بسم الله الرحمن الرحیم

درس اول: عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد

یک‌جمله‌ای

به عبارت‌های جبری $5x^2$، $-\frac{1}{3}xy$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}xy^2z^4$ یک‌جمله‌ای می‌گویند. هر یک‌جمله‌ای، از حاصل‌ضرب اعداد حقیقی در متغیرها به دست می‌آید.

در یک‌جمله‌ای، توان متغیرها باید عدد صحیح نامنفی (غیرمنفی) باشد.

هر یک‌جمله‌ای از دو قسمت ضریب عددی و عبارت حرفی تشکیل شده است.

عبارت حرفی	ضریب عددی	یک‌جمله‌ای	عبارت حرفی	ضریب عددی	یک‌جمله‌ای
a^2bc^3	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}a^2bc^3$	x^2y	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}x^2y$
$a^0x^0b^0y^0$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	x	$\frac{1}{5}$	$\frac{x}{5}$

دقت کنید که یک عدد نیز به تنهایی، یک‌جمله‌ای محسوب می‌شود. مانند: $-\frac{1}{3}$، 5 و $\sqrt{2}$.

عبارت‌هایی مانند $-\frac{2}{a}$، $\frac{3x}{y}$، $\sqrt{x}$ و $\sqrt[3]{x^2}$ یک‌جمله‌ای نیستند، چون توان متغیرها در آن‌ها عدد صحیح نامنفی نیست. برای مثال:

$-\frac{2}{a}=-2a^{-1}$ ⟵ توان a منفی است، پس عبارت یک‌جمله‌ای نیست.

$\frac{3x}{y}=3xy^{-1}$ ⟵ توان y منفی است، پس عبارت یک‌جمله‌ای نیست.

در عبارت‌های $\sqrt{x}$ و $\sqrt[3]{x^2}$، توان x کسری می‌شود، بنابراین عبارت‌ها یک‌جمله‌ای نیستند (بعداً در مورد توان این عبارت‌ها توضیح کامل‌تری می‌دهیم).

در یک‌جمله‌ای $\frac{2}{3}ab^2x^3$، توان متغیر a، مساوی ۱ است، بنابراین می‌گوییم درجه‌ی این یک‌جمله‌ای نسبت به متغیر a، برابر ۱ است. توان x در این یک‌جمله‌ای برابر ۳ است، پس می‌گوییم درجه‌ی این یک‌جمله‌ای نسبت به متغیر x، ۳ است یا این یک‌جمله‌ای نسبت به x از درجه‌ی سوم است. درجه‌ی این یک‌جمله‌ای نسبت به دو متغیر x و b برابر ۵ است $(\underbrace{3}_{\text{توان x}}+\underbrace{2}_{\text{توان b}}=5)$. درجه‌ی این یک‌جمله‌ای نسبت به تمامی متغیرهایش ۶ است $(\underbrace{3}_{\text{توان x}}+\underbrace{2}_{\text{توان b}}+\underbrace{1}_{\text{توان a}}=6)$. یک‌جمله‌ای $\frac{2}{3}ab^2x^3$ را می‌توان به صورت $\frac{2}{3}ab^2x^3y^0z^0$ نوشت، بنابراین درجه‌ی این یک‌جمله‌ای برای مثال نسبت به y و z، صفر است.

همان‌طور که گفتیم، عددهای ثابت مانند ۲، $\frac{1}{5}$، $\sqrt{2}$ و $-\frac{\sqrt{3}}{5}$ و π یک‌جمله‌ای هستند. برای مثال یک‌جمله‌ای ۲ را می‌توان به صورت $2x^0a^0b^0y^0$ نوشت که درجه‌ی این یک‌جمله‌ای صفر است.

عدد صفر هم یک‌جمله‌ای است، اما برای عدد صفر (یک‌جمله‌ای ثابت صفر) درجه تعریف نمی‌شود.

یک‌جمله‌ای‌های متشابه

دو یا چند یک‌جمله‌ای را متشابه می‌گوییم که متغیرها و توان‌های مربوط به هر متغیر در آن‌ها یکسان باشد. (متشابه‌بودن یک‌جمله‌ای‌ها به ضریب عددی آن‌ها بستگی ندارد.)

یک‌جمله‌ای‌های روبه‌رو متشابه‌اند. $-\frac{۷}{۹}x^۲yz\ ,\ \sqrt{۵}x^۲zy\ ,\ \frac{۷}{۲}yzx^۲\ ,\ -x^۲yz$

- یک‌جمله‌ای‌های $۲a$، $۲a^۲$ و $۲a^۳$ متشابه نیستند.
- یک‌جمله‌ای‌های $-۳ab$، $-۳a^۲b$ و $-۳ab^۲$ متشابه نیستند.
- واضح است که یک‌جمله‌ای‌های $-۳a^۲b$ و $-۳ab^۲$ با هم متشابه نیستند، بنابراین یک‌جمله‌ای‌های غیرمتشابه نامیده می‌شوند.
- دو یا چند یک‌جمله‌ای متشابه را می‌توان با هم جمع و یا از هم کم کرد.
- برای جمع یا تفریق یک‌جمله‌ای‌های متشابه، کافی است که ضرایب عددی آن‌ها را با هم جمع و یا از هم کم کنیم و در کنار حاصل، قسمت حرفی یک‌جمله‌ای‌ها را قرار دهیم.

$$۳x^۲yz+۴x^۲yz=(۳+۴)x^۲yz=۷x^۲yz$$

یک‌جمله‌ای‌های غیرمتشابه را نمی‌توان با هم جمع یا از هم تفریق کرد.

دقت کنید! $۵x+۳y\neq ۸xy$ یا $۲x+۳x^۲\neq ۵x^۳$

دقت کنید! $x^۲+x^۲\neq x^۴$ یا $x+x\neq x^۲, ۴a+۳a\neq ۷a^۲$

چندجمله‌ای

از جمع دو یا چند یک‌جمله‌ای غیرمتشابه یک چندجمله‌ای حاصل می‌شود. برای مثال: عبارت‌های $۲x+۱$، $۳x^۲+۴y$ و $x^۲+y$ دوجمله‌ای هستند.

عبارت $۳x+۴y-۲y^۲$ سه‌جمله‌ای و عبارت $a^۳+a^۲+a+۷$ یک چهارجمله‌ای است.

توجه داشته باشید که یک‌جمله‌ای‌ها نیز چندجمله‌ای محسوب می‌شوند.

اگر متغیری مانند x در یک چندجمله‌ای وجود داشته باشد، بزرگ‌ترین توانی از x را که در آن چندجمله‌ای وجود دارد، درجه‌ی آن چندجمله‌ای نسبت به x می‌نامند.

برای مثال چندجمله‌ای‌های $x+۷$ ، $۲xy+y-z$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۵}z^۲-\frac{x}{۴}y^۲+۱$ نسبت به x از درجه‌ی ۱ هستند.

چندجمله‌ای‌های $xy-x^۲+۲$ ، $x^۲+xy^۳+z^۴-۱۱$ و $۶zyx^۲-x-۷y^۲+۱۹$ نسبت به x از درجه‌ی ۲ هستند.

چندجمله‌ای‌های $-۷x^۲yz+yx^۳-xyz+۲$ و $x^۳y^۲z-\frac{x}{۵}+\frac{yx^۲}{۷}$ نسبت به x از درجه‌ی ۳ هستند.

چندجمله‌ای استاندارد

هرگاه همه‌ی جمله‌های یک چندجمله‌ای را برحسب توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر، مرتب کنیم؛ آن چندجمله‌ای را استاندارد می‌گوییم.

نمایش استاندارد چندجمله‌ای	چندجمله‌ای
$۳x^۲-۵x+۱۰$	$-۵x+۱۰+۳x^۲$
$-y^۵+۴y^۳+y-۳$	$۴y^۳-۳-y^۵+y$
$-b^۹-۴b^۶-b^۳+۲b^۲+۷$	$۷-b^۳+۲b^۲-۴b^۶-b^۹$

ضرب یک‌جمله‌ای‌ها

به تساوی‌های مقابل دقت کنید.

الف) $3a^2b^3 \times 7ab^4 = (3\times 7)a^2ab^3b^4 = 21a^{2+1}b^{3+4} = 21a^3b^7$

ب) $-\frac{1}{4}x^2y^3z \times 8xy^5z^3 = (-\frac{1}{4}\times 8)x^2xy^3y^5zz^3 = -2x^3y^8z^4$

ضرب چندجمله‌ای‌ها

به تساوی‌های روبه‌رو دقت کنید.

الف) $(x+2)(x+7) = x(x+7) + 2(x+7) = x^2+7x+2x+14 = x^2+9x+14$

برای ضرب دو چندجمله‌ای در یکدیگر، تک‌تک جمله‌های یکی از چندجمله‌ای‌ها را در چندجمله‌ای دیگر ضرب می‌کنیم و سپس عبارت حاصل را به ساده‌ترین صورت ممکن می‌نویسیم.

حاصل‌ضرب چندجمله‌ای $x^2y + yz - 3$ را در چندجمله‌ای $x^3 - y^2 + 4$ به دست آورید.

$$(x^3-y^2+4)(x^2y+yz-3) = x^3(x^2y+yz-3) - y^2(x^2y+yz-3) + 4(x^2y+yz-3)$$
$$= x^5y + x^3yz - 3x^3 - x^2y^3 - y^3z + 3y^2 + 4x^2y + 4yz - 12$$

اتحاد

به جدول زیر دقت کنید.

x	$(x+5)^2$	$x^2+10x+25$	x	$(x+5)^2$	$x^2+10x+25$
-2	$(-2+5)^2=3^2=9$	$(-2)^2+10(-2)+25=9$	0	$(0+5)^2=25$	$0^2+10\times 0+25=25$
7	$(7+5)^2=12^2=144$	$7^2+10\times 7+25=144$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}+5)^2=(\frac{11}{2})^2=\frac{121}{4}$	$(\frac{1}{2})^2+10\times\frac{1}{2}+25=\frac{121}{4}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، تساوی $(x+5)^2 = x^2+10x+25$ به ازای هر مقدار دلخواه x همواره درست است. این‌گونه تساوی‌ها را اتحاد می‌گوییم.

به طور کلی اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقداری برای متغیرهایشان، مقدار یکسانی داشته باشند، در این صورت برابری جبری حاصل از آن‌ها را یک اتحاد جبری می‌نامیم.

آیا $(x+3)^2 = x^2+9$ یک اتحاد است؟

خیر. زیرا:

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2+3x+3x+9 = x^2+6x+9 \neq x^2+9$$

اتحاد مربع دوجمله‌ای

برای هر دو عدد حقیقی a و b همواره داریم:

الف) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

ب) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

به هر یک از تساوی‌های بالا، اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌گویند. تساوی قسمت «ب» را اثبات می‌کنیم.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-ab-ab+b^2 = a^2-2ab+b^2$$

پس همواره داریم: $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

تجزیه

اگر ضرب مقابل را انجام دهیم، داریم: $x(y+z) = x(y+z) = xy+xz$

این ضرب را توزیع‌پذیری یا خاصیت پخشی عمل ضرب نسبت به جمع می‌گوییم، اکنون اگر عبارت $xy+xz$ را به صورت ضرب دو عبارت جبری بنویسیم، داریم: $xy+xz = x(y+z)$

این عمل، یعنی تبدیل جمع یا تفریق یک عبارت جبری به صورت ضرب را، تجزیه می‌گویند.

سه‌جمله‌ای $x^2+12x+36$ را تجزیه کنید.

روش اول: $x^2+12x+36=\underline{x^2+6x}+\underline{6x+36}=x(x+6)+6(x+6)=(x+6)(x+6)=(x+6)^2$

روش دوم: در این عبارت دو جمله‌ی x^2 و ۳۶ مربع کامل هستند و جمله‌ی $12x$، مساوی دو برابر جذر جملات مربع کامل است. پس می‌توان عبارت را با اتحاد مربع کامل تجزیه کرد. یعنی:

$$x^2+12x+36=(x+6)^2$$

جذر جذر

درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها

اتحاد مزدوج

این اتحاد به صورت مقابل است:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(x+2)(x-2)=x^2-2^2=x^2-4$$

$$(2a-3b)(2a+3b)=(2a)^2-(3b)^2=4a^2-9b^2$$

این اتحاد در عین سادگی، کاربردهای زیادی در محاسبات عددی، سهولت در ساده‌کردن عبارت‌های جبری و تجزیه‌ی عبارت‌های جبری دارد.

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $202\times198=(200+2)(200-2)=40000-4=39996$

ب) $\underbrace{(x-1)(x+1)}_{(x^2-1)}(x^2+1)(x^4+1)=\underbrace{(x^2-1)(x^2+1)}_{(x^4-1)}(x^4+1)=(x^4-1)(x^4+1)=x^8-1$

استفاده از اتحاد مزدوج برای تجزیه‌ی عبارت‌های جبری

به این مثال‌ها دقت کنید:

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y) \qquad a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$t^2-\frac{1}{4}=(t-\frac{1}{2})(t+\frac{1}{2}) \qquad a^2-4=(a+2)(a-2)$$

اتحاد جمله‌مشترک

در این اتحاد یک جمله‌ی مشترک و دو جمله‌ی غیرمشترک داریم:

$$(x+a)(x+b)=x^2+\underbrace{(a+b)}_{\text{مجموع دو جمله‌ی غیرمشترک}}x+\underbrace{ab}_{\text{حاصل‌ضرب دو جمله‌ی غیرمشترک}}$$

جمله‌ی مشترک

جمله‌های غیرمشترک

حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحاد جمله‌مشترک حساب کنید.

الف) $(x+2)(x+3)=$ ب) $(x-8)(x+5)=$

الف) $(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+2\times3=x^2+5x+6$

ب) $(x-8)(x+5)=x^2+(-8+5)x+(-8)(5)=x^2-3x-40$

استفاده از اتحاد جمله‌مشترک برای تجزیه‌ی عبارت‌های جبری

با چند مثال، کاربرد این اتحاد را در تجزیه‌ی عبارت‌های جبری نشان می‌دهیم.

عبارت‌های روبه‌رو را تجزیه کنید.   ب) $x^2-8x+15=$ الف) $x^2+8x+12=$

الف) باید دو عدد بیابیم که حاصل‌ضرب آن‌ها $+12$ و مجموع آن‌ها $+8$ باشد. چون حاصل‌ضرب دو عدد مثبت است $(+12)$، پس دو عدد هم‌علامت هستند و چون حاصل‌جمع نیز مثبت است $(+8)$، بنابراین دو عدد مثبت هستند، از روی حاصل‌ضرب، دو عدد را می‌یابیم.

$\underline{2\times6}=12$ $1\times12=12$ $x^2\underbrace{+8}_{\text{مجموع دو عدد}}x\underbrace{+12}_{\text{حاصل‌ضرب دو عدد}}=$

دو عدد موردنظر چون مجموع آن‌ها $+8$ است.

درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها

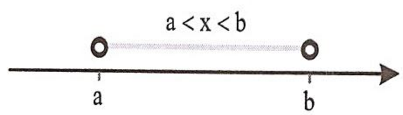
هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، یکی از سه حالت زیر برای دو عدد وجود دارد:

الف) a بزرگ‌تر از b است که به صورت ریاضی می‌نویسیم: $a > b$

ب) a مساوی b است که به صورت ریاضی می‌نویسیم: $a = b$

ج) a کوچک‌تر از b است که به صورت ریاضی می‌نویسیم: $a < b$

- اگر عدد حقیقی a منفی نباشد، یعنی a یا مثبت است یا صفر، که می‌نویسیم: $a \geq ۰$ (می‌خوانیم: a بزرگ‌تر یا مساوی صفر است).
- اگر عدد حقیقی a مثبت نباشد، یعنی a یا منفی است یا صفر که می‌نویسیم: $a \leq ۰$
- برای سه عدد حقیقی a، b و x؛ اگر x بین a و b باشد ($a < b$)، آن‌گاه می‌نویسیم: $a < x < b$ (به محور زیر توجه کنید).



خواص نابرابری‌ها (نامساوی‌ها)

۱- اگر دو طرف یک نابرابری (نامساوی) را با عددی مانند m جمع کنیم، جهت نابرابری (نامساوی) تغییر نمی‌کند.

$$a < b \Rightarrow a + m < b + m \xrightarrow{\text{مثال}} -۴ < -۱ \Rightarrow \overbrace{-۴ + ۵}^{۱} < \overbrace{-۱ + ۵}^{۴}$$

۲- اگر دو طرف یک نابرابری را در عددی مثبت ضرب و یا بر عددی مثبت تقسیم کنیم، جهت نابرابری تغییر نمی‌کند.

$$a < b \ , \ m > ۰ \Rightarrow \begin{cases} am < bm \\ a \div m < b \div m \end{cases}$$

$$۴<۶ \Rightarrow \begin{cases} ۴\times ۲<۶\times ۲ \Rightarrow ۸<۱۲ \\ ۴\div ۲<۶\div ۲ \Rightarrow ۲<۳ \end{cases}$$

۳- اگر دو طرف یک نابرابری را در عددی منفی ضرب و یا بر عددی منفی تقسیم کنیم، جهت نابرابری تغییر می‌کند.

$$a<b\ ,\ m<۰ \Rightarrow \begin{cases} am>bm \\ \dfrac{a}{m}>\dfrac{b}{m} \end{cases}$$

$$۱۲<۱۸ \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{۱۲\times(-۲)}_{-۲۴}>\underbrace{۱۸\times(-۲)}_{-۳۶} \\ \underbrace{۱۲\div(-۳)}_{-۴}>\underbrace{۱۸\div(-۳)}_{-۶} \end{cases}$$

نامعادله

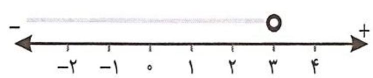
اگر یک نابرابری شامل متغیر (مجهول) باشد، به آن نامعادله می‌گوییم، مانند نابرابری‌های مقابل: $۲x>۳\ ,\ ۴x-۱<۷$

به مجموعه‌ی مقادیر (عددهایی) که به ازای آن‌ها نامعادله به یک نابرابری درست، تبدیل شود، مجموعه‌جواب نامعادله می‌گوییم و این مجموعه‌جواب را با حرف D نمایش می‌دهیم. مجموعه‌جواب یک نامعادله را روی محور اعداد حقیقی می‌توان نشان داد. به مثال‌های زیر دقت کنید.

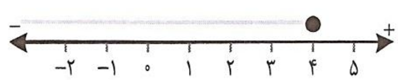
نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه‌جواب آن‌ها را مشخص کنید و مجموعه‌جواب هر نامعادله را روی محور نیز نمایش دهید.

الف) $۲x<۶$ ب) $۳x\le ۱۲$ ج) $x+۲\ge ۳$

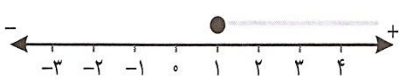
الف) $۲x<۶ \Rightarrow x<\dfrac{۶}{۲} \Rightarrow x<۳ \Rightarrow D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<۳\}$



ب) $۳x\le ۱۲ \Rightarrow x\le\dfrac{۱۲}{۳} \Rightarrow x\le ۴ \Rightarrow D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le ۴\}$



ج) $x+۲\ge ۳ \Rightarrow x\ge ۳-۲ \Rightarrow x\ge ۱ \Rightarrow D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge ۱\}$



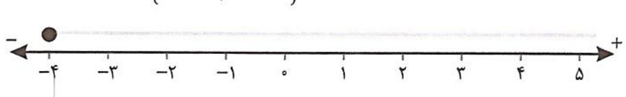
همان‌طور که در سه مثال بالا مشاهده کردید، روش حل نامعادله دقیقاً مانند روش‌های حل معادله است، فقط به جای علامت مساوی، علامت نامساوی داریم و این نکته را فراموش نکنید که اگر ضریب متغیر عدد منفی باشد و طرفین نامساوی را بر عدد منفی تقسیم کنیم، جهت نامساوی تغییر می‌کند. به مثال‌های زیر دقت کنید.

نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه‌جواب را بنویسید و روی محور نیز مشخص کنید.

الف) $-۲x\le ۸$ ب) $-\dfrac{۲}{۳}x\ge ۶$

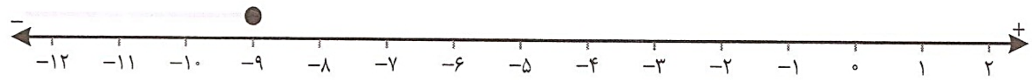
الف) $-۲x\le ۸ \Rightarrow x\ge\dfrac{۸}{-۲} \Rightarrow x\ge -۴ \Rightarrow D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge -۴\}$

توجه



ب) $-\frac{۲}{۳}x \ge ۶ \Rightarrow x \le ۶ \div (-\frac{۲}{۳}) \Rightarrow x \le ۶ \times (-\frac{۳}{۲}) \Rightarrow x \le -۹ \Rightarrow D=\{x \in \mathbb{R} | x \le -۹\}$

توجه



نامعادله‌ی مقابل را حل کنید و مجموعه‌جواب را روی محور نمایش دهید. $-۲x+۱ \ge -۳$

$-۲x+۱ \ge -۳ \Rightarrow -۲x \ge \underbrace{-۳-۱}_{-۴} \Rightarrow -۲x \ge -۴ \Rightarrow x \le \frac{-۴}{-۲} \Rightarrow x \le ۲ \Rightarrow D=\{x \in \mathbb{R} | x \le ۲\}$

توجه