

عدد های حقیقی

اعداد گویا: هر عددی که به کسر تبدیل شود عدد گویا نام دارد. (صورت و مخرج عدد صحیح و مخرج مخالف صفر باشد)

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\} \quad \text{نکته: اعداد گویا را با حرف انگلیسی } Q \text{ نمایش می دهند:}$$

جمع و تفریق اعداد کسری: مخرج مشترک گرفته که بهترین مخرج مشترک همان (ب. م. م) مخرج ها است.

$$\left(-\frac{5}{12}\right) - \left(-\frac{7}{18}\right) = \frac{-15 + 14}{36} = -\frac{1}{36} \quad \text{مانند:} \quad (12, 18) = 36 \Rightarrow \text{مخرج ها (ب. م. م)}$$

ضرب اعداد کسری: فقط در ضرب می توان قبل از جواب دادن صورت را با مخرج ساده کرد. سپس صورت ها در هم و مخرج ها در هم ضرب می شود.

$$\left(-\frac{5}{12}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{1}{8} \quad \text{مانند:}$$

تقسیم اعداد کسری: تقسیم به ضرب تبدیل می شود. (کسر اولی در معکوس کسر دومی ضرب می شود)

$$\left(+\frac{4}{7}\right) \div \left(-\frac{5}{21}\right) = \left(+\frac{4}{7}\right) \times \left(-\frac{21}{5}\right) = -\frac{12}{5} = -2\frac{2}{5} \quad \text{مانند:}$$

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید؟

$$\left(+\frac{2}{3}\right) \div \left[\left(-\frac{1}{15}\right) + \left(+\frac{3}{5}\right)\right] = \left(+\frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{-1+9}{15}\right) = \left(+\frac{2}{3}\right) \times \left(+\frac{15}{8}\right) = +\frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

مقایسه کسرها: از دو روش می توان استفاده کرد:

الف) هم مخرج کردن کسرها: ابتدا مخرج تمام کسرها را برابر کرده سپس کسرها را مقایسه می کنیم.

مثال: کسرهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{8}{20}, \frac{15}{20}, \frac{10}{20}, \frac{14}{20} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4} \quad (2, 4, 5, 10) = 20$$

ب) تبدیل به عدد اعشار: (صورت بر مخرج تقسیم و خارج قسمت تا دو رقم اعشار ادامه می دهیم).

مثال: کسرهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{2}{5} = 0/40, \quad \frac{3}{4} = 0/75, \quad \frac{1}{2} = 0/50, \quad \frac{7}{10} = 0/70 \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}$$

نکته: بین هر دو عدد گویا بی نهایت عدد گویا وجود دارد.

عدد های حقیقی

پیدا کردن کسر هایی بین دو عدد کسری : چند روش وجود دارد که دو روش کاربردی آن به صورت زیر است :

(۱) صورت ها با هم و مخرج ها با هم جمع می کنیم

(۲) ابتدا مخرج مشترک گرفته سپس صورت و مخرج را در یک واحد

بیشتر از تعداد خواسته شده ضرب کنیم.

مثال : بین $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{5}$ دو عدد گویا بنویسید؟

$$\frac{3}{4} < \frac{7}{9} < \frac{11}{14} < \frac{4}{5}$$

روش اول

$$\frac{3}{4} \text{ و } \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{15}{20} \text{ و } \frac{16}{20} \Rightarrow \frac{45}{60} \text{ و } \frac{48}{60} \Rightarrow \frac{45}{60} < \frac{46}{60} < \frac{47}{60} < \frac{48}{60}$$

روش دوم

تبدیل کسر به اعداد اعشاری :

(۱) عددهای اعشاری متناهی یا مختوم : اگر باقیمانده صورت بر مخرج کسر صفر شود آن کسر را مختوم نام دارد.

مانند : $\frac{3}{4} = 0.75$ و $\frac{6}{5} = 1.2$

نکته : اگر در تجزیه مخرج کسر عامل ۲ و ۵ باشند آن کسر مختوم است.

مانند : $\frac{3}{20} \quad 20 = 2^2 \times 5$ و $\frac{5}{8} \quad 8 = 2^3$

(۲) عددهای اعشاری متناوب ساده : اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر در خارج قسمت عددی مرتب تکرار شود آن را متناوب ساده می گویند.

مانند : (خط تیره روی عدد به معنی تکرار یا گردش عدد است) $\frac{5}{11} = 0.4545000 = 0.\overline{45}$ و $\frac{1}{3} = 0.33000 = 0.\overline{3}$

نکته : اگر در تجزیه مخرج کسر عامل ۲ و ۵ نباشند آن کسر متناوب ساده است.

مانند : $\frac{3}{77} \quad 77 = 7 \times 11$ و $\frac{6}{13}$

(۳) عدد های اعشاری متناوب مرکب : اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر در خارج قسمت بعد از یک یا چند رقم اعشار به رقم های تکراری برسند به آن کسر متناوب مرکب می گویند.

مانند : $\frac{5}{6} = 0.833000 = 0.8\overline{3}$ و $\frac{7}{22} = 0.31818000 = 0.3\overline{18}$

نکته : اگر در تجزیه مخرج کسر غیر از عامل ۲ و ۵ عامل دیگری باشند آن کسر متناوب مرکب است.

مانند : $\frac{5}{14} \quad 14 = 2 \times 7$ و $\frac{2}{75} \quad 75 = 3 \times 5^2$

عدد های حقیقی

اعداد گنگ یا اصم: اعداد که تعداد ارقام اعشاری آن ها نا متناهی و دارای دوره تناوب نباشند اعداد گنگ نام دارند.

نکته: مجموعه اعداد گنگ را با حرف انگلیسی \mathbb{Q} یا \mathbb{Q}^c نشان می دهند.

نکته: اگر n مربع کامل نباشد آنگاه \sqrt{n} عددی گنگ است. (یعنی اعدادی که جذر دقیق ندارند عدد گنگ هستند)

نکته: عدد π چون دارای دوره تناوب نیست عدد گنگ است. (عدد π تا ۱۰ رقم اعشار: $\pi \approx 3.1415926535$)

مثال: در جای خالی علامت \in یا \notin قرار دهید.

۲ مربع کامل نیست ۴۷ مربع کامل نیست

$$-\frac{2}{5} \notin \mathbb{Q} \quad \sqrt{0.36} \notin \mathbb{Q} \quad \sqrt{47} \in \mathbb{Q} \quad \pi \in \mathbb{Q} \quad \frac{3}{14} \notin \mathbb{Q} \quad 1 - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

نکته: بین دو عدد بی نهایت عدد گنگ وجود دارد.

مثال: بین هر دو عدد داده شده دو عدد گنگ بنویسید.

الف) $\sqrt{3}$ و $\sqrt{4}$ ب) ۲ و ۳

$$\sqrt{3} < \sqrt{3.1} < \sqrt{3.2} < \sqrt{4}$$

مثال: عدد $\sqrt{10} - 3$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.

بین ۰ و -۱ قرار دارد

$$3 - \sqrt{9} < 3 - \sqrt{10} < 3 - \sqrt{16} \Rightarrow 0 < 3 - \sqrt{10} < -1$$

مثال: اعداد $\sqrt{17}$ و $1 - \sqrt{5}$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

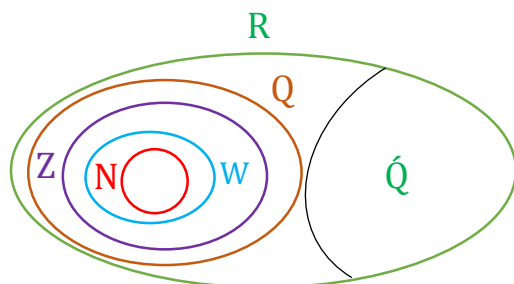


اعداد حقیقی: اجتماع مجموعه اعداد گویا و اعداد گنگ مجموعه اعداد حقیقی را تشکیل می دهد: $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c = \mathbb{R}$

نکته: مجموعه اعداد حقیقی را با حرف انگلیسی \mathbb{R} نشان می دهند.

نکته: نمودار ون مجموعه اعداد طبیعی (\mathbb{N}) و اعداد حسابی (\mathbb{W}) و اعداد صحیح (\mathbb{Z}) و اعداد گویا (\mathbb{Q}) و اعداد گنگ (\mathbb{Q}^c)

و اعداد حقیقی (\mathbb{R}) به صورت زیر است:



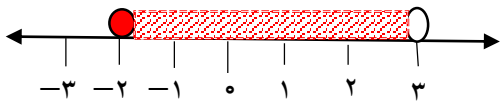
$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q}^c \subseteq \mathbb{R}$$

عدد های حقیقی

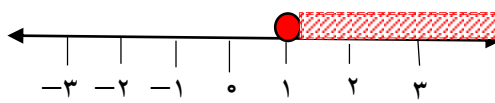
نمایش اعداد حقیقی روی محور: چون اعداد حقیقی شامل اعداد گویا و گنگ هستند پس نمایش این اعداد به صورت یک خط ممتدی است (اگر علامت نامساوی سرکش داشته باشد دایره توپر و بدون سرکش دایره تو خالی قرار می دهیم)

مثال: مجموعه اعداد زیر را روی محور نشان دهید.

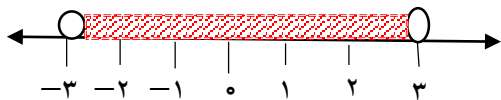
$$A = \{x \in R \mid -2 \leq x < 3\}$$



$$B = \{x \in R \mid 1 \leq x\}$$



مثال: مجموعه متناظر محور مقابل را بنویسید.



$$C = \{x \in R \mid -3 < x < 3\}$$

قدر مطلق: فاصله ی نقطه نمایش یک عدد مانند a را از مبدا مختصات قدر مطلق a می نامیم و آن را به صورت $|a|$ نشان می دهیم.

خواص قدر مطلق: الف) قدر مطلق عدد مثبت برابر است با خود آن عدد: $x > 0 \Rightarrow |x| = x$

ب) قدر مطلق صفر برابر با صفر است: $x = 0 \Rightarrow |x| = 0$

ج) قدر مطلق عدد منفی برابر با قرینه آن عدد است: $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

مثال: عبارت های زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

$$|4 - 6 \times 2^2 \div 3 + 2| = |-2| = 2$$

$$|3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$$

حاصل مثبت

$$|a^{20} - a^{30}| = a^{30} - a^{20}$$

حاصل منفی

مثال: اگر $x = \frac{2}{3}$ و $y = 3$ و $z = -\frac{1}{4}$ باشد. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|-6x - 4z| + 2|y| = \left| -6\left(\frac{2}{3}\right) - 4\left(-\frac{1}{4}\right) \right| + 2|3| = |-4 + 1| + 2(3) = 2 + 6 = 8$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

نکته: با توجه به مفهوم قدر مطلق همواره رابطه مقابل برقرار است:

مثال: حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2$$

حاصل منفی

$$\sqrt{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2} = |3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$

حاصل مثبت

عددهای حقیقی

ردیف	سوال	ردیف	سوال
۱	کسرهای زیر را به اعشار تبدیل کنید و نوع آن را مشخص کنید. $\frac{3}{4}, \frac{13}{12}, \frac{2}{11}$	۷	حاصل عبارت زیر را به دست آورید. $\frac{-2 + \frac{1}{3} + 1\frac{1}{3}}{\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}} \times \frac{2}{5} =$
۲	عبارت های زیر را به زبان ریاضی بنویسید : الف) قدرمطلق حاصل ضرب دو عدد مساوی با حاصل ضرب قدرمطلق آنهاست. ب) قدرمطلق مجموع دو عدد از مجموع قدرمطلق های آن دو عدد کوچکتر یا مساوی با آن است.	۸	قسمت دوم تساویهای زیر را کامل کنید : الف) $a < 0, b < 0 \Rightarrow a + b = \dots$ ب) $a > 0, b < 0 \Rightarrow a \cdot b = \dots$
۳	اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}$	۹	الف) کسری مساوی $\frac{3}{5}$ بنویسید که مجموع صورت و مخرج آن ۴۰ باشد. ب) بین دو کسر $\frac{3}{4}$ و $\frac{3}{5}$ یک کسر با مخرج ۲۰ بنویسید.
۴	حاصل عبارت زیر را به دست آورید. $ 3 - 3 \times 4^2 \div 6 - 9 =$	۱۰	در مجموعه ی زیر چند عدد گنگ وجود دارد. $A = \left\{ \sqrt{16+3}, \frac{3}{14}, -\frac{3}{5}, 1/\sqrt{18} \right\}$
۵	طرف دوم تساویهای زیر را کامل کنید. $N \cap Z = \dots$ $W \cup Q = \dots$ $R - Q = \dots$ $Q \cap Z = \dots$	۱۱	الف) عدد $-4 + \sqrt{5}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. ب) بین $\sqrt{3}$ و ۳ دو عدد گنگ بنویسید.
۶	الف) مجموعه A را روی محور نمایش دهید. $A = \{x \in R \mid -4 \leq x < 2\}$ ب) نمایش ریاضی نمودار زیر را بنویسید. ج) در جای خالی علامت \in یا \notin قرار دهید. $2 \in A$ $-2 + \sqrt{5} \in B$ $\sqrt{8} \in A$	۱۲	حاصل هر عبارت را به دست آورید.. $ 2\sqrt{2} - \sqrt{5} =$ $ -3 + \sqrt{5} =$ $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} =$