| | | |
|---|---|---|
| شماره : | باسمه تعالی<br>اداره آموزش و پرورش شهر تهران<br>اداره آموزش و پرورش منطقه ۶ | نام درس : هندسه (۲) |
| نام: | | تاریخ آزمون : /۱۳۹۷/۱۰ |
| نام خانوادگی : | دبیرستان ماندگار البرز | زمان : ۱۰۰ دقیقه تعداد صفحات : ۴ صفحه |
| کلاس: | پایه یازدهم | طراح: دپارتمان هندسه و گسسته |

۱) جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید: (۱ نمره)

الف) طول کمان روبه رو به زاویهٔ مرکزی $\alpha$ در دایره ای به شعاع $R$ برابر $\frac{\alpha}{360} \times 2\pi R$ است.

ب) مرکز دایرهٔ محاطی داخلی هر مثلث، نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی آن است.

ج) بازتاب نسبت به خط دارای بیشمار نقطهٔ ثابت تبدیل است.

د) دوران شیب خط را «اندازه ها» حفظ نمی کند .

۲) کدام گزاره درست و کدام نادرست است. (۱ نمره)

الف ) ذوزنقه ی متساوی الساقین یک چهار ضلعی هم محیطی و هم محاطی است . نادرست

ب ) شعاع دایرهٔ محاطی هر $n$ ضلعی برابر است با مساحت آن چندضلعی تقسیم بر محیط آن. نادرست

ج) حاصل ترکیب دو بازتاب محوری با محورهای موازی، یک انتقال است. درست

د) بازتاب محوری جهت شکل را حفظ نمی کند . درست

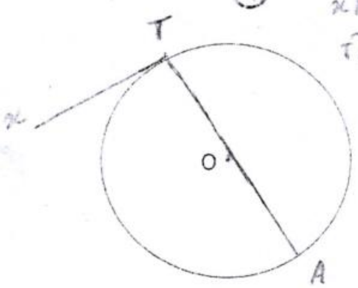
۳) قضیه: ثابت کنید اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر نصف کمان مقابل آن زاویه است. (۱/۵ نمره)

(۱)

زیرا خط مماس بر شعاع نقطه ی تماس عمود است

$x\hat{T}A = 90°$ (۱)

$\widehat{TA} = 180°$ (۲) $\Rightarrow x\hat{T}A = \frac{\widehat{TA}}{2}$

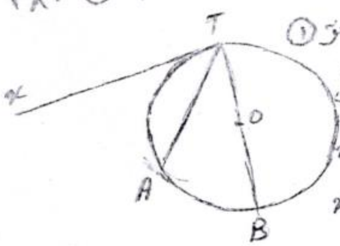



(۱) مماس: $x\hat{T}B = \frac{\widehat{TAB}}{2}$

محاطی: $A\hat{T}B = \frac{\widehat{AB}}{2}$

$x\hat{T}B - A\hat{T}B = \frac{\widehat{TAB} - \widehat{AB}}{2}$

$x\hat{T}A = \frac{\widehat{TA}}{2}$

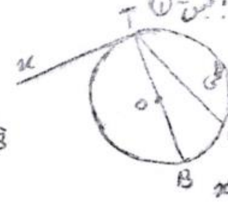



(۱) مماس: $x\hat{T}B = \frac{\widehat{TB}}{2}$

محاطی: $B\hat{T}A = \frac{\widehat{BA}}{2}$

$x\hat{T}B + B\hat{T}A = \frac{\widehat{TB} + \widehat{BA}}{2}$

$x\hat{T}A = \frac{\widehat{TBA}}{2}$

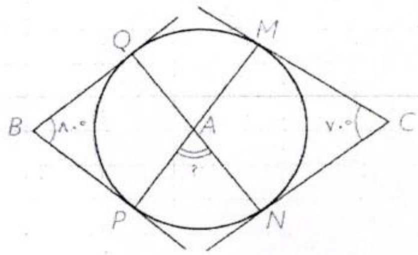



۴) در شکل مقابل اضلاع زاویه های $B$ و $C$ بر دایره مماسند. اندازهٔ $\hat{A}$ چند درجه است؟ (۱/۵ نمره)

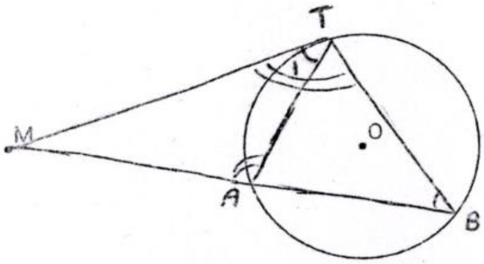
$$\begin{cases} 80° = \frac{\widehat{QM} + \widehat{MN} + \widehat{NP} - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow \widehat{MQ} + \widehat{MN} + \widehat{NP} - \widehat{PQ} = 160 \\ 70° = \frac{\widehat{MQ} + \widehat{PQ} + \widehat{PN} - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow \widehat{MQ} + \widehat{PQ} + \widehat{NP} - \widehat{MN} = 140 \end{cases}$$

$$2\widehat{MQ} + 2\widehat{NP} = 300$$

$$\widehat{MQ} + \widehat{NP} = 150 \Rightarrow \hat{A}_1 = \frac{150°}{2} = 75°$$



۵) قضیه: ثابت کنید هرگاه $M$ نقطه ای بیرون دایره باشد و از $M$ مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازهٔ مماس برابر است با حاصلضرب اندازه های دو قطعهٔ قاطع. (۱/۵ نمره)

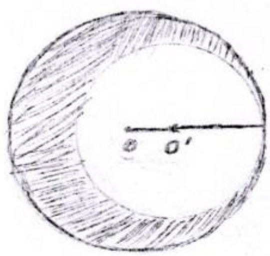



حکم: $MT^2 = MA \cdot MB$

$$M\hat{T}A,\ M\hat{T}B : \begin{cases} \hat{M} & \text{مشترک} \\ \underset{\text{ظلی}}{\hat{T}_1} = \underset{\text{محاطی}}{\hat{B}} = \dfrac{\overset{\frown}{AT}}{2} \end{cases} \Rightarrow \underset{\text{تساوی دو زاویه}}{M\hat{T}A \sim M\hat{T}B} \Rightarrow \frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB}$$

$$\Rightarrow MT^2 = MA \cdot MB$$

۶) طول خط المرکزین دو دایرهٔ مماس درونی ۲ سانتی متر و مساحت ناحیهٔ محدود بین آنها $16\pi$ سانتی متر مربع است. طول شعاع های دو دایره را به دست آورید. (۱/۵ نمره)




$R - R' = d = 2$

$S_{\text{ب}} - S_{\text{ک}} = 16\pi$

$\pi R^2 - \pi R'^2 = 16\pi$

$R^2 - R'^2 = 16$

$(R - R')(R + R') = 16$

$2(R + R') = 16$

$\begin{cases} R + R' = 8 \\ R - R' = 2 \end{cases}$

$2R = 10$

$R = 5 \Rightarrow R' = 3$

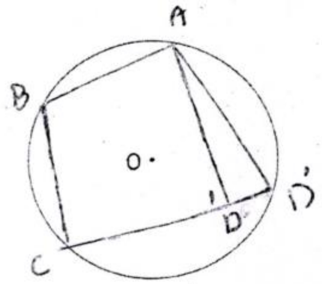
۷) دایره های $C(O,10)$ و $C'(O',2)$ با طول خط المرکزین $d = 17$ مفروضند. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را محاسبه کنید. (۱ نمره)

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{17^2 - (10-2)^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$$

۸) اگر $r$ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و $h_a$ و $h_b$ و $h_c$ اندازه های سه ارتفاع مثلث باشند، ثابت کنید: $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$. (۱ نمره)

$$\left.\begin{aligned} h_a &= \frac{2S}{a} \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S} \\ h_b &= \frac{2S}{b} \Rightarrow \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S} \\ h_c &= \frac{2S}{c} \Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2P}{2S} = \frac{P}{S} = \frac{P}{Pr} = \frac{1}{r}$$

۸) ثابت کنید اگر در یک چهار ضلعی زاویه های مقابل مکمل یکدیگر باشند آنگاه آن چهار ضلعی محاطی است. (۱/۵ نمره)




فرض: $\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}_1=180^\circ$

حکم: چهارضلعی $ABCD$ محاطی است.

اثبات: بر سه نقطهٔ $A$ و $B$ و $C$ که روی یک خط راست نیستند دایره ای می گذرانیم. (مرکز این دایره نقطهٔ همرسی عمودمنصف هاست). اگر این دایره از $D$ نگذرد، امتداد $CD$ دایره را در $D'$ قطع می کند و داریم:

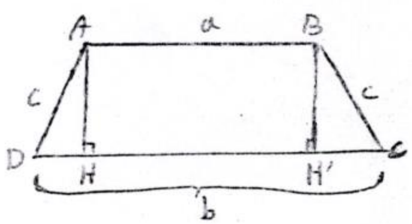
$\hat{B}+\hat{D'}=180^\circ$

طبق فرض: $\hat{B}+\hat{D}_1=180^\circ \Rightarrow \hat{B}+\hat{D'}=\hat{B}+\hat{D}_1 \Rightarrow \hat{D}_1=\hat{D'}$

$\triangle ADD'$: $\hat{D}_1>\hat{D'}$ زاویه خارجی

و این تناقض است. پس حکم درست است.

۹) یک ذوزنقه هم محاطی و هم محیطی است. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعدهٔ آن ضرب در میانگین هندسی آن ها. (۱/۵ نمره)




حکم: $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(a+b)\times\sqrt{ab}$

اثبات: چون ذوزنقه محاطی است، پس متساوی الساقین است، و چون محیطی است پس:

$2c=a+b \Rightarrow c=\frac{a+b}{2}$

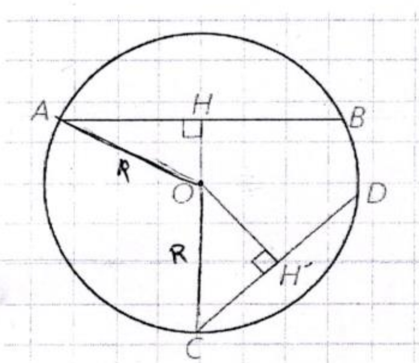
$DH=CH'=\frac{b-a}{2}$

$AH^2=AD^2-DH^2=c^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{4ab}{4}$

$AH=\sqrt{ab}$

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(a+b)\times\sqrt{ab}$

۱۱) در دایرهٔ $C(O,R)$ نشان دهید $AB>CD$ اگر و تنها اگر $OH<OH'$. (۲ نمره)




فرض: $AB>CD$ حکم: $OH<OH'$

اثبات: $O$ را به $A$ و $C$ وصل می کنیم.

طبق فرض: $AB>CD \Rightarrow \frac{AB}{2}>\frac{CD}{2} \Rightarrow AH>CH' \Rightarrow AH^2>CH'^2$

$\Rightarrow R^2-OH^2>R^2-OH'^2 \xrightarrow[\text{جهت عوض می شود}]{\text{در منفی ضرب می کنیم}} OH^2<OH'^2$

$\Rightarrow OH<OH'$

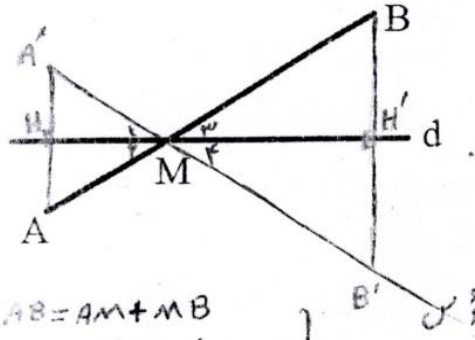
عکس: فرض: $OH<OH'$ حکم: $AB>CD$

برهان خلف: اگر $AB>CD$ نباشد داریم: $AB=CD \Rightarrow OH=OH'$ تناقض

$AB<CD \Rightarrow OH>OH'$ تناقض

پس حکم درست است، یعنی $AB>CD$ است.

۱۲ قضیه : ثابت کنید در حالتی که پاره خط $AB$ محور بازتاب را در نقطه ای مانند $M$ قطع کند، طول پاره خط $AB$ با طول بازتابش برابر است. (می دانیم در بازتاب طول پاره خطی که فقط یکی از نقاط انتهایی آن روی محور بازتاب باشد، حفظ می شود.) (۱/۵ نمره)



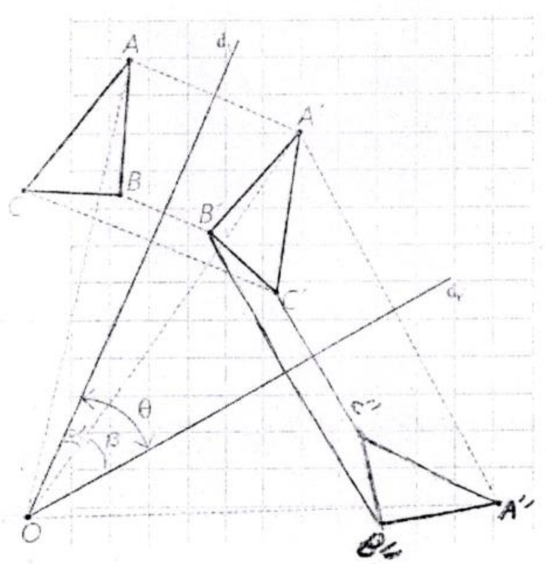

بازتاب نقطه‌ی A را نسبت به خط d پیدا کرده و آن را A' می‌نامیم. پاره خط MA' را رسم می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که بازتاب نقطه‌ی B یعنی B' نیز بر امتداد MA' واقع است. H وسط AA' و H' وسط BB' است. طبق تعریف بازتاب نقاط H و H' روی خط d هستند و می‌دانیم خط d نیمساز زاویه‌های $A\hat{M}A'$ و $B\hat{M}B'$ است پس:

$\hat{M}_1=\hat{M}_2$ ، $\hat{M}_3=\hat{M}_4$ ، $\hat{M}_2=\hat{M}_3$ (متقابل به راس) ، $\hat{M}_1=\hat{M}_2 \Rightarrow \hat{M}_1=\hat{M}_4$

یک ضلع (MH و MH') و راس دو زاویه‌ی مساوی برهم منطبق است پس اضلاع دیگرشان یعنی MA' و MB' برهم منطبق و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB=AM+MB \\ A'B'=A'M+B'M \\ MA=MA' , MB=MB' \end{array}\right\} \Rightarrow AB=A'B'$$

۱۳) در شکل، دو خط $d_1$ و $d_2$ با زاویهٔ $\theta$ یکدیگر را قطع کرده اند. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث $ABC$ نسبت به خط $d_1$ است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط $d_2$ رسم کنید و آن را مثلث $A''B''C''$ بنامید. الف) نشان دهید: $\angle AOA''=2\theta$ ب) اندازهٔ زاویه های $BOB''$ و $COC''$ چقدر است؟ ج) با چه تبدیلی می توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث $ABC$ دانست؟ د) چه نتیجه ای می گیرید؟ (۲ نمره)




الف)

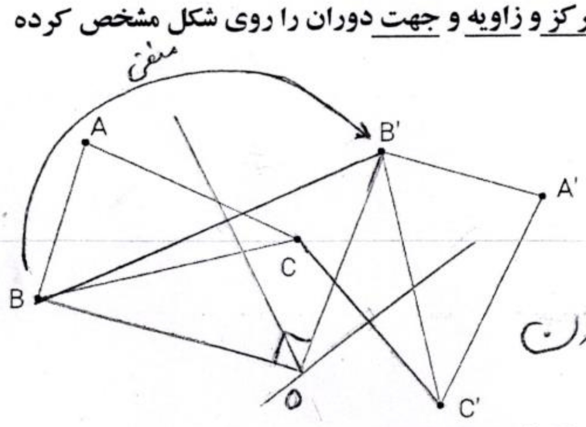
$A\hat{O}A''=A\hat{O}A'+A'\hat{O}A''=2\alpha+2\beta=2\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\theta}=2\theta$

ب) به دلیل مشابه $B\hat{O}B''=C\hat{O}C''=2\theta$

ج) دوران به مرکز O و زاویه‌ی $2\theta$

د) ترکیب دو بازتاب محوری با محورهای متقاطع یک دوران است.

۱۴) در شکل زیر مثلث $A'B'C'$ دوران یافتهٔ مثلث $ABC$ است. مرکز و زاویه و جهت دوران را روی شکل مشخص کرده و نحوهٔ انجام این کار را شرح دهید. (۱/۵ نمره)




می‌دانیم مرکز دوران، نقطه‌ی برخورد عمود منصف‌های پاره خط‌هایی است که هر نقطه و تصویرش را به هم وصل می‌کنند. پس کافی است عمود منصف‌های مثلاً BB' و CC' را رسم کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند. O مرکز دوران است. زاویه‌ی دوران ۹۰° است. جهت دوران منفی است. (در جهت عقربه‌های ساعت است)