

قسمت چهارم: عبارتهای جبری

درجه: 

نکته: ابتدا عبارت داده شده را ساده کنید و سپس به سؤالات درجه پاسخ دهید.

سؤال ۱: درجهی عبارت $x^6 - 2x^3y^6 + 3x^2y^5 - y^6 + x^4y^5$

- بر حسب x, y : ۹

- بر حسب xy : ۴ می شود زیرا:

$$(xy)^0 x^6 - 2(xy)^3 y^3 + 3(xy)^2 y^3 - y^6 \times (xy)^0 + \underline{(xy)^4 y}$$

- بر حسب xy^2 : ۳ می شود زیرا:

$$(xy^2)^0 \times x^6 - 2(xy^2)^3 + 3(xy^2)^2 y - (xy^2)^0 y^6 + (xy^2)^2 x^2 y$$

سؤال ۲: عبارت $(x+y+z+v+w)(z+v+w+p+q)$ پس از ساده شدن، چند جمله دارد؟

۲۵ (۴)

۲۲ (۳)

۲۰ (۲)

۱۸ (۱)

نکته: اگر $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$

اگر $x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$

سؤال ۳: اگر $x < 0$ باشد، کمترین مقدار عبارت $\frac{2x^4 - 3x^2 + 2}{x^2}$ چه قدر است؟

۱ (۴)

-۱ (۳)

-۲ (۲)

۰ (۱)

نکته: اگر مجموع چند عبارت نامنفی، صفر شود، هر یک از آنها صفر هستند.

سؤال ۴: مقدار $x+y$ در سؤال مقابل چه قدر است؟

$$2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 2xy + 1 = 0$$

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

۰ (۱)

سؤال ۵: اگر $-3a^2b + ab - 9b = 0$ و $3ab = -a^2b - 7b$ باشد، مقدار a چه قدر است؟

۱ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۰ (۱)

نکته: در سؤالات شرطی، می توانید به جای متغیرها، اعداد دلخواه قرار دهید تا در شرط صدق کنند. سپس

آن اعداد را درون عبارت قرار داده و حاصل را به دست آورید.

سؤال ۶: اگر $x + y = 2$ باشد، حاصل عبارت زیر چه قدر است؟

$$x^4 + y^4 - x^2y^2 - x^2y^3 + 16xy$$

- (۱) -۸ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) -۱۶

سؤال ۷: اگر $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z = -14$ باشد، حاصل $x + y - z$ چه قدر است؟

- (۱) ۰ (۲) ۶ (۳) -۱۰ (۴) ۱۶

سؤال ۸: اگر $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ باشد، حاصل عبارت $\frac{(x-y)(x+y+z)^2}{x^5 + y^5 + z^5}$ چه قدر است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

نکته: در عبارت‌های درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c$ ، کمترین ($a > 0$) یا بیشترین ($a < 0$) مقدار به‌ازای

$$x = -\frac{b}{2a}$$

به‌دست می‌آید.

سؤال ۹: کمترین مقدار عبارت $\frac{3}{4}x^2 - 7x + 1$ چه قدر است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۳

سؤال ۱۰: کوچکترین عدد طبیعی n به‌طوری که عبارت $4^n + 4^{623} + 4^{1000}$ مربع کامل باشد، چه قدر است؟

- (۱) ۱۲۴۶ (۲) ۳۴۵ (۳) ۲۴۵ (۴) ۲۱۵

سؤال ۱۱: معادله‌ی $1 = 9^x - 6^x - 4^x + 3^x + 2^x$ چند جواب در مجموعه‌ی اعداد حقیقی دارد؟

- (۱) جواب ندارد. (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

سؤال ۱۲: عدد $2^{16} - 1$ چند شمارنده‌ی صحیح دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

سؤال ۱۳: حاصل عبارت $\sqrt{10 + 3\sqrt{10 + 3\sqrt{10 + 3\sqrt{\dots}}}}$ چه قدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۱۳

سؤال ۱۴: عبارت $33x^2 + ax + 33$ را به حاصل ضرب دو، دو جمله‌ای درجه اول با ضرایب صحیح تجزیه

می‌کنیم. در این صورت در مورد a کدام عبارت درست است؟

- (۱) فرد است. (۲) زوج است. (۳) صفر است. (۴) نمی‌توان مشخص کرد.

سؤال ۱۵: عدد طبیعی $x - 2$ ، یکی از شمارنده‌های عبارت $3x^2 - 2x + 10$ است. در این صورت حاصل جمع

کل مقادیری که می‌توان به‌جای x قرار داد، چه قدر است؟

- (۱) ۳۹ (۲) ۴۳ (۳) ۴۹ (۴) ۵۱

سؤال ۱۶: اگر $a^2 - a - 10 = 0$ باشد، کدام عبارت زیر در مورد حاصل عبارت $(a+1)(a+2)(a-4)$ درست است؟

- (۱) عددی صحیح است. (۲) مثبت و گنگ است.
 (۳) منفی و گنگ است. (۴) گویای غیر صحیح است.
- نکته:** برای به دست آوردن مجموع ضرایب در عبارت‌های جبری، کافی است به جای متغیرها، عدد ۱ قرار داد.

سؤال ۱۷: مجموع ضرایب در حاصل عبارت زیر، چقدر است؟

$$(1398x^7 - 1399y^5)(3x^6 - 1)(7x^2 + 4xy^5 - 2y)$$

(۱) -۱۸ (۲) +۱۸ (۳) -۶۳ (۴) ۰

نامعادله

سؤال ۱۸: نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{(x^2 + 1)(3x + 6)}{x^2 - 3x} > 0$$

نکته: $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

$$|x| \geq b \Rightarrow \begin{cases} x \geq b \\ \text{یا} \\ x \leq -b \end{cases}$$

سؤال ۱۹: مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(1 - |x|)(1 + x) > 0$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

سؤال ۲۰: مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\sqrt{x-1} \leq |x-1|$ کدام است؟

(۱) $\{1, 2\}$ (۲) $\{x \mid 1 < x < 2\}$ (۳) $\{x \mid x \geq 2\} \cup \{1\}$ (۴) $\{x \mid x \geq 3\}$

نکته: برای اعداد حقیقی و مثبت a ، b و c ، همواره داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

اثبات:

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$$

نکته: مجموع مربعات دو عدد حقیقی، همواره بزرگتر از ۲ برابر حاصل ضرب آن‌ها است زیرا:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

نکته: برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b ، میانگین ۲ عدد، بزرگتر یا مساوی جذر حاصل ضرب آن دو عدد است زیرا:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

نکته: مربع مجموع دو عدد حقیقی، همواره بزرگتر یا مساوی ۴ برابر حاصل ضرب آنها است:

$$(x + y)^2 \geq 4xy$$

سؤال ۲۱: چند عدد دو رقمی وجود دارد که اگر جای رقم‌های آن را عوض کنیم، عدد حاصل حداقل ۳ برابر عدد اولیه می‌شود؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)

وحید اسدی کیا

پاسخنامه تشریحی سوالات قسمت چهارم (عبارت‌های جبری)

۱- در متن درس نوشته شده است.

$$5 \times 5 = 25$$

$$ZV, ZW, VW$$

$$25 - 3 = 22$$

۲- گزینه (۳) تعداد کل جملات قبل از ساده کردن:

جملات متشابه:

تعداد جملات پس از ساده شدن

۳- گزینه (۴)

$$\frac{2x^4}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 2x^2 - 3 + \frac{2}{x^2}$$

$$= 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3 \Rightarrow 2 \times 2 - 3 = 1 \text{ کمترین مقدار}$$

۴- گزینه (۳)

$$2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 2xy + 10 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + y^2 - 6x - 2x - 2y + 2xy + 9 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (x+y-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+y-1=0 \Rightarrow 3+y-1=0 \Rightarrow y=-2 \end{cases} \Rightarrow x+y=3-2=1$$

۵- گزینه (۴)

$$\left. \begin{array}{l} -3a^2b + ab - 9b = 0 \\ +a^2b + 3ab + 7b = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} -2a^2b + 4ab - 2b = 0$$

$$\Rightarrow -2b(a^2 - 2a + 1) = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a=1$$

۶- گزینه (۳) کافی است به جای مثلاً x ، مقدار صفر و به جای y ، عدد ۲ قرار دهیم. داریم:

$$0 + 2^4 - 0 - 0 + 0 = 16$$

۷- گزینه (۲) عدد ۱۴ را به صورت $4+1+9$ می‌نویسیم. داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 14 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 6z + 9 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-3 \end{cases}$$

در نتیجه $x+y-z=2+1+3=6$ است.

۸- گزینه (۱) دو طرف شرط را ۲ برابر می کنیم. داریم:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2yz + 2zx$$

$$x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

$$(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=z$$

۹- گزینه (۲)

$$x = \frac{-(-7)}{2 \times 1 - \frac{3}{4}} = \frac{7}{3/5} = 2 \Rightarrow 3 \times (2)^2 - 7 \times (2) + 1 = -1$$

۱۰- گزینه (۳)

$$2^{2n} + 2^{1246} + 2^{2000} \Rightarrow \begin{cases} (2^n + 2^{1000})^2 \Rightarrow 2 \times 2^n \times 2^{1000} = 2^{1246} \Rightarrow n = 246 \\ (2^n + 2^{623})^2 \Rightarrow 2 \times 2^n \times 2^{623} = 2^{2000} \Rightarrow n = 1377 \end{cases}$$

پس $n = 246$ جواب مسأله است.

۱۱- گزینه (۲) اگر $2^x = a$ و $3^x = b$ باشد، داریم:

$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1$$

$$\Rightarrow a + b - a^2 + ab - b^2 = 1$$

دو طرف را ۲ برابر می کنیم. داریم:

$$2a + 2b - 2a^2 + 2ab - 2b^2 = 2$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \Rightarrow a=b \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow a=b=1 \\ b-1=0 \Rightarrow b=1 \end{cases}$$

پس $2^x = 1$ در نتیجه $x = 0$ است.

۱۲- گزینه (۳) با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$2^{16} - 1 = (2^8 - 1)(2^8 + 1) = (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) = 15 \times 17 \times 257 = 3^1 \times 5^1 \times 17^1 \times 257^1$$

$$\Rightarrow 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \Rightarrow 16 \times 2 = 32$$

۱۳- گزینه (۲)

$$A = \sqrt{10 + 2\sqrt{10 + 3\sqrt{10 + 3\sqrt{\dots}}}}$$

$$A^2 = 10 + 2A \Rightarrow A^2 - 2A - 10 = 0 \Rightarrow (A-5)(A+2) = 0 \Rightarrow \boxed{A=5}$$

۱۴- گزینه (۲)

$$(33x^2 + ax + 33) = (Mx + N)(Fx + E) = MFx^2 + (M \cdot E + N \cdot F)x + N \cdot E$$

$$\Rightarrow M \cdot F = 33, \quad M \cdot E + N \cdot F = a, \quad N \cdot E = 33$$

۳۳ عددی فرد است، پس M، F، E و N نیز فرد هستند پس M · E + N · F یعنی a حتماً زوج است.

۱۵- گزینه (۴)

$$\begin{array}{r}
 3x^2 - 2x + 10 \quad \left| \begin{array}{l} x-2 \\ 3x+4 \end{array} \right. \\
 \hline
 -3x^2 + 6x \\
 \hline
 4x + 10 \\
 \hline
 -4x + 8 \\
 \hline
 18
 \end{array}
 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 10 = (x-2)(3x+4) + 18$$

با توجه به رابطه‌ی اخیر، عدد ۱۸ باید بر $x-2$ بخش پذیر باشد. با توجه به این که $x-2$ باید طبیعی باشد، پس $x-2$ یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۶، ۹ و ۱۸ است که برای x مقدارهای ۳، ۴، ۵، ۸، ۱۱ و ۲۰ به دست می آید که مجموع آنها ۵۱ است.

۱۶- گزینه (۱)

$$a^2 - a - 10 = 0 \Rightarrow a^2 = a + 10$$

$$\begin{aligned}
 (a+1)(a+2)(a-4) &= (a^2 + 3a + 2)(a-4) = (a+10+3a+2)(a-4) \\
 &= 4(a+3)(a-4) = 4(a^2 - a - 12) = 4(-2) = -8 \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

۱۷- گزینه (۱)

$$(1398 - 1399)(3-1)(7+4-2) = -18$$

-۱۸

	x	-∞	-2	0	3	+∞
$x^2 + 1$		+	+	+	+	+
$3x + 6$		-	+	+	+	+
x		-	-	+	+	+
$x - 3$		-	-	-	+	+
$\frac{(x^2 + 1)(3x + 6)}{x(x - 3)}$		-	+	0	-	+

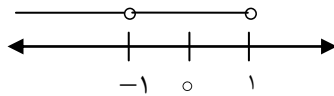
$$\frac{(x^2 + 1)(3x + 6)}{x(x - 3)} > 0 \Rightarrow$$

-۱۹

$$\begin{cases}
 1 - |x| > 0 \Rightarrow 1 > |x| \Rightarrow -1 < x < 1 \\
 \text{و} \\
 1 + x > 0 \Rightarrow x > -1
 \end{cases}
 \Rightarrow -1 < x < 1 \quad \text{رابطه (۱)}$$

یا

$$\left\{ \begin{array}{l} 1-|x| < 0 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 1 \\ \text{یا} \\ x < -1 \end{array} \right\} \\ \text{و} \\ 1+x < 0 \Rightarrow x < -1 \end{array} \right\} \Rightarrow x < -1 \quad \text{رابطه (۲)}$$

رابطه (۲) \cup رابطه (۱) \Rightarrow 

۲۰- گزینه (۳) عدد ۱ و ۲ در نامعادله صدق می کنند پس گزینه های (۲) و (۴) حذف می شوند. عدد ۳ در نامعادله صدق می کند، پس گزینه (۳) جواب است.

۲۱- گزینه (۳) آن عدد را \overline{xy} در نظر می گیریم. داریم:

$$\overline{yx} \geq 3\overline{xy} \Rightarrow 10y + x \geq 30x + 3y \Rightarrow 7y \geq 29x$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} \geq \frac{29}{7} \Rightarrow \frac{y}{x} \geq 4\frac{1}{7} \Rightarrow \frac{y}{x} \in \left\{ \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{9}{1}, \frac{9}{2} \right\}$$

پس اعداد دو رقمی ممکن عبارتند از ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۹ که تعداد آن ها ۶ تا است.