

طراح: علی صادقی

مرکز سنجش آموزش مدارس برتر

آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)

نام و نام خانوادگی:

مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۱ از ۵

رشته: ریاضی

پایه: یازدهم

نام درس: هندسه ۲

بارم: ۱/۵ نمره

سوال ۱

جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.  
 (آ) یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط در نقطهٔ تماس با دایره ..... باشد.  
 (ب) اگر دو دایره با شعاع‌های  $R$  و  $R'$  مماس خارج باشند، در این صورت طول مماس مشترک خارجی آنها از رابطهٔ ..... به دست می‌آید.  
 (پ) یک چندضلعی، محیطی است اگر و تنها اگر همهٔ ..... آن هم‌مرس باشند. این نقطهٔ هم‌رسی مرکز دایره ..... است.  
 (ت) در بازتاب محوری یک خط، اگر خط بر محور بازتاب، ..... یا ..... باشد، بازتاب خط، خودش خواهد بود.

بارم: ۱/۵ نمره

سوال ۲

قطاع دایره را تعریف کنید. سپس ثابت کنید اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایره  $C(O, R)$  بر حسب درجه برابر  $\alpha$  باشد، در این صورت طول کمان نظیر قطاع برابر است با:  $\frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$

بارم: ۱ نمره

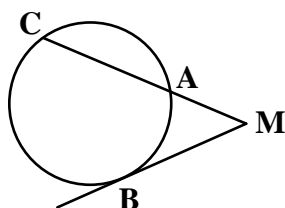
سوال ۳

ثابت کنید هر زاویهٔ محاطی در دایره نصف کمان روبه‌رویش می‌باشد. (تنها حالتی را ثابت کنید که یکی از اضلاع زاویهٔ محاطی، قطر دایره باشد)

بارم: ۱/۵ نمره

سوال ۴

در شکل زیر روابط داده شده را ثابت کنید.



الف)  $\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$

ب)  $MB^2 = MA \cdot MC$

بارم: ۱ نمره

سوال ۵

طریقه رسم خط مماس از یک نقطه، خارج دایره را توضیح دهید.

بارم: ۱/۲۵ نمره

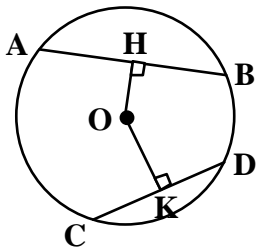
سوال ۶

طول شعاع‌های دو دایره متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی  $3\sqrt{7}$  و طول مماس مشترک داخلی آنها  $\sqrt{15}$  و طول خط‌المركزین آنها مساوی ۸ واحد است.

بارم: ۱/۵ نمره

سوال ۷

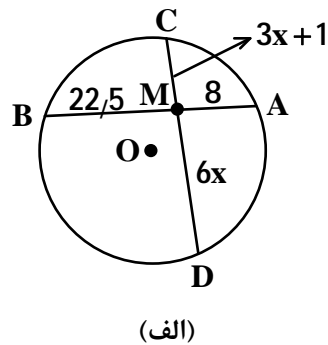
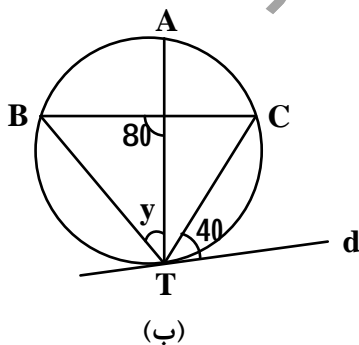
در دایره  $C(O, R)$  ثابت کنید اگر  $AB > CD$  آنگاه  $OH < OK$  و  $OH$  و  $OK$  فاصله  $O$  از دو وتر  $AB$  و  $CD$  هستند.



بارم: ۱ نمره

سوال ۸

در شکل مقابل خط  $d$  بر دایره در نقطه  $T$  مماس است. مقادیر  $x$  و  $y$  را به دست آورید.



بارم: ۱ نمره

سوال ۹

وضعیت دو دایره را در حالت‌های زیر مشخص کنید.

$$\text{آ) } d = \frac{5}{6}, R' = \frac{1}{2}, R = \frac{1}{3}$$

$$\text{ب) } d = 1, R' = \sqrt{2} - 1, R = 1 + \sqrt{2}$$

بارم: ۱ نمره

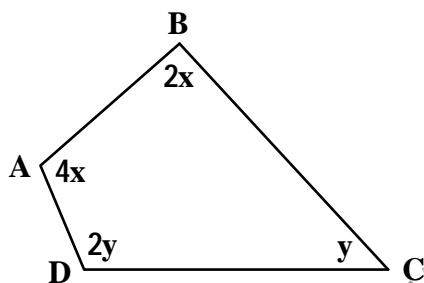
سوال ۱۰

ثابت کنید در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع مقابل با هم برابرند.

بارم: ۱ نمره

سوال ۱۱

در شکل مقابل چهارضلعی ABCD محاطی است. با توجه به اندازه‌های داده شده، حاصل  $\frac{x}{y}$  را به دست آورید.



بارم: ۱ نمره

سوال ۱۲

در یک مثلث اگر S مساحت مثلث و ۲p محیط آن باشد، ثابت کنید شعاع دایره محاطی داخلی آن از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$r = \frac{S}{P}$$

بارم: ۱ نمره

سوال ۱۳

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

آ) اگر چندضلعی هم محاطی و هم محیطی باشد، در این صورت چندضلعی منتظم است.

ب) انتقال با بردار  $\vec{V}$  ( $\vec{V} \neq \vec{0}$ )، هیچ نقطه ثابتی ندارد.

پ) دوران مربع ABCD به مرکز محل تلاقی قطرهایش با زاویه  $90^\circ$  (ساعتگرد) یک تبدیل همانی است.

ت) بازتاب محوری هیچ‌گاه شیب خط را حفظ نمی‌کند.

بارم: ۱/۲۵ نمره

سوال ۱۴

تبدیل طولپا را تعریف کنید. سپس ثابت کنید تبدیل انتقال طولپاست.

بارم: ۱ نمره

سوال ۱۵

ثابت کنید هر تبدیل طولپا، اندازه زاویه را حفظ می کند.

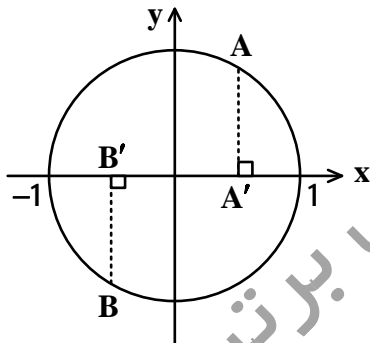
بارم: ۱ نمره

سوال ۱۶

تناظر  $M$  را از دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۱ به مجموعه نقاط روی محور  $x$  ها (بین ۱ و -۱) در نظر می گیریم:  $M: P \rightarrow Q$   
این تناظر برای به دست آوردن تصویر هر نقطه از مجموعه  $P$ ، از آن نقطه بر محور  $x$  ها عمود می کند و پای عمود را به عنوان تصویر آن نقطه در نظر می گیرد. یعنی  $M(A) = A'$ .

(آ) آیا  $M$  تبدیل است؟ چرا؟

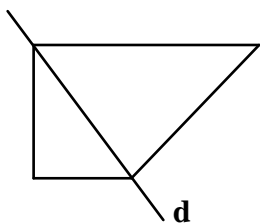
(ب) آیا  $M$  طولپاست؟ چرا؟



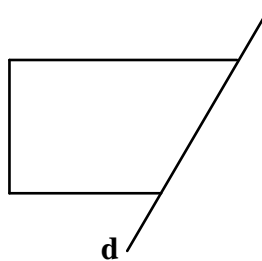
بارم: ۱ نمره

سوال ۱۷

بازتاب هر یک از شکل های زیر را نسبت به خط داده شده رسم کنید.



(ب)



(الف)

بارم: ۰/۵ نمره

سوال ۱۸

مفاهیم زیر را تعریف کنید.  
الف) تبدیل

ب) نقطه ثابت تبدیل

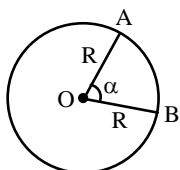
مرکز سنجش آموزش مدارس برتر

مرکز سنجش آموزش مدارس برتر  
 آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)  
 پاسخنامه آزمون: هندسه ۲

پاسخ سؤال ۱:

آ) بر شعاع عمود (ب)  $2\sqrt{RR'}$  (پ) نیمسازهای داخلی (نیمسازهای زوایای داخلی) - محاطی (ت) عمود - منطبق

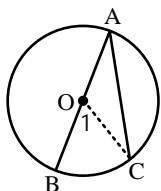
پاسخ سؤال ۲:



$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \frac{\text{طول کمان } AB}{2\pi R} = \frac{\pi}{360^\circ} \Rightarrow \text{طول کمان } AB = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$$

پاسخ سؤال ۳:

از C به O (مرکز دایره) وصل می‌کنیم. داریم:

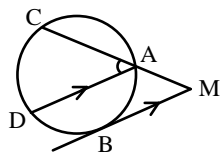


$$\left. \begin{aligned} OA = OC &\Rightarrow \hat{A} = \hat{C} \\ \triangle AOC: (\text{خارجی}) \hat{O}_1 &= \hat{A} + \hat{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\hat{O}_1}{2}$$

$\hat{O}_1$  زاویه مرکزی است بنابراین  $\hat{O}_1 = \widehat{BC}$  و لذا  $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$ .

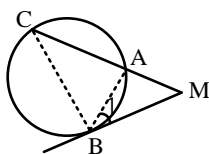
پاسخ سؤال ۴:

آ) از A به موازات BM رسم می‌کنیم تا دایره را در D قطع کند. داریم:



$$\begin{aligned} AD \parallel MB &\Rightarrow \widehat{DB} = \widehat{AB} \\ \left. \begin{aligned} MB \parallel AD \\ \text{مورب } MC \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \hat{M} = \hat{A}_1 \xrightarrow{\text{محاطی } \hat{A}_1} \hat{M} = \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BDC} - \widehat{BD}}{2} \\ &\Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2} \end{aligned}$$

(ب) از B به A و C وصل می‌کنیم.

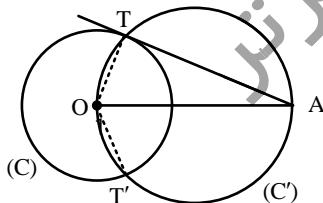


$$\left. \begin{aligned} \hat{M} &= \hat{M} \\ \hat{B}_1 &= \hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{دو زاویه}} \triangle ABM \sim \triangle BCM$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{BM}{MC} \Rightarrow BM^2 = AM \cdot MC$$

پاسخ سؤال ۵:

فرض می‌کنیم نقطه A خارج دایره C باشد. از A به مرکز دایره وصل کرده دایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم (دایره C'). این دایره، دایره C را در دو نقطه T و T' قطع می‌کند. از A به T و T' وصل می‌کنیم. زوایای OTA و OT'A زوایای محاطی روبه‌رو به قطر در دایره C' می‌باشند. بنابراین قائمه‌اند و این بدین معنی است که AT و AT' بر شعاع دایره C عمودند و لذا بر دایره C مماس‌اند.



پاسخ سؤال ۶:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی } TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 3\sqrt{7} = \sqrt{8^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 63 = 64 - (R - R')^2 \Rightarrow (R - R')^2 = 1 \xrightarrow{R > R'} R - R' = 1$$

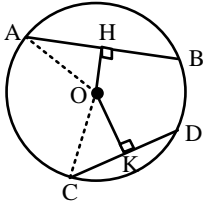
$$\text{طول مماس مشترک داخلی } FF' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} \Rightarrow \sqrt{15} = \sqrt{8^2 - (R + R')^2} \Rightarrow 15 = 64 - (R + R')^2 \Rightarrow (R + R')^2 = 49 \Rightarrow R + R' = 7$$

$$\begin{cases} R - R' = 1 \\ R + R' = 7 \end{cases} \Rightarrow R = 4, R' = 3$$

مرکز سنجش آموزش مدارس برتر  
 آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)  
 پاسخنامه آزمون: هندسه ۲

پاسخ سؤال ۷:

از O به A و C وصل می‌کنیم:



$$\left. \begin{array}{l} \triangle OAH : OA^2 = AH^2 + OH^2 \\ \triangle OCK : OC^2 = CK^2 + OK^2 \end{array} \right\} \xrightarrow{OA=OC} AH^2 + OH^2 = CK^2 + OK^2 \Rightarrow AH^2 - CK^2 = OK^2 - OH^2 \quad (1)$$

$$AB > CD \xrightarrow{\div 2} \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \Rightarrow AH > CK \Rightarrow AH^2 > CK^2 \xrightarrow{(1)} OK^2 > OH^2 \Rightarrow OK > OH$$

پاسخ سؤال ۸:

از طبق قضیه وترها داریم:

$$AM \cdot BM = CM \cdot MD \Rightarrow 8 \times 22,5 = (3x + 1)6x \Rightarrow 3x^2 + x - 30 = 0 \Rightarrow x = 3$$

(ب)

$$40^\circ = \frac{\widehat{TC}}{2} \Rightarrow \widehat{TC} = 80^\circ$$

$$\frac{\widehat{TC} + \widehat{AB}}{2} = 100^\circ \Rightarrow 80^\circ + \widehat{AB} = 200^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 120^\circ \Rightarrow y = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

پاسخ سؤال ۹:

(ا)

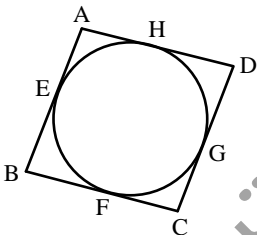
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \Rightarrow R + R' = d \Rightarrow \text{دایره‌ها مماس خارج‌اند}$$

(ب)

$$(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) = 2 > 1 \Rightarrow R - R' > d \Rightarrow \text{دایره‌ها متداخل‌اند}$$

پاسخ سؤال ۱۰:

از آنجا که چهارضلعی محیطی است طبق تعریف دایره‌ای وجود دارد که بر اضلاع آن مماس است. حال با توجه به اینکه طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج دایره با هم برابرند، داریم:



$$AB + CD = (AE + EB) + (DG + GC) = AH + BF + DH + CF$$

$$= (AH + DH) + (BF + CF) = AD + BC$$

پاسخ سؤال ۱۱:

در چهارضلعی محیطی، زوایای مقابل مکمل‌اند. بنابراین داریم:

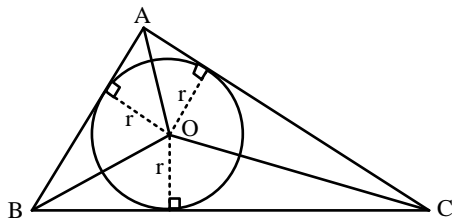
$$\begin{cases} 4x + y = 180^\circ \\ 2x + 2y = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow 4x + y = 2x + 2y \Rightarrow 2x = y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

پاسخ سؤال ۱۲:

می‌دانیم مرکز دایره محیطی داخلی مثلث، نقطه هم‌رسی نیمسازهای داخلی است. از این نقطه به سه رأس مثلث وصل می‌کنیم. داریم:

مرکز سنجش آموزش مدارس برتر  
آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)

پاسخنامه آزمون: هندسه ۲



$$S = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$$

$$S = \frac{1}{2}r \cdot AB + \frac{1}{2}r \cdot AC + \frac{1}{2}r \cdot BC$$

$$S = \frac{1}{2}r(AB + AC + BC) \Rightarrow S = \frac{1}{2}r(2P)$$

$$\Rightarrow S = rP \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$

پاسخ سؤال ۱۳:

(آ) نادرست (مثلث دلخواه هم محیطی و هم محاطی است و لزوماً منتظم نمی‌باشد)  
(ب) درست (پ) نادرست (ت) نادرست

پاسخ سؤال ۱۴:

تبدیلی که فاصله بین نقاط را حفظ می‌کند، تبدیل طولپا نامیده می‌شود - (فعالیت صفحه ۴۱ کتاب درسی)

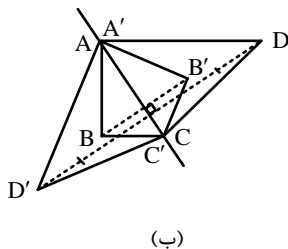
پاسخ سؤال ۱۵:

(فعالیت صفحه ۳۶ کتاب درسی)

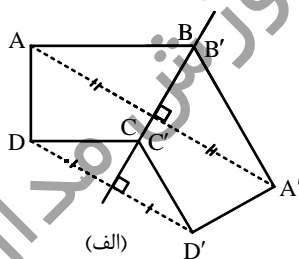
پاسخ سؤال ۱۶:

(آ) خیر - زیرا به ازای هر نقطه روی محور x ها در بازه  $(-1, 1)$  یعنی مجموعه دوم، دو نقطه روی دایره (مجموعه اول) وجود دارد.  
(ب) خیر - زیرا تبدیل نیست.

پاسخ سؤال ۱۷:



(ب)



(الف)

پاسخ سؤال ۱۸:

(آ) (تعریف صفحه ۳۶ کتاب درسی)  
(ب) (تعریف صفحه ۳۸ کتاب درسی)