انشای ریاضی این فصل :

امیدوارم به اندازه ی تمام اعداد حقیقی خدا ما رو دوست داشته باشه و تمام کارهامون گویای اون باشه که عضوی از مجموعه افرادی هستیم که تو راه راست حرکت می کنند دوست دارم قدرمطلقم هر لحظه با خودم نیاز به منفی نداشته باشه چون می خوام همیشه مثبت بمونم و قدرمطلق من با هیچ آدمی بیشتر از چند دهم نباشه و قدرمطلقمون با نقطه آغاز هر لحظه بیشتر و با خدا به کمترین حد ممکن برسه و تو بازه ی زندگی که اجتماع بازه های کوچکی مثل هر روز و هر ساعته، بتونیم یه بازه ی موفق داشته باشیم .

لطفا انشای ریاضی این فصل خودتون رو بنویسید .....

فصل سوم:

استدلال و اثبات در هندسه

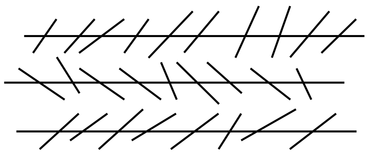
استدلال یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی ، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است .

مثال : کیک تولدی داریم که در قطعات آن دو قطعه به ابعاد ۶ و ۴ و ۲ و یک قطعه به ابعاد ۲ و ۸ و ۲ وجود دارد شما کدام یک از این کیک ها را انتخاب می کنید ؟

استدلال ما برای انتخاب بر کدام دانسته ی قبلی ما بیان شد ؟

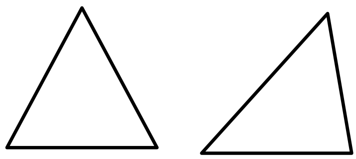
در هندسه استفاده از ترسیم و شکل ها معمول است اما نمی توان بر اساس این روش یعنی استدلال به کمک ترسیم به طور کامل اکتفا کنیم

مثال : با مشاهده تشخیص دهید آیا در شکل زیر خطوط رسم شده موازی می باشند ؟



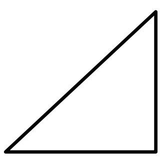
سوال : محل برخورد ارتفاع های مثلث در چه ناحیه ای از آن قرار دارد ؟

پاسخ : استفاده از رسم و دیدن :



استفاده از مثال های متعدد :

مثال نقض برای حالت های بالا : مثلث قائم الزاویه و مثلث با یک زاویه باز :



می دانیم دیدن ، استفاده از حواس و ارائه مثال های متعدد و توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کافی نیست .

آشنایی با اثبات در هندسه :

در روند استدلال از اطلاعات مسئله (فرض یا داده ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است برای رسیدنبه خواسته مسئله (حکم) استفاده می کنیم .

از حقایق و اصولی که درستی آنها را می دانیم می توان مطالب زیر را یادآوری کرد :

۱ – در هر مثلث مجموع زاویه های داخلی برابر ....درجه است .

۲ – هر زاویه خارجی در مثلث برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور است .

۳ – مجموع زاویه های .... هر مثلث ۳۶۰ درجه است .

۴ – مثلث دارای اجزایی مانند ارتفاع ، میانه ، نیمساز و عمودمنصف است که

الف – ارتفاع : پاره خطی است که از رأس بر ضلع مقابل عمود می شود

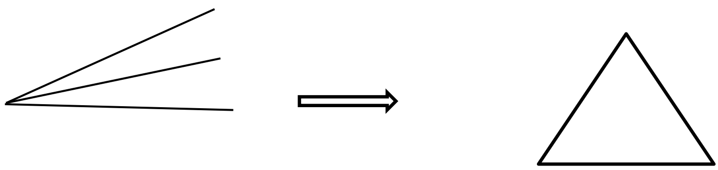
ب – میانه : پاره خطی است که از رأس بر وسط ضلع مقابل وصل می شود .

پ – نیمساز : خطی که از رأس مثلث می گذرد و زاویه ی آن را نصف می کند .

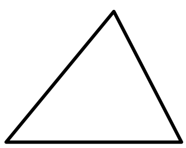
ت – عمودمنصف : خطی که بر وسط هر ضلع مثلث عمود باشد .

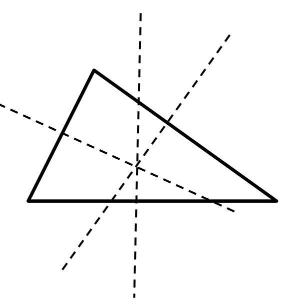
۵ – محل برخورد ارتفاع ها در مثلث با زاویه های تند در ....مثلث ، در مثلث با زاویه قائمه روی وتر و در مثلث با زاویه .... بیرون مثلث می باشد.

۶ – محل برخورد نیمسازها در مثلث از سه ضلع مثلث به یک فاصله می باشد .



۷ – میانه های هر مثلث همرس هستند و محل برخورد آنها گرانیگاه یا نقطه تعادل مثلث است .





۸ – عمودمنصف های هر مثلث همرس اند و محل برخورد آنها از رأس های مثلث به یک فاصله اند

۹ – کوچک ترین زاویه خارجی هر مثلث ، مکمل بزرگ ترین زاویه ی داخلی آن می باشد .

۱۰ – در هر مثلث قائم الزاویه ، ضلع روبه رو به زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است .

۱۱ – مجموع فاصله های هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن برابر است با اندازه ی ارتفاع مثلث .

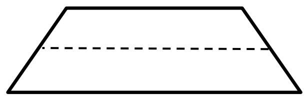
۱۲ – در هر مثلث متساوی الاضلاع با ضلع a ، طول ارتفاع برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$.

۱۳ – با توجه به نکته ۱۲ مساحت مثلث متساوی الاضلاع برابر است با :

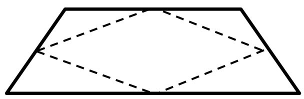
۱۴ – زاویه بین ارتفاع و میانه در مثلث قائم الزاویه برابر است با اندازه ی تفاضل دو زاویه دیگر

۱۵ – خواهیم دید که در هر مثلث قائم الزاویه اندازه ی ضلع مقابل به زاویه ۶۰ درجه با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول وتر آن مثلث برابر است .

۱۶ – در هر ذوزنقه ، در صورتی که وسط دو ساق را به هم وصل کنیم ، پاره خطی بوجود می آید که اندازه ی آن با نصف مجموع دو قاعده و این پاره خط با دو قاعده موازی می باشد .

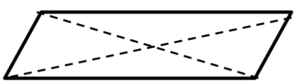


۱۷ – با وصل کردن وسط ضلع های یک ذوزنقه به یکدیگر یک لوزی بدست می آید که مساحت آن نصف مساحت ذوزنقه است .

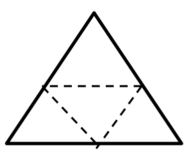


۱۸ – در هر مثلث نسبت ارتفاع رسم شده از ضلع اولی به دومی برابر است با نسبت اندازه ضلع دومی به اولی .

۱۹ – از برخورد قطرهای متوازی الاضلاع چهار مثلث با با مساحت های مساوی بدست می آید .



۲۰ – اگر وسط اضلاع هر مثلث را به هم وصل کنیم چهار مثلث بدست می آید که محیط هر کدام از آنها نصف محیط مثلث اولیه و مساحت هر کدام ربع ($\frac{۱}{۴}$) مساحت مثلث اولیه خواهد بود .



۲۱ – هرگاه در دو چند ضلعی همه ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ شده باشد یا بدون تغییر باشند) و اندازه زاویه ها تغییر نکرده باشد ، آن دو چند ضلعی را متشابه گوییم .بنابراین داریم :

الف – هر دو دایره ، مربع و مثلث متساوی الاضلاع با هم متشابه اند .

ب – نسبت تشابه دو مثلث با نسبت محیط ها برابر است .

پ – اگر دو مثلث با نسبت k متشابه باشند مساحت آنها با نسبت $k^{۲}$ خواهد داشت .

ت – در دو مثلث متشابه نسبت مساحت ها برابر است با مجذور نسبت تشابه آنها

۲۲ – در هر مثلث متساوی الساقین عمودمنصف ، میانه ، نیمساز و ارتفاع بر هم منطبق می باشد ، یادمان هست که در مثلث متساوی الساقین دو زاویه پای ساق با هم برابر خواهند بود .

۲۳ – مثلث متساوی الاضلاع با زاویه های ۶۰ درجه خواص متساوی الساقین را نیز دارد .

۲۴ – در هر مثلث طول هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر و از مجموع آنها کوچکتر می باشد (خاصیت مثلثی)

۲۵ – حالت های هم نهشتی دو مثلث در حالت کلی را به یاد داریم : تساوی دو ضلع و زاویه بین ، تساوی دو زاویه و ضلع بین و تساوی سه ضلع .

۲۶ – تساوی دو مثلث قائم الزاویه را در دو حالت کلی تساوی وتر و یک ضلع و وتر و یک زاویه داریم .

۲۷– زاویه ای که بیشتر از ۱۸۰ درجه باشد را کاو و زاویه کمتر از ۱۸۰ درجه را کوژ می نامیم و به چندضلعی که زاویه ای بیشتر از ۱۸۰ درجه داشته باشد چندضلعی مقعر و به چندضلعی که زاویه هایش کمتر از ۱۸۰ درجه داشته باشد محدب می گوییم .

۲۸ – در هر n ضلعی با توجه به اینکه از هر رأس به رأس های دیگر بجز رئوس کناری (دو رأس مجاور) می توانیم قطر رسم کنیم به تعداد $(n-۲)$مثلث می توان رسم کرد بنابراین مجموع زوایای داخلی این n ضلعی عبارت است از

$$(n-۲)\times ۱۸۰$$

۲۹– مجموع زوایای خارجی در هر مثلث را می توان در یک دایره قرار داد یعنی مجموع آنها ۳۶۰ درجه می باشد .

۳۰ – یک n ضلعی با ضلع ها و زاویه های مساوی را منتظم می نامیم و در هر n ضلعی منتظم با توجه به تساوی زوایا مجموع بین این n زاویه تقسیم می شود بنابراین اندازه هر زاویه داخلی برابر است با

$$\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$$

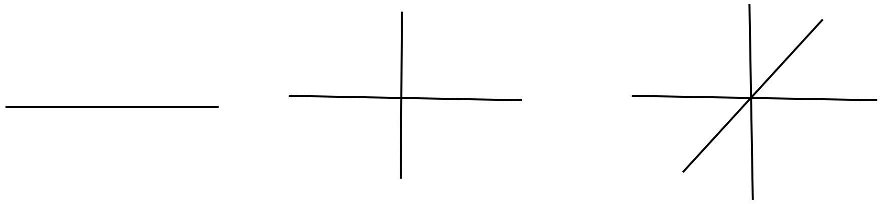
۳۱ – با توجه به نکته ۲۹ در هر n ضلعی منتظم اندازه هر زاویه خارجی یعنی ۳۶۰ بین n زاویه تقسیم می شود بنابراین اندازه هر زاویه خارجی برابر است با :

$$\frac{۳۶۰}{n}$$

۳۲ – تعداد قطرهای یک nضلعی برابر است با :

$$\frac{n(n-۳)}{۲}$$

۳۳ – در مورد یک نقطه می دانیم که بی شمار خط راست از آن عبور می کند و در مورد تعداد ناحیه ها در صورتی که n خط که از یک نقطه عبور کند رسم کنیم هر خط صفحه را به دو ناحیه تقسیم می کند بنابراین با n خط تعداد ناحیه ها برابر است با ۲n ناحیه.

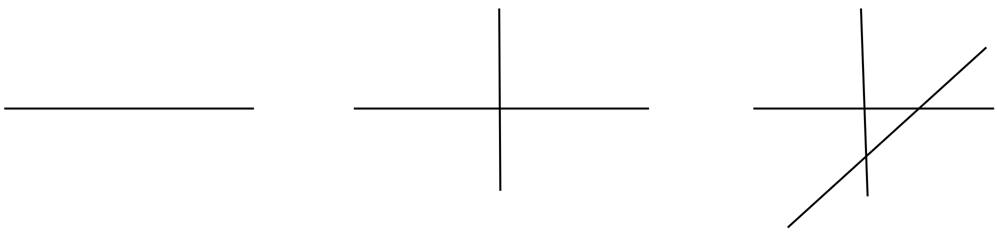


۳۴ – به کمک n نقطه می توانیم با انتخاب هر بار دو نقطه و وصل کردن آنها به یکدیگر حداکثر $\frac{n(n-۱)}{۲} = \binom{n}{۲}$ خط راست رسم کنیم

این مسئله برابر است با اینکه از n نقطه حداکثر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ خط راست عبور می کند .

۳۵ – اگر n خط راست در صفحه رسم کنیم و تمام خطوط همدیگر را قطع کنند حداکثر تعداد ناحیه های بوجود آمده برابر است با $\frac{n(n+۱)}{۲} + ۱$

برای مثال داریم :

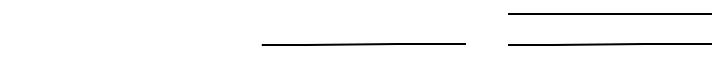


برای n=۱ داریم :

برای n=۲ داریم :

برای n=۳ داریم :

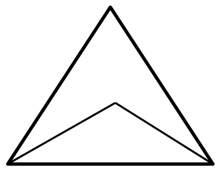
۳۶ – برای یک خط راست تعداد ناحیه ها برابر ۲ ناحیه و برای ۲ خط راست موازی تعداد ناحیه ها برابر ۳ عدد بنابراین برای n خط راست موازی تعداد ناحیه ها n+۱ خط خواهد بود .



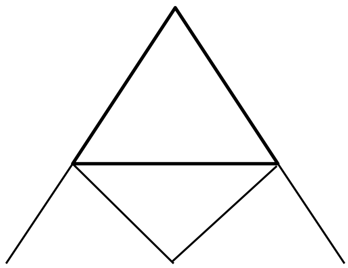
۳۷ – روی یک خط با n نقطه می توانیم به تعداد انتخاب ۲ نقطه هربار برای تشکیل یک پاره خط به تعداد $\frac{n(n-۱)}{۲} = \binom{n}{۲}$ پاره خط خواهیم داشت و برای هر نقطه از دو سر خط می توانیم دو نیم خط رسم کنیم بنابراین برای n نقطه ۲n نیم خط خواهیم داشت .

۳۸ – از هر نقطه می توانیم در صفحه به تعداد $\frac{n(n-۱)}{۲} = \binom{n}{۲}$ زاویه رسم کنیم (یک سر زاویه نقطه ثابت و سر دیگر زاویه انتخاب نقطه ای از صفحه) که از ۱۸۰ درجه کمتر باشد .

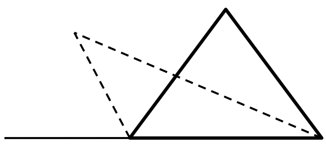
۳۹ – از برخورد دو نیمساز داخلی مثلث زاویه ای بدست می آید که اندازه آن برابر است با مجموع اندازه نیمساز زاویه سوم با زاویه ۹۰ درجه .



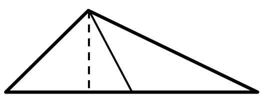
۴۰ – از برخورد دو نیمساز خارجی مثلث زاویه ای بدست می آید که اندازه آن برابر است با تفاضل اندازه نیمساز زاویه سوم با ۹۰ درجه .



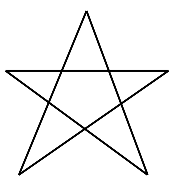
۴۱ – از برخورد نیمساز داخلی و نیمساز زاویه خارجی رأس مجاور زاویه ای بدست می آید که اندازه آن برابر است با است با نیمساز زاویه سوم .



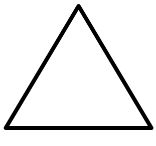
۴۲ – هر میانه مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند . یعنی مساحت های بدست آمده برابر خواهند بود . در شکل زیر میانه ها یکدیگر را با نسبت $\frac{۱}{۲}$ قطع می کنند



۴۳ – مجموع زاویه های داخلی یک ستاره پنج سر برابر ۱۸۰ درجه می باشد .



۴۴ – چندضلعی هایی که دو محور تقارن عمود بر هم داشته باشد مرکز تقارن نیز خواهد داشت بنابراین مثلث مرکز تقارن ندارد و در n ضلعی های منتظمی که n زوج باشد مرکز تقارن دارد و به تعداد n محور تقارن دارد .



۴۵

– در بحث هندسه قضیه تالس نیازمند دانستن خواص تناسب می باشد ، خواص تناسب را در زیر یادآوری می کنیم :

اگر کسرهای $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ داشته باشیم خواهیم داشت :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \to \mathrm{ad}=\mathrm{bc}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \to \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \to \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

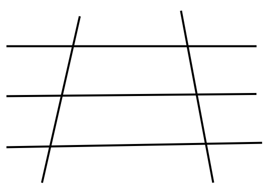
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \to \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \to \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$$

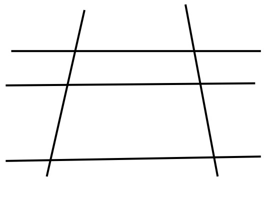
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \to \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \to \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+b}{c+d}$$

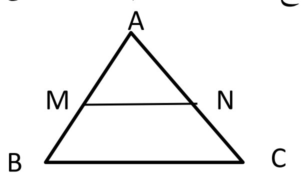
۴۶ – اگر چند خط موازی داشته باشیم که فاصله هایی یکسان داشته باشند روی خط موربی پاره خط های مساوی ایجاد کنند روی خطوط مورب دیگر نیز پاره خط های مساوی ایجاد می کنند . شکل زیر را کامل می کنیم



۴۷ – اگر خطوط موازی داشته باشیم که خطوط موربی را قطع کنند و روی یکی از آن ها پاره خط هایی مشخص جدا کنند روی بقیه خطوط با همان نسبت پاره خط هایی را ایجاد می کنند . شکل زیر را کامل می کنیم



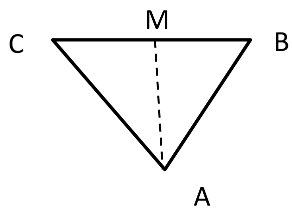
۴۸ – قضیه تالس : در مثلث اگر خطی موازی با قاعده مثلث رسم کنیم و دو ضلع دیگر را قطع کند روی آنها پاره خط هایی با نسبت یکسان جدا می کند .



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

بنا به خاصیت های تناسب همچنین داریم $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

۴۹ – در هر مثلث نسبت ضلع های مقابل به نیمسازها با نسبت دو ضلع دیگر برابر است یعنی در شکل زیر داریم



$$\frac{MB}{CM} = \frac{AB}{AC}$$

۵۰ – در صورتی که در چندضلعی زاویه های متناظر دوبه دو برابر باشند ، اضلاع متناظر دوبه دو متناسب باشند و تعداد ضلع های آنها مساوی باشد دو چند ضلعی متشابه خواهند بود .

نسبت هر دو ضلع متناظر را در شکل های متشابه نسبت تشابه می نامیم .

برای تشابه دو لوزی تساوی زاویه ها کافی است چون ضلع ها به یک نسبت بزرگ یا کوچک می شوند (با هم برابرند)

برای مستطیل می توانیم از نسبت طول به عرض و زاویه های بین دو قطر نیز استفاده کنیم .

برای دو شکل متشابه نسبت حجم دو شکل با عدد k^3 برابر است (k نسبت تشابه)

برای دو مثلث یکی از شرایط زیر لازم است که عبارت است از :

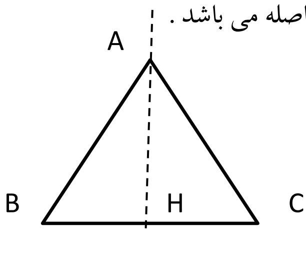
۱ – تناسب سه ضلع

۲ – تساوی دو زاویه

۳ – تناسب دو ضلع و تساوی زاویه ی بین دو ضلع .

همان طور که می دانیم اطلاعات مسئله را فرض ، اطلاعاتی که باید درستی آنها را نشان دهیم حکم و روش نشان دادن این ارتباط را استدلال می نامند و به هر مسئله ای که شامل این مطالب باشد را قضیه می نامند در مثال های زیر نمونه هایی از این قضیه ها را داریم

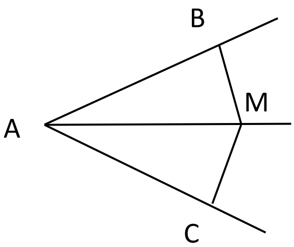
سوال ۱ – فاصله هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط تا دو سر آن پاره خط به یک فاصله می باشد .



فرض : با توجه به عمودمنصف بودن داریم :$BH = CH$ و $H_1 = H_2$

حکم : $AB = AC$

استدلال : از خاصیت همنهشتی دو مثلث کناری استفاده می کنیم (ض ز ض):

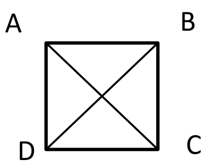


سوال ۲ – هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن فاصله ای یکسان دارد .

فرض : $A_1 = A_2$

حکم :

استدلال : می توانیم از خاصیت وتر و یک زاویه استفاده کنیم :

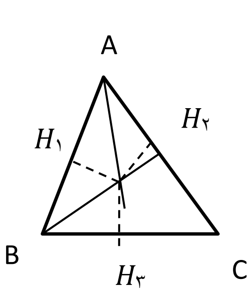


سوال ۳ – قطرهای مربع برابرند

فرض :

حکم : $DB = AC$

استدلال : از دو مثلث ABD و ABC و همنهشتی آنها استفاده کنیم :



سوال ۴ –نیمسازهای یک مثلث همرس اند .

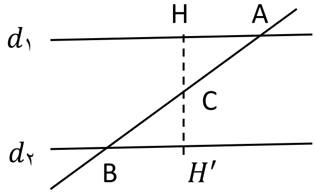
فرض : OA و BO نیمسازهای مثلث می باشند

حکم : CO نیمساز مثلث می باشد

استدلال : AO نیمساز بنابراین $OH_۱ = OH_۲$ و همچنین BO نیمساز بنابراین ....

از تساوی های بالا بدست می آید $OH_۲ = OH_۳$ پس CO نیمساز مثلث می باشد بنابراین این سه نیمساز مثلث می باشد و همرس

سوال ۵ – دو خط موازی با قطع کردن خط مورب زاویه های تند مساوی ایجاد می کنند .



فرض : $d_۱ \parallel d_۲$

حکم: $A_۱ = B_۱$

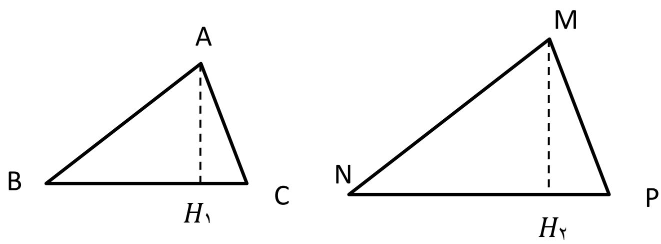
استدلال : از وسط AB بر خطوط موازی عمودی رسم می کنیم داریم دو قائم الزاویه بالا با هم همنهشت هستند بنابراین :

سوال ۶ – در دو مثلث متشابه ، نسبت مساحت دو مثلث با مجذور نسبت تشابه برابر است .

فرض : $ABC \sim MNP$ و $\frac{MN}{AB} = K$

حکم : $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = K^۲$

استدلال :



$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{MH_۲ \times NP}{۲}}{\frac{AH_۱ \times BC}{۲}} = \frac{MH_۲}{AH_۱} \times \frac{NP}{BC} = K \times K = K^۲$$

گام های حل مسئله :

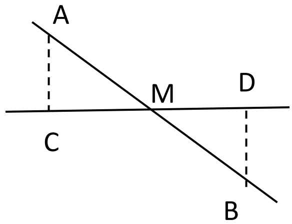
۱) خواندن صورت مسئله و مشخص کردن مفاهیم تشکیل دهنده آن

۲) یک شکل مناسب با توجه به صورت مسئله برای آن رسم کنیم .

۳) داده های مسأله (فرض) و خواسته های آن (حکم) را مشخص کنیم .

۴) برای رسیدن از فرض به حکم راه حل (استدلال) پیدا کنیم .

مثال : دو روستای A و B با یک جاده خاکی مستقیم به هم وصل هستند . در آن منطقه جاده آسفالته ای مستقیمی ساخته شده است که این دو روستا در دو طرف آن واقع شده اند و جاده آسفالته درست از وسط جاده خاکی عبور می کند راه سازی می خواهد از هر روستا یک جاده آسفالته با کوتاه ترین مسیر احداث کند . از روستای A یک جاده مستقیم به طول ۴ کیلومتر درست شده است برای جاده B این جاده به چه طولی احداث خواهد شد ؟



گام اول : مفاهیم به کار رفته : خط ، پاره خط و مفهوم کوتاه ترین مسیر

گام دوم :رسم شکل

گام سوم : فرض : $AM = MB , \hat{C} = \widehat{D} = ۹۰$

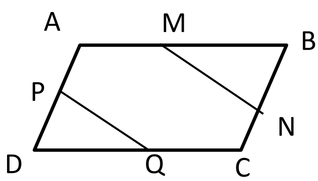
حکم: $AC = DB$

گام سوم : یافتن استدلال لازم : از همنهشتی مثلث ها استفاده می کنیم

$AM = MB , M_۱ = M_۲$وتر و یک زاویه بنابراین دو مثلث هم نهشت و اجزای متناظر با هم برابر هستند .

سوال ۷ – در شکل مقابل ABCD متوازی الاضلاع است و M ، N ، P وq وسط اضلاع متوازی الاضلاع می باشد ، ثابت کنید :

MN=PQ



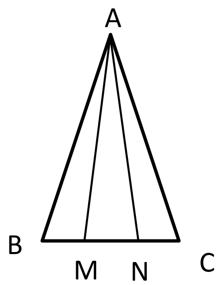
فرض : M وn وسط ضلع های AB و BC و P,Q وسط ضلع های AD و DC می باشد (ضلع های متوازی الاضلاع با هم برابرند)

حکم : MN=PQ

استدلال : از همنهشتی دو مثلث MBN و PDQ استفاده می کنیم که به حالت ض ز ض با هم همنهشت هستند بصورت :

سوال ۸ – در شکل مقابل ، مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N روی قاعده ی BC طوری قرار گرفته که BM=NC .

نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است .



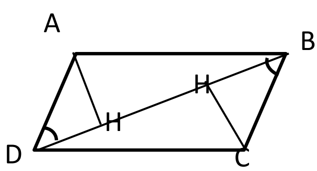
فرض :

حکم :

استدلال :

سوال ۹ – در شکل زیر ABCD متوازی الاضلاع و AH و CH' فاصله های نقاط A و C از قطر BD است نشان دهید

$$AH = CH'$$



فرض : AD=BC و $AB \parallel DC$ و DB مورب

حکم : $AH = CH'$

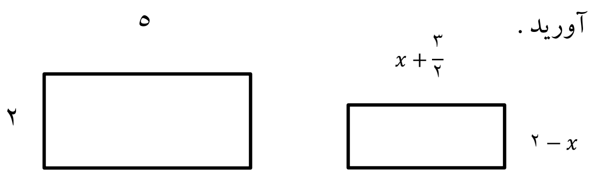
استدلال : همنهشتی دو مثلث قائم الزاویه را نشان می دهیم

سوال ۱۰ – در یک نقشه با مقیاس ۱ به ۵۰۰۰ فاصله دو نقطه روی نقشه ۷ سانتی متر است . فاصله این دو نقطه در اندازه ی واقعی را بدست آورید ؟

$$\frac{۱}{۵۰۰۰} = \frac{۷}{x}$$

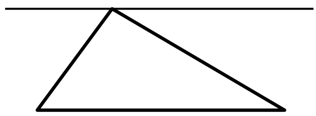
بنابراین $۵۰۰۰ \times ۷ = ۳۵۰۰۰$ سانتی متر که معادل .... متر و .... کیلومتر است .

سوال ۱۱ – در شکل زیر دو مستطیل با هم متشابه اند مقدار x را بدست آورید .



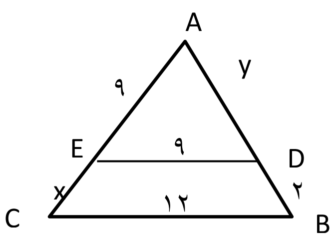
پاسخ : نسبت تشابه در طول ها و عرض ها باید با هم برابر باشد تا دو مستطیل متشابه باشند بنابراین :

تمرین : ثابت کنید مجموع زاویه های داخلی یک مثلث ۱۸۰ درجه می باشد



سوال ۱۲ – در صورتی که $\frac{b+۲}{۶} = \frac{a+۴}{۷}$ حاصل $\frac{a}{b}$ را بدست آورید .

سوال ۱۳ – در شکل زیر خط DE موازی با ضلع مثلث می باشد مقادیر x و y را محاسبه کنید .



پاسخ :

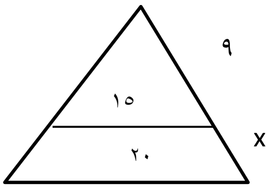
از قضیه تالس می دانیم که خطی موازی با یکی از اضلاع نسبت های متناسب روی دو ضلع دیگر ایجاد می کند و همچنین با توجه به جمع صورت در مخرج کسرها نتیجه زیر را می دهد بنابراین :

$$\frac{۹}{۹+x} = \frac{y}{y+۲} = \frac{۹}{۱۲}$$

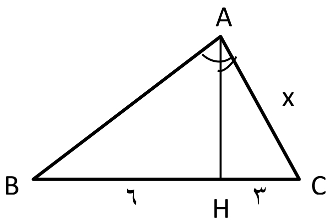
$$\frac{۹}{۹+x} = \frac{۹}{۱۲} \rightarrow$$

$$\frac{y}{y+۲} = \frac{۹}{۱۲} \rightarrow$$

تمرین :



سوال ۱۴ – با توجه به متشابه بودن دو مثلث ABH و ABC اندازه x را بدست آورید. (A قائمه است)



پاسخ :داریم در مثلث قائم الزاویه AHC

$$A_۱ + C = ۹۰$$

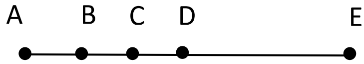
و در مثلث قائم الزاویه ABC داریم

$$B + C = ۹۰$$

در نتیجه داریم: $A_۱ = B$ و با توجه به تساوی $H = A = ۹۰$ تناسب روبه رو به ضلع های مساوی را می نویسیم :

$$\frac{CH}{AC}=\frac{AC}{BC} \to \frac{۳}{x}=\frac{x}{۹} \to x^{۲}=۲۷ \to x=\sqrt{۲۷}$$

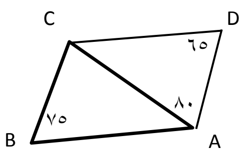
سوال ۱۵ – در شکل مقابل می دانیم AE=۲۰ ، اگر B وسط AC ، C وسط BD و D وسط BE می باشد ، طول DE چند سانتی متر است ؟(مسابقات ریاضی آمریکا)



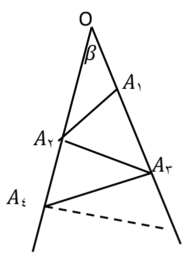
پاسخ :

داریم AB=BC=CD و DE=BD=۲AB و کل پاره خط AE که ۲۰ سانتی متر است را برحسب AB می نویسیم داریم :

سوال ۱۶ – در شکل داریم AB=AC و $\widehat{BAD}=۸۰$ و $\widehat{ABC}=۷۵$ و $\widehat{ADC}=۶۵$ اندازه ی $\widehat{BDC}$ کدام است ؟ (زاویه مورد نظر با رسم کردن قطر BD مشخص می شود) (کانگورو ۲۰۱۱) .



سوال ۱۷ – در این شکل $\beta=۷$ درجه و پاره خط های $OA_۱$ ، $A_۱A_۲$ ، $A_۲A_۳$ و ... با هم برابرند . بیشترین تعداد پاره خط هایی که می توان با همین روند به کمک این شکل رسم کرد ، چند است ؟ ($OA_۱$ اولین پاره خط است) (کانگورو ۲۰۱۰)



(راهنمایی : از مفهوم مثلث متساوی الساقین و زاویه خارجی کمک بگیرید)

سوال ۱۸ – اگر BC بزرگ ترین ضلع مثلث ABC باشد برای زاویه A کدام رابطه همواره صحیح است ؟

۱) از ۶۰ درجه بزرگتر است

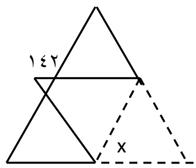
۲) تند است

۳) قائمه است

۴) باز است

پاسخ : می دانیم هر ضلع روبه رو به یک رأس قرار دارد بنابراین رأس روبه رو به ضلع BC باید از بقیه بزرگتر باشد بنابراین بزرگتر از ۶۰ است (اگر برابر بودند ۶۰ درجه بود)

سوال ۱۹ – مثلث متساوی الاضلاعی روبه رو را مطابق شکل تا کرده ایم ، اندازه ی $\hat{x}$ را به دست آورید(تیزهوشان)



سوال ۲۰ – روی پاره خط AB چند مثلث می توان رسم کرد که در دو سر AB شامل دو زاویه ی ۳۰ و ۶۰ باشند ؟(تیزهوشان)

(راهنمایی با دو زاویه ۳۰ و ۶۰ زاویه سوم قائمه است بنابراین تعداد مثلث های قائم الزاویه قابل رسم روی پاره خط با شرایط بالا موردنظر است)

سوال ۲۱ – مجموع دو زاویه خارجی مثلثی ۲۰۰ درجه است . اندازه ی یکی از زاویه های داخلی این مثلث چند درجه است ؟(نمونه دولتی)

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۸۰

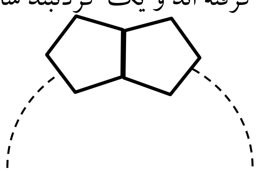
پاسخ : مجموع زوایای خارجی ۳۶۰ بنابراین زاویه خارجی سوم برابر است با ....

مجموع هر زاویه داخلی با خارجی ۱۸۰ بنابراین زاویه داخلی موردنظر برابر است با ....

سوال ۲۲ – خط $d_۱$ با خط $d_۲$ متقاطع و با خط $d_۳$ موازی است . این سه خط متمایز و در یک صفحه اند . تعداد نقاطی که از این ۳ خط به یک فاصله اند برابر است با :(مسابقات ریاضی آمریکا)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

سوال ۲۳ – پنج ضلعی منتظم هم اندازه مانند شکل مقابل ، از روی یک ضلع دور یک حلقه قرار گرفته اند و یک گردنبند ساخته اند چند تا از این چند ضلعی ها بدون فاصله دور هم قرار بگیرند تا گردنبند کامل شود ؟



پاسخ : اندازه هر زاویه داخلی ۵ ضلعی منتظم برابر است با : $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n} = \frac{(۵-۲)\times ۱۸۰}{۵} = ۱۰۸$

اندازه زاویه های داخلی دو پنج ضلعی بالا به همراه زاویه ۱۴۴ درجه جمعا ۳۶۰ درجه می باشد که این نشان می دهد زاویه داخلی چند ضلعی بدست آمده جدید به کمک پنج ضلعی ها برابر ۱۴۴ درجه است بنابراین می توانیم به کمک فرمول بالا n (تعداد ضلع ها) را بدست آوریم

$$\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n} = ۱۴۴ \to ۱۴۴n = ۱۸۰n - ۳۶۰ \to ۱۸۰n - ۱۴۴n = ۳۶۰ \to ۳۶n = ۳۶۰ \to n = \frac{۳۶۰}{۳۶} = ۱۰$$

یعنی باید ۱۰ تا پنج ضلعی کنار هم قرار دهیم

توجه : برای سرعت بخشیدن به محاسبه در انتها می توانستیم زاویه خارجی پنج ضلعی را بدست آوریم ۳۶ = ۱۴۴ − ۱۸۰ و ۳۶۰درجه که مجموع زوایای خارجی را بین ۳۶ زاویه تقسیم کنیم که ۱۰ = $\frac{۳۶۰}{۳۶}$

فصل ۴

توان و ریشه :

این فصل از اهمیت بالایی در دروس آینده و سال های بالاتر دارد

با مفهوم توان و ریشه دوم (جذر یک عدد) آشنا هستیم و می دانیم که در صورتی که عدد مربع کامل باشد ریشه دوم عدد مقداری دقیق و در غیر این صورت تقریبی است مانند ۶ = $\sqrt{۳۶}$ و ۵/۶ $\simeq$ $\sqrt{۳۲}$ اما خواهیم دید که می توانیم ریشه سوم و چهارم و... و n ام را هم بدست آوریم . همچنین با توان منفی آشنا خواهیم شد .

نماد علمی اعداد را برای نمایش اعداد خیلی بزرگ و خیلی کوچک معرفی می کنیم و در انتها با جمع و تفریق در اعداد با نماد رادیکالی بحث خواهیم کرد .