تجزیه‌ی عبارت‌های جبری (پایه‌ی نهم)

نگارش : اشرف صفابخش – دبیر ریاضی متوسطه‌ی اول (گیلان)

بخش نخست

منظور از تجزیه‌ی یک عبارت جبری چیست؟

تجزیه‌ی یک عبارت جبری به معنای تبدیل آن عبارت جبری به صورت حاصل‌ضربِ دو یا چند عبارت جبری دیگر است.

نکته (۱): یک‌جمله‌ای‌ها نیازی به تجزیه ندارند. چنان که می‌دانیم همه‌ی یک‌جمله‌ای‌ها را می‌توان به صورت ضربِ یک یا چند عدد یا متغیر نوشت.

فعالیت (۱): تعیین کنید کدام یک از عبارت‌های زیر، به صورت حاصل‌ضرب دو یا چند عبارت جبری نوشته شده‌اند؟

1. $۵x^{۲} + ۳xy$
2. $۲x\left(x + y - ۱\right)$
3. $۸x\left(x - ۱\right) + ۳y\left(x + ۱\right)$
4. $\left(۲x - ۵\right)\left(x + y - ۱\right)\left(y + ۱\right)$

یک پرسش و اشتباه رایج میان دانش‌آموزان:

چرا گفته می‌شود عبارتی مانند $(x - y)(x + y)$ عبارتِ تجزیه شده است و عبارت $x^{۲} - y^{۲}$ تجزیه شده نیست، در حالی که در هر دوی آنها عمل ضرب انجام شده است؟ تفاوت در چیست؟

پاسخ: برای پاسخ به ایرادی که درون جدول بالا بیان شد، ترتیب انجام عملیات در محاسبه‌های ریاضی یادآوری می‌شود:

ترتیب انجام عملیات در محاسبه‌های ریاضی:

۱) عبارت داخل پرانتز

۲) عبارت توان‌دار

۳) عمل ضرب یا تقسیم

۴) عمل جمع یا تفریق

حال فرض کنید x و y عددهایی دلخواه باشند و می‌خواهیم حاصل دو عبارت $(x-y)(x+y)$ و $x^۲ - y^۲$ را به دست بیاوریم. با توجه به ترتیب انجام عملیات ریاضی، چه کار می‌کنیم؟

محاسبه‌ی $x^۲ - y^۲$: در عبارت $x^۲ - y^۲$، اول حاصل دو مقدار توان‌دارِ $x^۲$ و $y^۲$ را جداگانه محاسبه می‌کنیم و بعد عمل **تفریق** را انجام می‌دهیم.

محاسبه‌ی $(x-y)(x+y)$: در عبارت $(x-y)(x+y)$، اول حاصل دو پرانتزِ $(x-y)$ و $(x+y)$ را جداگانه محاسبه می‌کنیم و بعد حاصل آنها را در هم **ضرب** می‌کنیم.

اکنون به پرسش زیر پاسخ دهید.

پرسش: در محاسبه‌ی کدام عبارت، عمل ضرب، آخرین عملی بود که انجام دادیم؟ ....

* به یاد داشته باشید:

عبارت‌هایی جبری که در آنها عمل ضرب، آخرین عملی است که انجام می‌شود، عبارت‌هایی تجزیه شده هستند.

فعالیت (۲): به فعالیت شماره‌ی (۱) بازمی‌گردیم. این بار تعیین کنید در هر یک ازعبارت‌های زیر، آخرین عمل ریاضی که انجام شده است، چیست؟

1. $۵x^{۲} + ۳xy$
2. $۲x\left(x + y - ۱\right)$
3. $۸x\left(x - ۱\right) + ۳y\left(x + ۱\right)$
4. $\left(۲x - ۵\right)\left(x + y - ۱\right)\left(y + ۱\right)$

اگر هنوز در انجام فعالیت شماره‌ی (۲) بالا مشکل دارید، توضیح زیر را بخوانید:

عبارت $۵x^{۲} + ۳xy$ را می‌توان به این صورت در نظر گرفت:

$$\underbrace{۵ \times x \times x}_{۵x^{۲}} + \underbrace{۳ \times x \times y}_{۳xy}$$

ترتیب انجام عملیات در این عبارت، به این صورت است که اول ضرب‌ها انجام می‌شوند و در پایان، حاصل دو عبارتِ $۵x^{۲}$ و $۳xy$ با هم **جمع** می‌شوند. **پس آخرین عملی که انجام می‌شود، عمل جمع است.** یعنی این عبارت، به شکل ضرب نوشته نشده است.

اکنون عبارت $۲x\left(x + y - ۱\right)$ را در نظر بگیرید. این عبارت نیز می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$۲ \times x \times \left(x + y - ۱\right)$$

ترتیب انجام عملیات در این عبارت، به این صورت است که اول باید حاصل $x + y - ۱$ را محاسبه کنیم (عبارت درون پرانتز) و بعد این مقدار را در ۲ و مقدارِ x **ضرب** کنیم. آخرین عملی که انجام دادیم چه عملی بود؟ **ضرب.**

نتیجه:

عبارت $۵x^{۲} + ۳xy$ به شکل حاصل‌ضرب نوشته نشده است؛ ولی عبارت $۲x\left(x + y - ۱\right)$ به شکل حاصل ضربِ دو عبارت جبری است.

بخش دوم

چگونه یک عبارت جبری را تجزیه کنیم؟

یادآوری: در پایه‌ی هفتم، با تجزیه‌ی عددهای طبیعی آشنا شده‌اید. برخی نکات مربوط به تجزیه‌ی عددهای طبیعی، در اینجا با مثال، یادآوری می‌شود.

1. هنگامی که عدد ۱۲ را به صورت ۴×۳ می‌نویسیم، یعنی ۱۲ را به دو شمارنده، تجزیه کرده‌ایم.
2. برخی از عددها را نمی‌توان به صورت ضرب دو عدد طبیعیِ دیگر نوشت، مانند ۷، ۳، ۱۹. چنین عددهایی را عددهای اول می‌نامیدیم. عددهای اول تجزیه‌ناپذیرند.
3. اگر چه در حالتی که نوشتیم $۴ \times ۳ = ۱۲$، عدد ۱۲ را به دو شمارنده تجزیه کردیم، ولی هنوز عدد ۴ را می‌توان به صورت ۲×۲ نوشت. بنابراین می‌توان نوشت $۲ \times ۲ \times ۳ = ۱۲$. این بار ۱۲ را به صورت ضرب عددهایی تجریه‌ناپذیر نوشته‌ایم.

حال به موضوع تجزیه‌ی عبارت‌های جبری بازمی‌گردیم.

در تجزیه‌ی یک عبارت جبری، هدف ما آن است که یک عبارت جبری را به صورت ضرب عبارت‌های جبریِ تجزیه‌ناپذیر بنویسیم.

روش‌های تجزیه‌ی یک عبارت جبری:

1. **فاکتورگیری**

عبارت‌های جبری زیر، به کمک فاکتورگیری تجزیه شده‌اند:

$$۶x^۲ + ۴xy = ۲x\left(۳x + ۲y\right)$$

$$۴a^۵ + ۵a^۴ - ۳a^۲ = a^۲\left(۴a^۳ + ۵a^۲ - ۳\right)$$

۲. به کاربردن اتحادها

برخی از چندجمله‌ای‌ها را می‌توان به کمک اتحادهایی که در پایه‌ی نهم با آنها آشنا شده‌اید، تجزیه کرد (اتحادهای مربع دوجمله‌ای، اتحاد مزدوج و اتحاد جمله‌ی مشترک).

پرسش: چگونه تشخیص دهیم که یک عبارت جبریِ داده شده را به کمک کدام اتحاد تجزیه کنیم؟

برای پاسخ به این پرسش، اتحادهایی که با آنها آشنا شده‌اید، یادآوری می‌شود:

$$\underbrace{(a+b)^۲}_{\text{تجزیه‌ی سمت راست}} = a^۲ + ۲ab + b^۲$$ (اتحاد مربع دوجمله‌ای)

$$\underbrace{(a+b)(a-b)}_{\text{تجزیه‌ی سمت راست}} = a^۲ - b^۲$$ (اتحاد مزدوج)

$$\underbrace{(x+a)(x+b)}_{\text{تجزیه‌ی سمت راست}} = x^۲ + (a+b)x + ab$$ (اتحاد جمله‌ی مشترک)

سمت چپ هر یک از سه تساوی بالا، به صورت ضرب دو عبارت جبری است. به بیانی دیگر، سمت چپِ هر یک از این سه تساوی، تجزیه شده‌ی عبارت سمت راستِ تساوی است.

الف) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج:

اگر با عبارتی جبری روبرو هستید که به صورت زیر است:

$$\underbrace{\blacksquare^۲}_{\text{مربع یک عبارت دیگر}} - \underbrace{\square^۲}_{\text{مربع یک عبارت}}$$

می‌توانید آن را به کمک اتحاد مزدوج، این‌گونه تجزیه کنید: $(\square - \blacksquare)(\square + \blacksquare)$

در ادامه، چند عبارت به کمک اتحاد مزدوج، تجزیه شده‌اند.

مثال (۱):

$$x^2 - 4y^2 = (x)^2 - (2y)^2 = (x - 2y)(x + 2y)$$

مثال (۲):

$$x^8 - y^6 = (x^4)^2 - (y^3)^2 = (x^4 - y^3)(x^4 + y^3)$$

مثال (۳):

$$\begin{aligned}(a+b)^2 - 16 &= (a+b)^2 - (4)^2 \\ &= \big((a+b) - 4\big)\big((a+b) + 4\big) \\ &= (a+b-4)(a+b+4)\end{aligned}$$

ب) تجزیه به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای:

اگر با عبارتی جبری روبرو هستید که به یکی از دو صورت زیر است:

$$\underbrace{\square^2}_{\text{مربع یک عبارت}} + \underbrace{\blacksquare^2}_{\text{مربع یک عبارت دیگر}} + \underbrace{2 \times \square \times \blacksquare}_{\text{دو برابرِ حاصل ضرب دو عبارت}}$$

یا

$$\underbrace{\square^2}_{\text{مربع یک عبارت}} + \underbrace{\blacksquare^2}_{\text{مربع یک عبارت دیگر}} - \underbrace{2 \times \square \times \blacksquare}_{\text{دو برابرِ حاصل ضرب دو عبارت}}$$

می‌توانید آنها را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای، به ترتیب، این‌گونه تجزیه کنید:

$$(\square + \blacksquare)^2$$

یا

$$(\square - \blacksquare)^2$$

در ادامه، چند عبارت به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای، تجزیه شده‌اند.

مثال (۴):

$$x^{۲} + ۱۸x + ۸۱ = x^{۲} + \underbrace{۲ \times (۹) \times (x)}_{۱۸x} + ۹^{۲} = (x + ۹)^{۲}$$

مثال (۵):

$$x^{۴} + ۲x^{۲} + ۱ = (x^{۲})^{۲} + \underbrace{۲ \times (۱) \times (x^{۲})}_{۲x^{۲}} + ۱^{۲} = (x^{۲} + ۱)^{۲}$$

به تفاوت‌های دو مورد زیر، توجه کنید:

مثال (۶):

$$۹x^{۲} + ۳۰x + ۲۵ = (۳x)^{۲} + \underbrace{۲ \times (۳x) \times (۵)}_{۳۰x} + ۵^{۲} = (۳x + ۵)^{۲}$$

مثال (۷):

$$۹x^{۲} - ۳۰x + ۲۵ = (۳x)^{۲} - \underbrace{۲ \times (۳x) \times (۵)}_{۳۰x} + ۵^{۲} = (۳x - ۵)^{۲}$$

پ) تجزیه به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک:

اگر با عبارتی جبری روبرو هستید که به فرم زیر است:

$$\underbrace{\overbrace{\square^{۲}}^{\text{بخش اول}}}_{\text{مربع یک عبارت}} + \overbrace{\left(\underbrace{\bigcirc + \bullet}_{\text{جمع دو مقدار}}\right)}^{\text{بخش دوم}} \times \square + \overbrace{\underbrace{\bigcirc \times \bullet}_{\text{ضرب همان دو مقدار}}}^{\text{بخش سوم}}$$

می‌توانید آن را به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک، این‌گونه تجزیه کنید:

$$(\square + \bigcirc)(\square + \bullet)$$

در زیر، چند عبارت به کمک اتحاد جملهی مشترک، تجزیه شدهاند:

مثال (۸):

$$x^{۲} + ۵x + ۶ = \underbrace{(x)}_{\text{جملهی مشترک}}{}^{۲} \quad \underbrace{+۵}_{\text{جمع دو مقدار}} \quad x \quad \underbrace{+۶}_{\text{ضرب همان دو مقدار}}$$

باید دو عدد حقیقی پیدا کنیم که جمع آنها برابر با ۵ و ضرب آنها برابر با ۶ شود:

$$۲ + ۳ = ۵$$
$$۲ \times ۳ = ۶$$

دو عددی که یافتهایم (در اینجا ۲ و ۳)، همان دو جملهی غیرمشترک هستند.

بنابراین، عبارت $x^{۲} + ۵x + ۶$ به شکل زیر تجزیه میشود:

$$\left(x + ۲\right)\left(x + ۳\right)$$

مثال (۹):

$$x^{۲} - ۱۱x + ۲۴ = \underbrace{(x)}_{\text{جملهی مشترک}}{}^{۲} \quad \underbrace{-۱۱}_{\text{جمع دو مقدار}} \quad x \quad \underbrace{+۲۴}_{\text{ضرب همان دو مقدار}}$$

باید دو عدد حقیقی پیدا کنیم که جمع آنها برابر با ۱۱- و ضرب آنها برابر با ۲۴ شود. چون ضرب دو عدد، یک عدد مثبت شده است (عدد ۲۴)، پس دو عدد همعلامت هستند. از آنجا که جمع این دو عدد برابر با ۱۱- است (یک عدد منفی)، پس دو عدد موردنظر، منفی هستند.

$$\left(-۳\right) + \left(-۸\right) = -۱۱$$
$$\left(-۳\right) \times \left(-۸\right) = ۲۴$$

بنابراین، عبارت $x^{۲} - ۱۱x + ۲۴$ به شکل زیر تجزیه میشود:

$$\left(x + \left(-۳\right)\right)\left(x + \left(-۸\right)\right)$$

یا

$$\left(x - ۳\right)\left(x - ۸\right)$$

مثال (۱۰):

$$x^{۲} - ۳x - ۱۰ = \underbrace{(x)}_{\text{جمله‌ی مشترک}}{}^{۲} \quad \underbrace{-۳}_{\text{جمع دو مقدار}} \quad x \quad \underbrace{-۱۰}_{\text{ضرب همان دو مقدار}}$$

در اینجا باید دو عدد حقیقی پیدا کنیم که جمع آنها برابر با ۳- و ضرب آنها برابر با ۱۰- شود. چون ضرب دو عدد، یک عدد منفی است (عدد ۱۰-)، پس یکی از عددها مثبت و دیگری منفی بوده است. از آنجا که جمع این دو عدد برابر با ۳- است (یک عدد منفی)، پس قدرمطلق عدد منفی بزرگتر است.

$$\left(+۲\right) + \left(-۵\right) = -۳$$
$$\left(+۲\right) \times \left(-۵\right) = -۱۰$$
$$\Longrightarrow x^{۲} - ۳x - ۱۰ = \left(x + ۲\right)\left(x - ۵\right)$$

مثال (۱۱):

$$۲۵x^{۲} - ۱۵x - ۱۰ = \underbrace{\left(۵x\right)}_{\text{جمله‌ی مشترک}}{}^{۲} \quad \underbrace{-۳}_{\text{جمع دو مقدار}} \quad \left(۵x\right) \quad \underbrace{-۱۰}_{\text{ضرب همان دو مقدار}}$$

تنها تفاوت عبارت جبریِ این مثال و مثال (۱۰)، در جمله‌ی مشترک آنهاست. مراحل یافتنِ دو جمله‌ی غیرمشترک، مانند مثال (۱۰) است.

$$\Longrightarrow ۲۵x^{۲} - ۱۵x - ۱۰ = \left(۵x\right)^{۲} - ۳\left(۵x\right) - ۱۰ = \left(۵x + ۲\right)\left(۵x - ۵\right)$$

چند نکته:

۱) در تجزیه‌ی عبارت‌های جبری، همیشه پیش از کمک گرفتن از اتحادها، شیوه‌ی فاکتورگیری را آزمایش کنید.

مثال (۱۲):

$$\mathbf{۷x^{۲} - ۴۲x + ۶۳} = ۷\left(x^{۲} - ۶x + ۹\right) = ۷\left(x - ۳\right)^{۲}$$

۲) گاهی در تجزیه به روش فاکتورگیری، عامل مشترک، به جای یک «یک‌جمله‌ای» یک «عبارت چندجمله‌ای» است.

مثال (۱۳):

$$\overbrace{۵\left(x + ۲\right)}^{\text{بخش اول}} + \overbrace{۳x\left(x + ۲\right)}^{\text{بخش دوم}} = ۵ \times \underbrace{\left(x + ۲\right)}_{\text{عامل مشترک}} + ۳ \times x \times \underbrace{\left(x + ۲\right)}_{\text{عامل مشترک}}$$

$$= \left(x + ۲\right)\left(۵ + ۳x\right)$$

مثال (۱۴):

$$\overbrace{\left(x + ۱\right)^{۲}}^{\text{بخش اول}} + \overbrace{a\left(x + ۱\right)}^{\text{بخش دوم}} = \underbrace{\left(x + ۱\right)}_{\text{عامل مشترک}} \times \left(x + ۱\right) + a \times \underbrace{\left(x + ۱\right)}_{\text{عامل مشترک}}$$

$$= \left(x + ۱\right)\left(x + ۱ + a\right)$$

تمرین: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$۴x^{۲} + ۱۲ =$

$۲۷x^{۲}y^{۳}z - ۱۵x^{۳}y^{۳}z^{۵} =$

$x^{۲} + ۱۴x + ۴۹ =$

$x^{۲} - a^{۴} =$

$۶x^{۴} + ۱۲x + ۳۰ =$

$x^{۲} + ۱۷x + ۷۰ =$

$x^{۲} + ۱۷x + ۵۲ =$

$x^{۲} - ۱۷x + ۵۲ =$

$۹x^{۲} - \left(۲x + ۵\right)^{۲} =$

$x^{۴} - y^{۸} =$

$a^{۴} - ۸a^{۲} - ۹ =$

$x^{۲}\left(۶x + ۵\right) - ۲۵\left(۶x + ۵\right) =$

$\left(۲x + ۷\right)^{۲} - \left(۳x - ۲\right)^{۲} =$

$۸x^{۴} - ۲x^{۲} =$

$-x^{۲} + ۱۰x - ۲۵ =$

$x^{۲} - ۹x + bx - ۹b =$

$۳\left(x - ۲\right)^{۲} + ۷\left(x - ۲\right) =$

$۵x^{۲} + ۱۵x + ۲x + ۶ =$

$۱۱x^{۴} - ۹۹ =$

$۲m^{۲}n - ۱۴n =$

$x^{۲m} - y^{۱۰} =$

$a^{۲} - ۲a - b^{۲} + ۱ =$

$k^{۲} - ۰/۲۵ =$

$x^{۲} - ۳x + \frac{۹}{۴} =$

$\frac{۱}{۶}x^{۲} - ۲x + \frac{۹}{۲} =$

$۳x^{۲} + ۴۲x - ۹۶ =$

$x^{۲} + ۶x - y^{۲} + ۹ =$