



۱- گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید: (۱/۵نمره)

«اگر برف ببارد یا هوا آلوده باشد آن گاه، مدرسه تعطیل است یا به اردو نمی‌رویم»

برای هر کدام از گزاره‌های ساده تشکیل دهنده ترکیب بالا یک حرف مانند s, r, q, p در نظر گرفته و ترکیب بالا را با نمادهای جبر گزاره‌ها نمایش دهید و سپس نقیض آن را با قوانین جبر گزاره‌ها به دست آورده و به فارسی روان بنویسید.

۲- بدون استفاده از جدول ارزش، هم‌ارزی‌های زیر را ثابت کنید.

(الف) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (جذب) (۱/۵نمره)

(ب) $p \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)$ (پخشی \vee در \Rightarrow) (۱/۵نمره)

۳- یک گزاره شرطی همیشه درست را یک استلزام منطقی گوئیم. ثابت کنید گزاره زیر یک استلزام منطقی است. (۱نمره)

$$p \Rightarrow [q \Rightarrow (p \wedge q)]$$

۴- الف) ارزش گزاره سوری « $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}, x + y < 1$ » را با ذکر دلیل کافی تعیین کنید. (۱نمره)

ب) نقیض گزاره سوری « $\forall x \in D \exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} < x$ » را بنویسید. $D = (0, +\infty)$ (۱نمره)

۵- تعداد اعضای مجموعه A دو برابر تعداد اعضای B است و تعداد زیر مجموعه‌های محض و نا تهی A از تعداد زیر مجموعه‌های B ، 54 واحد بیشتر است، تعداد اعضای A را حساب کنید. (۱نمره)

۶- دو مجموعه $A \neq \emptyset$ و B را چنان مثال بزنید که: $A \subseteq B$ و $A \in B$ (۱نمره)

۷- اگر C, B, A زیر مجموعه‌هایی از مجموعه U باشند احکام زیر را ثابت کنید.

(الف) اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ آن گاه $A \cup B \subseteq C$ (۱نمره)

(ب) $A \cap (A \cup B) = A$ (۱نمره)

(پ) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ (۱نمره)

۸- اگر $A = \{x - y, x + 2y\}$ و $B = \{2, 5\}$ طوری که $A \times B = B \times A$ کمترین مقدار $x^2 + y^2$ را حساب کنید. (۱نمره)



۹- اگر $\{-1, 1\}$ و $B = [-1, 1]$ نمودارهای $A \times B$ و $B \times A$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. (در واقع نمودار $A \times B \cup B \times A$ را رسم می‌کنید) (۲نمره)

۱۰- اگر A و B دو زیر مجموعه از مجموعه U باشند می‌دانیم « A زیر مجموعه B است» به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in U (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

با استفاده از هم‌ارزی $p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$ معادل گزاره بالا را نوشته و مشخص کنید گزاره‌ی اخیر در مورد مجموعه‌های A و B چه حکمی را بیان می‌کند. (۱نمره)

۱۱- برای مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ یک افراز بنویسید که شامل ۳ زیرمجموعه (۳قطعه) با تعداد اعضای نابرابر باشد. (۵/۰نمره)

۱۲- اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند ثابت کنید. (۱نمره)

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

۱۳- عددی را به تصادف از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ انتخاب می‌کنیم برای این عدد انتخابی احتمالات زیر را حساب کنید.

الف) بر ۳ یا ۷ بخش پذیر باشد. (۱نمره)

ب) بر ۷ بخش پذیر باشد اما بر ۳ بخش پذیر نباشد. (۱نمره)



۱- برف ببارد p = هوا آلوده باشد q = مدرسه تعطیل است r = به اردو می‌رویم s =

معادل گزاره به زبان جبر گزاره‌ها : $(p \vee q) \Rightarrow (r \vee \sim s)$

$$\sim [(p \vee q) \Rightarrow (r \vee \sim s)] \equiv (p \vee q) \wedge \sim (r \vee \sim s) \equiv (p \vee q) \wedge (\sim r \wedge s)$$

یعنی : «برف می‌بارد یا هوا آلوده است ولی مدرسه تعطیل نیست و به اردو می‌رویم»

۲- الف) $p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee F) \wedge (p \vee q) \equiv p \vee (F \wedge q) \equiv p \vee F \equiv p$

ب) $(p \vee q) \Rightarrow (p \vee r) \equiv \sim (p \vee q) \vee (p \vee r) \equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee p] \vee r$

$$\equiv [(\sim p \vee p) \wedge (\sim q \vee p)] \vee r \equiv [T \wedge (\sim q \vee p)] \vee r \equiv (p \vee \sim q) \vee r$$

$$\equiv p \vee (\sim q \vee r) \equiv p \vee (q \Rightarrow r)$$

-۳

$$P \Rightarrow [q \Rightarrow (p \wedge q)] = \sim p \vee [\sim q \vee (p \wedge q)]$$

$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q) \equiv \underbrace{\sim (p \wedge q)}_S \vee \underbrace{(p \wedge q)}_S \equiv \sim S \vee S \equiv T$$

۴- الف) گزاره بیان می‌کند که عدد حقیقی x وجود که جمع آن با هر عدد حقیقی y کوچکتر از ۱ ساعت که ارزش آن نادرست است. زیرا برای

چنین x می‌توان قرار داد $y = 2 - x$ که در این صورت :

ب) $\sim (\forall x \in D, \exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} < x) \equiv \exists x \in D \sim (\exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} < x)$

$$\equiv \exists x \in D \forall n \in \mathbb{N} \sim (\frac{1}{n} < x) \equiv \exists x \in D \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \not< x \equiv \exists x \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \geq x$$

-۵

$$n(A) = 2^K, n(B) = K \rightarrow A \text{ تعداد زیرمجموعه‌های سره ناتهی } = 2^{2^K} - 2$$

$$B \text{ تعداد زیر مجموعه‌های } = 2^K \Rightarrow 2^{2^K} - 2 = 2^K + 54 \Rightarrow 2^{2^K} - 2^K = 54 + 2$$

$$2^K(2^K - 1) = 56 = 8 \times 7 \Rightarrow 2^K = 8 \rightarrow K = 3 \rightarrow n(A) = 2^K = 8$$

-۶

$$A = \{1\} \quad B = \{1, \{1\}\}$$

واضح است $A = \{1\} \in B$ و چون $1 \in A$ پس $A = \{1\} \subseteq B$

۷- الف) روش عضوگیری دلخواه

$$\forall x \in U, x \in A \cup B \xrightarrow{\text{تعریف اجتماع}} x \in A \vee x \in B \xrightarrow{\frac{A \subseteq C}{B \subseteq C}} x \in C \vee x \in C \rightarrow x \in C$$

پس $A \cup B \subseteq C$

ب) $A \cap (A \cup B) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B) = A \cup (\emptyset \cap B) = A \cup \emptyset = A$

پ) $A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cap C') = (A \cap A) \cap (B' \cap C') = (A \cap B') \cap (A \cap C') = (A - B) \cap (A - C)$

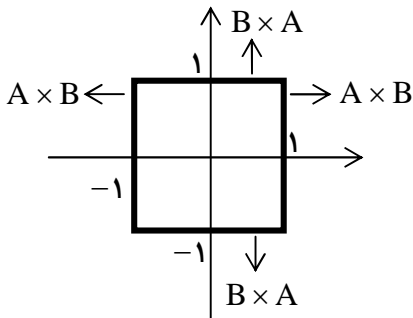


$$A \times B = B \times A \Rightarrow A = B \Rightarrow \{x - y, x + 2y\} = \{2, 5\} \quad -8$$

حالت ممکن

$$\textcircled{1} \begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 1 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 10} \text{ کمترین مقدار}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x - y = 5 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 17$$



$$A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, y \in B\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 \text{ یا } -1, -1 \leq y \leq 1\}$$

$$B \times A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in B, y \in A\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, y = 1 \text{ یا } -1\}$$

-9

-10

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in U (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$\equiv A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x \in U \sim (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$\equiv A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x \in U, (x \in A \wedge x \notin B)$$

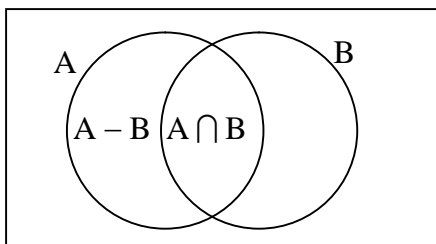
یعنی: A زیر مجموعه B نیست اگر و تنها اگر عضوی در U موجود باشد که عضو A باشد ولی عضو B نباشد یعنی به زبان جبر گزاره‌ها شرط اینکه A زیر مجموعه B نباشد را بیان می‌کند

-11

$$P = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}\} \text{ یا } \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2, 3\}, A_3 = \{4, 5, 6\}$$

-12



$A - B$ و $A \cap B$ ناسازگار یا مجزا هستند.

$$(A - B) \cap (A \cap B') = (A \cap B') \cap (A \cap B) \text{ زیرا:}$$

$$= A \cap (B' \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(A - B) \cup (A \cap B) = A \text{ و همچنین}$$

$$P[(A - B) \cup (A \cap B)] = P(A) \Rightarrow P(A - B) + P(A \cap B) = P(A) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

ناسازگارند



(۱۳- الف)

$$S \text{ در } 3 \text{ مضارب } A \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\left[\frac{1000}{3} \right]}{1000} = \frac{333}{1000}$$

$$S \text{ در } 7 \text{ مضارب } B \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\left[\frac{1000}{7} \right]}{1000} = \frac{142}{1000}$$

$$S \text{ در } 21 \text{ مضارب } A \cap B \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{\left[\frac{1000}{21} \right]}{1000} = \frac{47}{1000}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{333}{1000} + \frac{142}{1000} - \frac{47}{1000} = \frac{428}{1000}$$

(ب)

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{142}{1000} - \frac{47}{1000} = \frac{95}{1000}$$