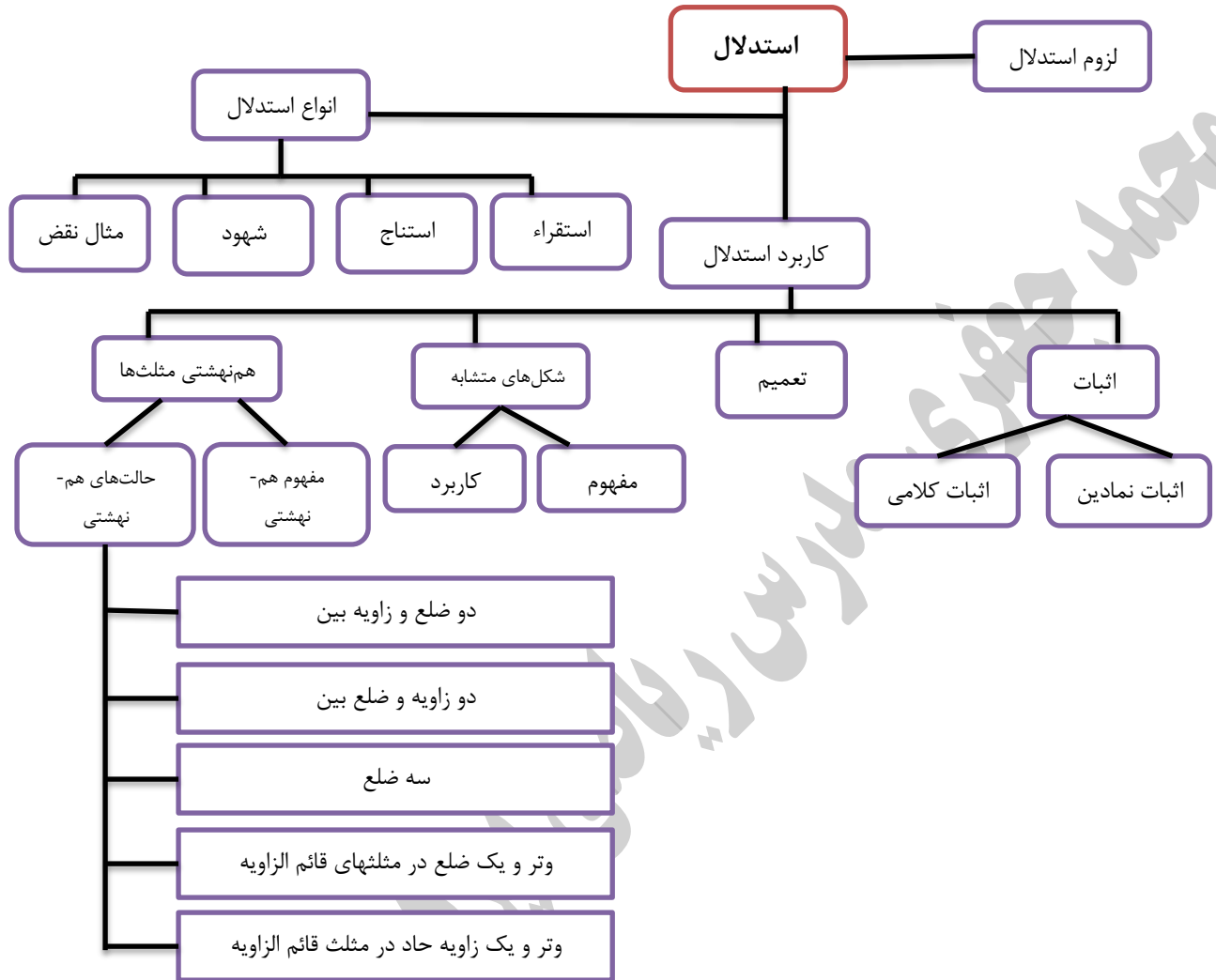


نقشه مفهومی:



استدلال: دلیل آوردن برای معلوم شدن یک موضوع مجهول، با استفاده از داشته‌های درست قبلی را استدلال گویند.

اثبات: استدلالی که درستی یک موضوع را نتیجه بدهد.

نکته: استفاده حواس پنج‌گانه برای استدلال (استفاده از شکل، ترسیم و شهود) در ریاضیات کافی نیست و باید استدلال بر اساس داشته‌های قبلی ما که مورد قبول هستند صورت پذیرد.

مثال: اگر چند مثلث رسم کنیم و سپس ارتفاع‌های آن‌ها را بکشیم و محل تقاطع ارتفاع‌های همه‌ی آن‌ها درون مثلث قرار گیرد. باز هم به طور قطع نمی‌توان گفت که محل برخورد همه‌ی ارتفاع‌های مثلث درون مثلث است.

مثال: اگر با استفاده از چشم بگوییم دو شکل هم‌نهشت هستند درست نیست. چون حواس در استدلال ریاضی کارایی ندارد همین‌طور اندازه‌گیری برای ایجاد اطمینان از هم‌نهشتی در مثلث کافی نیست.

مثال: کدام استدلال درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر باران ببارد زمین خیس می‌شود، زمین خیس نیست پس باران نباریده است.

ب) همه‌ی سکه‌های که من پرتاب کرده‌ام ((رو)) آمده‌اند. پس سکه‌ی بعدی هم که پرتاب خواهم کرد حتما ((رو)) می‌آید.

ج) هر مربع یک متوازی الاضلاع است پس در متوازی الاضلاع‌ها هر چهار ضلع مربع برابرند.

د) شهرهای بزرگ شهرهای پرجمعیت هستند تهران شهری بزرگ است پس پرجمعیت است.

در موارد فوق: الف، د استدلال‌های درست و ب و ج نادرست هستند.

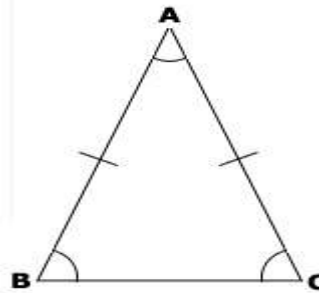
مثال نقض: مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی یا ادعا نادرست است را **مثال نقض** می‌گوییم.

فرض: به اطلاعاتی که مسئله به ما داده است **فرض** گفته می‌شود.

حکم: خواسته‌های یک مسئله را **حکم** می‌گویند.

مثال: فرض و حکم را در مسئله زیر مشخص کنید و سپس آن‌ها را به زبان ریاضی بنویسید ((در هر مثلث متساوی الساقین، زاویه‌های مجاور قاعده برابرند)).

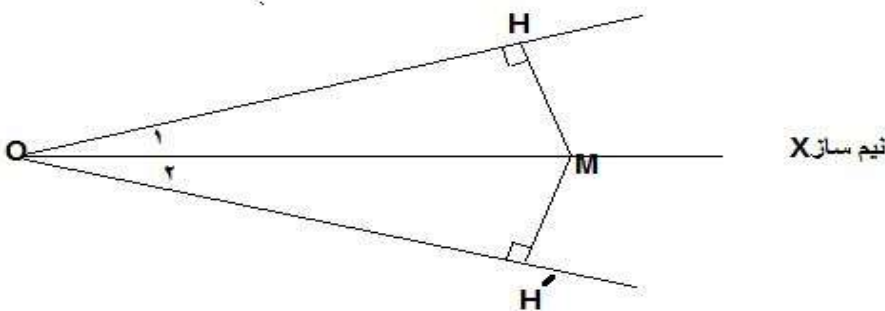
زبان ریاضی \longrightarrow مثلث ABC متساوی الساقین است: فرض $AB = AC$



زبان ریاضی \longrightarrow $\hat{B} = \hat{C}$ زاویه‌های مجاور قاعده با هم برابرند: حکم

نکته: هنگامی که می‌خواهیم موضوعی را برای هر عضو از یک مجموعه ثابت کنیم، کافی است ابتدا یک عضو دلخواه از آن مجموع را انتخاب کنیم و مطالب را برای آن ثابت کنیم و با توجه به اینکه همه اعضای آن مجموعه تمام ویژگی‌های آن عضو دلخواه را دارند مطالب را برای تمام اعضای آن مجموعه **تعمیم** دهیم.

مثال: ثابت کنید فاصله‌ای هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.



اثبات: نقطه دلخواه M را روی نیم‌ساز زاویه O (OX) انتخاب می‌کنیم و از آن دو عمود بر ضلع‌های زاویه رسم می‌کنیم تا در نقطه H و H' این ضلع را قطع کند.

$OM = OM$ (مشترک)

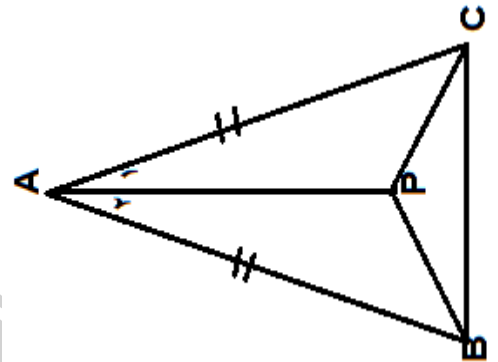
وتر و یک زاویه تند

$$\triangle OHM \cong \triangle OH'M \rightarrow HM = H'M$$

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ نیم سازه (OX)

فاصله M از دو ضلع زاویه برابر است، چون این مطلب را برای نقطه ی دلخواه M ثابت کردیم و بقیه نقاط روی نیم سازه هم با این نقطه از نظر ویژگی های تفاوتی ندارد پس این مطلب برای هر نقطه از نیم سازه درست است.

مثال: در شکل مقابل نشان دهید مثلث PBC متساوی الساقین است (AP نیم سازه زاویه A است).



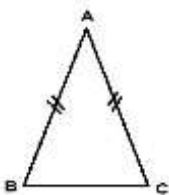
نکته: در مثلث متساوی الساقین نیم سازه وارد بر قاعده میانه نیز هست (اثبات کنید؟)

نکته: در مربع هر قطر نیم سازه زاویه های ۲ سر آن است (ثابت کنید؟)

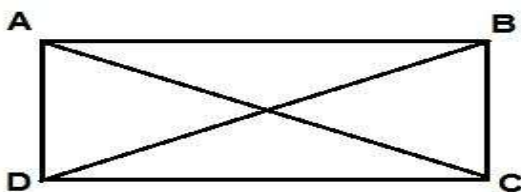
نکته: هر نقطه روی عمود مصف پاره خط AB از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

کار در منزل

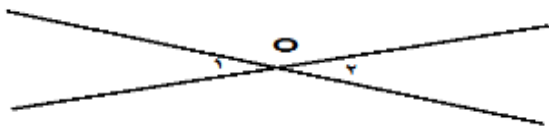
۱) در عبارت های زیر فرض و حکم را مشخص و سپس حکم را ثابت کنید:



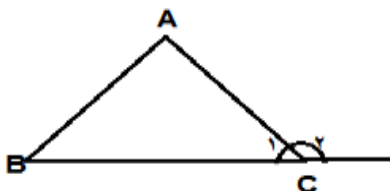
الف) در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های مجاور به قاعده برابرند.



ب) در هر مستطیل قطرها با هم برابرند.

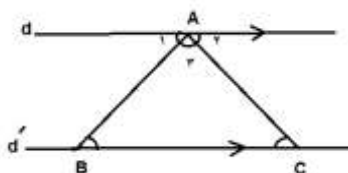


ج) دو زاویه متقابل به رأس با هم برابرند.



د) در هر مثلث مجموع دو زاویه داخلی با زاویه‌ی خارجی غیرمجاور آن‌ها برابر است.

۲) ثابت کنید هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه زا دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است؟

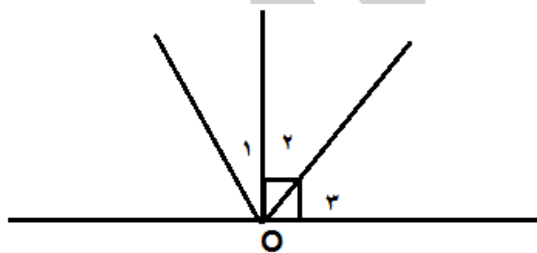


۳) استدلال زیر را کامل کنید: ((مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است)).

(A به سبب $dd \parallel$,)

(A به سبب $dd \parallel$,)

۴) ثابت کنید ((اگر ۲ زاویه دارای یک متمم باشند آن گاه این دو زاویه با هم برابرند)).



هم‌نهستی مثلث‌ها: در سال قبل حالت‌های هم‌نهستی را یاد گرفته‌اید:

- ۱- دو ضلع و زاویه بین (ض ض ض)
 - ۲- دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز)
 - ۳- سه ضلع (ض ض ض)
- ← برای همه مثلث‌ها

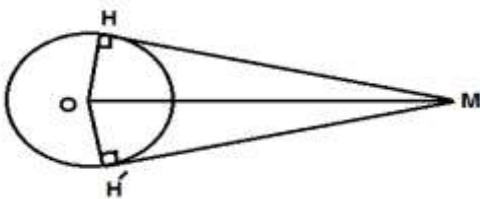
۴- وتر و یک ضلع (و ض)

مخصوص مثلث قائم الزاویه ←

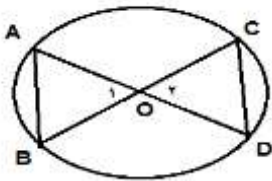
۵- وتر و یک زاویه تند (و ز)

نکته: هم‌نهشتی مثلث‌ها یکی از ابزارهایی هست که در هندسه برای اثبات برابری ۲ پاره‌خط یا دو زاویه از آن استفاده می‌شود به این ترتیب که ابتدا یک شکل مناسب برای مسئله داده شده رسم می‌کنیم و سپس خواسته مسئله را روی شکل پیدا می‌کنیم و با استفاده از هم‌نهشتی دو مثلث خواسته مسئله را (که در اجزای متناظر به آن می‌رسیم) اثبات می‌کنیم.

مثال: ثابت کنید اندازه ۲ مماس که از نقطه‌ای بیرون دایره به دایره رسم می‌شود با هم برابر است؟



مثال: در شکل زیر نشان دهید؟ $AB=CD$



شکل‌های متشابه: هرگاه در دو شکل همه‌ی ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ یا بدون تغییر) و اندازه‌ی زاویه‌ها تغییری نکرده باشد، به آن دو شکل **متشابه** گوئیم.

نکته: الف) دو مربع دلخواه همواره متشابه‌اند. ب) دو مثلث متساوی الاضلاع همواره متشابه‌اند. ج) هر دو شکل هم‌نهشت با هم متشابه‌اند. د) دو لوزی دلخواه همواره متشابه نیستند زیرا ممکن است زاویه‌های نظیر مساوی نباشند. ه) دو متسطیل دلخواه همواره متشابه نیستند زیرا ممکن است اضلاع متناظر به یک نسبت تغییر نکرده باشند. و) هر دو مثلث متساوی الساقین با هم متشابه نیستند زیرا ممکن است اضلاع و زاویه‌های متناظر با هم متناسب نباشند.

مثال: دو مثلث ABC و DEF با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها ۲ یا $\frac{1}{2}$ است. اگر اضلاع مثلث ABC به اندازه ۳ و ۵ و ۶ و اضلاع مثلث DEF به اندازه ۳-X و ۱۰ و ۲Y+8 باشند. مقداری X و Y را بدست آورید؟

$$\frac{X-3}{3} = \frac{10}{5} = \frac{2Y+8}{6}$$

نکته: نسبت اضلاع متناظر ۲ شکل متشابه را **نسبت تشابه** گویند.

نکته: نسبت محیط‌های دو n ضلعی با نسبت تشابه دو شکل مساوی است.

نکته: نسبت مساحت‌های دو n ضلعی با مجذور نسبت تشابه دو شکل مساوی است.

مثال: نسبت مساحت‌های دو پنج ضلعی منتظم برابر با $\frac{4}{9}$ است. اگر اندازه‌ی ضلع پنج ضلعی بزرگ ۶ باشد. اندازه ضلع پنج ضلعی کوچک‌تر چند است؟

مثال: نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{16}{25}$ است. نسبت ارتفاع‌های متناظر دو مثلث را بدست آورید؟

پاسخ: نسبت تشابه را $\frac{x}{y}$ می‌گیریم پس:

نکته: در دو مثلث متشابه: نسبت محیط‌ها، ارتفاع‌های متناظر، میانه‌های متناظر، نیم‌سازهای متناظر با نسبت تشابه برابر و نسبت مساحت‌ها با مجذور نسبت تشابه برابر است.

نکته: خطی که از مرکز دایره بر هر وتر عمود شود، وتر را نصف می‌کند.

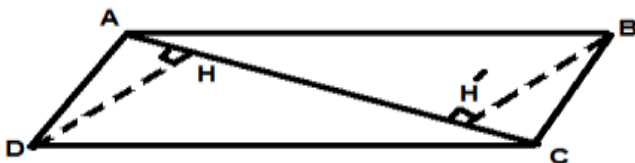
نکته: فاصله مرکز دایره از دو وتر مساوی به یک اندازه است.

نکته: وترهای نظیر دو کمان مساوی با هم برابرند و بالعکس.

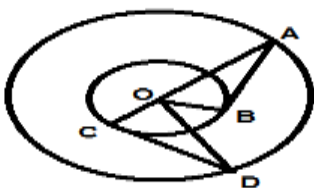
نتیجه: در مثلث متساوی الساقین نیم‌ساز زاویه رأس، میانه و عمود منصف قاعده و ارتفاع به هم منطبق‌اند.

کار در منزل

سؤال: نشان دهید در متوازی الاضلاع هر دو رأس مقابل از قطر بین آن‌ها به یک فاصله است؟

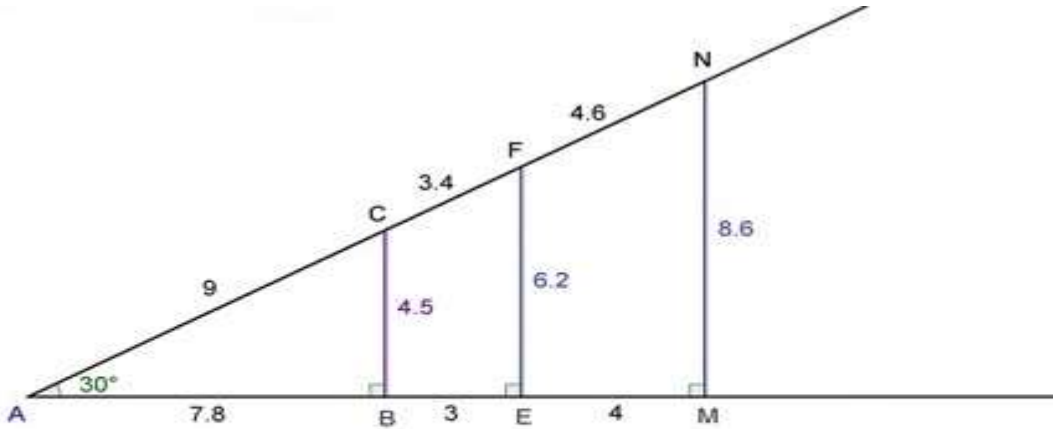


سؤال: در شکل مقابل نشان دهید؟ $AB=CD$



نکات و سوالات تکمیلی :

نکته: نسبت اضلاع مثلث‌های قائم الزاویه به زاویه‌ها بستگی دارد. $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE} = \frac{MN}{AM}$



$$\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE} = \frac{MN}{AM}$$

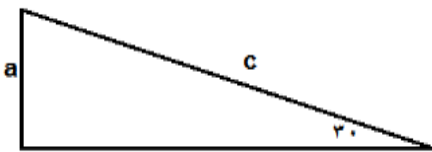
$$\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{AF} = \frac{MN}{AN}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{AM}{AN}$$

$$\frac{4.5}{7.8} = \frac{6.2}{10.8} = \frac{8.6}{14.8} \cong 0.5$$

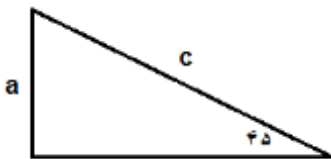
$$\frac{4.5}{9} = \frac{6.2}{12.5} = \frac{8.6}{17.1} \cong 0.5$$

$$\frac{7.8}{9} = \frac{10.8}{12.5} = \frac{14.8}{17.1} \cong 0.5$$

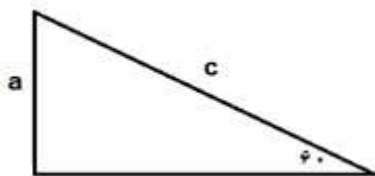


ضلع روبه روی زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است. $a = \frac{1}{2}c$

ضلع روبه روی زاویه ۴۵ درجه $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وتر است. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}c$



ضلع روبه روی زاویه ۶۰ درجه $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است. $a = \frac{\sqrt{3}}{2}c$



نکته: محل برخورد ارتفاع‌ها در مثلث با زاویه‌های تند در داخل مثلث، در مثلث با زاویه قائمه روی وتر و در مثلث با زاویه باز بیرون مثلث می‌باشد.

نکته: محل برخورد نیم‌سازها در مثلث از ۳ ضلع مثلث به یک فاصله است.

نکته: میانه‌های هر مثلث هم‌رأس هستند و محل برخورد آن‌ها گرانیگاه یا نقطه ی تعادل مثلث است.

نکته: عمود منصف‌های هر مثلث هم‌رأس‌اند و محل برخورد آن‌ها از رأس‌های مثلث به یک فاصله‌اند.

نکته: کوچکترین زاویه‌ی خارجی هر مثلث مکمل بزرگترین زاویه‌ی داخلی آن می‌باشد.

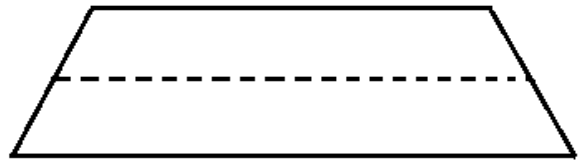
نکته: مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن برابر است با اندازه ارتفاع مثلث.

نکته: در هر مثلث متساوی الاضلاع با ضلع a ، طول ارتفاع برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

سؤال: مساحت مثلث متوازی الاضلاع به ضلع a بر حسب a برابر است با؟

نکته: زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه در مثلث قائم الزاویه برابر است با اندازه‌ی تفاضل دو زاویه دیگر.

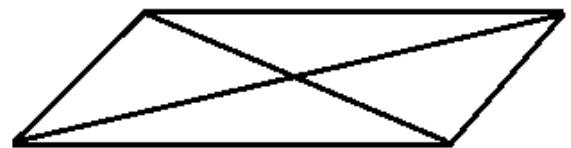
نکته: در هر دوزنقه، در صورتی که وسط دو ساق را به هم وصل کنیم، پاره خطی به‌وجود می‌آید که اندازه‌ی آن با نصف مجموع دو قاعده برابر است و این پاره خط با دو قاعده موازی است.



نکته: با وصل کردن وسط ضلع‌های یک دوزنقه به یکدیگر یک لوزی بدست می‌آید که مساحت آن نصف مساحت دوزنقه است.

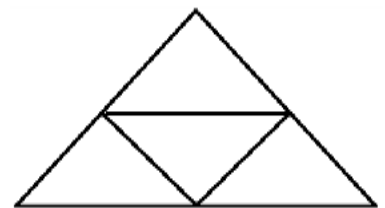


نکته: از برخورد قطرهای متوازی الاضلاع چهار مثلث با مساحت‌های مساوی بدست می‌آید.



نکته: اگر وسط‌های اضلاع هر مثلث را بهم وصل کنیم چهار مثلث بدست می‌آید. که محیط هر کدام از آن‌ها نصف محیط مثلث اولیه و

مساحت هر کدام $\left(\frac{1}{4}\right)$ مساحت مثلث اولیه خواهد بود. (اثبات کنید؟)



نکته: زاویه‌ای را که بیش از 180° درجه باشد را **کاو** و زاویه‌ی کمتر از 180° درجه را **کوژ** می‌نامیم و به چند ضلعی که زاویه‌ی بیشتر از 180°

درجه داشته باشد چند ضلعی **مقعر** و به چند ضلعی که زاویه‌هایش کمتر از 180° درجه باشد **محدب** می‌گوییم.

نکته: در هر n ضلعی با توجه به اینکه از هر رأس به رأس‌های دیگر بجز رئوس کناری (دو رأس مجاور) می‌توانیم قطر رسم کنیم به تعداد

$$(n-2) \times 180$$

نکته: مجموع زوایای خارجی در هر مثلث را می‌توان در یک دایره قرار داد یعنی مجموع آن‌ها 360 درجه می‌باشد.

نکته: یک n ضلعی با ضلع‌ها و زوایای مساوی را منتظم می‌نامیم و در هر n ضلعی منتظم با توجه به تساوی زوایاها مجموع بین این n

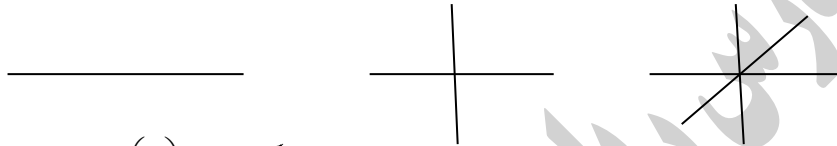
$$\frac{(n-2) \times 180}{n} = 180 - \frac{360}{n}$$

نکته: در هر n ضلعی منتظم اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی برابر است با: $\frac{360}{n}$

نکته: تعداد قطرهای یک n ضلعی برابر است با: $\frac{n(n-3)}{2}$

نکته: در مورد یک نقطه می‌دانیم که بی‌شمار خط راست از آن عبور می‌کند و در مورد تعداد ناحیه‌ها در صورتی که n خط که از یک نقطه

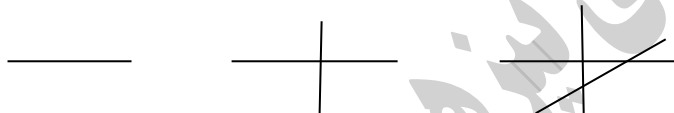
عبور کند رسم کنیم هر خط صفحه را به دو ناحیه تقسیم می‌کند. بنابراین با تعداد n خط، تعداد ناحیه‌ها برابر است با $2n$ ناحیه



نکته: با کمک n نقطه می‌توانیم با انتخاب هر بار دو نقطه و وصل کردن آن‌ها به یکدیگر حداکثر $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ خط راست رسم کنیم.

نکته: اگر n خط راست در صفحه رسم کنیم و تمام خطوط هم دیگر را قطع کنند حداکثر تعداد ناحیه‌های به‌وجود آمده برابر است با:

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1$$



نکته: برای یک خط راست تعداد ناحیه‌ها برابر دو ناحیه و برای دو خط موازی تعداد ناحیه‌ها برابر ۳ عدد بنابراین برای n خط راست

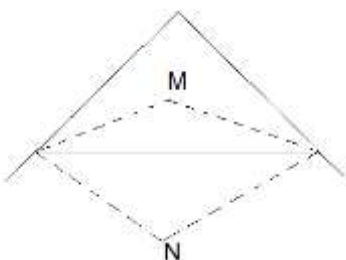
موازی تعداد ناحیه‌ها $n+1$ خواهد بود

نکته: روی یک خط با n نقطه می‌توانیم با انتخاب ۲ نقطه هر بار یک پاره‌خط تشکیل دهیم که به تعداد $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ پاره‌خط خواهیم

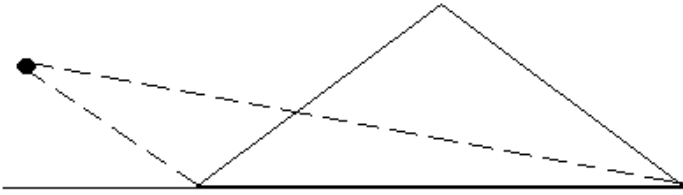
داشت و برای هر نقطه از دو سر خط می‌توانیم دو نیم‌خط رسم کنیم بنابراین برای n نقطه $2n$ نیم‌خط خواهیم داشت.

نکته: از برخورد دو نیم‌ساز داخلی مثلث زاویه‌ای بدست می‌آید که اندازه‌ی آن برابر است با مجموع اندازه نیم‌ساز زاویه سوم با زاویه 90 درجه

نکته: از برخورد دو نیم‌ساز خارجی مثلث زاویه‌ای بدست می‌آید که اندازه‌ی آن برابر است با تفاضل اندازه نیم‌ساز زاویه سوم با 90 درجه



نکته: از برخورد نیمساز داخلی و نیمساز زاویه‌ی خارجی رأس مجاور زاویه‌ای بدست می‌آید که اندازه‌ی آن برابر است با نیمساز زاویه‌ی سوم



نکته: هر میانه مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند یعنی مساحت‌های بدست آمده برابر خواهند بود در شکل زیر میانه‌ها یک‌دیگر را به نسبت $\frac{1}{2}$ قطع می‌کند.



نکته: چند ضلعی‌هایی که دو محور تقارن عمود برهم داشته باشند مرکز تقارن نیز خواهند داشت بنابراین مثلث مرکز تقارن ندارد و در n ضلعی‌های منتظم که n زوج باشد مرکز تقارن دارد و به تعداد n محور تقارن دارد.

خواص تناسب: اگر کسرهای $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را داشته باشیم خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow ad = bc$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$$

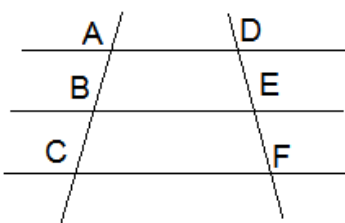
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{c+d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

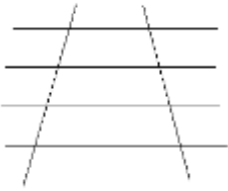
نکته: اگر چند خط موازی داشته باشیم که فاصله‌های یکسان داشته باشند روی خط موربی پاره‌خط‌های مساوی ایجاد کنند روی خطوط مورب دیگر نیز پاره‌خط‌های مساوی ایجاد می‌کنند.



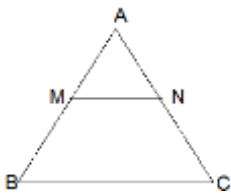
$$AB = BC$$

$$DE = EF$$

نکته: اگر خطوط موازی داشته باشیم که خطوط موربی را قطع کنند و روی یکی از آن‌ها پاره‌خط‌های مشخص جدا کنند روی بقیه خطوط با همان نسبت پاره‌خط‌هایی را ایجاد می‌کنند.



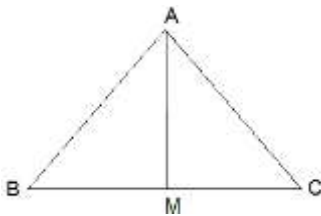
قضیه تالس: در هر مثلث اگر خطی موازی با قاعده مثلث را رسم کنیم و دو ضلع دیگر را قطع کند روی آن‌ها پاره‌خط‌های با نسبت یکسان جدا می‌کند.



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \quad \text{رابطه جزء به جزء}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad \text{رابطه جزء به کل} \rightarrow \text{بنا به خاصیت‌های کتاب داریم.}$$

نکته: در هر مثلث نیم‌ساز هر ضلع روی آن ضلع با اضلاع زاویه نسبت‌های برابر ایجاد می‌کند یعنی $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$



سوال ۱- فاصله هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط تا دو سر آن پاره خط به یک فاصله می‌باشد؟

سوال ۲- هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن فاصله‌ای یکسان دارد؟

سوال ۳- قطرهای مربع برابرند؟

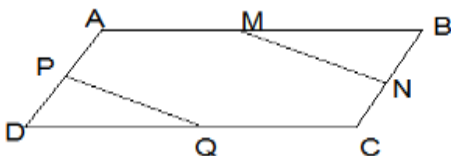
سوال ۴- نیم‌سازهای یک مثلث هم‌رأس اند؟

سوال ۵- دو خط موازی با قطع کردن خط مورب زاویه‌های تند مساوی ایجاد می‌کند؟

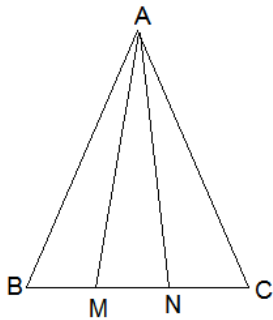
سوال ۶- در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت دو مثلث متشابه با مجذور نسبت تشابه برابر است؟

سوال ۷- در شکل مقابل ABCD متوازی الاضلاع است و (M,N,P,Q) وسط اضلاع متوازی الاضلاع می‌باشد، ثابت کنید:

$$MN=PQ$$

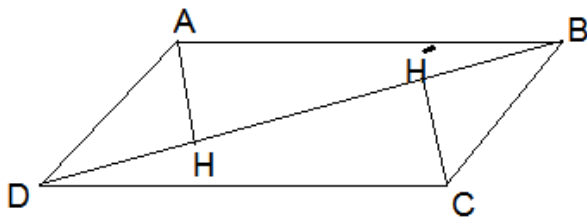


سوال ۸- در شکل مقابل مثلث ABC متساوی الاساقین است و M و N روی قاعدهی BC طوری قرار گرفته است که $BM=NC$ نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الاساقین است؟



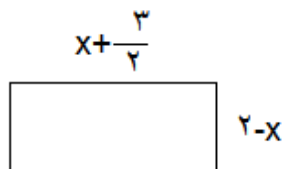
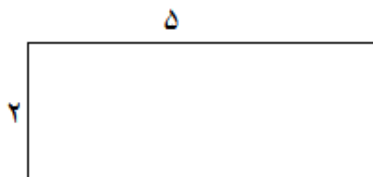
سوال ۹- در شکل زیر ABCD متوازی الاضلاع و AH و CH' فاصله‌های نقاط A و C از قطر BD است نشان دهید

$$AH = CH'$$



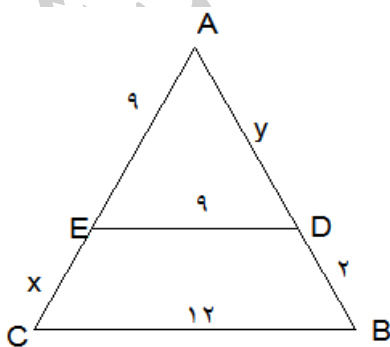
سوال ۱۰- در یک نقشه با مقیاس ۱ به ۵۰۰۰ فاصله دو نقطه روی نقشه ۷ سانتی متر است. فاصله ی این دو نقطه در اندازه ی واقعی را بدست آورید؟

سوال ۱۱- در شکل زیر ۲ مستطیل با هم متشابه‌اند مقدار X را بدست آورید؟

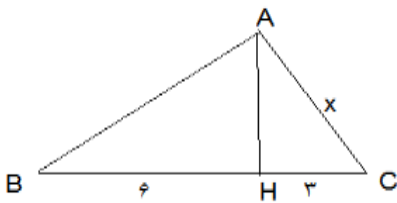


سوال ۱۲- در صورتی که $\frac{a+4}{7} = \frac{b+2}{6}$ حاصل $\frac{a}{b}$ را بدست آورید؟

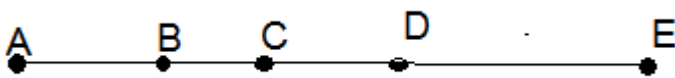
سوال ۱۳- در شکل زیر خط DE موازی با ضلع مثلث می‌باشد مقدار X و Y را محاسبه کنید.



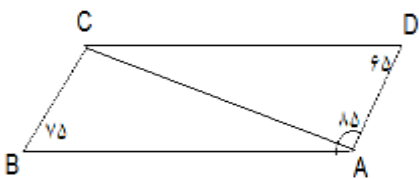
سوال ۱۴- با توجه به متشابه بودن دو مثلث ABH و ABC اندازه x را بدست آورید (A قائمه است).



سوال ۱۵- در شکل مقابل می دانیم $AE = 20$ ، اگر B وسط AC و C وسط BC و D وسط BE باشد، طول DE چند سانتی متر است؟ (مسابقات ریاضی آمریکا)



سوال ۱۶- در شکل داریم $AB=AC$ و $BAD = 180^\circ$ و $ABC = 75^\circ$ و $ADC = 65^\circ$ اندازه ی BDC کدام است؟
(زاویه مورد نظر با رسم قطر BD مشخص می شود) (کانگورو ۲۰۱۱)

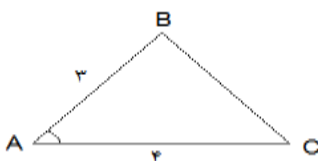
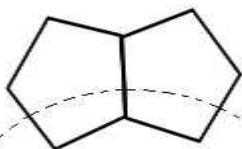


سوال ۱۷- اگر BC بزرگترین ضلع مثلث ABC باشد برای زاویه A کدام رابطه همواره صحیح است؟

(۱) از 60° درجه بزرگتر است. (۲) تند است. (۳) قائمه است. (۴) باز است.

سوال ۱۸- مجموع دو زاویه ی خارجی مثلثی 200° درجه است. اندازه ی یکی از زاویه های داخلی این مثلث چند درجه است؟ (نمونه دولتی)

سوال ۱۹- پنج ضلعی های منتظم هم اندازه مانند شکل مقابل، از روی یک ضلع دور یک حلقه قرار گرفته اند و یک گردن بند ساخته اند چند تا از این پنج ضلعی ها بدون فاصله دور هم قرار بگیرند تا گردن بند کامل شود؟



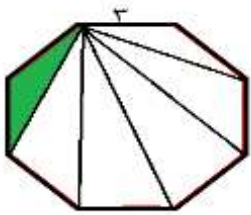
سوال ۲۰- مساحت مثلث رو به رو را بدست آورید؟

نکته: مساحت مثلثی که دو ضلع و زاویه بین آن‌ها داده شده باشد از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

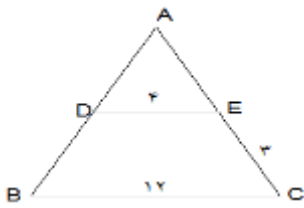
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} \quad (\text{اثبات کنید؟})$$

سوال ۲۱- در شکل زیر مساحت قسمت رنگ شده را بدست آورید؟ (۸ ضلعی منتظم)

نکته: Sin دو زاویه که مکمل یکدیگرند برابر است.



سوال ۲۲- در شکل زیر DE با BC موازی است طول پاره‌خط AE برابر است با:



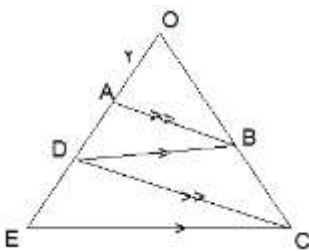
(د) $\frac{3}{8}$

(ج) $\frac{3}{2}$

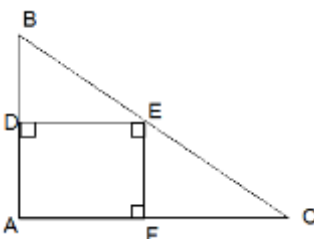
(ب) ۹

(الف) ۱

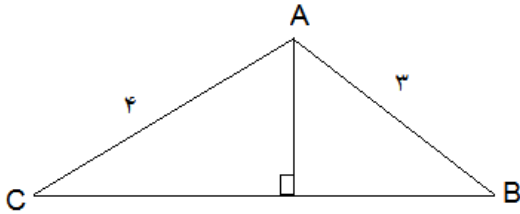
سوال ۲۳- در شکل مقابل $AB \parallel DC, DB \parallel EC$ است اندازه AD چقدر است؟ ($OA=2$) ($OE=18$)



سوال ۲۴- در مثلث قائم الزاویه ABC و $AB=10$ و $AC=30$ است طول ضلع مربع چقدر است؟

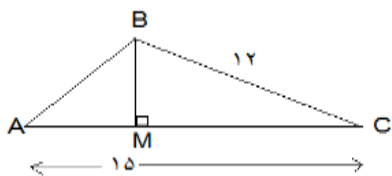


سوال ۲۵- در مثلث قائم الزاویه ABC (شکل مقابل) $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 4$, $\hat{A} = 90^\circ$ نسبت تشابه دو مثلث ABC و ABH کدام است؟



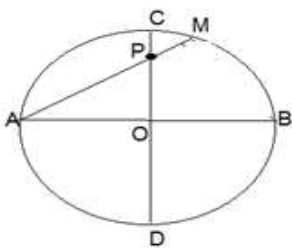
- الف) $0/4$ ب) $0/16$ ج) $0/15$ د) $0/18$

سوال ۲۶- در شکل زیر مثلث‌های ABC, BMC, ABM متشابه هستند نسبت مساحت مثلث‌های BMC به مثلث ABM کدام است؟



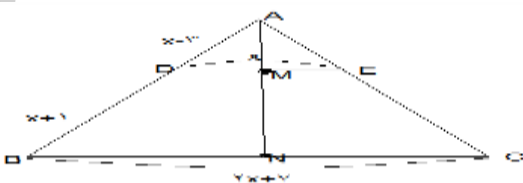
- الف) $1/4$ ب) $1/6$ ج) $25/16$ د) $16/9$

سوال ۲۷- در دایره روبه رو، قطرهای AB و CD به یکدیگر عمودند. اگر وتر AM را در P قطع کند، آنگاه $AP \times AM$ برابر است با:



- الف) $AO \times AB$ ب) $AO \times OB$ ج) $CB \times CD$ د) $CP \times PD$

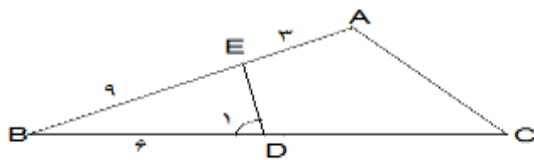
سوال ۲۸- در شکل زیر BC و DE موازی هستند و نقاط M و N به ترتیب وسط‌های DE و BC می‌باشند، اندازه‌ی DM چقدر است؟



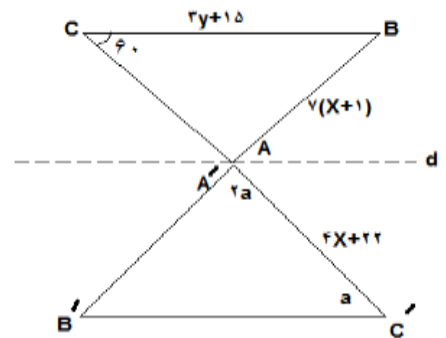
سوال ۲۹- بین اشکال ((مربع، مستطیل، لوزی و دوزنقه متساوی الساقین)) در حالت کلی ، در چند شکل قطعا، قطرهای هم‌دیگر را نصف می‌کنند و بر هم عمودند؟ (قلمچی ۹۶/۱۱/۶) الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

نکته: در مربع و لوزی قطرهای هم‌دیگر را نصف می‌کنند و بر هم عمودند، در مستطیل و به طور کلی‌تر در متوازی‌الاضلاع قطرهای یک‌دیگر را نصف می‌کنند اما لزوماً بر هم عمود نیستند، در دوزنقه متساوی الساقین نیز قطرهای نه لزوماً هم‌دیگر را نصف می‌کنند و نه لزوماً بر هم عمودند.

سوال ۳۰- در شکل زیر اگر $\hat{A} = \hat{D}_1$ باشد، طول CD چند واحد است؟ (شکل کاملاً فرضی و طول‌ها بر حسب واحد است)



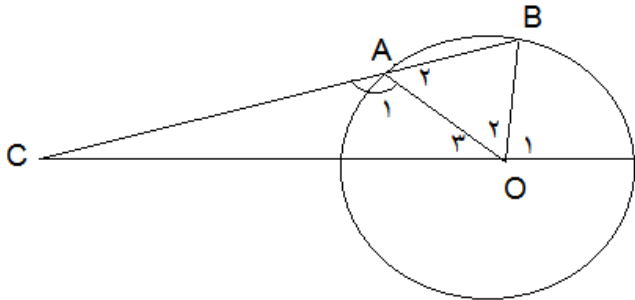
سوال ۳۱- مثلث $A'B'C'$ حاصل تقارن مثلث ABC نسبت به خط d است. شکل کاملاً فرضی است در این صورت الزاماً



الف) $xy = 35$, $\frac{1}{2}a = 20$ ب) $x + y = 2$, $a = 40$

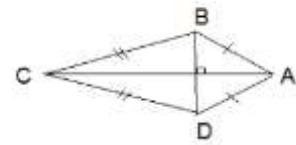
ج) $xy = 35$, $2a = 40$ د) $x + y = 12$, $a = 80$

سوال ۳۲- در شکل زیر نقطه‌ی O مرکز دایره و طول AC برابر طول شعاع دایره است اگر $\hat{O}_1 = 75^\circ$ باشد اندازه‌ی زاویه C چند درجه است؟



سوال ۳۳- در چهار ضلعی ABCD و اگر $AB=AD$ و $CB=CD$ ، آنگاه روی قطر AC چند نقطه وجود دارد که از دو رأس B و D به یک فاصله باشد؟

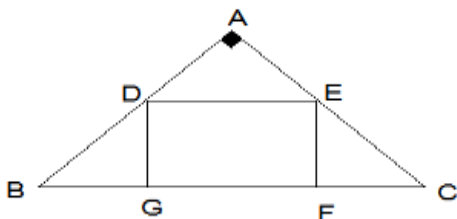
- الف) ۱ ب) ۲ ج) بی شمار د) ۴



پاسخ: چون نقاط A و C از دو سر پاره خط BD به یک فاصله است پس قطر AC روی عمود منصف قطر BD است بنابراین بیشمار نقطه روی خط AC وجود دارند که از B و D به یک فاصله‌اند.

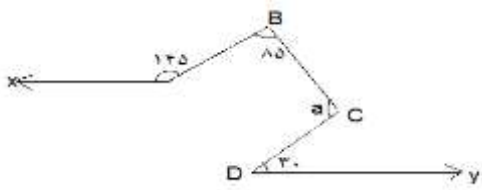
نکته: برا تشابه دو مثلث یکی از شرایط زیر لازم است؟ (۱) تناسب سه ضلع (۲) تساوی دو زاویه (۳) تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین آنها

سوال ۳۴- در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC، چهار ضلعی DEFG مربع است. $BG=6$ و $FC=13/5$ مساحت مربع چند واحد مربع است؟



نکته: اگر وسط‌های اضلاع یک متوازی الاضلاع را بهم وصل کنیم همواره یک متوازی الاضلاع بدست می‌آید که ممکن است لوزی نباشد.

سوال ۳۵- در شکل زیر $Ax \parallel Oy$ است a چند درجه است؟ (قلمچی ۹۶/۱۱/۱۰)



سوال ۳۶- در کدام حالت ممکن است چند ضلعی محدب نباشد؟ (قلمچی ۹۶/۱۱/۱۰)

الف) در حالتی که هر زاویه‌ی داخلی چند ضلعی، کمتر از زاویه‌ی نیم صفحه باشد.

ب) در حالتی که هر دو نقطه‌ی دلخواه روی چند ضلعی را بهم وصل کنیم نقاط این پاره خط داخل یا روی آن چند ضلعی باشد.

ج) در حالتی که شکل محور تقارن داشته باشد.

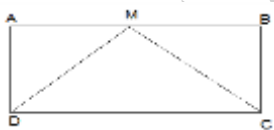
د) در حالتی که هر ضلع چند ضلعی را که از دو طرف امتداد دهیم، کل چند ضلعی در یک طرف آن ضلع امتداد یافته قرار گیرد.

سوال ۳۷- کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

- ۱) هر دو مثلث متساوی الاضلاع هم نهشت‌اند.
- ۲) هر دو مثلث قائم الزاویه با وتر برابر هم نهشت‌اند.
- ۳) هر دو مثلث متساوی الساقین با ساق برابر هم نهشت‌اند.
- ۴) هر لوزی با یک زاویه‌ی برابر متشابه‌اند.

سوال ۳۸- در مستطیل ABCD محل تلاقی نیم‌سازهای رأس‌های C و D، نقطه‌ی M روی مستطیل است و اگر اندازه طول و عرض مستطیل

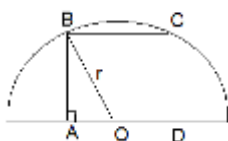
عددهای طبیعی در مقیاس واحد باشند. برای مساحت مستطیل کدام عدد مقیاس واحد مربع ممکن است؟ (تیزهوشان ۹۶/۱۲/۴)



- الف) ۷۲ ب) ۳۶ ج) ۱۶ د) ۵

سوال ۳۹- قطر نیم‌دایره شکل مقابل $2\sqrt{45}$ واحد است و خط عمود بر AD در نقطه‌ی O، محور تقارن شکل است.

مساحت مربع ABCD چند واحد مربع خواهد بود؟ (تیزهوشان قلمچی ۹۶/۱۱/۶)



- الف) ۶ ب) ۲۴ ج) ۳۶ د) ۴۸