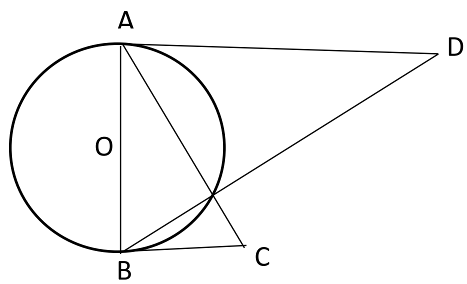
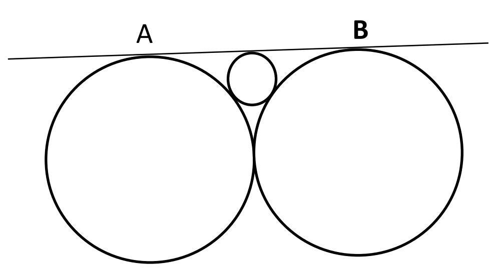
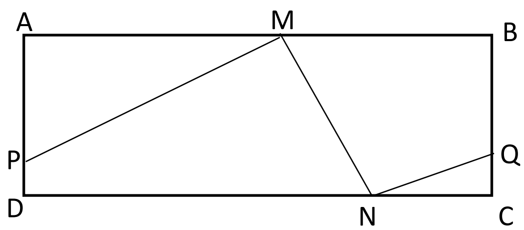
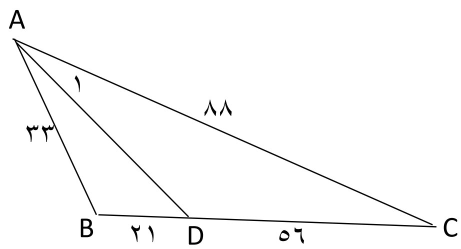
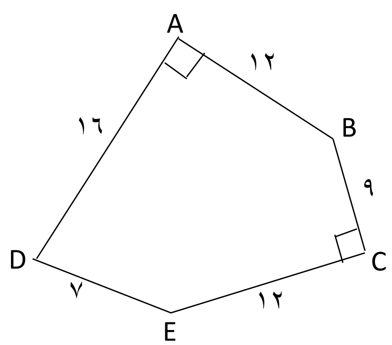
مدیریت آموزش و پرورش شهرستان بانه	دبیرستان شهید قاسم نصراللهی	نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۹۷
نام :	درس : هندسه (۲)	تاریخ : ۱۳۹۷/۳/۱۳
نام خانوادگی :	پایه : یازدهم	طراح : مهدی جهانی راد
نام پدر :	رشته : ریاضی و فیزیک	مدت امتحان : ۱۱۰ دقیقه

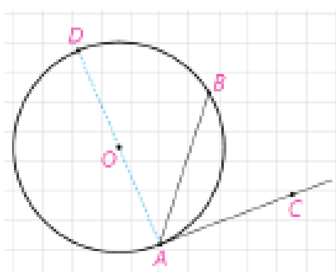
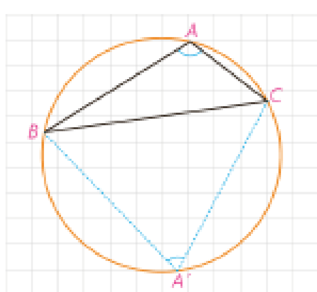
ردیف	سوال	نمره
۱	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید . الف) در حالت کلی تجانس شیب خطوط را حفظ می کند . ب) بازتاب تبدیل همانی است .	۰,۵
۲	جاهای خالی را با کلمه یا عبارت مناسب تکمیل کنید . الف) اگر نقطه ای بیرون دایره باشد ، فاصله آن نقطه تا مرکز دایره .... شعاع دایره است . ب) دو دایره مماس خارج .... مماس مشترک دارند .	۰,۵
۳	گزینه درست را انتخاب کنید . الف) شرط این که تجانس با نسبت k انقباض باشد ، این است که ...... ۱) $k=1$ ۲) $k=-1$ ۳) $\|k\|<1$ ۴) $\|k\|>1$ ب) کدام تبدیل ، مساحت شکل را حفظ نمی کند ؟ ۱) دوران ۲) تجانس ۳) انتقال ۴) بازتاب	۰,۵
۴	قضایای زیر را ثابت کنید. الف) اندازه هر زاویه ظلی (حاده) برابر است با نصف اندازه کمان روبه روی آن زاویه . ب) در هر مثلث دلخواه مانند ABC ، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه رو به آن برابر است با طول قطر دایره محیطی مثلث . (در صورتی که زاویه A منفرجه باشد.)	۱,۲۵ ۱,۲۵

	ج) تجانس ، شیب را حفظ می کند .	۱
	د) در هر مثلث ، نیمساز هر زاویه داخلی ، ضلع روبه رو به آن زاویه را به نسبت اندازه های اضلاع آن زاویه تقسیم می کند .	۱,۲۵
۵	در شکل زیر BC , AD بر دایره ای به قطر AB مماس اند . اگر $AD = x$ و $BC = y$ طول قطر دایره را بیابید. 	۱,۲۵
۶	دو دایره C_1 , C_2 ، با شعاع های برابر R مماس خارج اند و AB مماس مشترک خارجی این دو دایره است. اگر شعاع دایره مماس بر C_1 , C_2 و AB برابر r باشد ، نسبت $\frac{r}{R}$ را بیابید . 	۱,۲۵

۷	یک ذوزنقه هم محاطی است هم محیطی ، ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی ان ها .	۱٫۵
۸	نشان دهید دوران تبدیلی طول پاست در حالتی که مرکز دوران O بر پاره خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه دوران از زاویه AOB بیش تر باشد .	۱
۹	مستطیل $ABCD$ به طول اضلاع $AB=15$ و $BC=4$ مفروض است. نقاط P , Q روی اضلاع AD و BC طوری قرار دارند که $AP=3$, $BQ=3$. نقاط متغیر M , N را روی اضلاع AB , CD قرار دارند . حداقل مقدار $PM+MN+NQ$ را بیابید . 	۱٫۵
۱۰	در مثلث ABC اگر $B=30^o$ و $C=45^O$ ، ثابت کنید $\frac{4}{b^2}+\frac{4}{c^2}=\frac{3}{h_a^2}$	۱٫۲۵

۱۱	دو قایق از نقطه دریاچه ای با سرعت های $75\frac{km}{h}$ و $120\frac{km}{h}$ و با زاویه 120^o از هم دور می شوند . 40 دقیقه بعد در چه فاصله ای از هم قرار دارند ؟	۱,۲۵
۱۲	در شکل زیر اندازه زاویه A_1 چند درجه است ؟ 	۱,۵
۱۳	مساحت پنج ضلعی زیر را بیابید . 	۲
۱۴	در یک مثلث به طول اضلاع 10 , 9 , 17 ، شعاع دایره محاطی مثلث را بیابید .	۱,۲۵
جمع		۲۰
	نام دبیر و امضاء نمره به حروف : نمره به عدد :	

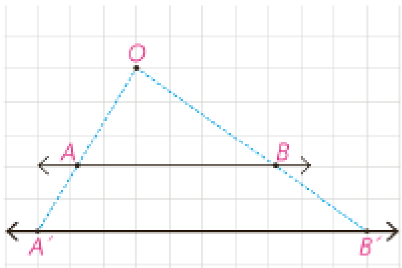
کلید سوالات امتحان هندسه (۲) یازدهم ریاضی دبیرستان شهید قاسم نصراللهی خرداد ۹۷ طراح (مهدی جهانی راد)

ردیف	پاسخ	نمره
۱	الف) درست ب) نادرست	۰,۵
۲	جاهای خالی را با کلمه یا عبارت مناسب تکمیل کنید . الف) بزرگتر از ب) سه	۰,۵
۳	الف) گزینه ۳ ب) تجانس	۰,۵
۴	الف) از A قطر AD را رسم می کنیم در این صورت $DAC = 90^0$ و در نتیجه $DAC = \frac{1}{2}\widehat{AD}$ (۱) از طرفی زاویه DAB یک زاویه محاطی است و در نتیجه $DAB = \frac{1}{2}\widehat{DB}$ (۲) از تفاضل (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که : $$DAC - DAB = \frac{1}{2}\left(\widehat{AD} - \widehat{DB}\right) \xrightarrow{yields} BAC = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$  ب) نقطه دلخواه A' روی کمان BC را به B و C وصل می کنیم. از طرفی زوایای A و A' مکمل هستند چون : $$\widehat{A} = \frac{\widehat{BA'C}}{2}, \widehat{A'} = \frac{\widehat{BAC}}{2} \xrightarrow{yields} \widehat{A} + \widehat{A'} = \frac{\widehat{BA'C} + \widehat{BAC}}{2} = \frac{360^0}{2} = 180^0$$ بنابراین زاویه A' حاده است از طرفی $sin(A) = sin(\pi - A') = sin(A')$. در مثلث $A'BC$ طبق قضیه ای داریم $\frac{a}{sin(A')} = 2R$ و در نتیجه $\frac{a}{sin(A)} = 2R$. 	۱,۲۵ ۱,۲۵

۱

ج) حالت اول : نقطه O روی خط AB قرار دارد .
در این حالت بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس های نقاط A و B روی خط AB واقع می شوند و بنابراین $A'B'$ روی AB واقع می شود و شیب خط تغییری نمی کند .

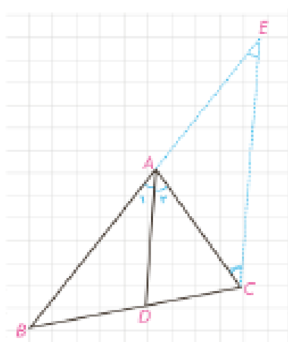
حالت دوم : نقطه O غیرواقع بر خط AB می باشد . اگر نقاط A' و B' مجانس های نقاط A و B باشند طبق تعریف داریم $OA' = k\,OA$ و $OB' = k\,OB$ بنابراین $\frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} = k$ و درنتیجه طبق عکس قضیه تالس $AB \| A'B'$ پس در این حالت نیز دو خط موازیند .

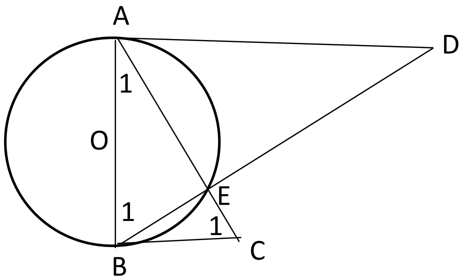


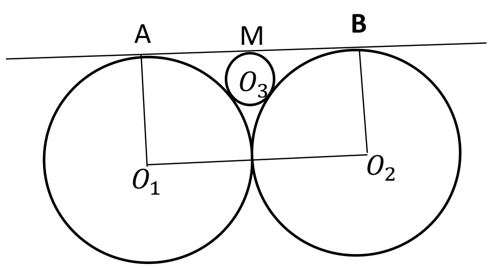
۱,۲۵

د) از نقطه C خطی موازی نیمساز AD رسم می کنیم تا امتداد AB را در E قطع کند. در این صورت داریم :
$AD \| EC \xrightarrow{yields} \widehat{A_1} = \widehat{E}$ و $AD \| EC \xrightarrow{yields} \widehat{A_2} = \widehat{C}$ در نتیجه چون $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ پس $\widehat{E} = \widehat{C}$ و مثلث AEC متساوی الساقین می باشد .
در مثلث EBC طبق قضیه تالس داریم :

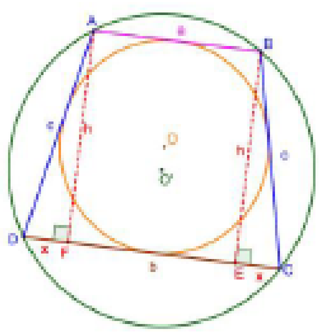
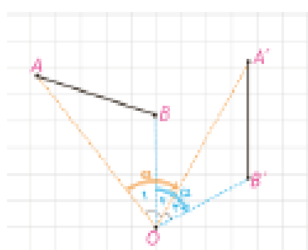
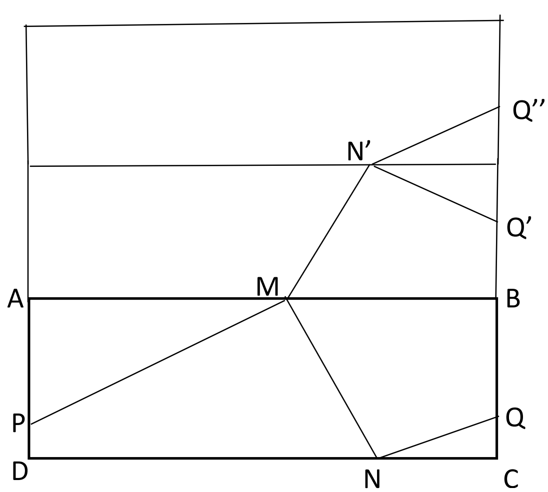
$$AE \| DC \xrightarrow{yields} \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{yields} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

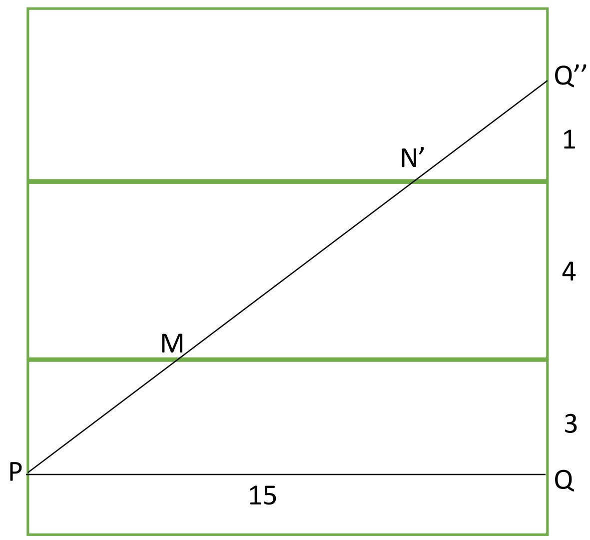
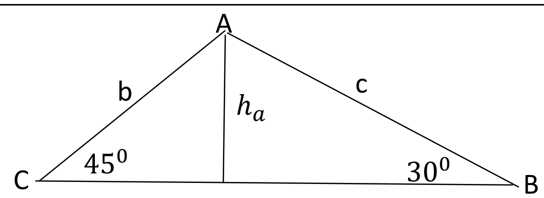


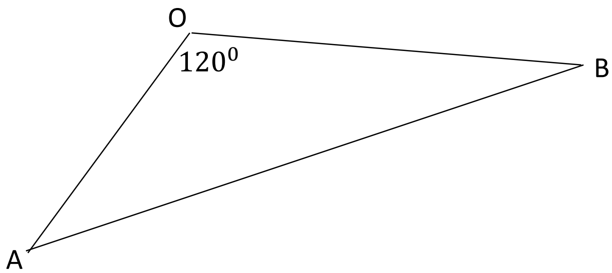
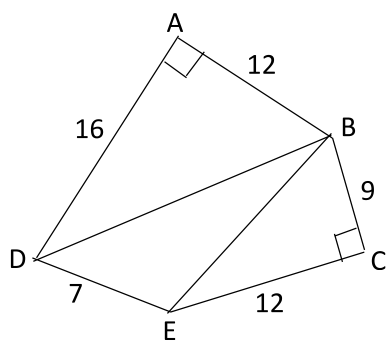
<table>
<tr>
<td>۱,۲۵</td>
<td>
$\widehat{E} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{180^0}{2} = 90^0$
ثابت می کنیم دو مثلث ABC و ABD متشابه اند :
$\widehat{C_1} + \widehat{A_1} + \widehat{B} = 180^0 \xrightarrow{yields} \widehat{C_1} + \widehat{A_1} = 90^0$
$\widehat{A_1} + \widehat{B_1} + \widehat{E} = 180^0 \xrightarrow{yields} \widehat{B_1} + \widehat{A_1} = 90^0$
در نتیجه $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$. و چون $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0$
پس به حالت (زز) $ABC \sim ABD$. حال نسبت تشابه
را می نویسیم :


$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{AB} \xrightarrow{yields} AB^2 = AD\,.\,BC \xrightarrow{yields} AB^2 = x\,y \xrightarrow{yields} AB = \sqrt{x\,y}$
</td>
<td>۵</td>
</tr>
<tr>
<td>۱,۲۵</td>
<td>
چهارضلعی ABO_1O_2 مستطیل است پس : $AB = O_1O_2 = 2R$ و $MB = \frac{AB}{2} = R$.
MB مماس مشترک دایره سمت راست و دایره کوچک است و $O_3O_2 = r + R$.
$MB = \sqrt{{O_3O_2}^2 - (R-r)^2} \xrightarrow{yields} R = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} \xrightarrow{yields} R = 4r$
بنابراین $\frac{r}{R} = \frac{1}{4}$.


</td>
<td>۶</td>
</tr>
<tr>
<td>۱,۵</td>
<td>
چون ذوزنقه $ABCD$ محاطی است پس متساوی الاضلاع است و چون محیطی است مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است . در نتیجه $2b = a + b$ و مثلث ADF قائم الزاویه است .
$2c = a + b \xrightarrow{yields} c = \frac{a+b}{2}$
$b = 2x + a \xrightarrow{yields} x = \frac{b-a}{2}$
$h^2 = c^2 - x^2 \xrightarrow{yields} h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \xrightarrow{yields} h^2 = \frac{4ab}{4} \xrightarrow{yields} h = \sqrt{ab}$
</td>
<td>۷</td>
</tr>
</table>

	درنتیجه : $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b) \times \sqrt{ab}$ 	
۱	با توجه به شکل $\alpha = o_1 + o_2 = o_3 + o_2$ در نتیجه $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$. از طرفی طبق همنهشتی مثلث ها داریم : $OA = OA'$ $OB = OB'$ لذا دو مثلث AOB و $A'OB'$ به حالت (ض ز ض) همنهشت هستند و درنتیجه $AB = A'B'$. 	۸
۱,۵	مطابق شکل بازتاب مستطیل را نسبت به ضلع AB رسم می کنیم سپس بازتاب مستطیل جدید را نسبت به طولش رسم می کنیم . 	۹

	$\left.\begin{array}{r}\mathbf{MN = MN'}\\ \boldsymbol{NQ = N'Q' = N'Q''}\end{array}\right\} \xrightarrow{yields} \mathbf{PM + MN + NQ = PM + MN' + N'Q''}$ اکنون کمترین مقدار $\boldsymbol{PM + MN' + N'Q''}$ را به دست می آوریم. به وضوح این کمترین مقدار هنگامی به دست می آید که $\boldsymbol{M}$ و $\boldsymbol{N'}$ روی خط $\boldsymbol{PQ''}$ قرار داشته باشند .  در مثلث قائم الزاویه $\boldsymbol{PQQ''}$ داریم : $\boldsymbol{PQ''^2 = PQ^2 + QQ''^2 = 15^2 + 8^2 = 289}$ در نتیجه $\boldsymbol{PQ'' = \sqrt{289} = 17}$ پس: $\boldsymbol{PM + MN' + N'Q'' = PM + MN + NQ = 17.}$	
۱٫۲۵	 $\boldsymbol{\frac{h_a}{b} = sin45^0 \xrightarrow{yields} \frac{h_a^2}{b^2} = \frac{1}{2}}$ $\boldsymbol{\frac{h_a}{c} = sin30^0 \xrightarrow{yields} \frac{h_a^2}{c^2} = \frac{1}{4}}$ $\boldsymbol{\frac{h_a^2}{b^2} + \frac{h_a^2}{c^2} = \frac{3}{4} \xrightarrow{yields} h_a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \frac{3}{4} \xrightarrow{yields} \frac{4}{b^2} + \frac{4}{c^2} = \frac{3}{h_a^2}}$	۱۰

۱۱	 $OA = 75 \times \frac{2}{3} = 50\ km$ $OB = 120 \times \frac{2}{3} = 80\ km$ $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \times OA \times OB \times cos120^0 = 2500 + 6400 + 50 \times 80$ $AB = \sqrt{12900} = 113.58\ km$	۱,۲۵
۱۲	طبق قضیه کسینوس ها داریم : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times cos\widehat{A} \xrightarrow{yields} cos\widehat{A} = \frac{1}{2} \xrightarrow{yields} \widehat{A} = 60^0$ اکنون نشان می دهیم AD نیمساز است : $\frac{AB}{AC} = \frac{33}{88} = \frac{3}{8}$ $\frac{BD}{CD} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$ در نتیجه $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ پس AD نیمساز است و $\widehat{A_1} = \frac{\widehat{A}}{2} = 30^0$.	۱,۵
۱۳	 طول AD و AC را به کمک قضیه فیثاغورث به دست می آوریم : $AD^2 = AE^2 + DE^2 = 12^2 + 16^2 = 400 \xrightarrow{yields} AD = 20$ $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \xrightarrow{yields} AC = 15$ مساحت مثلث ACD را به کمک دستور هرون پیدا می کنیم : $S_{ADC} = 42$	۲

	به وضوح $S_{ADE}=96$ و $S_{ABC}=54$. بنابراین : $S_{ABCDE}=S_{ABC}+S_{ADC}+S_{ADE}=54+42+96=192$.	
۱۴	مساحت مثلث را با دستور هرون پیدا می کنیم : $P=\frac{10+9+17}{2}=18$ $S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{18\times 8\times 9\times 1}=36$ از طرفی می دانیم مساحت مثلث برابر است با $S=rP$ که r شعاع دایره محاطی است پس : $S=rP\xrightarrow{yields}36=r\times 18\xrightarrow{yields}r=2$.	۱,۲۵
جمع	در مورد راه حل های دیگر نظر همکاران گرامی ارجحیت دارد	۲۰
	طراح : مهدی جهانی راد	