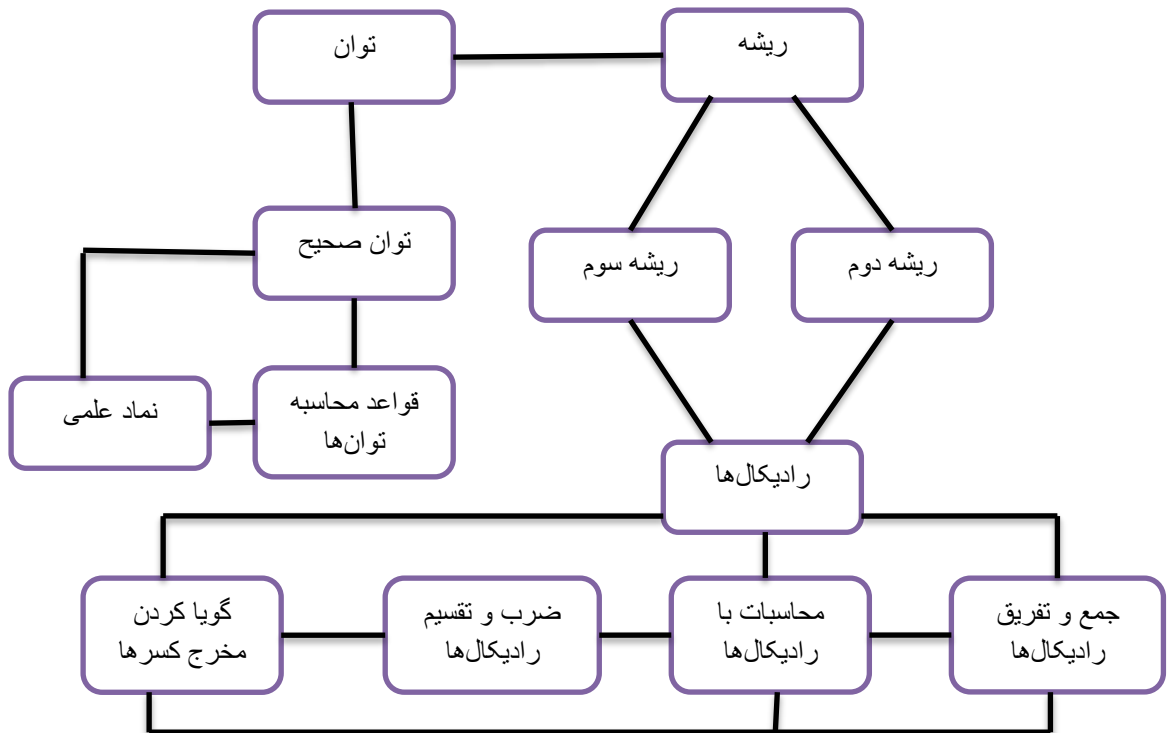


نقشه مفهومی:



توان: هر عدد به توان n (عدد طبیعی) یعنی آن عدد n بار در خودش ضرب شود $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n$

نکته ۱: هر عدد غیر صفر به توان صفر برابر با یک است.

توان منفی: اگر n عدد طبیعی باشد و $a \neq 0$ داریم: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

نکته ۲: اگر عدد صحیح غیر صفری از صورت به مخرج یا از مخرج به صورت انتقال داده شود توان آن عدد **قرینه** می‌شود. مثال:

★ $(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32}$ ★ $9^2 = \frac{1}{9^{-2}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} = \frac{1}{81}$

★ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$

مثال: اعداد زیر را با توان منفی بنویسید؟

$2^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-8}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ $3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$$(0,25)^4 = \left(\frac{100}{25}\right)^{-4} = 4^{-4} \quad (0,008)^5 = \left(\frac{1000}{8}\right)^{-5} = (125)^{-5}$$

قوانین توان: اگر m و n دو عدد صحیح و a و b دو عدد حقیقی غیر صفر باشند داریم:

$$1) a^n \times a^m = a^{n+m} \quad 2) \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad 3) a^n \times b^n = (ab)^n \quad 4) \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$5) (a^n)^m = a^{nm}$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید؟

$$3^{-5} \times 3^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} =$$

$$\frac{3^{-7} \times 2^{-4}}{3^{-3}} = (-3)^{-2} \div 5^{-2} =$$

$$(3^{-2})^{-4} = 12^{-7} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{-7} \div (-8)^3 =$$

نکته ۳: حاصل هر عدد منفی به توان زوج **مثبت** و اگر هر عدد منفی به توان فرد برسد **منفی** می‌شود.

$$(-2)^{-4} = \frac{1}{16} \quad (-3)^{-6} = 3^{-6} \quad (-2)^{-3} = -\frac{1}{8} \quad (-3)^{-11} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{11} \quad \text{مثال:}$$

سؤال: مقدار عبارتهای زیر را بدست آورید؟

$$(-0,2)^{-4} \times (-25)^{-2} = (0,2)^{-4} \times 25^{-2} = (0,2)^{-4} \times 5^{2 \times (-2)} = 1^4 = 1$$

$$\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-1} = -\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-1} = -\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}$$

نکته ۴: اعداد بین صفر و یک هر چه به توان بیشتری برسند حاصل عددی کوچکتر خواهد شد. داریم:

$$0 < a < 1 \rightarrow 0 < a^n < a < 1$$

$$\text{مثال: } 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{1}{2} < 1$$

نکته ۵: اعداد بین صفر و منفی یک هر چه به توان بیشتری برسند حاصل عددی بزرگتر خواهد شد:

$$-1 < a < 0 \rightarrow a < a^n \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^5 > \left(-\frac{1}{2}\right)^4 > \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 > \left(-\frac{1}{2}\right)$$

نکته ۶: اعداد بزرگتر از یک هر چه به توان بیشتری برسند بزرگتر می‌شوند. $a > 1 \rightarrow a^n > a$

کار در منزل

سؤال ۱: عبارتهای زیر را با توان مثبت بنویسید.

الف) $(0/2)^{-3}$ ب) $\frac{1}{2^{-3}}$ ج) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$

سؤال ۲: حاصل عبارتهای زیر را بیابید.

الف) $(-3)^{-4} \times 3^7$ ب) $3^0 - 3^{-1}$ ج) $-(-3)^{-2}$ د) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^2$ ه) $2^1 + 3^{-2}$

و) $\frac{3^5 \div \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{9^4 \div 9}$ ز) $\frac{X^{15} \cdot Y^2 \cdot Z^{-4}}{X^{-7} \cdot Y^5 \cdot Z^3}$ ت) $\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{-1}$

سؤال ۳: اعداد 81^8 ، 9^9 ، 27^6 را مقایسه کنید؟

نماد علمی: براس سهولت در محاسبه ی اعداد بسیار بزرگ یا کوچک آنها را به صورت ضرب توانی از ۱۰ می‌نویسیم. این اعداد را به دو گروه تقسیم می‌کنیم. گروهی از اعداد مثبت بزرگتر از یک و گروه دیگر اعداد مثبت کم‌تر از ۱.

الف) نماد علمی بسیار بزرگ: ابتدا از سمت چپ یک رقم جدا کرده (یک رقم صحیح) و سپس به تعداد رقمهای بعد ممیز توانی از ۱۰ نوشته و به صورت ضربی از یک عدد اعشاری در توانی از ۱۰ می‌نویسیم. مثال:

الف) $1023456000000 = 1/023456 \times 10^{12}$

ب) $1278/95 = 1/27895 \times 10^3$

ب) نماد علمی اعداد بسیار کوچک: ابتدا از سمت چپ یک رقم مخالف صفر جدا کرده و سپس به تعداد ارقام قبل ممیز توان منفی از ۱۰ را نوشته و به صورت ضربی از یک عدد اعشاری در توانی از ۱۰ می‌نویسیم. مثال:

الف) $0/000067 = 6/7 \times 10^5$

ب) $0/01394 = 1/39 \times 10^2$

به طور کلی: نماد علمی یک عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times 10^n$ می باشد که $0 < a < 10$ و n عدد صحیح می باشد.

$$a \times 10^n, 0 < a < 10, n \in \mathbb{Z}$$

کار در منزل

سؤال: عدد های زیر با به صورت نماد علمی بنویسید.

الف) $\frac{2/1 \times 10^{-4}}{0/42 \times 10^{-7}}$ ب) 23000 ج) $21/2 \times 10^{-4}$ د) 0/00032 ه) 2354×10^2

سؤال: عددهای زیر را از صورت نماد علمی خارج و به صورت اعشاری بنویسید.

الف) $5/21 \times 10^{-7}$ ب) $1/3 \times 10^4$

سؤال: اعداد $13/1 \times 10^5$ و 1320×10^3 را مقایسه کنید؟

ریشه گیری

الف) ریشه دوم: هر عدد دارای ۲ ریشه دوم است که این ریشه ها قرینه ی یکدیگرند.

$$3^2 = 9 \quad (-3)^2 = 9 \Rightarrow 9 \text{ ریشه های دوم } +3, -3$$

نکته: اعداد منفی ریشه دوم ندارد.

ب) ریشه سوم: توان سوم (مکعب) عددی مانند ۲ برابر ۸ است، پس ریشه سوم ۸ برابر ۲ است و می نویسیم. $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

$$(-4)^3 = -64 \Rightarrow \sqrt[3]{-64} = -4 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3} \quad \text{مثال:}$$

نکته: هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

ضرب و تقسیم رادیکال ها: اگر ۲ رادیکال دارای ریشه (فرجه) مساوی باشند، می توان آن رادیکال ها را در هم ضرب یا بر تقسیم کرد یعنی برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{a} \times \sqrt{b} &= \sqrt{ab} & \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} &= \sqrt[3]{ab} \\ \sqrt{a} \div \sqrt{b} &= \sqrt{\frac{a}{b}} & \sqrt[3]{a} \div \sqrt[3]{b} &= \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad b \neq 0 \end{aligned}$$

نکته: قوانین فوق برای ریشه های بالاتر از ۳ نیز درست می باشد.

$$\sqrt{7} \times \sqrt{3} = \sqrt{21} \quad \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{-216} = -6$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{5}{4}$$

مثال:

نکته: اگر عبارت زیر رادیکال جمع یا تفریق باشد نمی توان آن را به صورت جمع چند رادیکال جداگانه نوشت و برعکس یعنی:

$$\sqrt[3]{a+b} \neq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b} \rightarrow (a \neq b)$$

$$\sqrt[3]{a-b} \neq \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$$

نکته: در ضرب و تقسیم رادیکال ها ابتدا قسمت صحیح را محاسبه کرده و سپس رادیکال ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم می کنیم. مثال:

$$3\sqrt{5} \times 4\sqrt{2} = (3 \times 4) \times (\sqrt{5} \times \sqrt{2}) = 12\sqrt{10}$$

$$8\sqrt[3]{54} \div 2\sqrt[3]{2} = \frac{8}{2} \times \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{8}{2} \times \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = 4\sqrt[3]{27} = 4 \times 3 = 12$$

جمع و تفریق رادیکال ها: اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً مثل هم باشند می توان آن ها را همانند عبارت های

جبری با هم جمع یا تفریق کرد. مثال:

$$5\sqrt{2} + 3\sqrt{11} - 8\sqrt{2} + 4\sqrt{11} = (5-8)\sqrt{2} + (3+4)\sqrt{11} = -3\sqrt{2} + 7\sqrt{11}$$

نکته: برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی، ابتدا هر یک از رادیکال ها را به طور جداگانه ساده می کنیم. یعنی تاجایی که امکان دارد اعداد را

از زیر رادیکال خارج می کنیم، سپس رادیکال های متشابه را می یابیم و جمع و تفریق می کنیم. مثال: عبارت های زیر را ساده کنید.

$$\sqrt{18} - 3\sqrt{12} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = 3\sqrt{2} - 6\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = \sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

گویا کردن مخرج کسرهای رادیکالی: گاهی اوقات برای ساده کردن محاسبات، لازم است که مخرج یک کسر از حالت رادیکالی خارج

کنیم. برای این منظور صورت و مخرج کسر را در عددی ضرب می کنیم تا مخرج از حالت رادیکالی خارج شود. مثال: مخرج کسرهای زیر را

گویا کنید؟

$$\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$$

نکته: اگر مخرج کسر برابر $\sqrt[m]{a^n}$ باشد برای گویا کردن مخرج باید صورت و مخرج را در $\sqrt[m]{a^{m-n}}$ ضرب کنیم. مثال:

$$\frac{4}{\sqrt[5]{2}} = \frac{4}{\sqrt[5]{2}} \times \frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^4}} = \frac{4\sqrt[5]{16}}{2} = 2\sqrt[5]{16}$$

کار در منزل

سؤال: حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید؟

الف) $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$ ب) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ ج) $\sqrt[3]{-125}$ د) $-\sqrt[3]{2^6}$ ه) $\sqrt{4^3}$

و) $\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{32}$ ز) $\frac{\sqrt{0/4}}{\sqrt{0/1}}$

سؤال: اگر $X > 0$ و $Y < 0$ عبارت $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$ را ساده کنید؟

سؤال: حاصل عبارت‌های زیر را بیابید؟

الف) $3\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{3}$ ب) $\sqrt{12} + 3\sqrt{8} + 2\sqrt{18} - \sqrt{3}$

ج) $\sqrt{5 + \frac{1}{64} + \frac{1}{8}}$ د) $\sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$

سؤال: مخرج عبارت‌های زیر را گویا کنید؟

الف) $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ ب) $\sqrt{\frac{3}{5}}$

نکات و سوالات تکمیلی

نکته: به توان زوج و به توان منفی و رابطه آن با علامت منفی دقت کنید، اهمیت پرانتز فراموش نشود.

مثال:

$$(-2)^2 = +4, \quad (-2)^3 = -8, \quad -2^2 = -4, \quad -2^3 = -8$$

سؤال ۱- حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$-1^{2n} + (-1)^{2n} + 1^{2n} + 1^{1396} =$$

سؤال ۲- مجموع مکعب عدد ۲ با مجذور عدد حاصل چقدر می‌شود؟

نکته: توان‌های متوالی در اعداد بستگی به پرانتز در آن‌ها دارد در صورتی که پرانتز بین آن‌ها باشد توان‌ها در هم ضرب می‌شوند در غیر اینصورت هر بار دو عدد بالاتر را در نظر گرفته و حاصل عدد را به صورت توانی به دست می‌آوریم و این کار را تا پایین‌ترین عدد ادامه می‌دهیم.

توجه: $a^{m^n} = (a^m)^n = a^{mn}$ ، دو عبارت متفاوت هستند.

$$(((2^3)^2)^4)^3 = 2^{3 \times 2 \times 4 \times 3} = 2^{72}$$

$$-2^{2^{3^2}} = -2^{2^9} = -2^{512}$$

مثال:

سؤال ۳- حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$((3^2)^4)^{2^3} =$$

قانون بخش توان داخل پرانتز:

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m \quad , \quad (a \div b)^m = a^m \div b^m \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

مثال:

$$\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 0,75^2\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^6 \times (0,75)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

$$\left(3^{10} \div \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)^3 = 3^{30} \div \left(\frac{1}{2}\right)^{30} = \left(3 \times \frac{2}{1}\right)^{30} = 6^{30}$$

تجزیه در عبارت‌های توان دار: در عبارت‌های توان دار ابتدا می‌توانیم پایه‌ها را تجزیه کنیم و سپس از نکات بالا استفاده کنیم.

$$12^3 \times 18^4 = (3 \times 2^2)^3 \times (2 \times 3^2)^4 =$$

مثال:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

نکته:

سؤال ۴- اگر $e^f = g$ ، $c^d = e$ ، $a^b = c$ باشد حاصل a^{bdf} را بدست آورید؟

سؤال ۵- اگر $x^y = z$ ، $z^v = x$ باشد حاصل $(yv)^2$ را بدست آورید؟

سؤال ۶- ثلث عدد 9^{81} و ربع عدد 8^{42} را بدست آورید؟

سؤال ۷- دو عدد 16^{25} ، 64^{16} را با هم مقایسه کنید؟

سؤال ۸- اعداد 27^{-5} ، 9^{-9} چطور؟

سؤال ۹- اعداد 2^{43} ، 2^{63} چطور؟

$$2^{63} = (2^{21})^3 \rightarrow 8^{21} \qquad (3^2)^{21} \times 3 = 9^{21} \times 3$$

نکته:

$$3^{100} + 9^{50} + 5 \times 81^{25} =$$

سؤال ۱۰- حاصل عبارت رو به رو را به صورت توان دار بنویسید؟

سؤال ۱۱- اگر $7^b = 3$ ، $3^a = 7$ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) 3^{2ab} ب) 21^{ab} ج) 49^{ab+1}

الف) $3^{2ab} = (3^a)^{2b} = (7)^{2b} = (7^b)^2 = 3^2 = 9$

ب) $21^{ab} = (3 \times 7)^{ab} = 3^{ab} \times 7^{ab} =$

سؤال ۱۲- نسبت مجذور عدد 4^{x+1} به جذر عدد 16^{2x} کدام است؟

الف) 4^{x+2} ب) 2^{4x} ج) 2^4 د) 4^{2x}

سؤال ۱۳- مساحت مربعی برابر با 3^{32} مترمربع می‌باشد محیط آن را بدست آورید؟

سؤال ۱۴- اگر روز اول یک ماه a تومان پول داشته باشیم و هر روز پول ما سه برابر شود مطلوبیت محاسبه پول بعد از ۵ روز، ۱۲ روز و ۳۰ روز؟

سؤال ۱۵- حاصل عبارت $(-1)^{1395} + \dots + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1)^1$ برابر است با:

الف) ۰ ب) ۱ ج) -1395 د) $+1395$ ه) -1

سؤال ۱۶- نوعی باکتری داریم که در هر ۵ دقیقه به ۲ قسمت تقسیم می‌شوند. بعد از ۸ ساعت تعداد باکتری‌ها را بدست آورید؟

پاسخ: اگر هر بار باکتری به دو قسمت تقسیم شوند یعنی هر مرحله دو برابر قبل می‌شوند یعنی در مرحله n تعداد آن‌ها برابر 2^n خواهد بود.

پس از یک ساعت $12 = \frac{60}{5}$ مرحله تقسیم باکتری داریم یعنی 2^{12} باکتری در یک ساعت

نکته: در صورتی که یکان عددی رقم‌های ۰ و ۵ و ۶ باشد به هر توانی آن را برسانیم یکان تغییر نخواهد کرد.

$$6^2 = 36, \quad 16^2 = 256, \quad 11^2 = 121, \quad 5^3 = 125, \quad 10^2 = 100$$

سؤال ۱۷- داریم $A = 11^{100}$ ، $B = 6^{200}$ ، $C = 15^{1396}$ مجموع یکان عددهای A و B و C را بدست آورید؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۸ د) ۴

نکته: در صورتی که رقم یکان عددی ۹ باشد، توان فرد آن عدد یکان ۹ و توان زوج آن عدد یکان ۱ تولید می‌کند.

$$9^1 = 9, \quad 9^2 = 81, \quad 9^3 = 729$$

نکته: در صورتی که رقم یکان عددی ۴ باشد توان فرد یکان ۴ و توان زوج یکان ۶ تولید می‌کند.

$$4^1 = 4, \quad 4^2 = 16, \quad 4^3 = 64$$

سؤال ۱۸- مجموع یکان در عبارت زیر را مشخص کنید؟

$$1396^3 + 1404^4 =$$

نکته: برای مشخص کردن تعداد ارقام یک عدد توان دار می‌توانیم با تجزیه پایه‌ها به ۲ و ۵ پایه‌ای از ۱۰ بسازیم در سوالات می‌توانیم برای

تقریب $2^{10} = 1024 \approx 1000$ نیز استفاده کنیم.

مثال: عدد $125^{25} \times 16^{20}$ چند رقمی است؟

$$125^{25} \times 16^{20} = (5^3)^{25} \times (2^4)^{20} = 5^{750} \times 2^{80} = (5^{75} \times 2^{75}) \times 2^5 = 32 \times 10^{75}$$

عدد مورد نظر ۳۲ با ۷۵ تا صفر جلوی آن خواهد بود بنابراین تعداد رقم‌های برابر ۷۷ خواهد بود.

سؤال ۱۹- عدد $16^{18} \times (0/25)^3 \times 125^9$ چند رقمی است؟ (تیزهوشان)

سؤال ۲۰- عدد 2^{40} چند رقمی است؟ (تیزهوشان)

پاسخ: از نکته استفاده می‌کنیم $(2^{10})^4 = (10^3)^4 = 10^{12}$ در نتیجه عدد مورد نظر ۱۳ رقم دارد.

نکته: الگوی مربوط به عبارت‌های زیر را بدست آورید؟

$$10^2 - 10^1 = 100 - 10 = 90$$

$$10^3 - 10^1 = 1000 - 10 = 990 \Rightarrow 10^n - 10^m = 999 \dots 9000 \dots 0$$

$$10^3 - 10^2 = 1000 - 100 = 900$$

تعداد رقم‌های ۹ برابر $n-m$

تعداد رقم‌های صفر برابر m

سؤال ۲۱- مجموع ارقام در عبارت $10^{25} - 10^{19}$ را بدست آورید؟

سؤال ۲۲- مجموع ارقام در عبارت $10^{8n} - 10^{3n}$ را بدست آورید؟

الف) $45n$ ب) $54n$ ج) $32n$ د) $23n$

$$10^{8n} - 10^{3n} = 99 \dots 9000 \dots 00$$

تعداد ارقام ۹ برابر است با: $8n - 3n = 5n$ تعداد صفرها برابر است با: $3n$

مجموع ارقام = $9 \times 5n = 45n$

سؤال ۲۳- اگر $2^{16} = 4a + 20$ باشد در این صورت عبارت 2^{30} را بر حسب a بنویسید؟

$$2^{30} = \frac{2^{32}}{2^2} = \frac{(2^{16})^2}{2^2} = \frac{(4a+20)^2}{2^2} = \left(\frac{4a+20}{2}\right)^2 = (2a+10)^2$$

سؤال ۲۴- اگر $9^x = 100$ باشد، مطلوبست عبارت‌های زیر:

$$3^{3x+1} \qquad \left(\frac{1}{27}\right)^{2-x} \qquad 81^{x-1}$$

سؤال ۲۵- حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید؟

$$3^2 - 2^3 \left(2^2 - 2^3 (3^2 - 1)^{-1}\right)^{-1} =$$

سؤال ۲۶- اگر $A = (X^{X^X})^{X^X}$ باشد، A^X برابر است با:

الف) $X^{X^{X^2}}$ ب) $X^{X^{2X}}$ ج) $X^{X^{X+2}}$ د) $X^{X^{2X+1}}$

$$A = (X)^{X^X \times X^X} = (X)^{X^2} \rightarrow A^X = \left((X)^{X^2} \right)^X = (X)^{X^2 \times X} = X^{X^3}$$

سؤال ۲۷- حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

$$A = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

نکته: مجموع جملات دنباله‌ی هندسی (هر جمله از ضرب عددی در جمله قبل باشد) در صورتی که اعداد کوچک و کوچکتر شوند (یعنی قدر نسبت بین ۰ و یک باشد) از فرمول زیر بدست می‌آید.

یادآوری: مجموع علامت دنباله هندسی با قدر نسبت بیشتر از یک برابر

$$S = \frac{\text{جمله اول}}{1 - \text{قدر نسبت}} \quad S = \frac{q(1 - a_n)}{1 - q}$$

$$A = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

راه حل دوم:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \Rightarrow 2A = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots}_A$$

$$2A = 1 + A \Rightarrow A = 1$$

ب) $B = 3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-3} + 3^{-4} + \dots$

ج) $C = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots$

سؤال ۲۸- حاصل $1 \times (-1)^1 + 2 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^3 + \dots + 1396 \times (-1)^{1396}$ را بدست آورید؟

$$-1 + 2 - 3 + 4 - \dots + 1396 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 698$$

سوال ۲۹- کوچکترین عدد طبیعی که اگر در عدد ۳۶۰ ضرب شود حاصل مجذور کامل می شود کدام است؟

نکته: عدد را به حاصل های اول تجزیه می کنیم سپس یک عدد در آن ضرب می کنیم که توان های غیر زوج آن، زوج شود.

نکته: تعداد اعداد طبیعی ۲ رقمی مجذور کامل عبارت است از 4^2 تا 9^2 برابر با شش عدد می باشد.

نکته: تعداد اعداد طبیعی مجذور کامل سه رقمی برابر است با 10^2 تا 31^2 برابر ۲۲ عدد می باشد.

سؤال ۳۱- کوچک ترین عدد طبیعی که اگر در عدد ۳۶۰ ضرب می شود حاصل مکعب کامل می شود کدام عدد است؟

$$\text{پاسخ} \Rightarrow 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 = (2^3 \times 3^2 \times 5) \times 3 \times 5^2$$

نکته: تعداد اعداد طبیعی مکعب کامل ۲ رقمی برابر 3^3 و 4^3 (۲ عدد) است و اعداد طبیعی کامل ۳ رقمی از 5^3 تا 9^3 برابر ۵ عدد است.

سؤال ۳۲- بین اعداد ۱۰۰۱ تا $2^{15} - 1$ چند عدد مکعب کامل داریم؟

$$1001 = (10)^3 + 1$$

$$2^{15} - 1 = (2^5)^3 - 1 \quad \longrightarrow$$

معادلات توانی: به هر معادله ای که مجهول در توان قرار گرفته است معادله ی توانی یا نمایی گوییم برای حل این معادلات کافی است پایه ها را مساوی کنیم تا بتوانیم توان ها را نیز با هم مساوی کنیم.

مثال:

$$1) 3^{2X-10} = 1 \Rightarrow 3^{2X-10} = 3^0 \Rightarrow 2X-10 = 0 \Rightarrow X = 5$$

$$2) 2^{2X-1} = 5^{4X-2} \Rightarrow 2X-1 = 4X-2 = 0 \Rightarrow 2X = 1 \Rightarrow X = \frac{1}{2}$$

توجه: در حالتی که پایه ها بعد از تجزیه نیز یکی نشوند باید از ترفند مثال ۲ استفاده کنید، یعنی توان ها را صفر در نظر می گیریم.

سؤال ۳۳- معادله های توانی زیر را حل کنید.

$$1) 16^{X+1} = 256$$

$$3) 5^{X-2} = 7^{3X+Y+1}$$

$$2) (0/12)^{X-14} = 125^{2X}$$

$$4) \left(\frac{1}{16}\right)^{4-X} = 8^{2X+2}$$

$$5) (0/008)^{X-2} = 25^{3+X}$$

$$6) 3^X + 3^{X+2} + 3^{X+4} = 819$$

$$7) 5^{X+2} - 5^{X-1} = 620$$

شماره ۳ از نکته توان صفر استفاده می کنیم

سؤال ۳۴- جواب معادله $2X^5 - 6 = 90 - X^5$ کدام است؟

- الف) 5 ب) 2 ج) -2 د) ± 2

سؤال ۳۵- در معادله توانی $2^{2^{2n}} = 16^{64}$ مقدار n کدام است؟

- الف) 3 ب) 8 ج) 16 د) 64

پاسخ: از تجزیه سمت راست شروع می‌کنیم $2^{2^{2n}} = (2^4)^{64} = 2^{256}$

پایین‌ترین پایه‌ها را در مرحله اول خط می‌زنیم در این صورت: $2^{2n} = 256 = 2^8$

روند بالا را ادامه می‌دهیم.....

سؤال ۳۶- اگر داشته باشیم $3^{X^2} + 3^{X^2+1} + 3^{X^2+2} = 1053$ حاصل $X^4 + 65$ بر کدام عدد بخش پذیر است؟

- الف) 5 ب) 9 ج) 12 د) 13

سؤال ۳۷- اگر $4^X + 6^Y = 48^{12}$ مقدار $X+Y$ کدام است؟

- الف) 24 ب) 30 ج) 48 د) 36 ه) 32 و) 16

سؤال ۳۸- اگر $2^X = 8^{y+1}$ ، $9^y = 3^{X-9}$ باشد مقدار $X+Y$ برابر است با :

- الف) 18 ب) 21 ج) 27 د) 24

سؤال ۳۹- در تساوی $1111^2 - 1111111 = 10 \times 111^X$ مقدار X کدام است؟

- الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4

$$\sqrt{25 + 4\sqrt{21 + 3\sqrt{7 + 2\sqrt{81}}}}$$

سؤال ۴۰- مقدار عبارت رو به رو برابر است با:

توجه: داریم $5^2 = 25$ ، $(-5)^2 = 25$ در این صورت ریشه دوم ۲۵ هر کدام از این اعداد می‌باشند اما طبق قرارداد برای جذر عدد مثبت را به‌عنوان جواب قبول می‌کنیم.

$$\sqrt{X^2} = |X|$$

$$\sqrt{4^2} = |4| = 4$$

$$\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

سؤال ۴۱- اگر $\sqrt[3]{X} = \frac{25}{36}$ باشد مقدار \sqrt{X} را بدست آورید.

پاسخ

$$(\sqrt[3]{X})^3 = \left(\frac{25}{36}\right)^3 = \left(\frac{5^2}{6^2}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \rightarrow X = \left(\frac{5}{6}\right)^6$$

$$\sqrt{X} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^6} = \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

سؤال ۴۲- اگر $X = \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{-2}$ در این صورت حاصل $X^2 - 3X + 1$ بدست آورید؟

سؤال ۴۳- اگر $3^{2k+1} = 6a$ باشد مقدار $27^{\frac{k}{3}}$ را بر حسب a بدست آورید؟

$$3^{2k+1} = 3^{2k} \times 3^1 = 6a \rightarrow 3^{2k} = 2a$$

$$27^{\frac{k}{3}} = (3^3)^{\frac{k}{3}} = 3^k = \sqrt{3^{2k}} = \sqrt{2a}$$

سؤال ۴۴- حاصل عبارت $\sqrt{(-2)^6}$ برابر است با: (مهم)

الف) $(-2)^3$ ب) -2^3 ج) 2^3

پاسخ: از مفهوم قدر مطلق عبارت استفاده کنیم.

سؤال ۴۵- حاصل عبارت $\sqrt{(1+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ را بدست آورید.

سؤال ۴۶- اگر عدد a مجذور کامل باشد، دومین و سومین مجذور کامل بعد از a را بدست آورید.

پاسخ: عدد a مورد نظر به صورت $a = n^2$ در این $n = \sqrt{a}$ صورت می‌باشد. مجذور کامل بعدی (دومین مجذور کامل) عدد $(n+1)^2$ می‌باشد.

$$(n+1)^2 = (\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} + 1)$$

$$(n+1)^3 = (\sqrt{a} + 1)^2 (\sqrt{a} + 1)$$

سومین مجذور کامل بعدی

توجه: یادمان باشد اعدادی که یکان آن‌ها ۲ و ۳ و ۷ و ۸ باشد مجذور کامل نیستند و تعداد صفرهای سمت راست در مجذور کامل همواره زوج است.

مثال: آیا عبارت زیر می تواند یک مجذور کامل باشند.

الف) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \dots \times n + 4$

ب) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \dots \times n + 3$

۱- در مورد عددی که از حاصلضرب بدست می آید می توان گفت یکان این عدد حتما صفر است چون عامل های ۲ و ۵ در عدد یکان را صفر می کند و اولین عدد یکانش ۴ می شود ← می تواند مجذور کامل باشد.

۲- دومین عدد یکانش ۳ می شود ← نمی تواند مجذور کامل باشد.

سؤال ۴۷- تعداد اعداد طبیعی که فاصله ی جذرشان از عدد ۹ از یک واحد کمتر باشد را بدست آورید؟

$$8 < \sqrt{n} < 10 \Rightarrow 64 < n < 100$$

پاسخ:

تعداد: $(100 - 64) - 1 = 35$

سؤال ۴۸- برای آنکه حاصل عبارت $(K+1) + (K+2) + \dots + (K+9)$ یک عدد مربع کامل باشد، کوچکترین عدد دو رقمی k چقدر است؟

$$(K+1) + (K+2) + \dots + (K+9) = (K+K+\dots+K) + (1+2+\dots+9) = 9K + \frac{9 \times 10}{2} = 45 + 9K = 9(5+K)$$

برای آنکه مجذور کامل شود ۹ و $(K+5)$ مجذور کامل باشد که کوچکترین عدد دو رقمی ۱۱ خواهد بود

$$\sqrt[5]{3} \times \sqrt{3} = \sqrt[10]{3^2} \times \sqrt[10]{3^5} = \sqrt[10]{3^7}$$

سؤال ۴۹- عبارت زیر را ساده کنید.

نکته: اگر فرجه ها یکسان نباشند دو مرحله زیر را پیش می گیریم (۱) ک.ک. فرجه ها را بدست می آوریم.

(۲) فرجه اولی را در هر عددی ضرب کردیم تا به ک.م.م. برسد زیر رادیکال را نیز به همان توان می رسانیم.

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[2]{3} = \sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{2^2 \times 3^3} = \sqrt[6]{108}$$

$$[3, 2] = 6, \quad \sqrt[3]{2^2} \quad \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \sqrt[2 \times 3]{3^3}$$

نکات گویا کردن مخرج کسر

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

(۱) اگر مخرج بیش از یک رادیکال بود آن را به کمک اتحاد مزدوج گویا می کنیم

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$$

۲) به کمک اتحاد چاق و لاغر

سؤال ۵۰- اگر $5^{28} = 25m + 100$ ، مقدار 5^{52} کدام است؟

- الف) $m - 4$ ب) $m + 4$ ج) $(m - 2)^2$ د) $(m + 4)^2$

$$5^{52} = (5^{26})^2 \rightarrow (m + 4)^2$$

$$5^{28} = 25m + 100 \rightarrow 5^{28} \times \frac{1}{5^2} = (25m + 100) \times \frac{1}{5^2} \rightarrow 5^{26} = m + 4$$

سؤال ۵۱- اگر $x = 5^{23}$ باشد، حاصل $5x^{16}$ کدام است؟

- الف) 5^{97} ب) 5^{120} ج) 5^{130} د) 5^{129}

$$X = 5^{23} \Rightarrow X = 5^8 , \quad 5X^{16} = 5(5^8)^{16} = 5 \times 5^{128} = 5^{129}$$

سؤال ۵۲- از تساوی $(a^a)^x = a^{(a^{a+1}+a)}$ مقدار x بر حسب a کدام است؟ ($a \neq 0$)

- الف) $a + 1$ ب) $a^a + 1$ ج) $a^a + a$ د) a^{a+1}

$$(a^a)^x = a^{(a^{a+1}+a)} \Rightarrow a^{aX} = a^{(a^{a+1}+a)} \Rightarrow aX = a^{a+1} + a \longrightarrow \frac{aX}{a} = \frac{a^{a+1}}{a} + \frac{a}{a} \rightarrow X = a^a + 1$$

بر a تقسیم می کنیم

سؤال ۵۳- اگر $3^{-b} = 5$ ، $5^{-a} = 3$ باشد مقدار $(3ab - 2)^{100}$ برابر است با :

- الف) ۱ ب) صفر ج) 3^{100} د) 15^{100}

$$5^{-a} = 3 \rightarrow \underline{3^{-b} = 5} \rightarrow (3^{-b})^{-a} \rightarrow 3^{+ab} = 3 \rightarrow ab = 1 , \quad (3ab - 2)^{100} = (3 - 2)^{100} = 1^{100} = 1$$

سؤال ۵۴- حاصل عبارت $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{(1+6)^2}}}}}$ کدام است؟

- الف) ۴ ب) ۳ ج) ۱ د) ۲

$$\sqrt{(1+6)^2} \rightarrow \sqrt{7^2} = 7$$

$$\sqrt{1+5 \times 7} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{1+4 \times 6} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{1+3 \times 5} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{1+2 \times 4} = \sqrt{9} = 3$$

سؤال ۵۵- اگر $A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$ ، $B = 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{98}$ در این صورت مقدار B بر حسب A برابر است با:

$$A = B + 3^{99} + 3^{100} = B + 3^{99}(1+3) \Rightarrow B = A - 4 \times 3^{99}$$

سؤال ۵۶- $8^{x+2} = 15$ ، مقدار $\sqrt{2(2^{3x+6} + 2^{3x+8}) + 7(2^{2x+6} - 15)}$ کدام گزینه است؟

- الف) $5\sqrt{90}$ ب) $\sqrt{210}$ ج) $\sqrt{150}$ د) ۲۱۰

$$8^{x+2} = 15 \Rightarrow (2^3)^{x+2} = 2^{3x+6} = 15$$

$$\sqrt{2(15 + 2^{3x+6} \times 2^2) + 7(15 - 15)} = \sqrt{2(15 + 15 \times 14)} = \sqrt{2(75)} = \sqrt{150}$$

سؤال ۵۷- اگر $5^{-x-1+2y} \times 2^{3x+y+2} = 7^{2x+y}$ باشد، xy کدام است؟ (تیزهوشان قلمچی ۹۶/۱۲/۴)

- الف) $-\frac{5}{49}$ ب) -۸ ج) $-\frac{2}{25}$ د) عبارت به ازای هیچ x, y برقرار نیست