

## ساختار کتاب

کتاب شب امتحان ریاضی (۲) یازدهم از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

(۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

**الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخ‌گویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

**ب) آزمون طبقه‌بندی نشده:** آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.

(۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۱ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

**الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.

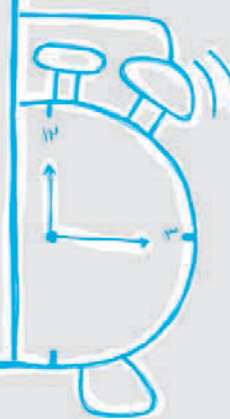
**ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده:** آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۱ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۳ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال معلمان مواجه خواهید شد.

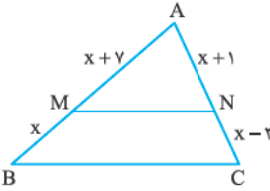
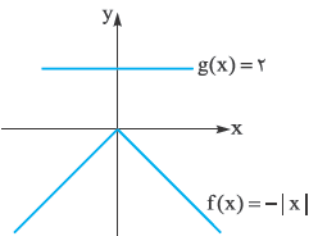
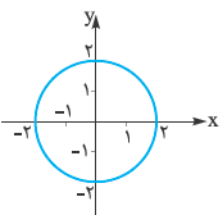
(۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم

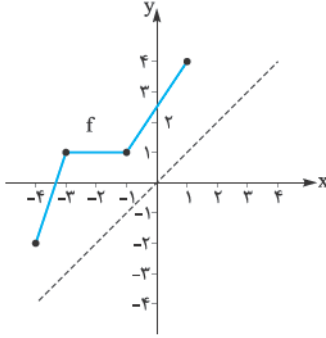
(۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند (🙄) در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان ریاضی (۲) نیاز دارید، تنها در ۲۹ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

## فهرست

پاسخ‌نامه	آزمون	نوبت	
۲۵	۳	اول	آزمون شماره ۱ (طبقه‌بندی شده)
۲۶	۵	اول	آزمون شماره ۲ (طبقه‌بندی شده)
۲۸	۷	اول	آزمون شماره ۳ (طبقه‌بندی نشده)
۳۰	۹	اول	آزمون شماره ۴ (طبقه‌بندی نشده)
۳۲	۱۱	دوم	آزمون شماره ۵ (طبقه‌بندی شده)
۳۴	۱۳	دوم	آزمون شماره ۶ (طبقه‌بندی شده)
۳۵	۱۵	دوم	آزمون شماره ۷ (طبقه‌بندی شده)
۳۸	۱۷	دوم	آزمون شماره ۸ (طبقه‌بندی شده)
۴۰	۱۹	دوم	آزمون شماره ۹ (طبقه‌بندی نشده)
۴۲	۲۱	دوم	آزمون شماره ۱۰ (طبقه‌بندی نشده)
۴۴	۲۳	دوم	آزمون شماره ۱۱ (طبقه‌بندی نشده)
۴۷			درس‌نامه توپ برای شب امتحان



ردیف	آزمون شماره ۱	رشته: علوم تجربی	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com	نمره
۱	فصل اول معادلات زیر را حل کنید.				۱/۵
۱	الف) $\sqrt{x-3} + \sqrt{5x+2} + 2 = 0$ ب) $\frac{6x}{x-1} + \frac{x-1}{3x} = 3$				۱/۵
۲	دو فرد A و B کاری را با هم در ۱۲ ساعت انجام می‌دهند؛ ولی اگر تک تک، این کار را انجام دهند، فرد A در اینگونه مسائل، معمولاً دو مجهول وجود دارد که باید یکی از اون‌ها رو X فرض کنید و دیگری رو هم بر حسب X بنویسید، یعنی توی معادله‌ای که می‌نویسید نباید دو تا مجهول مثل X و Y وجود داشته باشه، چون معادله قابل حل نیست.				۱
۳	نسبت دو عدد مثبت برابر است با عدد طلایی، اگر عدد کوچک‌تر $(\sqrt{5}-1)$ باشد، عدد بزرگ‌تر را به دست آورید.				۱
۴	خط $2x - 5y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(1, -4)$ مماس است. شعاع دایره، محیط و مساحت آن را به دست آورید.				۰/۷۵
۵	معادله $0 = 2x^2 - 7x^2 - 4$ را به روش تغییر متغیر حل کنید.				۰/۷۵
۶	فصل دوم درستی یا نادرستی هر قسمت را تعیین کنید، برای موارد نادرست مثال نقض بیاورید. الف) در یک مثلث دو ضلع برابرند، اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌روی آن‌ها برابر باشند. ب) اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهای بر هم عمودند و برعکس. پ) در مثلث متساوی‌الاضلاع، یک پاره‌خط نیمساز است اگر و تنها اگر میانه باشد. ت) اگر در یک چهارضلعی، قطرهای یکدیگر را نصف کنند، آن‌گاه بر هم عمودند.				۱
۷	فرض کنید نقطه A به فاصله ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هر یک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید. الف) مثلث متساوی‌الساقینی که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد. ب) مثلثی که شرایط الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد. پ) مثلثی که شرایط قسمت الف) را داشته باشد و مساحت آن $8 \text{ cm}^2$ باشد.				۱/۵
۸	اگر $n \in \mathbb{N}$ و $n^2$ عددی زوج باشد، به کمک برهان خلف ثابت کنید که n نیز عددی زوج است.				۱
۹	در شکل زیر $MN \parallel BC$ است. مقدار x و سپس طول اضلاع AC و AB را بیابید. از قضیه تالس یا عکس قضیه تالس، تماماً در تمام امتحانات سوال طرح می‌شه، با این‌که ساده است ولی خیلی مهمه. فاصله، تالس رو چیری بگیرد برای خودش شفیقی بوده‌ها.				۱/۵
۱۰	فصل سوم با توجه به نمودارهای f و g نمودار تابع $(f-g)(x)$ را رسم کنید.				۱
۱۰					۱
۱۱	آیا نمودار روبه‌رو، تابع است؟ چه قسمتی از دایره را انتخاب کنیم تا نمودارش یک‌به‌یک باشد؟				۱
۱۱					۱

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم تجربی	ریاضی (۲)
نمره	نوبت اول پایه یازدهم دوره متوسطه دوم		آزمون شماره ۱	
۱	توجه کنید برای تساوی دو تابع، فقط تساوی فرمول‌های آن‌ها کافی نیست بقیه‌شو نمی‌گم که جواب، نوتره.		$f(x) = \begin{cases} 3x-3 & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$ و $g(x) = 3$ با هم برابرند؟ چرا؟ آیا توابع	
۱/۵			نمودار وارون تابع مقابل را رسم کنید. آیا نموداری که رسم می‌کنید خودش تابع است؟ آیا نمودار f یک‌به‌یک است؟	
<b>فصل چهارم</b>				
۱/۵	$A = 2 \cos(-45^\circ) \times \tan 12^\circ + \cot 24^\circ \times \sin(-225^\circ)$		حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.	
۱/۵	بدون رسم نمودار مشخص کنید آیا نمودار دو تابع $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ و $y = -\cos(4\pi - x)$ بر هم منطبق هستند یا خیر؟			
۱	این سوال رو پارسال هم داشتین، یعنی در واقع تکراریه، ولی چون در کتاب یازدهم دوباره مطرح شده ما هم ازش سوال آوردیم.		ثابت کنید:	
$\frac{1 + \sin x}{\sin x} + \frac{\cot x - \cos x}{\cos x} = \frac{2}{\sin x}$				
۱/۵	نمودار $y = 2 \cos x - 1$ را در یک بازه دلخواه به طول $2\pi$ رسم کنید.			
۲۰	جمع نمرات		موفق باشید	

ردیف	آزمون شماره ۹	رشته: علوم تجربی	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com
نمره	نوبت دوم پایه یازدهم دوره متوسطه دوم			
۱	<p>یک میله پرچم بزرگ، مطابق شکل، توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است. به طوری که فاصله هر نقطه تا میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا میله. مختصات نقطه D را به دست آورید.</p>			
۲	<p>مربع ABCD در ناحیه اول صفحه مختصات قرار دارد (هر چهار رأس آن) به طوری که A(5, 1) و B(10, 4) دو رأس مجاور آن هستند:</p> <p>الف) شیب ضلع AB را به دست آورید و معادله آن را بنویسید.</p> <p>ب) شیب ضلع AD را حساب کرده و معادله آن را بنویسید.</p> <p>پ) اگر بدانیم نقطه C(7, 9) رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.</p>			
۳	<p>پاره خط AB و نقطه P به گونه‌ای قرار دارند که P از دو سر AB به یک فاصله است. نشان دهید P روی عمود منصف AB قرار دارد.</p>			
۴	<p>در شکل مقابل IJ    BC است. مقدار x و اندازه پاره‌های AI، AJ و BC را به دست آورید.</p>			
۵	<p>اگر <math>f = \{(3, 8), (7, 10), (5, 2)\}</math> و <math>g = \{(1, 3), (3, -6), (5, 18)\}</math> باشند، آن‌گاه توابع <math>f + g</math> و <math>\frac{f}{g}</math> را تشکیل دهید.</p>			
۶	<p>اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، نمودار توابع زیر را رسم کنید.</p> <p>الف) <math>-f(x)</math></p> <p>ب) <math>\frac{1}{3}f(x)</math></p> <p>پ) <math>f(x-1) + 2</math></p>			
۷	<p>بدون استفاده از ماشین حساب، درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.</p> <p>الف) <math>\cos 84^\circ = \cos 6^\circ</math></p> <p>ب) <math>\tan(-324^\circ) = \tan 36^\circ</math></p>			
۸	<p>درستی یا نادرستی تساوی مقابل را بررسی کنید.</p> <p><math>\tan(\alpha - \frac{13\pi}{4}) = -\cot(7\pi - \alpha)</math></p>			
۹	<p>اگر <math>f(x) = 5^x</math> باشد، نمودار تابع <math>f^{-1}(x)</math> را رسم کرده، دامنه و برد آن را تعیین کنید. سپس مقدار <math>f^{-1}(\frac{1}{135})</math> را به دست آورید.</p>			
۱۰	<p>مقدار <math>\log_7 13</math> بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟ به کدام یک نزدیک تر است؟</p>			
۱۱	<p>اگر <math>\log a = 18</math>، <math>\log b = 12</math> و <math>\log c = 125</math> باشند، حاصل <math>\log(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[5]{c})</math> را به دست آورید.</p>			
۱۲	<p>مقدار x را در معادله <math>\log_x(x^2 + x) = \log_x(7x - 5)</math> به دست آورید.</p>			
۱۳	<p>نمودار تابع f را رسم کرده، وضعیت حد تابع را در <math>x = 3</math> بررسی کنید.</p> <p><math>f(x) = \begin{cases} 4-x &amp; x &gt; 3 \\ -1 &amp; x = 3 \\ x^2+1 &amp; x &lt; 3 \end{cases}</math></p>			
۱۴	<p>حاصل حد مقابل را به دست آورید.</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x^2 - 2} = ?</math></p>			

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم تجربی	ریاضی (۲)
نمره	نوبت دوم پایه یازدهم دوره متوسطه دوم			آزمون شماره ۹
۱	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 6 & x = 2 \end{cases}$			۱۵
۱	با رسم نمودار تابع $f$ پیوستگی آن را در $x = 2$ بررسی کنید.			
۱	نمودار توابع $f(x) = \frac{1}{x}$ با دامنه $\mathbb{R}$ و $g(x) = [x]$ با دامنه $[-2, 2]$ را رسم کرده و بگویید در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته هستند؟			۱۶
۱	یک تاس را ۲ بار پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم مجموع اعداد ظاهر شده برابر ۸ است. با چه احتمالی این دو عدد با هم برابرند؟			۱۷
۱	احتمال قبولی در کنکور سراسری تجربی برابر $\frac{2}{5}$ است و احتمال این که فردی که قبول می‌شود پزشک شود $\frac{14}{100}$ است. اگر فردی در کنکور تجربی قبول شود، با چه احتمالی پزشک خواهد شد؟			۱۸
۱	<p>درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر مقدار ثابت <math>k</math> از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازه <math>\sqrt{k}</math> کم می‌شود.</p> <p>ب) اگر مقدار مثبت <math>k</math> به داده‌ها اضافه شود، ضریب تغییرات، بزرگ‌تر می‌شود.</p> <p>پ) اگر مقدار مثبت <math>\frac{1}{k}</math> در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار در <math> \frac{1}{k} </math> ضرب می‌شود.</p> <p>ت) اگر مقدار مثبت <math>k</math> در داده‌ها ضرب شود، ضریب تغییرات ثابت می‌ماند.</p>			۱۹
۱	کارخانه‌ای دو نوع لاستیک A و B تولید می‌کند که میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب ۱۲۰۰۰ و ۲۰۰۰۰ کیلومتر و انحراف معیار برای A و B به ترتیب برابر ۱۲۰۰ و ۴۰۰۰ کیلومتر است. کدام نوع لاستیک بهتر است؟			۲۰
۱	میانگین ۱۰ داده آماری $\frac{32}{5}$ است. دو داده ۲۰ و ۳۰ را از این داده‌ها کنار می‌گذاریم. میانگین جدید را به دست آورید.			۲۱
۲۰	جمع نمرات			موفق باشید



# پاسخنامه تشریحی

۵-

$$2x^2 - 7x^2 - 4 = 0 \xrightarrow{x^2=t} 2t^2 - 7t - 4 = 0$$

$$\Delta = 49 + 32 = 81 \Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{7+9}{4} = 4 \\ t = \frac{7-9}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm 2 \\ t = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

۶- الف) درست است.

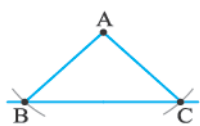
ب) نادرست است؛ چون مثلاً مستطیل، نوعی متوازی‌الاضلاع است ولی قطرهای آن بر هم عمود نیستند.

پ) درست است.

ت) نادرست است؛ مثلاً در متوازی‌الاضلاع مقابل، قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند، ولی بر هم عمود نیستند.



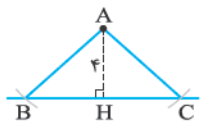
۷- الف) کافی است به مرکز A و شعاعی که اندازه‌اش بیشتر از فاصله A تا d باشد کمانی بزنیم تا خط d را در نقطه به نام‌های B و C قطع کند. مثلث متساوی‌الساقین ABC به دست می‌آید.



مثلث ABC متساوی‌الساقین است.  $\Rightarrow$  شعاع دایره  $AB = AC$

ب) کافی است کمانی به مرکز A و شعاع ۶ سانتی‌متر بزنیم تا خط d را در نقاطی مثل N و M قطع کند؛ مثلث AMN متساوی‌الساقین بوده و طول ساق‌های آن ۶ سانتی‌متر است.

پ) طبق شکل، AH ارتفاع وارد بر قاعده است و داریم:



$$S = \frac{BC \times AH}{2} = 8 \Rightarrow \frac{BC \times 4}{2} = 8 \Rightarrow BC = 4$$

در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر وتر، میانه هم هست لذا:  $BH = HC = 2$  بنابراین:



$$\text{فیتاغورس: } AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow AC^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} AC = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

پس باید به مرکز A و شعاع  $2\sqrt{5}$  کمان بزنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند. مثلث ABC جواب است.

۸- فرض می‌کنیم n فرد باشد (فرض خُلف) لذا خواهیم نوشت:

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_m) + 1 = 2m + 1$$

m هر عدد صحیحی که باشد، حاصل  $2m + 1$  عددی فرد می‌شود؛ پس به تناقض رسیده‌ایم، چون در متن سؤال، گفته شده  $n^2$  زوج است؛ لذا فرض خُلف نادرست بوده و n زوج است.

## آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۱- الف)  $\sqrt{x-3} + \sqrt{5x+2} + 2 = 0$   
 نامفی                      نامفی                      مثبت

جمع دو عبارت نامنفی و یک عدد مثبت، هیچ‌گاه نمی‌تواند برابر صفر شود، پس این معادله جواب ندارد.

ب)  $\frac{6x}{x-1} + \frac{x-1}{3x} = 3$

$$\xrightarrow{\text{ضرب تمام جملات در } 3x(x-1)} 6x(3x) + (x-1)(x-1) = 3(3x)(x-1)$$

$$\Rightarrow 18x^2 + x^2 - 2x + 1 = 9x^2 - 9x \Rightarrow 10x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4(10)(1) = 9 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{20} = \frac{-7 \pm 3}{20}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-7+3}{20} = \frac{-4}{20} = \frac{-1}{5} \\ x'' = \frac{-7-3}{20} = \frac{-10}{20} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول‌اند، چون هیچ مخرجی را صفر نمی‌کنند.

۲- اگر زمان فرد A را x در نظر بگیریم، زمان فرد B برابر  $(x+10)$  خواهد بود، لذا:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12} \xrightarrow{\text{ضرب جملات در } 12x(x+10)}$$

$$12(x+10) + 12x = x(x+10) \Rightarrow 12x + 120 + 12x = x^2 + 10x$$

$$\Rightarrow x^2 - 14x - 120 = 0 \Rightarrow (x-20)(x+6) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه}} \begin{cases} x-20=0 \Rightarrow x=20 & (\text{قق}) \\ x+6=0 \Rightarrow x=-6 & (\text{غقق}) \end{cases}$$

پس زمان شخص B هم برابر است با: (ساعت)  $x+10 = 20+10 = 30$

۳- **تذکره** در ابتدای حل مسئله، می‌توانستید زمان فرد B را x و زمان فرد A را  $(x-10)$  فرض کنید.

۴- اگر عدد بزرگ‌تر را x و عدد کوچک‌تر را y بنامیم، با توجه به متن سؤال، خواهیم داشت:

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x = (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) \Rightarrow 2x = (\sqrt{5})^2 - 1^2$$

$$\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

۴- فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره، همان شعاع دایره است، لذا:

$$2x - 5y = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 0 \end{cases}, W \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ x_1 \\ \downarrow \\ y_1 \end{matrix}$$

$$\text{شعاع} = r = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(1) + (-5)(-4) + 0|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{22}{\sqrt{29}}$$

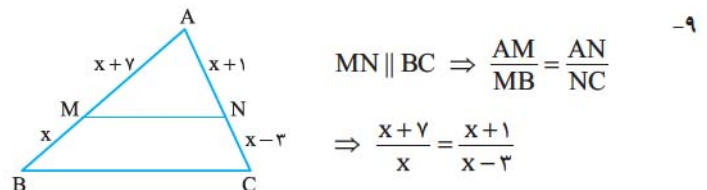
$$\text{محیط دایره} = 2\pi r = 2\pi \times \left(\frac{22}{\sqrt{29}}\right) = \frac{44\pi}{\sqrt{29}}$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{22}{\sqrt{29}}\right)^2 = \frac{484\pi}{29}$$



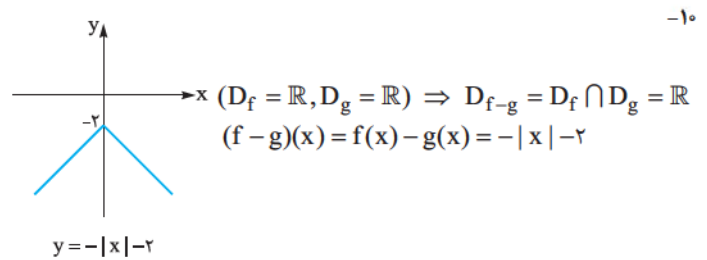
$$\frac{1 + \sin x}{\sin x} + \frac{\cot x - \cos x}{\cos x} = \frac{(1 + \sin x)\cos x + \sin x \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x\right)}{\sin x \cos x} = \frac{\cos x + \frac{\sin x \cos x}{\sin x} + \cos x - \frac{\sin x \cos x}{\sin x}}{\sin x \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin x}$$

-۱۶



-۹

طرفین وسطین  $\rightarrow (x+7)(x-3) = x(x+1)$   
 $\Rightarrow x^2 + 4x - 21 = x^2 + x \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$   
 $AB = x + 7 + x = 7 + 7 + 7 = 21$   
 $AC = x + 1 + x - 3 = 7 + 1 + 7 - 3 = 12$



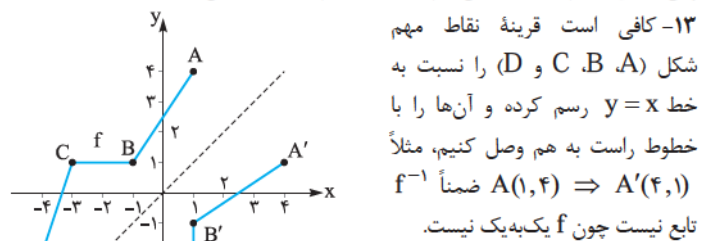
-۱۰

۱۱- خیر، تابع نیست؛ چون می توان خطی عمودی (موازی محور  $y$  ها) رسم کرد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند. اگر هر یک از ربع دایره ها را انتخاب کنیم، تابعی یک به یک و وارون پذیر ایجاد می شود، مانند:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3(x-1)}{x-1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3 & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 3$$

-۱۲

پس  $f$  و  $g$  با هم برابرند، چون هم دامنه ها و هم ضابطه هایشان مساوی شدند.



-۱۴

$$\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 12^\circ = \tan(18^\circ - 6^\circ) = -\tan 6^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 24^\circ = \cot(18^\circ + 6^\circ) = \cot 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin(-225^\circ) = -\sin 225^\circ = -\sin(18^\circ + 45^\circ) = -(-\sin 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

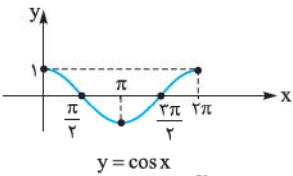
$$\Rightarrow A = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{-5\sqrt{6}}{6}$$

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

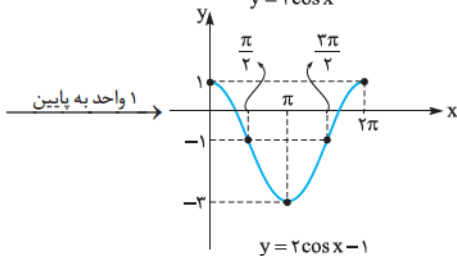
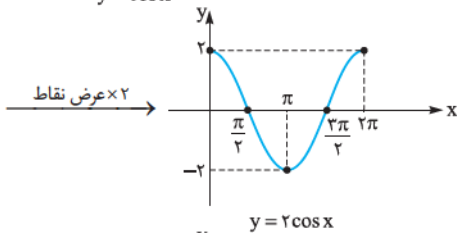
-۱۵

$$y = -\cos(4\pi - x) = -\cos x$$

ضابطه های دو تابع با هم برابر شدند، دامنه هایشان هم که هر دو برابر  $\mathbb{R}$  است، پس نمودارهایشان نیز بر هم منطبق است.



-۱۷

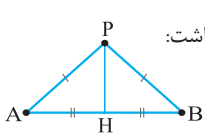


پ) رأس‌های A و C روبه‌روی هم و رأس‌های B و D هم روبه‌روی هم هستند، لذا:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 5 + 7 = 10 + x_D \Rightarrow x_D = 2 \\ y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 1 + 9 = 4 + y_D \Rightarrow y_D = 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow D(2, 6)$

۳- P را به A، B و هم‌چنین وسط AB وصل می‌کنیم (فعلاً نمی‌دانیم PH بر AB عمود است یا خیر) در مثلث‌های APH و PHB خواهیم داشت:



$$\left. \begin{matrix} AP = PB \\ PH = PH \text{ (ضلع مشترک)} \\ AH = HB \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \triangle APH \cong \triangle PHB$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} \begin{cases} \hat{A}PH = \hat{H}PB \\ \hat{A}HP = \hat{P}HB \\ \hat{P}AH = \hat{P}BH \end{cases}$$

ولی چون جمع دو زاویه  $\hat{A}HP$  و  $\hat{P}HB$  برابر  $180^\circ$  است لذا:

$\hat{A}HP = \hat{P}HB = 90^\circ$

یعنی ثابت کردیم PH بر AB عمود نیز هست.

۴-  $IJ \parallel BC \xrightarrow[\text{جزء به جزء}]{\text{تالس}} \frac{AI}{IB} = \frac{AJ}{JC}$

$\Rightarrow \frac{2x}{5} = \frac{x+4}{7/5} \Rightarrow 15x = 5x + 20 \Rightarrow 10x = 20 \Rightarrow x = 2$

$IJ \parallel BC \xrightarrow[\text{جزء به کل}]{\text{تالس}} \frac{AI}{AB} = \frac{IJ}{BC} \Rightarrow \frac{2x}{2x+5} = \frac{10}{BC}$

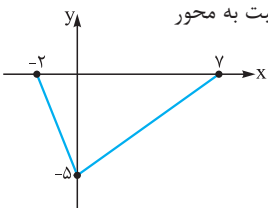
$\Rightarrow \frac{2(2)}{2(2)+5} = \frac{10}{BC} \Rightarrow 4BC = 90 \Rightarrow BC = \frac{90}{4} = 22.5$

$AI = 2x = 2(2) = 4, AJ = x + 4 = 2 + 4 = 6$

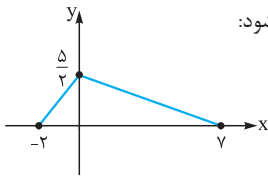
۵-  $f + g = \{(3, 8-6), (5, 2+18)\} = \{(3, 2), (5, 20)\}$

$\frac{f}{g} = \{(3, \frac{8}{-6}), (5, \frac{2}{18})\} = \{(3, -\frac{4}{3}), (5, \frac{1}{9})\}$

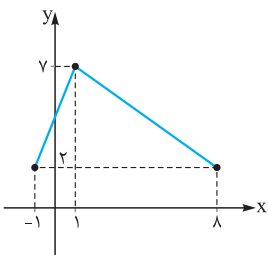
۶- الف) برای رسم  $-f(x)$  باید نمودار  $f(x)$  را نسبت به محور xها قرینه کنیم:



ب) برای رسم  $\frac{1}{2}f(x)$  عرض نقاط  $f(x)$  نصف می‌شود:



پ) برای رسم  $f(x-1) + 2$  ابتدا نمودار  $f(x)$  را ۱ واحد به راست و سپس ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



آزمون شماره ۹ (نوبت دوم)

۱- M وسط AB است، لذا:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$$

از طرفی M وسط CD نیز هست، بنابراین:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_C + x_D}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{-2 + x_D}{2} \Rightarrow x_D = 5 \\ y_M = \frac{y_C + y_D}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = -1 \end{cases} \Rightarrow D(5, -1)$$

۲- الف)

$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-1}{10-5} = \frac{3}{5}$

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 1 = \frac{3}{5}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{3}{5}x - 2$

ب) اضلاع AB و AD بر هم عمودند، پس شیب آن‌ها عکس و قرینه یکدیگر است؛ لذا

شیب AD برابر  $-\frac{5}{3}$  و معادله آن برابر است با:

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 1 = -\frac{5}{3}(x - 5) \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{28}{3}$

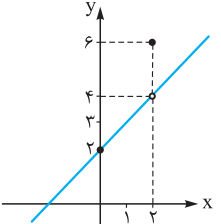
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x^2 - 2} = \frac{0}{0} \quad -14$$

صورت را بر  $x+1$  تقسیم می‌کنیم  
در مخرج هم فاکتورگیری می‌کنیم

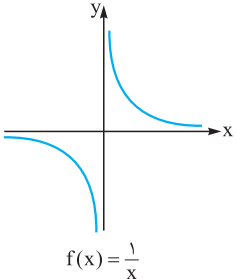
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 4)}{2(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{(-1)^2 - (-1) + 4}{2(-1-1)} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

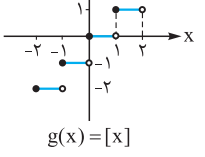
$$y = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 & x \neq 2 \\ 6 & x = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline y & 2 \quad 3 \end{array} \quad -15$$



نمودار تابع در  $x = 2$  دارای سوراخ‌شدگی (نقطه توخالی) است، پس ناپیوسته است. به طور دقیق‌تر می‌توان گفت حد چپ و راست با هم برابرند (برابر ۴) ولی مقدار تابع در  $x = 2$  برابر ۶ است.



$f$  در نقطه  $x = 0$  ناپیوسته است و در بقیه نقاط  $\mathbb{R}$  پیوسته است.  
حال تابع  $g$  را رسم می‌کنیم:



تابع  $g$  در نقاط به طول  $2, -1, -2, 0, 1$  و  $2$  ناپیوسته است و در بقیه نقاط دامنه‌اش پیوسته می‌باشد.

$$n(S) = 6 \times 6 = 36 \quad -17$$

$$A: \Rightarrow A = \{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$B: \Rightarrow B = \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\} \Rightarrow P(B) = \frac{5}{36}$$

$$A \cap B = \{(4,4)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5}$$

پیشامد قبولی در کنکور تجربی:  $A$   
پیشامد قبولی در رشته پزشکی:  $B$

$$P(A) = 0/2, P(B) = 0/14$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0/14}{0/20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0/7$$

$$\cos 84^\circ = \cos(90^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ \quad -7$$

پس رابطه داده‌شده، نادرست است.

$$\tan(-324^\circ) = -\tan 324^\circ = -\tan(360^\circ - 36^\circ) = -(-\tan 36^\circ) = \tan 36^\circ$$

پس رابطه داده‌شده، صحیح است.

$$\tan(\alpha - \frac{13\pi}{2}) = -\tan(\frac{13\pi}{2} - \alpha) = -\cot \alpha$$

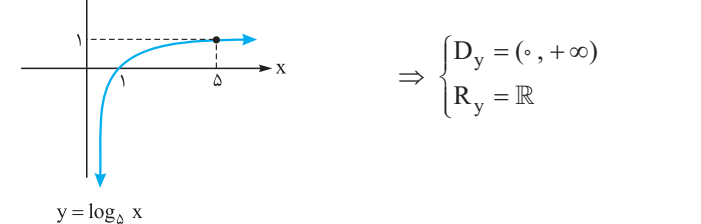
سمت چپ: ربع اول

$$-\cot(\frac{7\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$$

سمت راست: ربع دوم

پس رابطه داده‌شده نادرست است.

$$f(x) = \Delta^x \text{ معکوس تابع } f^{-1}(x) = \log_\Delta x \text{ با } f(x) = \Delta^x \text{ برابر است لذا:}$$



البته روش دیگر این بود که ابتدا نمودار  $y = \Delta^x$  را رسم کنید، سپس نمودار آن را نسبت به خط  $y = x$  قرینه کنید.

$$f^{-1}(\frac{1}{125}) = \log_\Delta \frac{1}{125} = \log_\Delta \frac{1}{5^3} = \log_\Delta 5^{-3} = -3 \log_\Delta 5 = -3 \times 1 = -3 \quad -10$$

از همۀ اعداد، لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم

$$\log_2 2^3 < \log_2 13 < \log_2 2^4 \Rightarrow 3 < \log_2 13 < 4$$

پس حاصل  $\log_2 13$  عددی است بین ۳ و ۴. هم‌چنین به عدد ۴ نزدیک‌تر است.

$$\log(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[5]{c}) = \log \sqrt[3]{a} + \log \sqrt[4]{b} + \log \sqrt[5]{c}$$

$$= \log a^{\frac{1}{3}} + \log b^{\frac{1}{4}} + \log c^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{3} \log a + \frac{1}{4} \log b + \frac{1}{5} \log c$$

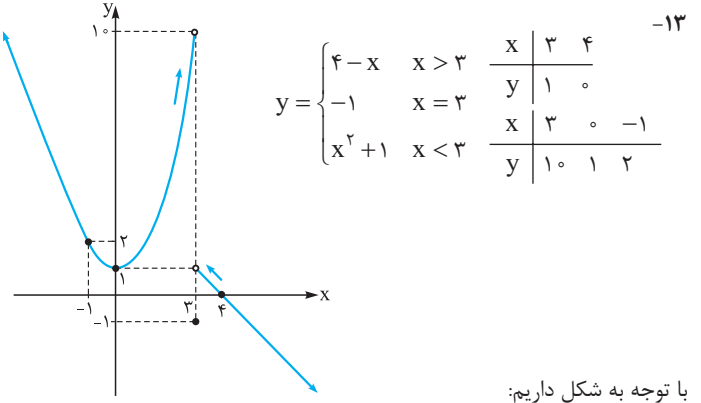
$$= \frac{1}{3} \times 18 + \frac{1}{4} \times 12 + \frac{1}{5} \times 125 = 6 + 3 + 25 = 34$$

$$\log_x(x^2 + x) = \log_x(\sqrt{x} - 5) \Rightarrow x^2 + x = \sqrt{x} - 5$$

$$\Rightarrow x^2 + x - \sqrt{x} + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 & (\text{قق}) \\ x = 1 & (\text{غقق}) \end{cases}$$

عدد ۱ به این علت رد می‌شود که با جای‌گذاری آن در معادله اصلی، مبنای لگاریتم‌ها ۱ می‌شود. (می‌دانید که مبنا همیشه عددی مثبت و مخالف ۱ است.)



$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 10$$

ناموجود  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

۱۹- الف) نادرست است. انحراف معیار تغییری نمی‌کند (جمع و تفریق در واریانس و

انحراف معیار بی‌تأثیر است.)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{C.V}_q = \frac{\sigma_q}{\bar{x}_q} \\ \text{C.V}_c = \frac{\sigma_c}{\bar{x}_c} = \frac{\sigma_q}{\bar{x}_q + k} \end{array} \right.$$

ب) نادرست است.  
 ق ← قدیم  
 ج ← جدید

مخرج بزرگ شده

اگر  $\text{C.V}_q$  را با  $\text{C.V}_c$  مقایسه کنید معلوم است که در  $\text{C.V}_c$  مخرج کسر بزرگ‌تر شده ولی صورت‌ها یکسان هستند، پس  $\text{C.V}_c$  کوچک‌تر از  $\text{C.V}_q$  می‌شود.

پ) درست است.

$$\text{C.V}_q = \frac{\sigma_q}{\bar{x}_q}$$

ت) درست است، زیرا:

$$\text{C.V}_c = \frac{\sigma_c}{\bar{x}_c} = \frac{\overset{\text{مثبت است}}{|k|} \times \sigma_q}{k \bar{x}_q} = \frac{k \sigma_q}{k \bar{x}_q} = \frac{\sigma_q}{\bar{x}_q} = \text{C.V}_q$$

$$\text{A} \text{ برای لاستیک } \text{C.V} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1200}{12000} = \frac{1}{10} \quad -20$$

$$\text{B} \text{ برای لاستیک } \text{C.V} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4000}{20000} = \frac{1}{5}$$

پس  $\text{C.V}$  برای لاستیک A کم‌تر است لذا کیفیت لاستیک A بهتر است.

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع اولیه}}{\text{تعداد اولیه}} \Rightarrow 32/5 = \frac{\text{مجموع اولیه}}{10} \quad -21$$

$$\Rightarrow \text{مجموع اولیه} = 32/5 \times 10 = 325$$

$$\text{مجموع جدید} = 325 - 20 - 30 = 275$$

$$\Rightarrow \bar{x} \text{ جدید} = \frac{\text{مجموع جدید}}{\text{تعداد جدید}} = \frac{275}{8} = 34/8$$



# درس نامه توپ برای شب امتحان

$$\Rightarrow m' = \frac{3}{k-1}, m \times m' = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{k-1} = -1 \Rightarrow \frac{3}{2k-2} = -1$$

$$\Rightarrow -2k+2=3 \Rightarrow -2k=1 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

**مثال:** عرض از مبدأ خطی که از نقطه  $A(3,4)$  گذشته و با خط  $x-y=4$  موازی باشد را به دست آورید.

**حل:**

$$\text{خط } x-y=4 \Rightarrow -y=-x+4 \xrightarrow{+(-1)} y=x-4 \Rightarrow m=1$$

مطلوب ما باید با خط داده شده موازی باشد، پس شیب آن 1 است؛ لذا:

$$y-y_1 = m(x-x_1) \Rightarrow y-4 = 1 \times (x-3) \Rightarrow y = x+1$$

$\Rightarrow$  عرض از مبدأ = 1

### نقطه در دستگاه مختصات

#### فاصله بین دو نقطه

اگر دو نقطه  $A$  و  $B$  هم عرض باشند، آن گاه:

$$AB = |x_A - x_B|$$

اگر دو نقطه  $C$  و  $D$  هم طول باشند، آن گاه:

$$CD = |y_C - y_D|$$

**مثال:** الف) فاصله نقاط  $A(5,4)$  و  $B(-6,4)$  را به دست آورید.  
ب) فاصله نقاط  $C(3,9)$  و  $D(3,-5)$  را به دست آورید.  
**حل:** الف)  $A$  و  $B$  هم عرض هستند، لذا:

$$AB = |x_A - x_B| = |5 - (-6)| = 11$$

$$CD = |y_C - y_D| = |9 - (-5)| = 14$$

ب)  $C$  و  $D$  هم طول هستند، لذا: در حالت کلی اگر  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  دو نقطه از صفحه مختصات باشند فاصله آن‌ها از یکدیگر (طول پاره خط  $AB$ ) برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

#### مختصات وسط پاره خط

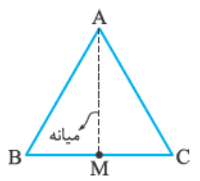
اگر  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  مختصات دو سر پاره خطی باشند، مختصات نقطه  $M$  وسط  $AB$  عبارت است از:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

**تذکره:** نقاط  $A$  و  $B$  نسبت به نقطه  $M$  (وسط  $A$  و  $B$ ) قرینه هستند.

**مثال:** اگر  $A(1,2)$ ،  $B(-4,4)$  و  $C(0,-8)$  سه رأس مثلثی باشند، اندازه میانه  $AM$  را به دست آورید. ( $M$  وسط  $BC$  است).

**حل:**  $M$  وسط  $BC$  است، لذا:



(شکل فرضی است.)

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-4 + 0}{2} = -2 \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4 + (-8)}{2} = -2 \end{cases} \quad A \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}, M \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(1+2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

## فصل 1: هندسه تحلیلی و جبر

### درس اول: هندسه تحلیلی

#### خط

**تعریف شیب خط:** شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی. شیب خطی که از نقاط  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  می‌گذرد عبارت است از:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

#### معادله خط

معادله خطی که شیب آن  $m$  بوده و از نقطه‌ای مثل  $A(x_1, y_1)$  می‌گذرد عبارت است از:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

**مثال:** معادله خطی را بنویسید که از  $A(0, -1)$  و  $B(4, 2)$  عبور کند.

**حل:**

$$(A \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix}) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{4 - 0} = \frac{3}{4}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = \frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - 1$$

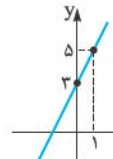
#### رسم نمودار خط

برای رسم نمودار یک خط بهتر است ابتدا معادله خط را به شکل استاندارد یعنی  $y = mx + n$  تبدیل کنیم، سپس به  $x$  دو عدد دلخواه ولی مناسب نسبت دهیم و  $y$  این دو  $x$  را به دست آوریم. حال دو نقطه به دست آمده را به هم وصل کرده و امتداد می‌دهیم. ضمناً  $m$  شیب و  $n$  عرض از مبدأ خط می‌باشد (عرض از مبدأ، محل برخورد نمودار با محور  $y$ ها می‌باشد).

**مثال:** نمودار خط  $2y - 4x = 6$  از کدام ناحیه محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

**حل:**

$$2y = 4x + 6 \xrightarrow{+2} y = 2x + 3 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 3 & 5 \end{array}$$



نمودار از ناحیه چهارم می‌گذرد.  $\Rightarrow$

#### خطوط موازی و عمود

اگر دو خط با هم موازی باشند، شیب‌های مساوی دارند، ولی اگر عمود باشند، شیب یکی از آن‌ها، عکس و قرینه دیگری است یعنی حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها  $(-1)$  است:

$$m \times m' = -1$$

**تذکره:** خطوط به معادله  $x = a$  و  $y = b$  همواره بر هم عمودند. ( $a, b \in \mathbb{R}$ )  
مثلاً دو خط  $x = -1$  و  $y = \sqrt{2}$  بر هم عمودند.

**مثال:** مقدار  $k$  را طوری به دست آورید که دو خط  $2y + 1 = x$  و  $(k-1)y = 3x - 2$  بر هم عمود باشند.

$$2y = x - 1 \xrightarrow{+2} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

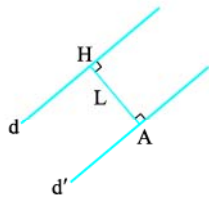
$$(k-1)y = 3x - 2 \xrightarrow{+(k-1)} y = \frac{3}{k-1}x - \frac{2}{k-1}$$



$$4x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}, O(\downarrow 3, \downarrow -6) \\ \begin{matrix} x_1 & y_1 \end{matrix}$$

$$\text{شعاع} = OH = \frac{|4(3) + (-2)(-6) + (-1)|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{23}{\sqrt{20}}$$

**فاصله بین دو خط موازی**



دو خط  $ax + by + c' = 0$  و  $ax + by + c = 0$  با هم موازی اند و فاصله بین آن‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$L = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**نکته:** کافی است فاصله یک نقطه روی یکی از دو خط را تا خط دیگر به دست آوریم، مثلاً ما به دلخواه فاصله  $A(x_1, y_1)$  را تا خط  $d$  به دست می‌آوریم:

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (1)$$

از طرفی نقطه  $A$  روی خط  $d'$  قرار دارد؛ پس می‌توانیم مختصاتش را در معادله این خط قرار دهیم.

$$ax + by + c' = 0 \xrightarrow{A(x_1, y_1) \in d'} ax_1 + by_1 + c' = 0$$

$$\Rightarrow ax_1 + by_1 = -c' \quad (2)$$

حال مقدار  $ax_1 + by_1$  از رابطه (2) را در رابطه (1) قرار می‌دهیم:

$$AH = \frac{|-c' + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**مثال:** فاصله دو خط  $x - 2y = 4$  و  $3x - 6y = 10$  را به دست آورید.

**حل:** اگر معادله  $x - 2y = 4$  را در 3 ضرب کنیم به معادله  $3x - 6y = 12$  می‌رسیم، با مقایسه این معادله و معادله خط دیگر یعنی  $3x - 6y = 10$  متوجه می‌شویم که دو خط موازی‌اند؛ زیرا ضرایب  $x$  و  $y$  آن‌ها با هم مساوی است.

$$3x - 6y - 12 = 0, \quad 3x - 6y - 10 = 0$$

$$L = \frac{|(-12) - (-10)|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2}} = \frac{2}{\sqrt{45}}$$

**درس دوم: تابع درجه دوم و معادله درجه 2**

**روش تغییر متغیر برای حل معادلات**

گاهی اوقات، یک عبارت و توانی از آن عبارت در معادله دیده می‌شود که بهتر است آن عبارت را مثلاً  $t$  فرض کرده تا آن معادله، به یک معادله درجه دوم ساده تبدیل شود؛ سپس آن معادله را حل کرده تا  $t$  به دست آید. در نهایت به جای  $t$ ، عبارت اولیه را قرار می‌دهیم.

**مثال:** معادلات زیر را به روش تغییر متغیر حل کنید.

الف)  $x^2 - 5x^2 - 6 = 0$

ب)  $(x-1)^2 + 2\sqrt{3}(x-1) = 6$

**حل:** الف)  $x^2$  را می‌توان به شکل  $(x^2)^2$  نوشت، پس  $x^2$  و توان دوم  $x^2$  در معادله دیده می‌شوند لذا نام  $x^2$  را  $t$  در نظر می‌گیریم:

$$t^2 - 5t - 6 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (t-6)(t+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 6 \Rightarrow x^2 = 6 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm\sqrt{6} \\ t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{نمی‌توان از } (-1) \text{ جذر گرفت} \end{cases}$$

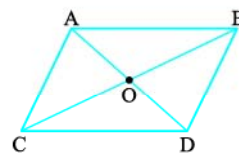
**مثال:** قرینه نقطه  $A(3, -2)$  را نسبت به  $M(0, 4)$  به دست آورید.

**حل:** اگر قرینه نقطه  $A$  نسبت به  $M$  را  $B$  بنامیم،  $M$  در واقع، نقطه وسط پاره خط  $AB$  است لذا خواهیم نوشت:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 0 = \frac{3 + x_B}{2} \Rightarrow 3 + x_B = 0 \Rightarrow x_B = -3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 4 = \frac{-2 + y_B}{2} \Rightarrow -2 + y_B = 8$$

$$\Rightarrow y_B = 10 \Rightarrow B(-3, 10)$$



**یک خاصیت مهم از متوازی الاضلاع:**

در هر متوازی الاضلاع، مانند شکل مقابل، بین مختصات 4 رأس، روابط زیر برقرار است (مربع، مستطیل و لوزی هم نوعی متوازی الاضلاع هستند).

$$\begin{cases} x_A + x_D = x_B + x_C \\ y_A + y_D = y_B + y_C \end{cases}$$

**نکته:** می‌دانیم که در متوازی الاضلاع، قطرهای همدیگر را نصف می‌کنند، لذا:

$$(x_O = \frac{x_A + x_D}{2}, x_O = \frac{x_B + x_C}{2}) \Rightarrow \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{x_B + x_C}{2}$$

$$\Rightarrow x_A + x_D = x_B + x_C$$

$$(y_O = \frac{y_A + y_D}{2}, y_O = \frac{y_B + y_C}{2}) \Rightarrow \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{y_B + y_C}{2}$$

$$\Rightarrow y_A + y_D = y_B + y_C$$

یعنی همیشه جمع مختصات دو رأس مقابل برابر است با جمع مختصات دو رأس مقابل دیگر.

**مثال:** نقاط  $A(1, 4)$ ،  $B(5, -2)$  و  $C(0, 6)$  سه رأس متوالی یک لوزی هستند. مختصات رأس چهارم لوزی را به دست آورید.

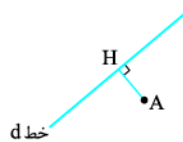
$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 1 + 0 = 5 + x_D \Rightarrow x_D = -4$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 4 + 6 = -2 + y_D$$

$$\Rightarrow y_D = 12 \Rightarrow D(-4, 12)$$

**فاصله نقطه از خط**

منظور از فاصله نقطه  $A(x_1, y_1)$  تا خط  $d: ax + by + c = 0$  طول پاره‌خطی است که از  $A$  عمود بر خط  $d$  رسم می‌شود.



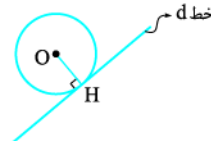
$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

به عنوان مثال فاصله نقطه  $A(3, 4)$  تا خط نیمساز ربع اول و سوم (خط  $y = x$ ) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y = x \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}, A(\downarrow 3, \downarrow 4) \\ \begin{matrix} x_1 & y_1 \end{matrix}$$

$$AH = \frac{|(-1)(3) + (1)(4) + 0|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{|-3 + 4|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**نکته:** اگر خطی بر یک دایره مماس باشد (دایره را در یک نقطه قطع کند)، فاصله مرکز دایره تا این خط، همان شعاع دایره است؛ چون خط مماس، بر شعاع گذرنده از نقطه تماس، عمود است.



فاصله O تا خط  $d = OH =$  شعاع دایره

**مثال:** خط  $4x - 2y = 1$  بر دایره‌ای به مرکز  $O(3, -6)$  مماس است. شعاع دایره را به دست آورید.



**مثال:** معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{3}$  باشد.

**حل:**

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{3} + \frac{1 - \sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3} \\ P = \alpha\beta = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{3}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{3}\right) = \frac{1 - 5}{9} = \frac{-4}{9} \end{cases}$$

معادله مطلوب:  $x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{9} = 0$

**ماکزیم و مینیمم سهمی**

می‌دانیم طول رأس سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  یعنی

نقطه S از رابطه  $x_S = \frac{-b}{2a}$  به دست می‌آید. حال اگر این عدد را به جای Xهای معادله

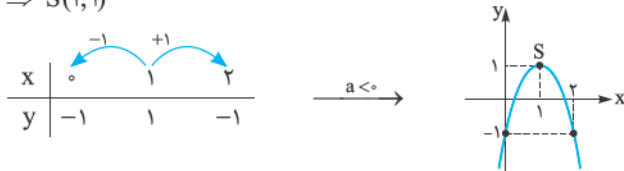
سهمی قرار دهیم مقدار  $y_S$  به دست می‌آید که همان مقدار ماکزیم یا مینیمم سهمی است (اگر  $a > 0$  باشد مینیمم و اگر  $a < 0$  باشد ماکزیم است). ضمناً مستقیماً

می‌توانیم مقدار ماکزیم یا مینیمم را از رابطه  $y = \frac{-\Delta}{4a}$  به دست آوریم.

**مثال:** بیشترین مقدار (ماکزیم) تابع  $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$  را به دست آورده و نمودار آن را رسم کنید.

**حل:**  $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-2)} = 1$  در معادله قرار می‌دهیم.  $y_S = -2(1)^2 + 4(1) - 1 = 1$

$\Rightarrow S(1, 1)$



**بهبه‌سازی**

یعنی ماکزیم کردن مقدار یک عبارت درجه دوم. برای این منظور، عبارتی را که می‌خواهیم ماکزیم شود فقط برحسب یک متغیر می‌نویسیم؛ سپس از فرمول  $\left(\frac{-b}{2a}\right)$  مقدار متغیر استفاده می‌کنیم.

**مثال:** اگر رابطه  $2x + y = 20$  برقرار باشد، مقادیر X و Y را طوری بیابید که عبارت  $\Delta xy$  ماکزیم (حداکثر) شود؟ سپس مقدار ماکزیم را به دست آورید.

**حل:** از رابطه  $2x + y = 20$  به دلخواه X یا Y را برحسب دیگری به دست می‌آوریم و در عبارت  $\Delta xy$  قرار می‌دهیم تا این عبارت فقط شامل یک متغیر شود:

$2x + y = 20 \Rightarrow y = -2x + 20$

عبارت اصلی  $\Delta xy = \Delta x(-2x + 20) = -10x^2 + 100x$

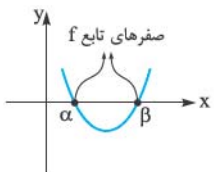
$\Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-10)} = 5$

$y = -2x + 20 \xrightarrow{x=5} y = -2(5) + 20 = 10$

عبارت اصلی  $\Delta xy = \Delta x \times \Delta y = 5 \times 10 = 50$

البته اگر  $x = 5$  را در  $(-10x^2 + 100x)$  هم قرار دهیم، باز هم به جواب 50 خواهیم رسید.

**صفرهای تابع درجه دوم**



منظور از صفرهای تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  همان ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  می‌باشد. ضمناً می‌دانید که این ریشه‌ها محل برخورد سهمی با محور Xها را نشان می‌دهند، در شکل روبه‌رو،  $\alpha$  و  $\beta$  صفرهای تابع f هستند.

(ب) عبارت  $(x-1)$  دو بار تکرار شده، پس نام آن را t می‌گذاریم:

$t^2 + 2\sqrt{3}t - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-6)$

$= 12 + 24 = 36 \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{36}}{2(1)}$

$= \frac{-2\sqrt{3} \pm 6}{2} = \frac{-\sqrt{3} \pm 3}{1} = -\sqrt{3} \pm 3$

$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = -\sqrt{3} + 3 \Rightarrow x = 4 - \sqrt{3} \\ x-1 = -\sqrt{3} - 3 \Rightarrow x = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$

**مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه 2**

در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  با فرض آن که  $\Delta > 0$  است، مجموع ریشه‌ها (S) و حاصل ضرب ریشه‌ها (P) به صورت زیر خواهد بود:

$S = \frac{-b}{a}, P = \frac{c}{a}$

**نکته:** می‌دانیم اگر  $\Delta > 0$  باشد، ریشه‌ها عبارت‌اند از:

$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$S = x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$

$P = x' \cdot x'' = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$

$= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

**نکته:** در معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر a و c مختلف‌العلامت باشند معادله حتماً دو ریشه متمایز دارد؛ زیرا در رابطه  $\Delta = b^2 - 4ac$  مقدار  $a \cdot c$  منفی می‌شود؛ پس  $\Delta$  مثبت خواهد بود. هم‌چنین ریشه‌های معادله، مختلف‌العلامت هستند زیرا  $P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$  منفی است؛ پس چون ضرب ریشه‌ها منفی شده است، یکی مثبت و دیگری منفی است.

**مثال:** با توجه به معادله  $x^2 + 5x - 3 = 0$  به سؤالات زیر پاسخ دهید:

(الف) بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های آن را به دست آورید.

(ب) بدون حل معادله، بگویید علامت ریشه‌ها چگونه است؟

**حل:** (الف)  $a$  و  $c$  علامت‌های مختلف دارند، لذا  $\Delta > 0$  است و معادله حتماً دو ریشه متمایز دارد. حال S و P را محاسبه می‌کنیم:

$S = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{1} = -5$

$P = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$

(ب) علامت ریشه‌ها مختلف است (یکی مثبت و دیگری منفی)، چون  $a$  و  $c$  مختلف‌العلامت هستند.

**تشکیل معادله درجه دوم با داشتن ریشه‌ها**

اگر ریشه‌های یک معادله درجه دوم  $\alpha$  و  $\beta$  باشند، خود آن معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow x^2 - \underbrace{\beta x - \alpha x}_{\text{فاکتورگیری}} + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$

پس اگر  $\alpha$  و  $\beta$  داده شوند  $S = \alpha + \beta$  و  $P = \alpha \cdot \beta$  را پیدا کرده و آن‌ها را در فرمول  $x^2 - Sx + P = 0$  قرار می‌دهیم.