدر است؟
- ۴۱- هر یک زیر مجموعه های چهار عضوی مجموعه ی  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  را روی کارتی می نویسیم. کارتی را به تصادف انتخاب می کنیم، احتمال اینکه شامل ۱ و ۲ باشد کدام است؟
- ۴۲- فرض کنید  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناسازگار باشند و  $P(A') = \frac{1}{3}$  و  $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$  در اینصورت حاصل  $P(B)$  چقدر است؟
- ۴۳- فرض کنید  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناسازگار باشند و  $P(A') + P(B') = \frac{1}{3}$  در اینصورت حاصل  $P(A \cup B)$  چقدر است؟
- ۴۴- فرض کنید  $P(A) = 2P(B) = 2P(A - B)$  در اینصورت  $P(A \cup B)$  چقدر است؟
- ۴۵- اگر نسبت گل شدن ضربه ی پنالتی یک بازیکن به گل نشدن آن برابر با  $\frac{3}{5}$  باشد در اینصورت احتمال گل نشدن ضربه ی پنالتی آن بازیکن چقدر است؟
- ۴۶- اگر  $A$  و دو پیشامد باشند و  $P(B') = \frac{2}{5}$ ،  $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$  و  $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$  در اینصورت  $P(A - B)$  چقدر است؟
- ۴۷- اگر  $P(A) + P(A' \cap B) = P(A \cap B)$  در اینصورت  $P(A - B)$  را به دست آورید.
- ۴۸- دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. مطلوب است احتمال آنکه:  
الف) حداقل یک عدد اول ظاهر شود چقدر است؟  
ب) احتمال آنکه حداکثر یک عدد اول ظاهر شود چقدر است؟  
پ) مجموع آنها کمتر از ۵ باشد چقدر است؟  
ت) مجموع آنها برابر ۵ باشد چقدر است؟
- ۴۹- اعداد ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ را روی گوی هایی نوشته و درون کیسه ای می ریزیم. سپس یک گوی به تصادف خارج می کنیم احتمال آنکه عدد خارج شده بر ۲ یا سه بخش پذیر باشد چقدر است؟
- ۵۰- سه سکه سالم را باهم پرتاب می کنیم. احتمال آنکه پشت مشاهده شود چقدر است؟
- ۵۱- فرض کنید  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناسازگار باشند و  $P(A') = \frac{1}{3}$  و  $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$  در اینصورت  $P(B)$  چقدر است؟
- ۵۲- فرض کنید  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناسازگار باشند و  $P(A') + P(B') = \frac{5}{3}$  در اینصورت  $P(A \cup B)$  چقدر است؟

- ۵۳- اگر  $P(A - B) = \frac{2}{17}$  و  $P(B - A) = \frac{10}{17}$  و  $P(B) = 3P(A)$  در این صورت  $P(A \cup B)$  کدام است؟
- ۵۴- تاسی که احتمال آمدن عدد زوج با آن نصف آمدن عدد فرد است را پرتاب می کنیم . احتمال آنکه عدد اول ظاهر شود چقدر است ؟
- ۵۵- شانس همدان و تبریز برای میزبانی کنفرانس آموزش ریاضی در سال ۹۹ دو برابر شانس میزبانی اراک می باشد. اگر تنها میزبانی کنفرانس به یکی از این سه شهر برسد احتمال آنکه همدان میزبان باشد چقدر است؟
- ۵۶- دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. اگر احتمال آمدن عدد فرد برای هر تاس دو برابر عدد زوج باشد ، احتمال آنکه مجموع آنها برابر ۵ باشد چقدر است ؟
- ۵۷- روی تاسی اعداد ۱، ۲، ۳، ۳، ۳، ۳ می باشد. این تاس را دو بار تاب می کنیم ، احتمال آنکه مجموع ۴ باشد کدام است؟
- ۵۸- تاس سالمی را پی بار پرتاب می کنیم. اگر عدد فرد ظاهر شود یک بار دیگر پرتاب می کنیم و اگر زوج آمد دو بار دیگر پرتاب می کنیم. مجموع کمتر از ۵ باشد چقدر است؟
- ۵۹- در پرتاب یک تاس اگر شش ظاهر شد مجاز به پرتاب تاس دوم هستیم در غیر این صورت دو سکه را پرتاب می کنیم. احتمال آنکه لااقل یک خط ظاهر شود چقدر است؟
- ۶۰- چهار تاس را پرتاب کرده ایم و چهار عدد متوالی ظاهر شده است. احتمال آنکه یکی از آنها عدد ۲ باشد چقدر است ؟
- ۶۱- سه تاس را با هم پرتاب می کنیم، اگر هر سه مضرب ۳ باشند احتمال آنکه مجموع آنه ۱۲ باشد چقدر است ؟
- ۶۲- به تصادف یک عدد سه رقمی انتخاب می کنیم. اگر این عدد فرد باشد ، احتمال آنکه این عدد مضرب ۳ باشد چقدر است ؟
- ۶۳- در پرتاب دو تاس اگر یکی از تاس ها عدد ۵ باشد ، احتمال آنکه دو عدد متوالی باشند چقدر است ؟
- ۶۴- از ظرفی شامل ۵ مهره سفید ، ۵ مهره آبی و ۶ مهره قرمز، مهره ای به تصادف خارج می کنیم. اگر مهره آبی نباشد احتمال سفید بودن مهره چقدر است ؟
- ۶۵- پدر حسن سه فرزند دارد. احتمال آنکه او دو دختر داشته باشد چقدر است ؟
- ۶۶- خانواده ای دارای دو فرزند است .  
الف) اگر بدانیم یکی از بچه دختر است احتمال آنکه هر فرزند دیگر دختر باشد چقدر است ؟  
ب) اگر بدانیم هر دو فرزند پسر نیستند احتمال آنکه یکی از فرزندان پسر و یکی دختر باشد چقدر است ؟
- ۶۷- خانواده ای دارای سه فرزند است .  
الف) اگر کوچکترین بچه دختر باشد، احتمال آنکه هر سه فرزند دختر باشند چقدر است ؟  
اگر فرزند اول آنها دختر باشد احتمال آنکه این خانواده حداقل دارای یک پسر باشد چقدر است ؟  
اگر یکی از فرزندان دختر باشد احتمال آنکه این خانواده حداقل دارای دو دختر باشد چقدر است ؟
- ۶۸- عددی به تصادف از  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$  انتخاب می کنیم اگر به دانیم زوج است احتمال آنکه بر ۵ بخش پذیر نباشد چقدر است؟

- ۶۹- دو تاس را پرتاب می کنیم. اگر بدانیم مجموع دو عدد رو شده بزرگتر مساوی ۷ است احتمال آنکه مجموع آنها حداقل ۱۰ است را به دست آورید.
- ۷۰- دو تاس به رنگ های قرمز و آبی پرتاب می کنیم. اگر تاس آبی بزرگتر از تاس قرمز ظاهر باشد، احتمال آنکه مجموع دو تاس ۶ باشد چقدر است؟
- ۷۱- تاس سالمی را پی بار پرتاب می کنیم. اگر عدد زوج ظاهر شود دو تاس دیگر پرتاب می کنیم و اگر فرد آمد یک تاس دیگر پرتاب می کنیم. احتمال آنکه مجموع ۷ باشد چقدر است؟
- ۷۲- سه ظرف داریم. اولی شامل ۳۰ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه و دومی شامل فقط ۱۰ مهره سیاه و سومی تنها شامل ۳۰ مهره سفید می باشد. ظرفی به تصادف انتخاب کرده از آن مهره ای خارج می کنیم، احتمال آنکه مهره سیاه باشد چقدر است؟
- ۷۳- از بین ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه ۳ مهره به تصادف انتخاب می کنیم با کدام احتمال مهره اول و سوم هر دو سیاه هستند؟
- ۷۴- جعبه ای شامل ۱۵ لامپ سالم و ۵ لامپ معیوب می باشد. از این جعبه ۳ لامپ به تصادف خارج می کنیم مطلوب است احتمال آنکه:
- الف) هر سه سالم باشد  
ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد  
پ) از این جعبه ۲ لامپ به تصادف خارج می کنیم احتمال آنکه یک لامپ معیوب و دیگری سالم باشد چقدر است؟
- ۷۵- اگر احتمال آمدن باران به نیامدن در یک روز خاص برابر  $\frac{3}{4}$  باشد، احتمال آنکه باران ببارد چقدر است؟
- ۷۶- دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. اگر هر کدام از آنها کمتر از ۵ باشند احتمال آنکه مجموع آنها برابر ۴ باشد چقدر است؟
- ۷۷- دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده کمتر از ۱۰ باشد احتمال آنکه هر دو فرد باشند چقدر است؟
- ۷۸- دو تاس را با هم پرتاب می کنیم.
- الف) اگر مجموع آنها ۸ باشد احتمال آنکه جفت آمده باشد چقدر است؟  
ب) اگر مجموع آنها زوج باشد احتمال آنکه هر دو فرد باشند چقدر است؟  
پ) اگر مجموع آنها کمتر از ۱۰ باشد احتمال آنکه جفت آمده باشد چقدر است؟  
ت) اگر بدانیم هر دو بار اعداد رو شده کمتر از ۴ بوده اند احتمال آنکه جفت آمده باشد چقدر است؟  
ث) اگر بدانیم هر دو بار اعداد رو شده کمتر از ۶ بوده است احتمال آنکه جفت آمده باشد چقدر است؟
- ۷۹- در یک کلاس ۴۰ نفری ۷ نفر فوتبالیست هستند. ۲ نفر از دانش آموزان را به تصادف انتخاب می کنیم، احتمال آنکه هر دو فوتبالیست باشند چقدر است؟
- ۸۰- در یک کیسه ۳ مهره سفید و ۳ مهره سیاه وجود دارد. سه مهره از آن خارج کرده و بدون مشاهده رنگ آن آنها را کنار می گزاریم. اینک مهره جدیدی خارج می کنیم احتمال آنکه سفید باشد چقدر است؟

- ۸۱- در یک کیسه ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه وجود دارد. مهره ای از کیسه خارج کرده، پس از مشاهده ی رنگ، آن را به کیسه باز می گردانیم و مجددا مهره ای از کیسه خارج می کنیم. احتمال آنکه فقط یک بار مهره ی سفید آمده باشد چقدر است؟
- ۸۲- اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناسازگار باشند در اینصورت  $P(A|B')$  چقدر است؟
- ۸۳- اگر  $P(B-A) = 0.4$  در اینصورت حاصل  $P(A'|A \cup B)$  چه می باشد؟
- ۸۴- اگر  $P(A) = 0.3$  و  $P(B) = 0.2$  و  $P(A|B) = 0.1$  در اینصورت  $P(A \cup B)$  چقدر است؟
- ۸۵- اگر  $S = \{x, y, z, t, r\}$  و  $P(\{x, y\}) = 0.4$  و  $P(\{y\}) = 0.1$  در اینصورت حاصل  $P(\{x, t, r\} | \{x, y, t\})$  چه می باشد؟
- ۸۶- اگر  $P(A) = 0.3$  و  $P(B) = 0.4$  و  $P(A \cap B) = 0.1$  در اینصورت حاصل  $P(A'|B') + P(B'|A')$  چقدر می باشد؟
- ۸۷- حاصل  $P(A \cap B) + P(A' \cap B)$  را به دست آورید.
- ۸۸- اگر  $A, B, C$  و پیشامد هایی از یک فضای نمونه باشند و  $P(A \cap C) = \frac{5}{8}$  و  $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$  و  $P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{8}$  در اینصورت  $P([(A-B) \cup (B-A)] \cap C)$  چقدر می باشد؟
- ۹۰- احتمال آنکه بخش های ۳ و ۴ کتابی قبل از تعطیلات نوروز تدریس شوند به شرط آنکه هفته آخر پایان سال کلاسها برقرار باشند  $0.8$  و احتمال آنکه قبل از تعطیلات نوروز تدریس شوند به شرط آنکه هفته آخر پایان سال کلاسها برقرار نباشند  $0.5$  می باشد. اگر احتمال برقراری کلاسها در هفته پایانی سال  $0.9$  باشد احتمال آنکه در موعد مقرر (قبل از تعطیلات نوروز) بخش های فوق تدریس شوند چقدر است؟
- ۹۱- سه ظرف داریم. اولی شامل فقط ۲۰ مهره سفید و دومی شامل ۵ مهره سیاه و ۶ مهره قرمز و سومی ۸ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز می باشد. ظرفی به تصادف انتخاب کرده از آن مهره ای خارج می کنیم، احتمال خارج شدن کدام رنگ بیشتر است؟
- ۹۲- دو ظرف داریم. اولی شامل ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و دومی شامل ۶ مهره سفید و ۸ مهره سیاه می باشد. ظرفی را به تصادف انتخاب می کنیم و سپس از آن مهره ای خارج می کنیم، احتمال آنکه مهره سفید باشد چقدر است؟
- ۹۳- در یک اداره ۴۰٪ در صد استخدام ها زن می باشد. ۶۰٪ استخدام شده ها دیپلم ریاضی دارند. کارمندی را به تصادف انتخاب می کنیم اگر دیپلم ریاضی داشته باشد احتمال آنکه زن باشد چقدر است؟
- ۹۴- یک کیسه ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در کیسه دیگر ۶ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. یکی از کیسه ها را به تصادف انتخاب می کنیم و از آن مهره ای خارج می کنیم. اگر مهره خارج شده سفید باشد احتمال آنکه مهره از کیسه اول خارج شده باشد چقدر است؟
- ۹۵- اگر پیشامد های  $A$  و  $B$  افزایی برای فضای نمونه  $S$  و  $C$  پیشامد دلخواهی از فضای نمونه  $S$  باشند و  $P(A) = 0.3$ ،  $P(C|A) = 0.4$ ،  $P(C|B) = 0.3$  در اینصورت  $P(A|C)$  را به دست آورید.
- ۹۶-

- ۹۷- ۳۰٪ از شرکت کنندگان در یک سمینار را آقایان تشکیل می دهند. ۳۵٪ از آقایان و ۱۰٪ از خانم ها عینک به چشم دارند. شخصی را انتخاب می کنیم، اگر عینک به چشم داشته باشد احتمال زن بودنش چقدر است؟
- ۹۸- دو ظرف داریم. اولی شامل ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و دومی شامل ۶ مهره سفید و ۵ مهره سیاه می باشد. چند مهره سیاه به ظرف دوم اضافه کنیم تا اگر ظرفی را به تصادف انتخاب نموده و از آن مهره ای خارج کردیم احتمال آمدن مهره ی سفید و احتمال آمدن مهره ی سیاه برابر باشند؟
- ۹۹- دو ظرف داریم. اولی شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و دومی شامل ۷ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه می باشد. مهره ای تصادف از ظرف اول خارج کرده بدون رویت رنگ، آنرا در ظرف دوم قرار می دهیم سپس از ظرف دوم مهره ای خارج می کنیم، احتمال آنکه مهره سفید باشد چقدر است؟
- ۱۰۰- باغی دارای دو نوع پرتقال می باشد. از نوع اول ۳۰ درصد دارای کیفیت خوب و ۲۰ درصد کیفیت متوسط دارند. نوع دوم ۲۰ درصد دارای کیفیت خوب و ۳۰ درصد کیفیت متوسط دارند. پرتقالی به تصادف انتخاب کرده و مشاهده می کنیم کیفیتی متوسط دارد، احتمال آنکه از نوع دوم باشد چقدر است؟
- ۱۰۱- کیسه ای شامل ۴ مهره ی سفید، ۲ مهره ی قرمز و سه مهره ی سیاه است. مهره ای از کیسه خارج کرده مشاهده می کنیم که سفید نیست، احتمال آنکه قرمز باشد چقدر است؟
- ۱۰۲- دو ظرف داریم. اولی شامل ۲ مهره سفید و ۱ مهره سیاه و دومی شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه. از اولی یک مهره به تصادف خارج کرده و در ظرف دوم قرار می دهیم و سپس از ظرف دوم مهره ای خارج می کنیم. احتمال آنکه مهره نهایی سفید باشد چقدر است؟
- ۱۰۳- از ظرفی که دارای ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه می باشد مهره ای خارج می کنیم. این مهره از هر رنگ که باشد دو مهره به رنگ دیگر از همان رنگ از ظرف خارج کرده و سه مهره را کنار می گزاریم. اینک مهره ای جدید از ظرف خارج می کنیم احتمال آنکه مهره سفید باشد چقدر است؟
- ۱۰۴- ظرف اول دارای ۵ گوی سفید و ۱۵ گوی سیاه و ظرف دوم دارای ۶ گوی سفید و ۱۴ گوی سیاه می باشد. تاسی را پرتاب می کنیم اگر عدد رو شده اول باشد از ظرف اول در غیر اینصورت از ظرف دوم گویی خارج می کنیم، احتمال سفید بودن مهره خارج شده چقدر است؟
- ۱۰۵- تعداد دانش آموزان کلاس  $A$  سه برابر تعداد دانش آموزان کلاس  $B$  است اگر ۳۰ درصد دانش آموزان کلاس  $A$  و ۵۰ درصد دانش آموزان کلاس  $B$  عضو کتابخانه باشند. فردی به تصادف انتخاب می کنیم اگر عضو کتابخانه باشد با کدام احتمال عضو کلاس  $B$  است؟