

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: ۹۶/۱۰/۰۹

نام مدرسه

نام درس: هندسه ۲ - پایه یازدهم - ۱۲۰ دقیقه

توجه! لطفا سوالات را در کادر مشخص شده با خط خوش پاسخ دهید. (پاسخ های خارج از کادر تصحیح نخواهد شد)

( ۱/۵ نمره )

سوال ۱

مفاهیم زیر را تعریف کنید.

الف) چهارضلعی محیطی

ب) چندضلعی منتظم

ج) تبدیل هندسی

( ۱ نمره )

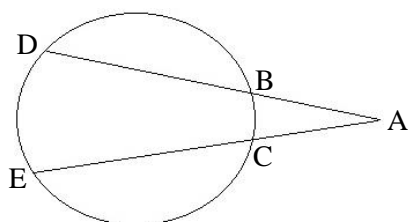
سوال ۲

دو وتر از دایره ای با هم موازی هستند. ثابت کنید کمان های بین دو وتر برابرند.

( ۱ نمره )

سوال ۳

در شکل مقابل ثابت کنید:  $\widehat{DAE} = \frac{1}{4}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$



( ۲ نمره )

سوال ۴

الف) به کمک خط کش و پرگار از نقطه M خارج دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کنید. (مراحل رسم را توضیح دهید)  
 ب) اگر نقطه M دایره را با زاویه ۳۰ درجه ببیند ( $\widehat{AMB} = 30^\circ$ )، کمان های کوچک و بزرگی را که توسط A و B ایجاد می شود، محاسبه کنید.

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: ۹۶/۱۰/۰۹

نام درس: هندسه ۲ - پایه یازدهم - ۱۲۰ دقیقه

نام مدرسه

( ۱/۵ نمره )

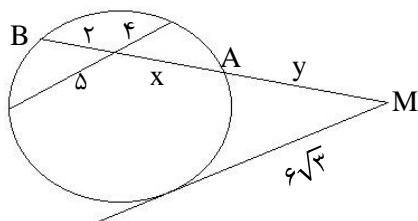
سوال ۵

در مثلث  $ABC$  ثابت کنید:  $S = p \cdot r$   
 (  $p$  نصف محیط مثلث و  $r$  شعاع دایره محاطی داخلی مثلث است )

( ۱/۵ نمره )

سوال ۶

مقادیر مجهول را حساب کنید.



( ۱/۵ نمره )

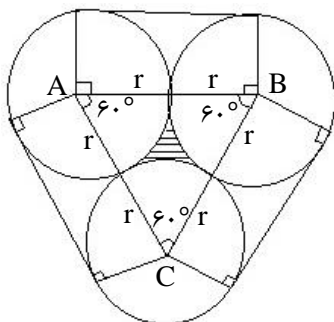
سوال ۷

طول شعاع های دو دایره متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آن ها مساوی  $3\sqrt{7}$  و طول مماس مشترک داخلی آن ها  $\sqrt{15}$  و طول خط مرکزین آن ها مساوی ۸ واحد است.

( ۱/۵ نمره )

سوال ۸

سه دایره به شعاع  $r$  دو به دو بر هم مماسند و مطابق شکل با یک کُش به هم بسته شده اند. طول این کُش و مساحت ناحیه بین این سه دایره را بر حسب  $r$  محاسبه کنید.



نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: ۹۶/۱۰/۰۹

نام درس: هندسه ۲ - پایه یازدهم - ۱۲۰ دقیقه

نام مدرسه

(۱/۵ نمره)

سوال ۹

ثابت کنید در هر چهار ضلعی محاطی، دو زاویه مقابل مکمل هستند.  
آیا عکس قضیه فوق هم درست است؟

(۱/۵ نمره)

سوال ۱۰

یک دوزنقه هم محیطی است هم محاطی. ثابت کنید مساحت آن برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن ها.

(۱/۵ نمره)

سوال ۱۱

ثابت کنید هر تبدیل طول یا (ایزومتري) اندازه زاویه را حفظ می کند.

(۲ نمره)

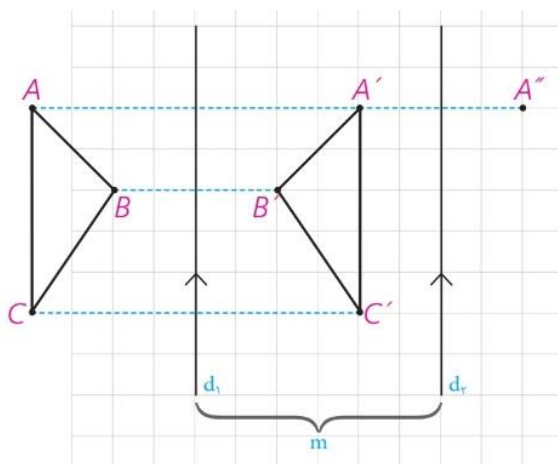
سوال ۱۲

ثابت کنید در هر انتقال، اندازه پاره خط با تصویرش برابر است.

در شکل،  $d_1$  به موازات  $d_2$  و به فاصله  $m$  از آن قرار دارد. بازتاب مثلث  $ABC$  را نسبت به  $d_1$  رسم می کنیم و آن را  $A'B'C'$  می نامیم.  
الف) بازتاب  $A'B'C'$  را نسبت به  $d$  رسم کنید و آن را  $A''B''C''$  بنامید.

ب) نشان دهید  $AA'' = BB'' = CC'' = 2m$

ج) با چه تبدیلی می توان مثلث  $A''B''C''$  را تصویر  $ABC$  دانست؟ چه نتیجه ای می گیرید؟



نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: ۹۶/۱۰/۰۹

نام درس: هندسه ۲ - پایه یازدهم - ۱۲۰ دقیقه

نام مدرسه

توجه! لطفا سوالات را در کادر مشخص شده با خط خوش پاسخ دهید. (پاسخ های خارج از کادر تصحیح نخواهد شد)

( ۱/۵ نمره )

سوال ۱

مفاهیم زیر را تعریف کنید. (هر بخش ۰/۵ نمره)

الف) چهارضلعی محیطی

یک چهارضلعی را محیطی می گوئیم اگر و فقط اگر دایره ای باشد که به همه ضلع های آن مماس باشد.

ب) چندضلعی منتظم

یک چند ضلعی محدب را منتظم می نامند. هرگاه تمام ضلع های آن هم اندازه و تمام زاویه های آن نیز هم اندازه باشند.

ج) تبدیل هندسی تبدیل T در صفحه P، تابعی است که به هر نقطه A از صفحه P، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از صفحه P نظیر می کند و برعکس هر

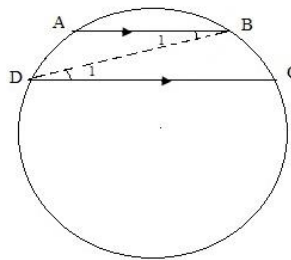
نقطه A' از صفحه P، تصویر دقیقاً یک نقطه A از صفحه P است. اگر تبدیل را با حرف T نمایش دهیم به اختصار چنین می نویسیم: T:P → P, T(A)=A'

( ۱ نمره )

سوال ۲

فرض	AB    CD
حکم	کمان AD = کمان BC

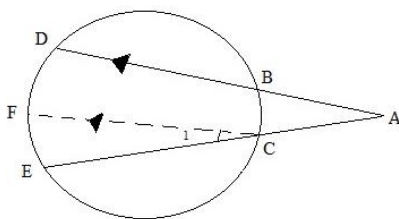
دو وتر از دایره ای با هم موازی هستند. ثابت کنید کمان های بین دو وتر برابرند.  
از B به D وصل می کنیم. داریم:



$$\left\{ \begin{array}{l} AB \parallel DC \rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1} \quad (0.5 \text{ نمره}) \\ \text{مورب } BD \\ \widehat{B_1} = \frac{\text{کمان } AD}{2} \rightarrow \text{کمان } AD = \text{کمان } BC \quad (0.5 \text{ نمره}) \\ \widehat{D_1} = \frac{\text{کمان } BC}{2} \end{array} \right.$$

( ۱ نمره )

سوال ۳



در شکل مقابل ثابت کنید:  $\widehat{DAE} = \frac{1}{2}(\text{کمان } DE - \text{کمان } BC)$

حکم: زاویه  $\widehat{DAE} = \frac{1}{2}(\text{کمان } DE - \text{کمان } BC)$

از نقطه C خطی به موازات BD رسم می کنیم تا دایره را در نقطه ای مانند F قطع کند. داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} CF \parallel AD \rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{A} \quad (0.5 \text{ نمره}) \\ \text{مورب } AE \\ \widehat{C_1} = \frac{\text{کمان } FE}{2} = \frac{\text{کمان } ED - \text{کمان } FD}{2} = \frac{\text{کمان } ED - \text{کمان } BC}{2} \end{array} \right. \rightarrow \widehat{A} = \frac{1}{2}(\text{کمان } DE - \text{کمان } BC) \quad (0.5 \text{ نمره})$$

( ۲ نمره )

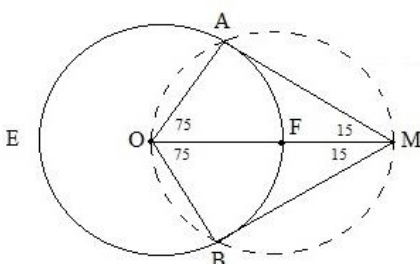
سوال ۴

الف) به کمک خط کش و پرگار از نقطه M خارج دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کنید. (مراحل رسم را توضیح دهید)  
ب) اگر نقطه M دایره را با زاویه ۳۰ درجه ببیند ( $\widehat{AMB} = 30^\circ$ )، کمان های کوچک و بزرگی را که توسط A و B ایجاد می شود، محاسبه کنید.

الف) فرض کنید M نقطه خارج دایره C(O,R) باشد. ابتدا دایره ای به قطر OA رسم می کنیم تا دایره C را در نقطه های A و B قطع کند. (۰/۵ نمره)

حال از نقطه M به نقاط A و B وصل می کنیم. می توان نوشت:

MA و به طریق مشابه MB بر دایره C مماس است  $\rightarrow$  زاویه  $\angle OAM = 90^\circ \rightarrow$  OM قطر دایره (۰/۵ نمره)

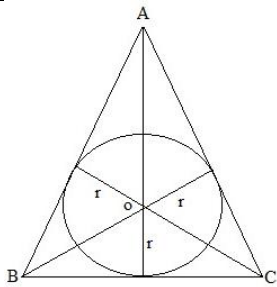


ب)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{کمان } AEB + \text{کمان } AFB = 360^\circ \\ \text{کمان } AEB - \text{کمان } AFB = 210^\circ \rightarrow \text{کمان } AFB = 150^\circ, 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ \quad (0.5 \text{ نمره}) \\ \frac{\text{کمان } AEB - \text{کمان } AFB}{2} = 30^\circ \end{array} \right. \quad (0.5 \text{ نمره})$$

( ۱/۵ نمره )

سوال ۵



در مثلث ABC ثابت کنید:  $S = p \cdot r$

(p نصف محیط مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث است)

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

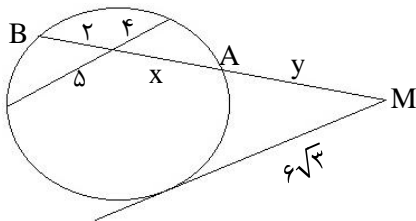
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}r(AB) + \frac{1}{2}r(BC) + \frac{1}{2}r(AC) \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

$$S = \frac{1}{2}r(AB + BC + AC) \rightarrow \frac{1}{2}r(2p) \rightarrow S = rp \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

( ۱/۵ نمره )

سوال ۶

مقادیر مجهول را حساب کنید.



$$2 \times x = 5 \times 4 \rightarrow x = 10 \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

$$y(y + 12) = (6\sqrt{3})^2 \rightarrow y(y + 12) = 108 \rightarrow y = 6 \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

(نمره ۰/۵)

( ۱/۵ نمره )

سوال ۷

طول شعاع های دو دایره متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آن ها مساوی  $3\sqrt{7}$  و طول مماس مشترک داخلی آن ها  $\sqrt{15}$  و طول خط مرکزین آن ها مساوی ۸ واحد است.

$$\text{رابطه طولی مماس مشترک خارجی} \quad (\text{نمره } ۰/۵) \quad (3\sqrt{7})^2 = 8^2 - (R - R')^2 \rightarrow R - R' = 1$$

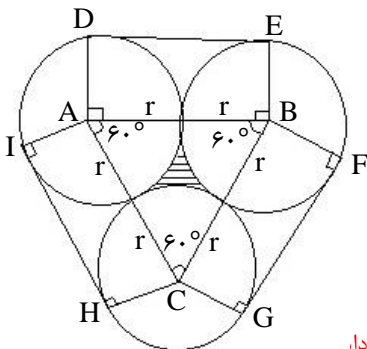
$$\rightarrow 2R = 8 \rightarrow R = 4, R' = 3 \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

$$\text{رابطه طولی مماس مشترک داخلی} \quad (\text{نمره } ۰/۵) \quad (\sqrt{15})^2 = 8^2 - (R + R')^2 \rightarrow R + R' = 7$$

( ۱/۵ نمره )

سوال ۸

سه دایره به شعاع r دو به دو بر هم مماسند و مطابق شکل با یک کُش به هم بسته شده اند. طول این کُش و مساحت ناحیه بین این سه دایره را بر حسب r محاسبه کنید.



$$HI = GF = 2r \rightarrow DE = AB = 2r$$

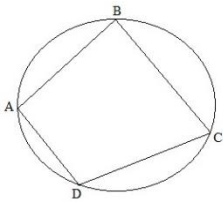
$$\text{طول کمان EF (روبرو به } 120^\circ \text{ درجه)} = \text{طول کمان HG} = \text{طول کمان ID} = \frac{1}{3}(2\pi r)$$

$$\text{طول کُش} = 3(2r) + 3 \times \frac{1}{3}(2\pi r) = 6r + 2\pi r \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\text{مساحت ناحیه محدود به سه دایره} = S_{ABC} - 3S_{\text{قطاع}} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 - 3 \times \frac{1}{6}\pi r^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 - \frac{\pi r^2}{2} \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

سوال ۹

(۱/۵ نمره)



ثابت کنید در هر چهار ضلعی محاطی، دو زاویه مقابل مکمل هستند.

آیا عکس قضیه فوق هم درست است؟

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\text{کمان } BCD}{2} + \frac{\text{کمان } BAD}{2} = \frac{\text{کمان } BCD + \text{کمان } BAD}{2} = \frac{360}{2} = 180 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\hat{B} + \hat{D} = \frac{\text{کمان } ADC}{2} + \frac{\text{کمان } ABC}{2} = \frac{360}{2} = 180 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

عکس قضیه هم درست است. یعنی اگر زاویه های مقابل یک چهار ضلعی مکمل یکدیگر باشند آن گاه آن چهار ضلعی محاطی است.

(۰/۵ نمره)

سوال ۱۰

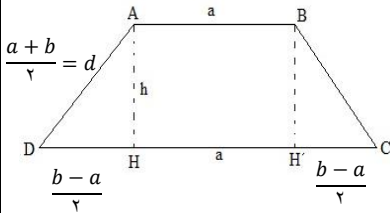
(۱/۵ نمره)

یک دوزنقه هم محیطی است هم محاطی. ثابت کنید مساحت آن برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن ها.

دوزنقه محاطی است بنابراین متساوی الساقین می باشد. (نمره ۰/۲۵)

$$\text{دوزنقه محیطی است } \leftarrow a+b = 2d \leftarrow d = \frac{a+b}{2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

ارتفاع های AH و BH' را رسم می کنیم. داریم:  $h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$  مثلث ADH



$$h^2 = \frac{(a+b)^2 - (b-a)^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{4ab}{4} \rightarrow h^2 = ab \rightarrow h = \sqrt{ab} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$S = \frac{1}{2} h(a+b) = \frac{a+b}{2} \times \sqrt{ab} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

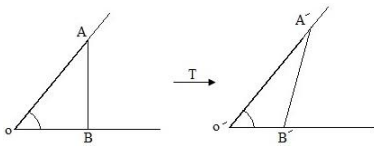
میانگین هندسی دو قاعده  
میانگین حسابی دو قاعده

سوال ۱۱

(۱/۵ نمره)

ثابت کنید هر تبدیل طول یا (ایزومتري) اندازه زاویه را حفظ می کند.

فرض کنید تبدیل طول T طول پا است. در شکل داریم:



$$\left\{ \begin{array}{l} T(A) = A' \\ T(B) = B' \end{array} \right. \rightarrow T(AB) = A'B' \xrightarrow{\text{طول پا است}} AB = A'B' \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T(O) = O' \\ T(A) = A' \end{array} \right. \rightarrow T(OA) = O'A' \xrightarrow{\text{طول پا است}} OA = O'A'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T(O) = O' \\ T(B) = B' \end{array} \right. \rightarrow T(OB) = O'B' \xrightarrow{\text{طول پا است}} OB = O'B'$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \text{مثلث } OAB \cong \text{مثلث } O'A'B' \quad (\text{نمره } 0/5) \rightarrow \hat{O} = \hat{O}' \quad (\text{نمره } 0/5)$$

البته پیش فرض کتاب این است که تبدیل طول پا، خط را به صورت خط حفظ می کند

سوال ۱۲

(۲ نمره)

ثابت کنید در هر انتقال، اندازه پاره خط با تصویرش برابر است.

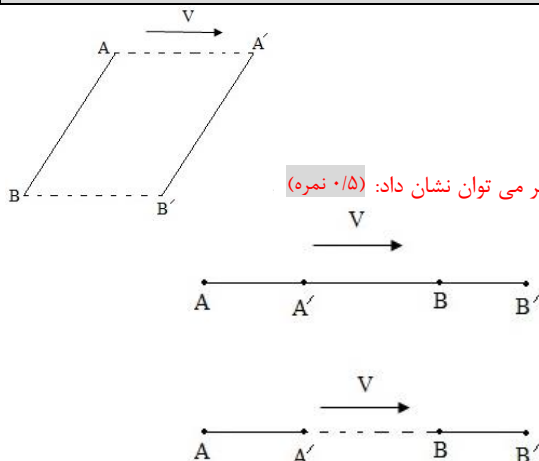
حالت الف) اگر پاره خط دلخواه AB با بردار V موازی نباشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} AA' = BB' = |V| \\ AA' \parallel BB' \end{array} \right. \rightarrow \text{متوازی اضلاع } AA'B'B \quad (\text{نمره } 0/5) \rightarrow AB = A'B'$$

حالت ب) اگر پاره خط AB موازی با بردار V باشد به کمک مجموع یا تفاضل پاره خط ها در دو حالت زیر می توان نشان داد: (نمره ۰/۵)

$$\begin{cases} AB = A'A + A'B \\ A'B' = A'B + BB' \rightarrow AB = A'B' \quad (1) \\ AA' = BB' \end{cases}$$

$$\begin{cases} AB = AA' - A'B \\ A'B' = BB' - A'B \rightarrow AB = A'B' \quad (2) \\ AA' = BB' \end{cases}$$



(۲ نمره)

سوال ۱۳

در شکل،  $d_1$  به موازات  $d_2$  و به فاصله  $m$  از آن قرار دارد. بازتاب مثلث  $ABC$  را نسبت به  $d_1$  رسم می کنیم و آن را  $A'B'C'$  می نامیم. الف) بازتاب  $A'B'C'$  را نسبت به  $d$  رسم کنید و آن را  $A''B''C''$  بنامید.

ب) نشان دهید  $AA'' = BB'' = CC'' = 2m$

ج) با چه تبدیلی می توان مثلث  $A''B''C''$  را تصویر  $ABC$  دانست؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

الف) رسم مناسب (۰/۵ نمره)

ب)  $AA'' = AA' + A'A'' = 2HA' + 2H'A' = 2(HA' + H'A') = 2HH' = 2M \rightarrow AA' = BB'' = CC'' = 2M$  (۰/۵ نمره)

ج) با تبدیل انتقال (۰/۵ نمره) به طول بردار  $2M$  (۰/۵ نمره)، تصویر  $A''B''C''$  است و ترکیب دو تبدیل بازتاب متوالی نسبت به محورهای بازتاب موازی در این مسئله معادل انتقال است.

