

طراح: سعید اکبرزاده	مرکز سنجش آموزش مدارس برتر	نام و نام خانوادگی:
	آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)	مدرسه:
	مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه	کلاس:
صفحه ۱ از ۴	رشته: ریاضی	پایه: یازدهم
		نام درس: حسابان

سوال ۱	بارم: ۱ نمره
<p>جاهای خالی را کامل کنید.</p> <p>الف) مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $S_n = n^2 + 3n$ می باشد، مجموع جملات هفتم تا دهم برابر با است.</p> <p>ب) در معادله درجه دوم $x^2 - (m+2)x - 2 = 0$ اگر مجموع ریشه‌ها برابر ۷ باشد، مقدار m برابر با است.</p> <p>ج) شیب خطی که بر خط گذرنده از نقاط $A(3,4)$ و $B(-1,-2)$ عمود است برابر با است.</p> <p>د) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{3- x }$ به صورت است.</p>	
سوال ۲	بارم: ۱/۲۵ نمره
<p>برای از بین بردن ذرات معلق در یک محلول، آن را از صافی‌هایی عبور می‌دهیم که پس از عبور از هر صافی تعداد ذرات معلق موجود در محلول نصف می‌شود. حداقل چه تعداد صافی لازم است تا بیش از ۹۹/۹ درصد ذرات معلق موجود در محلول از بین بروند؟</p>	
سوال ۳	بارم: ۱/۲۵ نمره
<p>اگر نمودار تابع $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند طول‌های دو نقطه تلاقی دیگر آن با محور xها را بیابید.</p>	
سوال ۴	بارم: ۲/۷۵ نمره

الف) $2 x-1 - x+2 = 5$	ب) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$
---------------------------	--------------------------------

بارم: ۱/۲۵ نمره

سوال ۵

نمودار تابع $f(x) = x - \frac{|x-1|}{x-1}$ را رسم کرده و سپس معادله $f(x) = 2$ را به روش هندسی حل کنید.

بارم: ۱ نمره

سوال ۶

در معادله $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جوابها دو واحد از جواب دیگر بزرگتر باشد، مقدار m و هر دو جواب را پیدا کنید.

بارم: ۱/۵ نمره

سوال ۷

نقاط $A(-1,2)$ ، $B(7,-6)$ و $C(4,5)$ سه رأس یک مثلث هستند، طول عمودی که از رأس A بر میانه نظیر رأس C وارد می شود چقدر است؟

بارم: ۱/۲۵ نمره

سوال ۸

فرض کنید ماشین تابع f به عنوان ورودی اعداد حقیقی بزرگتر مساوی -3 و کوچکتر از 4 را قبول می کند و پس از دریافت، قدر مطلق آن عدد را محاسبه کرده و حاصل آن را قرینه می کند و به جواب به دست آمده دو واحد اضافه می کند. الف) ضابطه تابع f را بنویسید.

ب) به ازای کدام ورودی، خروجی تابع برابر -1 می باشد؟

ج) نمودار تابع را رسم نموده و برد تابع را تعیین کنید.

بارم: ۱ نمره

سوال ۹

نمودار تابع $f(x) = -\sqrt{x-1} + 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

بارم: ۱ نمره

سوال ۱۰

دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{[2x]-10}$ را بیابید.

بارم: ۱/۲۵ نمره

سوال ۱۱

نمودار تابع $f(x) = x[x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید.

بارم: ۱/۲۵ نمره

سوال ۱۲

در صورت وارون پذیر بودن، تابع وارون تابع $f(x) = \frac{x^3}{1-x^3}$ را بیابید.

سوال ۱۳

بارم: ۱/۵ نمره

توابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ ، $g(x) = \frac{1}{x+1}$ مفروضند.
الف) دامنه تابع $f \circ g$ را بیابید.

ب) حاصل $(6)(g \circ f)$ را بیابید.

سوال ۱۴

بارم: ۰/۷۵ نمره

توابع $f = \{(2,4), (-1,3), (6,5)\}$ و $g = \{(-6,2), (0,4), (3,6)\}$ مفروضند، تابع $2f - g^{-1}$ را بیابید.

سوال ۱۵

بارم: ۲ نمره

به موارد زیر پاسخ دهید.
الف) نمودار تابع $y = |3^x - 1|$ را رسم کنید.

$$5^x \times \frac{1}{\sqrt{125}} = 25^{x-2}$$

ب) معادله مقابل را حل کنید.

مرکز سنجش آموزش مدارس برتر
 آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)
 پاسخنامه آزمون: حسابان

پاسخ سؤال ۱:

الف) ۷۶ ب) $m=5$ ج) $-\frac{2}{3}$ د) $D_f = [-3, 3]$

پاسخ سؤال ۲:

مقادیر جذب شده در صافی‌ها دنباله‌ای هندسی به صورت زیر می‌باشند:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad q = \frac{1}{2}$$

$$S_n > \frac{99,9}{100} \Rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} > 0,999 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} > 0,999 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > 0,999$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < 1 - 0,999 \Rightarrow \frac{1}{2^n} < 0,001 \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow 2^n > 1000 \Rightarrow n \geq 10$$

حداقل ۱۰ صافی لازم است.

پاسخ سؤال ۳:

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m \quad x=2 \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 16 - 20 - 2 + m = 0 \Rightarrow m = 6$

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6 \quad | \quad x-2$$

$-2x^3 + 4x^2$	$2x^2 - x - 3$	
$-x^2 - x + 6$		
$\pm x^2 \pm 2x$		$f(x) = (x-2)(2x^2 - x - 3) = 0$
$-3x + 6$		$x = 2, 2x^2 - x - 3 = 0$
$\pm 3x \pm 6$		$\Delta = 1 + 24 = 25$
0		$x = \frac{1 \pm 5}{4} \Rightarrow x = -1, \frac{3}{2}$

پاسخ سؤال ۴:

الف) $2|x-1| - |x+2| = 5$

$x < -2 \Rightarrow -2(x-1) + x + 2 = 5 \Rightarrow -2x + 2 + x + 2 = 5 \Rightarrow -x + 4 = 5 \Rightarrow x = -1$ غ.ق.

$-2 \leq x < 1 \Rightarrow -2(x-1) - (x+2) = 5 \Rightarrow -2x + 2 - x - 2 = 5 \Rightarrow -3x = 5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$ جواب

$x \geq 1 \Rightarrow 2(x-1) - (x+2) = 5 \Rightarrow 2x - 2 - x - 2 = 5 \Rightarrow x - 4 = 5 \Rightarrow x = 9$ جواب

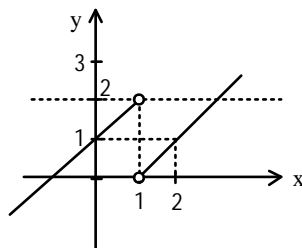
ب) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5 \Rightarrow \sqrt{x+5} = 5 - \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+5 = 25 - 10\sqrt{x} + x \Rightarrow 10\sqrt{x} = 20 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \xrightarrow{\text{امتحان}} \sqrt{9} + \sqrt{4} = 5 \Rightarrow 3 + 2 = 5 \checkmark$

پاسخ سؤال ۵:

$f(x) = x - \frac{|x-1|}{x-1}$

$x < 1 \Rightarrow f(x) = x - \frac{-(x-1)}{x-1} = x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right|$

$x > 1 \Rightarrow f(x) = x - \frac{x-1}{x-1} = x - 1 \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right|$



خط $y=2$ نمودار f را در یک نقطه قطع می‌کند پس معادله $f(x)=2$ یک ریشه مثبت دارد. جواب معادله $x=3$ است.

پاسخ سؤال ۶:

مرکز سنجش آموزش مدارس برتر
 آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)
 پاسخنامه آزمون: حسابان

$$2x^2 - 8x + m = 0$$

$$\alpha = \beta + 2, \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-8}{2} = 4 \Rightarrow \beta + 2 + \beta = 4 \Rightarrow \beta = 1$$

$$\alpha = 3 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow 3 \times 1 = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 6 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow m = 6 \text{ قابل قبول}$$

پاسخ سؤال ۷:

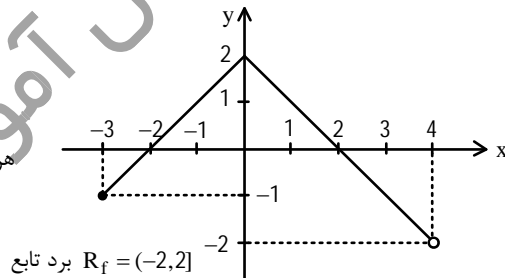
$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{-1+7}{2}, \frac{2-6}{2}\right) = (3, -2)$
 $m_{MC} = \frac{y_C - y_M}{x_C - x_M} = \frac{5 - (-2)}{4 - 3} = 7$
 معادله: $y - 5 = 7(x - 4) \Rightarrow y - 5 = 7x - 28 \Rightarrow 7x - y - 23 = 0 \Rightarrow c_M$
 $\xrightarrow{A(-1,2)} AH = \frac{|-7 - 2 - 23|}{\sqrt{49 + 1}} = \frac{32}{5\sqrt{2}}$

پاسخ سؤال ۸:

الف) $f: [-3, 4) \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = -|x| + 2$

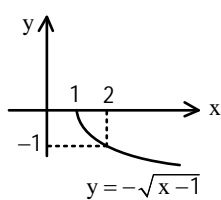
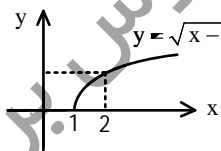
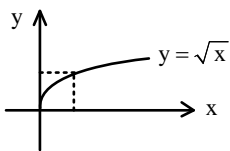
ب) $f(x) = -1 \Rightarrow -|x| + 2 = -1 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3 \xrightarrow{-3 \leq x < 4} \text{هر دو قابل قبول}$

ج) $\begin{cases} |x| = -3 \\ |y| = -1 \end{cases} \begin{cases} |x| = 4 \\ |y| = -2 \end{cases} \begin{cases} |x| = 0 \\ |y| = 2 \end{cases}$

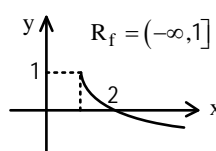


پاسخ سؤال ۹:

$f(x) = -\sqrt{x-1} + 1$ $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1, +\infty)$



$f(x) = -\sqrt{x-1} + 1$



پاسخ سؤال ۱۰:

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{[2x]-10}$ $x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow x \leq -1$ یا $x \geq 1$ (۱)

$[2x]-10=0 \Rightarrow [2x]=10 \Rightarrow 10 \leq 2x \leq 11 \Rightarrow 5 \leq x < 5,5$ (۲)

(۱) - (۲) $\Rightarrow D_f = ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)) - [5, 5,5) \Rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [1, 5) \cup [5,5, +\infty)$

پاسخ سؤال ۱۱:

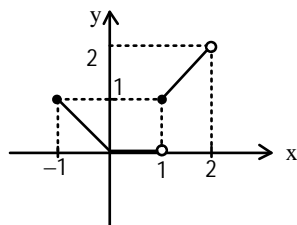
مرکز سنجش آموزش مدارس برتر
آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)
پاسخنامه آزمون: حسابان

$$f(x) = x[x] \quad -1 \leq x < 2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = x(-1) = -x \quad \left. \begin{array}{l} -1 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = x \times 0 = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = x \times 1 = x \quad \left. \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array}$$



مرکز سنجش آموزش مدارس برتر

مرکز سنجش آموزش مدارس برتر
 آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)
 پاسخنامه آزمون: حسابان

پاسخ سؤال ۱۲:

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^3} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1^3}{1-x_1^3} = \frac{x_2^3}{1-x_2^3}$$

$$\Rightarrow x_1^3 - x_1^3 x_2^3 = x_2^3 - x_1^3 x_2^3 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \text{تابع یک به یک است.}$$

$$y = \frac{x^3}{1-x^3} \Rightarrow x^3 = y - yx^3 \Rightarrow x^3 + yx^3 = y \Rightarrow (1+y)x^3 = y \Rightarrow x^3 = \frac{y}{1+y} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y}{1+y}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1+x}}$$

پاسخ سؤال ۱۳:

الف) $f(x) = \sqrt{x-2} \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$

$$g(x) = \frac{1}{x+1} \quad x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq -1 \mid g(x) \geq 2\}$$

$$g(x) \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x+1} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x+1} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1-2x-2}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{-2x-1}{x+1} \geq 0$$

x	-1	-1/2	
-2x-1	-	+	-
x+1			

$$\Rightarrow -1 < x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow D_{f \circ g} = (-1, -\frac{1}{2}]$$

ب) $(g \circ f - 3f)(6) = (g \circ f)(6) - 3f(6) = g(f(6)) - 3\sqrt{6-2} = g(2) - 3 \times 2 = \frac{1}{3} - 6 = \frac{1-18}{3} = -\frac{17}{3}$

پاسخ سؤال ۱۴:

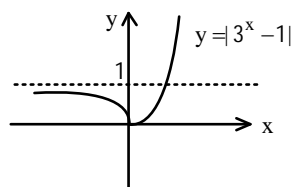
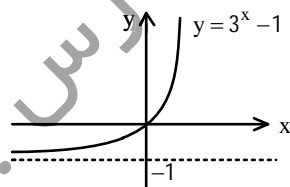
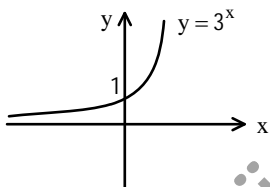
$$f = \{(2,4), (-1,3), (6,5)\} \Rightarrow 2f = \{(2,8), (-1,6), (6,10)\}$$

$$g = \{(-6,2), (0,4), (3,6)\} \Rightarrow g^{-1} = \{(2,-6), (4,0), (6,3)\}$$

$$D_{2f} \cap D_{g^{-1}} = \{2,6\} \Rightarrow 2f - g^{-1} = \{(2,8-(-6)), (6,10-3)\} = \{(2,14), (6,7)\}$$

پاسخ سؤال ۱۵:

الف)



ب) $5^x \times \frac{1}{\sqrt{5^3}} = (5^2)^{x-2} \Rightarrow 5^x \times 5^{-3/2} = 5^{2x-4} \Rightarrow 5^{x-3/2} = 5^{2x-4} \Rightarrow 2x-4 = x-\frac{3}{2} \Rightarrow x = 4-\frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$