

علیرضا فیضیان

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: جمع‌بندی تشریحی جبر و هندسه تحلیلی

ریاضیات یازده تبحر

۱ ☆ به ازای کدام مقدار m مجموع مجذورات دو ریشه‌ی حقیقی معادله $x^2 - mx + m - 1 = 0$ برابر ۴ است؟۲ ☆ مختصات قرینه‌ی نقطه‌ی $A(2, 3)$ را نسبت به خط $2x - 5y = 18$ تعیین کنید.۳ ☆ نقطه‌ی $A(1, 2)$ رأس مستطیلی است که معادله‌ی دو ضلع آن به صورت $x + 2y + 5 = 0$ و $2x - y + 15 = 0$ می‌باشد؛ مساحت این مستطیل را بیابید.۴ ☆ نقاط $A(1, 1)$ ، $B(-1, 2)$ و $C(0, -1)$ رئوس مثلث ABC هستند، اگر ارتفاع وارد بر BC باشد، مختصات نقطه‌ی H را بیابید.۵ ☆ سه رأس مثلث ABC ، $A(-11, -13)$ ، $B(-3, 3)$ و $C(3, 1)$ می‌باشند.الف) طول عمودی را که از رأس B در میانه‌ی نظیر رأس C وارد می‌شود به دست آورید.ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.۶ ☆ معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن برابر مربع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 4x - 6 = 0$ باشد.۷ ☆ در معادله‌ی $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب‌ها ۲ واحد کم‌تر از جواب دیگر باشد، m را بدست آورید و هر دو جواب را پیدا کنید.

۸ ☆ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2 + \sqrt{1+x} = \sqrt{x+9}$$

۹ ☆ آقا عماد چند اسباب بازی یکسان برای هدیه به مهد کودک خرید که در مجموع قیمت آن‌ها ۱۲۰۰۰ تومان شد. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی ۱۰۰ تومان به او تخفیف می‌داد او با همان پول ۴ اسباب بازی بیشتر می‌توانست بخرد. قیمت هر اسباب بازی را قبل از تخفیف به دست آورید.

۱۰ ☆ اگر در یک مستطیل با طول L و عرض W داشته باشیم $\frac{L}{W} = \frac{W+L}{L}$ آن‌گاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است. اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟۱۱ ☆ معادله‌ی یک قطر مربع $3x + 4y + 2 = 0$ و یک رأس آن $A(3, 2)$ است، مساحت مربع را بیابید.۱۲ ☆ روی خط $y = x + 4$ نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از دو نقطه $A(2, 1)$ و $B(-3, -1)$ برابر باشد.۱۳ ☆ اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(2m+1, m-1)$ از خط $3x - 4y + 2 = 0$ برابر ۶ باشد، m را بیابید.۱۴ ☆ اگر α, β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند، مقدار عددی عبارت $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ را تعیین کنید.۱۵ ☆ حدود m برای آن‌که معادله‌ی $(m-1)x^2 + mx + m - 3 = 0$ دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت باشد را بدست آورید.۱۶ ☆ اگر بیشترین مقدار تابع $y = ax^2 + x + 2$ برابر -1 گردد، a را بیابید.۱۷ ☆ ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

۱۸ ☆ معادله مقابل را حل کنید.

$$x^2 - 4x + \frac{10}{x^2 - 4x + 5} = 2$$

۱۹ ☆ نقطه‌ای روی نیمساز ربع اول و سوم بیابید که فاصله‌اش تا خط $3x + 4y - 1 = 0$ برابر با ۴ باشد.۲۰ ☆ نقاط $A(2, 2)$ ، $B(5, 5)$ و $C(a, 4 - 2a)$ مفروض هستند. a را چنان بیابید که مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه باشد.

پاسخنامه تشریحی

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4 \xrightarrow{\begin{matrix} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{m}{2} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m-1}{2} \end{matrix}} \frac{m^2}{4} - 2\left(\frac{m-1}{2}\right) = 4$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 16 \Rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \Rightarrow (m-6)(m+2) = 0 \Rightarrow m = -2, 6$$

حال باید m را جایگذاری کنیم تا ببینیم که $\Delta > 0$ می‌شود تا معادله دو ریشه داشته باشد.

$m = 6 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 4(5)(2) < 0$ غ ق ق

$m = -2 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(-3)(2) > 0$ ق ق

$$2x - 5y = 18 \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{2}{5} \Rightarrow m_{AH} = -\frac{5}{2}$$

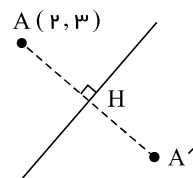
$$AH: y - 3 = -\frac{5}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y - 6 = -5x + 10$$

$$\begin{cases} 5x + 2y = 16 \xrightarrow{\times 5} 25x + 10y = 80 \\ 2x - 5y = 18 \xrightarrow{\times 2} 4x - 10y = 36 \\ \hline 29x = 116 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$$2x - 5y = 18 \rightarrow 8 - 5y = 18 \rightarrow y = -2 \rightarrow H(4, -2)$$

$$H = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow A + A' = 2H \rightarrow A' = 2H - A = 2(4, -2) - (2, 3)$$

$$\Rightarrow A' = (8 - 2, -4 - 3) = (6, -7)$$



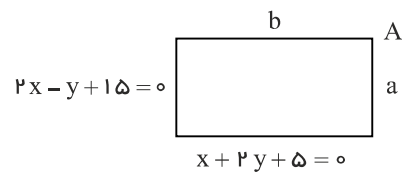
نقطه $A(1, 2)$ در هیچکدام از دو خط $x + 2y + 5 = 0$ و $2x - y + 15 = 0$ صدق نمی‌کند، پس شکل آن به صورت زیر است.

$$a: x + 2y + 5 = 0 \text{ فاصله } A \text{ تا خط} = \frac{|1 + 4 + 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

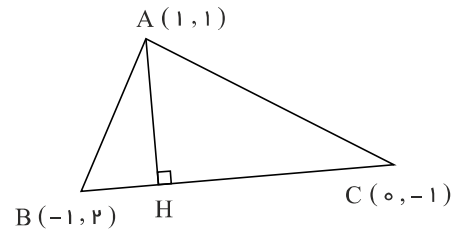
$$b: 2x - y + 15 = 0 \text{ فاصله } A \text{ تا خط}$$

$$= \frac{|2 - 2 + 15|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

$$S = ab = 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 30$$



۴



$$m_{BC} = \frac{2 - (-1)}{-1 - 0} = -3, y + 1 = -3(x - 0)$$

$$m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} \Rightarrow m_{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + 1$$

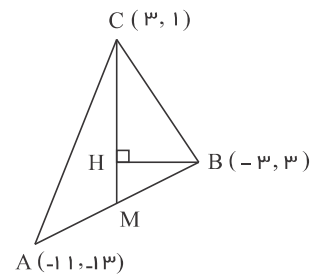
$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ y = -3x - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = -3x - 1 \xrightarrow{\times 3} x + 2 = -9x - 3$$

$$M = \frac{A + B}{2} = (-1, -5)$$

$$m_{CM} = \frac{-5 - 1}{-1 - 0} = \frac{3}{5}$$

$$y - 1 = \frac{3}{5}(x - 0) \Rightarrow 5y - 5 = 3x - 0 \Rightarrow 3x - 5y - 5 = 0$$

۵ الف

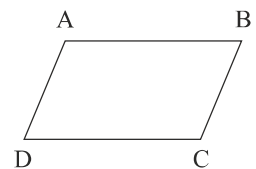


$$BH = \frac{|3(-3) - 5 \times 3 - 5|}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{|-9 - 15 - 5|}{\sqrt{34}} = \frac{29}{\sqrt{34}}$$

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow -11 + 3 = -3 + x_D$$

$$\Rightarrow x_D = -5$$

ب



$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow -13 + 1 = 3 + y_D \Rightarrow y_D = -15$$

$$D = (-5, -15)$$

۶

فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 4x - 6 = 0$ باشد و α' و β' ریشه‌های معادله‌ی خواسته شده باشند. در این صورت:

$$\alpha' = \frac{1}{\alpha^2}, \quad \beta' = \frac{1}{\beta^2}$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 2 \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = -3 \end{cases}$$

$$S = \alpha' + \beta' = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{4 + 6}{9} = \frac{10}{9}$$

$$P = \alpha'\beta' = \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \text{معادله جدید} = x^2 - Sx + P = 0$$

$$\text{معادله‌ی جدید} = x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{1}{9} = 0 \xrightarrow{\times 9} 9x^2 - 10x + 1 = 0$$

۷ فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله باشند.

$$2x^2 - 8x + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - 2 \\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-8)}{2} = 4 \Rightarrow \beta = 3, \alpha = 1 \\ \Rightarrow \alpha\beta = 3 \times 1 = \frac{c}{a} = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 6 \end{cases}$$

۸

$$2 + \sqrt{1+x} = \sqrt{x+9} \Rightarrow 2 \text{ توان} \Rightarrow 4 + 4\sqrt{1+x} + x + 1 = x + 9 \\ \Rightarrow 4\sqrt{1+x} = 4 \Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 \Rightarrow 2 \text{ توان} \Rightarrow 1+x=1 \Rightarrow x=0$$

$x=0$ در معادله صدق می کند پس قابل قبول است.

۹

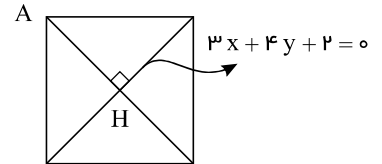
$$\begin{aligned} \text{تعداد} = x \rightarrow \text{قیمت قبل از تخفیف} &= \frac{12000}{x} \\ \text{تعداد} = x-100 \rightarrow \text{قیمت بعد از تخفیف} &= \frac{12000}{x-100} \\ \frac{12000}{x-100} - \frac{12000}{x} = 4 \Rightarrow 12000 \left(\frac{1}{x-100} - \frac{1}{x} \right) = 4 \\ \Rightarrow \frac{100}{x(x-100)} = \frac{1}{3000} \Rightarrow x^2 - 100x - 3000000 = 0 \Rightarrow (x-600)(x+500) = 0 \Rightarrow x = 600 \end{aligned}$$

۱۰

$$\begin{aligned} L+W &= \frac{1}{2} \times 144 = 72 \rightarrow W = 72 - L \\ \frac{L}{W} &= \frac{W+L}{L} \Rightarrow \frac{L}{72-L} = \frac{72}{L} \Rightarrow L^2 = 72^2 - 72L \\ \Rightarrow L^2 + 72L - 72^2 &= 0 \Rightarrow \Delta = 72^2 + 4 \times 72^2 = 5 \times 72^2 \\ L &= \frac{-72 \pm \sqrt{5} \times 72}{2} \xrightarrow{L>0} L = \frac{-72 + 72\sqrt{5}}{2} = 36\sqrt{5} - 36 \\ W &= 72 - L = 72 - 36\sqrt{5} + 36 = 108 - 36\sqrt{5} \end{aligned}$$

۱۱ نقطه $A(3, 2)$ در خط $3x + 4y + 2 = 0$ صدق نمی کند پس شکل آن بصورت مقابل است.

$$AH = \frac{|9 + 8 + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{19}{5}$$



$$\text{قطر مربع} = d = 2AH = \frac{38}{5} \rightarrow S = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{38}{5} \right)^2 = \frac{722}{5}$$

یادآوری: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۱۲

$$\begin{aligned} y = x + 4 \rightarrow M = (a, a+4) \Rightarrow MA = MB \\ \sqrt{(a-2)^2 + (a+4-1)^2} &= \sqrt{(a+3)^2 + (a+4+1)^2} \\ \Rightarrow (a-2)^2 + (a+3)^2 &= (a+3)^2 + (a+5)^2 \\ \Rightarrow a^2 - 4a + 4 = a^2 + 10a + 25 &\Rightarrow -21 = 14a \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \\ M \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} + 4 \right) &= \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right) \end{aligned}$$

۱۳

یادآوری: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{|3(2m+1) - 4(m-1) + 2|}{\sqrt{9+16}} &= 6 \Rightarrow |6m+3-4m+4+2| = 30 \\ \Rightarrow |2m+9| = 30 &\rightarrow 2m+9 = \pm 30 \rightarrow m = \frac{21}{2}, m = -\frac{39}{2} \end{aligned}$$

۱۴

$$x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 5 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2PS}{P} = \frac{125 - 10}{1} = 110$$

۱۵

معادله دو ریشه‌ی مختلف علامت دارد. بنابراین ضرب دو ریشه منفی بوده و لذا $\frac{c}{a} < 0$ می‌باشد.

$$(m-1)x^2 + mx + m - 3 = 0$$

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-3}{m-1} < 0 \Rightarrow 1 < m < 3$$

توجه کنیم هرگاه $\frac{c}{a} < 0$ باشد، قطعاً $\Delta > 0$ می‌باشد و لزومی ندارد شرط $\Delta > 0$ حساب شود.

۱۶

بیشترین مقدار تابع یعنی عرض نقطه‌ی ماکزیمم تابع پس داریم:

$$y_{\max} = -\frac{A}{4a} = -1 \rightarrow \Delta = 4a \Rightarrow 1 - 4 \times a \times 2 = 4a \Rightarrow 1 = 12a \rightarrow a = \frac{1}{12}$$

چون تابع ماکزیمم دارد، پس باید $a < 0$ باشد پس $a = \frac{1}{12}$ غیرقابل قبول است و مسئله جواب ندارد.

۱۷

$$\text{میزان کار در یک ساعت} = \frac{1}{x} \rightarrow \text{زمان ماشین A به تنهایی}$$

$$\text{میزان کار در یک ساعت} = \frac{1}{x+15} \rightarrow \text{زمان ماشین B به تنهایی}$$

$$\text{میزان کار در یک ساعت} = \frac{1}{18} \rightarrow \text{زمان هر دو ماشین با هم}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{2x+15}{x(x+15)} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow x^2 + 15x = 36x + 270 \rightarrow x^2 - 21x - 270 = 0$$

$$\Rightarrow (x-30)(x+9) = 0 \quad x = 30, x = -9 \text{ غ ق ق}$$

$$\text{زمان ماشین B به تنهایی} = 30 \rightarrow \text{زمان ماشین A به تنهایی} = 45$$

۱۸

$$x^2 - 4x = t \rightarrow t + \frac{10}{t+5} = 2 \xrightarrow{\times(t+5)}$$

$$t(t+5) + 10 = 2(t+5) \rightarrow t^2 + 5t + 10 - 2t - 10 = 0$$

$$t^2 + 3t = 0 \rightarrow t(t+3) = 0 \rightarrow t = 0, t = -3 \text{ هر ۲ قابل قبول}$$

$$t = 0 \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x = 0, x = 4$$

$$t = -3 \rightarrow x^2 - 4x = -3 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = 3$$

۱۹

یادآوری: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$y = x \rightarrow A(m, m) \Rightarrow \frac{|3m + 4m - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = 4$$

$$\Rightarrow |7m - 1| = 20 \rightarrow 7m - 1 = \pm 20 \rightarrow m = 3, m = -\frac{19}{7}$$

$$A(3, 3) \text{ یا } A(-\frac{19}{7}, -\frac{19}{7})$$

$$m_{AB} = \frac{\delta - 2}{\delta - 2} = 1, \quad m_{AC} = \frac{2 - 2a - 2}{a - 2} = \frac{2 - 2a}{a - 2}$$

$$m_{AB} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow \frac{2 - 2a}{a - 2} = -1 \Rightarrow -a + 2 = 2 - 2a \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

