



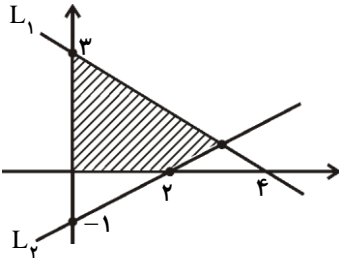
۱- مربع ABCD در ناحیه اول صفحه‌ی مختصات واقع است طوری که A(۵, ۱) و B(۱۰, ۴) دو رأس مجاور آن هستند. (۳ نمره)

الف) معادله ضلع AB را بنویسید.

ب) معادله ضلع AD را بنویسید.

پ) اگر C(۷, ۹) رأس سوم مربع باشد مختصات رأس D را محاسبه کنید.

۲- نشان دهید دو خط $L_1: 2x - y = 1$ و $L_2: 2y - 4x = 5$ موازیند و پس فاصله‌ی بین این دو خط را حساب کنید. (۲/۵ نمره)



۳- در شکل روبه‌رو مساحت ناحیه سایه خورده را حساب کنید. (۳ نمره)

۴- مختصات دو نقطه‌ی A و B را واقع بر خط $L_1: x - y - 1 = 0$ چنان تعیین کنید که فاصله‌ی هر کدام از آنها از خط $L_2: 2x - 3y = 5$

برابر $\sqrt{13}$ باشد. (۲/۵ نمره)

۵- معادله‌ی $0 = (\frac{x^2}{3} - 2)^2 - 11(\frac{x^2}{3} - 2) + 10$ را حل کنید. (۲/۵ نمره)

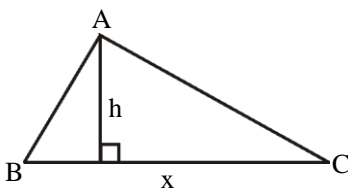
۶- دو عدد حقیقی را چنان محاسبه کنید که مجموع آنها برابر ۱ و حاصل ضرب آنها برابر ۱- باشد. (۱/۵ نمره)

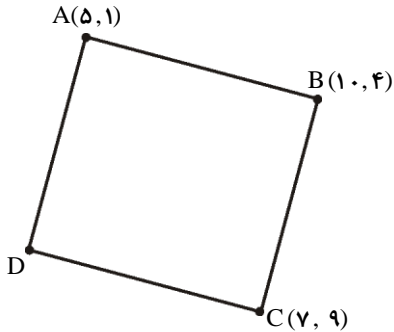
۷- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - x - 1 = 0$ باشند. معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ باشند. (۲/۵ نمره)

۸- در بین همه مثلث‌هایی که مجموع طول ارتفاع و قاعده‌ی نظیر آن برابر ۲۰ است این ارتفاع و قاعده را چنان تعیین کنید که مساحت مثلث

بیشترین مقدار ممکن باشد و این بیشترین مساحت را حساب کنید. (۲/۵ نمره)

(یعنی در شکل روبرو $x + h = 20$)





$$x_A + x_C = x_B + x_D \rightarrow x_D = 2$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \rightarrow y_D = 6$$

$$m_{AB} = \frac{4-1}{10-5} = \frac{3}{5} \rightarrow AB: y-1 = \frac{3}{5}(x-5) \quad (\text{الف} - 1)$$

$$\rightarrow AB: 3x - 5y = 10$$

$$AB \perp AD \Rightarrow m_{AD} = -\frac{1}{m_{AB}} \quad (\text{ب})$$

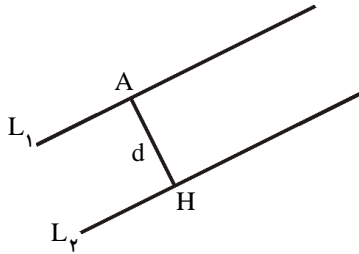
$$\Rightarrow m_{AD} = -\frac{5}{3} \rightarrow AD: y-1 = -\frac{5}{3}(x-5)$$

$$\Rightarrow AD: 5x + 3y = 28$$

-۲

$$L_1: 2x - y = 1 \rightarrow m_{L_1} = 2 \quad \text{و} \quad L_2: 2y - 4x = 5 \rightarrow m_{L_2} = 2$$

$$m_{L_1} = m_{L_2} \rightarrow L_1 \parallel L_2$$



$$\text{روش اول: } L_1: 2x - y - 1 = 0, c = -1$$

$$L_2: 2x - y + \frac{5}{2} = 0, c' = \frac{5}{2}$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-1 - \frac{5}{2}|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{7}{2\sqrt{5}}$$

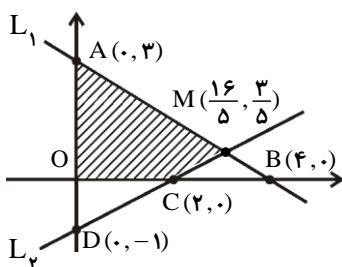
روش دوم: نقطه‌ی دلخواه A روی L_1 در نظر گرفته و فاصله‌اش را تا L_2 محاسبه می‌کنیم

$$L_1: 2x - y = 1 \xrightarrow{x=0} y = -1 \rightarrow A(0, -1)$$

$$\text{فاصله A تا } L_2 \quad AH = \frac{|0 - 2x - 1 - 5|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{7}{2\sqrt{5}}$$

$$L_2: 4x + 2y + 5 = 0$$

-۳



$$\left. \begin{aligned} L_1: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 &\rightarrow L_1: 3x + 4y = 12 \\ L_2: \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1 &\rightarrow L_2: x - 2y = 2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{نقطه تقاطع} \\ \rightarrow m(\frac{16}{5}, \frac{3}{5}) \end{array}$$

$$S_{AMCO} = S_{AOB} - S_{MBC} = 6 - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{3}{5} = \frac{27}{5} = 5.4$$



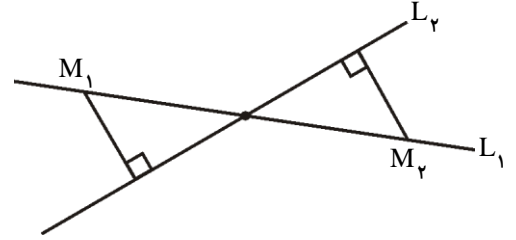
۴- نقطه مطلوب $M(\alpha, \alpha - 1) \rightarrow L_1: x - y - 1 = 0 \xrightarrow{x=\alpha} \alpha - y - 1 = 0 \rightarrow y = \alpha - 1 \rightarrow M(\alpha, \alpha - 1)$

$$MH = \sqrt{13} \rightarrow \frac{|2\alpha - 3(\alpha - 1) - 5|}{\sqrt{4 + 9}} = \sqrt{13}$$

$$2x - 3y - 5 = 0$$

$$|\alpha + 2| = 13 \rightarrow \alpha + 2 = \pm 13$$

$$\rightarrow \alpha = 11, \alpha = -15 \rightarrow M_1(11, 10), M_2(-15, -16)$$



$$\frac{x^2}{3} - 2 = y \rightarrow y^2 - 11y + 10 = 0 \rightarrow y = 1, y = 10$$

$$\frac{x^2}{3} - 2 = 1 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow \boxed{x = \pm 3}, \quad \frac{x^2}{3} - 2 = 10 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow \boxed{x = \pm 6}$$

$$S = \alpha + \beta = 1, P = \alpha\beta = -1 \rightarrow x^2 - sx + p = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 1 \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1 \quad \alpha' = \frac{1}{\alpha + 1}, \beta' = \frac{1}{\beta + 1}$$

$$S = \alpha' + \beta' = \frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\beta + 1} = \frac{\alpha + \beta + 2}{\alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1} = \frac{3}{-1 + 1 + 1} = 3$$

$$P = \alpha'\beta' = \frac{1}{\alpha + 1} \cdot \frac{1}{\beta + 1} = \frac{1}{\alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1} = \frac{1}{-1 + 1 + 1} = 1$$

معادله مطلوبست $x^2 - sx + p = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

$$h + x = 20 \rightarrow h = 20 - x$$

$$S = \frac{1}{4}hx \rightarrow S(x) = \frac{1}{4}(20 - x)x \rightarrow S(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 5x$$

$$x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \times -\frac{1}{4}} = 10 \rightarrow h = 10$$

$$S_{\max} = \frac{1}{4}hx = \frac{1}{4} \times 10 \times 10 = 25$$