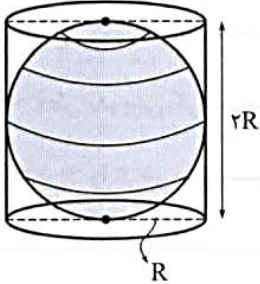


درس اول: حجم و مساحت کره

یک توپ فوتبال، یک کره‌ی جغرافیایی و یک پرتقال، نمونه‌هایی از حجم‌های کروی هستند. به طور کلی، کره به مجموعه‌ی نقطه‌هایی از فضا گفته می‌شود که همه‌ی آن نقطه‌ها از یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز کره، به یک فاصله‌ی ثابت باشند. به این فاصله‌ی ثابت شعاع کره می‌گوییم.



اگر مانند شکل مقابل، کره‌ای به شعاع R را در داخل استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع 2R قرار دهیم، کره در داخل استوانه محاط می‌شود یعنی نقطه‌های بالایی، پایینی و اطراف کره بر استوانه مماس می‌شود. در این حالت فضای خالی بین استوانه و کره، برابر حجم نصف کره است. بنابراین:

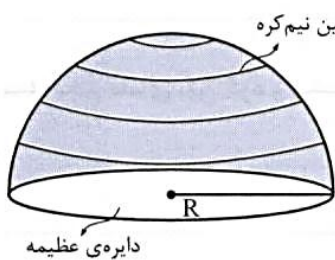
$$V_{\text{کره}} = \frac{2}{3} \times \underbrace{\pi R^2 h}_{\text{حجم استوانه}} = \frac{2}{3} \times \pi R^2 \times 2R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

\Rightarrow حجم استوانه $= \frac{3}{2} \times$ حجم کره \Rightarrow حجم کره $= \frac{2}{3} \times$ حجم استوانه

پس حجم کره‌ای به شعاع R، برابر است با: $\frac{4}{3} \pi R^3$

و حجم نیم کره‌ای به شعاع R، برابر است با: $\frac{2}{3} \pi R^3$

$$V_{\text{نیم کره}} = \frac{1}{2} \times V_{\text{کره}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3$$



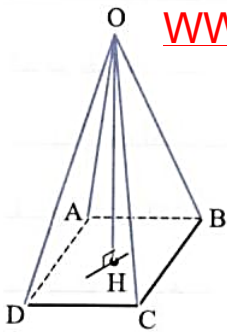
● اگر یک کره‌ی چوبی توپ را به طور دقیق به دو نیم کره تبدیل کنیم، سطح مقطع این نیم کره‌ها به شکل یک دایره است که شعاع این دایره، با شعاع کره برابر است. به این دایره، دایره‌ی عظیمه‌ی کره می‌گویند و رویه‌ی گنبدی شکل نیم کره را عرق چین نیم کره می‌گویند.

● مساحت کره چهار برابر مساحت دایره‌ی عظیمه‌ی آن است.

$$S_{\text{دایره‌ی عظیمه}} = \pi R^2 \Rightarrow S_{\text{کره}} = 4\pi R^2 \Rightarrow S_{\text{عرق چین نیم کره}} = \frac{1}{2} \times 4\pi R^2 = 2\pi R^2$$

$$S_{\text{کل نیم کره‌ی توپ}} = \underbrace{2\pi R^2}_{\text{مساحت عرق چین نیم کره}} + \underbrace{\pi R^2}_{\text{مساحت دایره‌ی عظیمه}} = 3\pi R^2$$

و مساحت کل نیم کره‌ی توپ برابر است با:



هرم، یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعده‌ی هرم به شکل چندضلعی است.

در شکل مقابل هرم OABCD را مشاهده می‌کنید. چهارضلعی ABCD قاعده‌ی هرم است. وجه‌های جانبی هرم به

شکل مثلث هستند که همگی در یک نقطه به نام رأس هرم مشترک‌اند.

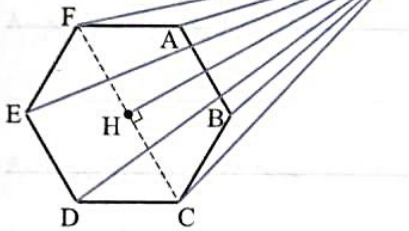
در هرم شکل مقابل، نقطه‌ی O رأس هرم و مثلث‌های OAB، OBC، OCD و OAD وجه‌های جانبی هرم هستند.

به فاصله‌ی رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود، ارتفاع هرم می‌گویند. در هرم شکل بالا، OH ارتفاع هرم است.

● اگر چندضلعی قاعده‌ی هرم، یک چندضلعی منتظم (مانند مثلث متساوی‌الاضلاع یا مربع) باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های هم‌نهشت باشند، آن‌گاه هرم را منتظم می‌گویند.

● اگر قاعده‌ی هرم، مرکز تقارن داشته باشد (مانند مربع یا شش‌ضلعی منتظم)، در این صورت، پای ارتفاع هرم (نقطه‌ی برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن قاعده قرار می‌گیرد.

● قاعده‌ی هرم شکل زیر، شش‌ضلعی منتظم است و نقطه‌ی H مرکز تقارن شش‌ضلعی است. OH ارتفاع هرم است.



● اگر دو هرم دارای قاعده‌های هم‌مساحت و ارتفاع‌های مساوی باشند، حجم‌های آن‌ها با هم برابر است.

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} S \cdot h$$

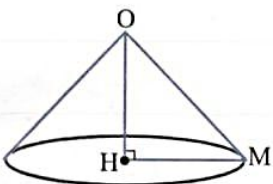
↑ ↑
ارتفاع هرم مساحت قاعده

● **حجم هرم:** حجم هرم از دستور زیر محاسبه می‌شود:

● هرمی داریم که قاعده‌ی آن مربعی به ضلع ۶ سانتی‌متر و ارتفاع هرم ۷ سانتی‌متر است. حجم هرم را حساب کنید.

$$V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 7 = 84 \text{ cm}^3$$

● **مخروط:** مخروط شکلی فضایی مانند هرم منتظم است با این تفاوت که قاعده‌ی آن به جای چندضلعی، دایره است. مرکز این دایره، پای ارتفاع مخروط است.



● برای مثال در مخروط شکل مقابل نقطه‌ی O رأس مخروط، OH ارتفاع مخروط، نقطه‌ی H پای ارتفاع و مرکز قاعده‌ی مخروط و HM شعاع قاعده‌ی مخروط است.

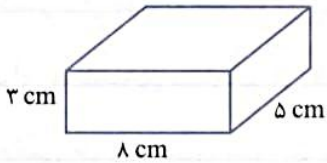
● **حجم مخروط از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:** (R شعاع قاعده‌ی مخروط است)

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

● حجم مخروطی را حساب کنید که شعاع قاعده‌ی آن ۵ cm و ارتفاع آن ۶ cm باشد.

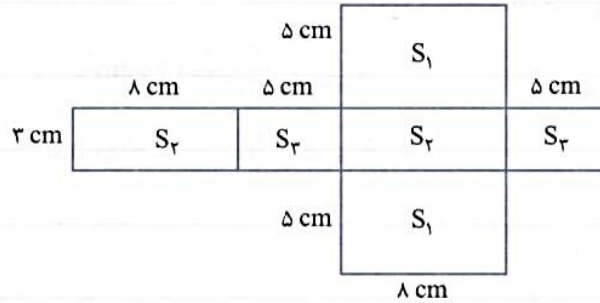
$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \times 3.14 \times 5^2 \times 6 = 50 \times 3.14 = 157 \text{ cm}^3$$

به مکعب مستطیل شکل مقابل دقت کنید.



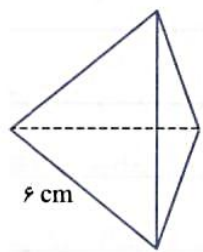
می‌خواهیم شکل گسترده‌ی این مکعب مستطیل را رسم کنیم و سپس با استفاده از آن، مساحت کل مکعب مستطیل را به دست آوریم. گسترده‌ی

مکعب مستطیل به صورت زیر است:



اگر مساحت‌های سه وجه مختلف مکعب مستطیل را با S_1 ، S_2 و S_3 نمایش دهیم، مساحت کل مکعب مستطیل برابر است با:

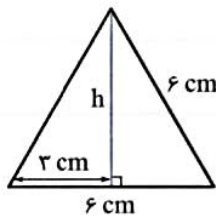
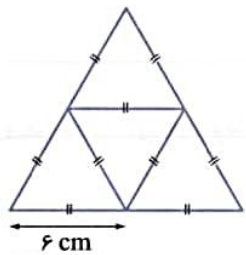
$$S_{\text{کل}} = 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 = 2(S_1 + S_2 + S_3) = 2 \times (8 \times 5 + 8 \times 3 + 5 \times 3) \Rightarrow S_{\text{کل}} = 158 \text{ cm}^2$$



هرم منتظم شکل مقابل از چهار مثلث متساوی‌الاضلاع هم‌اندازه تشکیل شده است. به این هرم،

چهاروجهی منتظم نیز می‌گویند. گسترده‌ی این هرم از چهار مثلث متساوی‌الاضلاع به شکل زیر تشکیل شده است.

برای محاسبه‌ی مساحت کل این هرم، باید مساحت یک وجه آن را حساب کنیم و سپس آن را چهار برابر کنیم. پس ابتدا مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع 6 سانتی‌متر را حساب می‌کنیم.



$$S_{\text{مثلث}} = \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

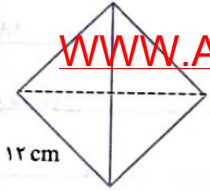
$$h^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow h = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$S_{\text{کل هرم}} = 4 \times S_{\text{مثلث}} = 4 \times 9\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

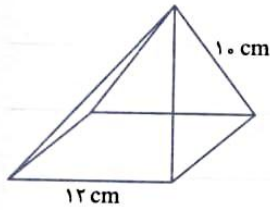
بنابراین مساحت کل هرم بالا برابر است با:

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a ، از رابطه‌ی $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ به دست می‌آید.

مساحت کل هرم منتظم چهاروجهی (چهاروجهی منتظم) به ضلع a ، از رابطه‌ی $a^2\sqrt{3}$ به دست می‌آید.

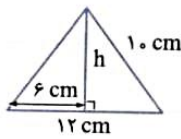
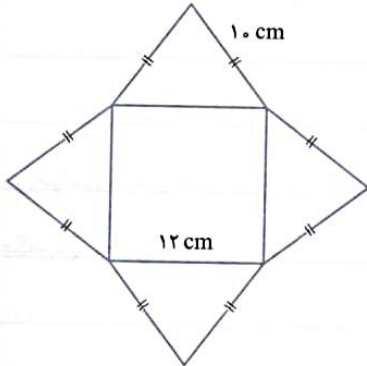


$$S_{\text{کل}} = a^2 \sqrt{3} = 12^2 \times \sqrt{3} = 144\sqrt{3}$$



● قاعده‌ی هرم منتظم شکل مقابل، یک مربع است. شکل گسترده‌ی آن را رسم کنید و سپس مساحت کل آن را حساب کنید.

گسترده‌ی هرم به صورت زیر است:



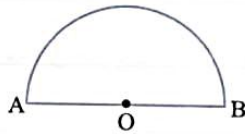
برای محاسبه‌ی مساحت کل هرم باید مساحت مربع قاعده را با مجموع مساحت‌های مثلث‌های چهار وجه جانبی حساب کنیم. مساحت یک مثلث به صورت زیر حساب می‌شود:

$$h^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow h = 8 \text{ cm}$$

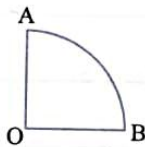
$$S_{\text{مثلث}} = \frac{6 \times 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{کل هرم}} = S_{\text{مربع}} + 4 \times S_{\text{مثلث}} = 12 \times 12 + 4 \times 24 = 232 \text{ cm}^2$$

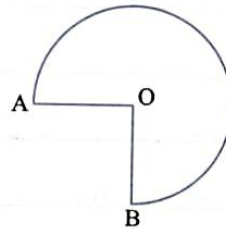
● به شکل‌های زیر توجه کنید.



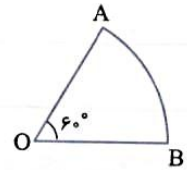
نیم‌دایره ($\frac{1}{2}$ دایره)



ربع دایره ($\frac{1}{4}$ دایره)



$\frac{3}{4}$ دایره

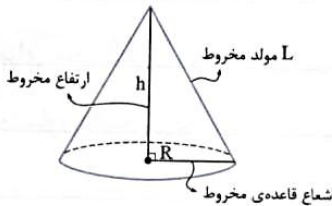


$\frac{1}{6}$ دایره ($\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$)

هر یک از شکل‌های بالا، کسری یا قسمتی از دایره هستند که به آن‌ها قطاع دایره می‌گوییم. در تمامی شکل‌ها، O مرکز دایره است.

● با هر قطاعی از دایره، می‌توان یک مخروط درست کرد که قسمت منحنی شکل قطاع (AB) محیط قاعده‌ی مخروط و شعاع دایره، مولد مخروط

می‌شود. البته توجه کنید که این مخروط‌ها فقط سطح جانبی دارند، (قاعده ندارند).

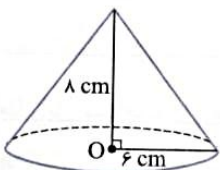


$$S_{\text{جانبی مخروط}} = \pi RL$$

● مساحت جانبی مخروط از رابطه‌ی روبه‌رو حساب می‌شود:

$$S_{\text{کل مخروط}} = \underbrace{\pi RL}_{S_{\text{جانبی}}} + \underbrace{\pi R^2}_{S_{\text{قاعده}}}$$

و مساحت کل مخروط برابر است با:



● مساحت جانبی و مساحت کل مخروط شکل مقابل را حساب کنید.

$$L^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow L = 10$$

ابتدا طول مولد مخروط را حساب می‌کنیم.

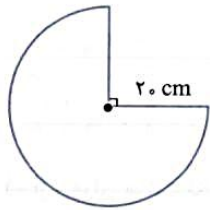
$$S_{\text{جانبی مخروط}} = \pi RL = 3/14 \times 6 \times 10 = 188/4 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{کل مخروط}} = \pi RL + \pi R^2 = 188/4 + 3/14 \times 36 = 301/44 \text{ cm}^2$$

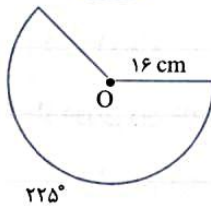
اگر با قطعی از دایره به شعاع R، بخواهیم مخروطی به شعاع قاعده‌ی r بسازیم، اندازه‌ی شعاع قاعده‌ی مخروط از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود. (اندازه‌ی \widehat{AB} باید بر حسب درجه باشد).

$$r = \frac{\widehat{AB}}{360^\circ} \times R$$

می‌خواهیم با $\frac{3}{4}$ دایره‌ای به شعاع 20 cm یک سطح مخروطی درست کنیم. شعاع قاعده‌ی این مخروط را حساب کنید.



$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = 15 \text{ cm}$$



می‌خواهیم با قطاع دایره‌ی مقابل، مخروطی بسازیم. شعاع قاعده‌ی مخروط را حساب کنید.

$$r = \frac{\widehat{AB}}{360^\circ} \times R = \frac{225^\circ}{360^\circ} \times 16 = \frac{5}{8} \times 16 = 10 \text{ cm}$$

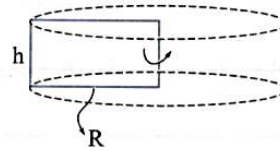
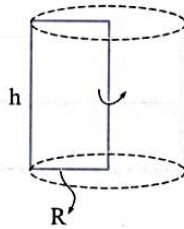
توجه داشته باشید که مساحت قطاع دایره با مساحت جانبی مخروط برابر است. یعنی اگر در شکل بالا، بخواهیم مساحت جانبی مخروطی

را که ساخته‌ایم حساب کنیم، فقط کافی است که مساحت قطاع را حساب کنیم. و اگر بخواهیم با استفاده از فرمول مساحت جانبی مخروط، سطح جانبی مخروط حاصل را حساب کنیم، داریم:

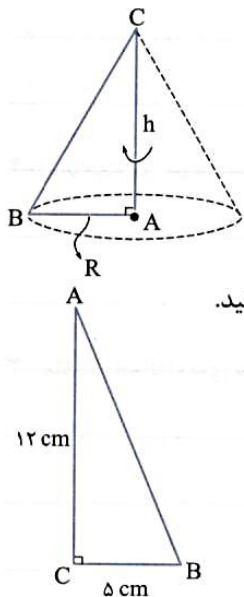
$$S_{\text{قطاع}} = \frac{225^\circ}{360^\circ} \times 16^2 \times \pi = \frac{5}{8} \times 16 \times 16 \pi = 160\pi$$

$$S_{\text{جانبی مخروط}} = \pi RL = \pi \times 10 \times 16 = 160\pi \text{ (شعاع قطاع، مولد مخروط است.)}$$

پیش از این آموختید که از دوران یک مستطیل، حول یک ضلع آن، یک استوانه حاصل می‌شود.



از دوران مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائم آن، یک مخروط حاصل می‌شود. ضلعی که مثلث را حول آن دوران می‌دهیم، ارتفاع مخروط و ضلع قائم دیگر شعاع قاعده‌ی مخروط می‌شود. در مخروط شکل مقابل، مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع AC دوران داده شده است. AC ارتفاع مخروط و AB شعاع قاعده‌ی مخروط است.



مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل مقابل را حول ضلع AC دوران می‌دهیم. حجم و مساحت کل شکل حاصل را حساب کنید.

$$AB^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AB = 13 \Rightarrow L_{\text{مولد مخروط}} = 13 \text{ cm}$$

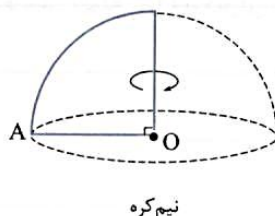
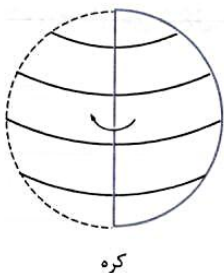
$$R = 5 \quad h = 12 \text{ cm}$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 12 = 100\pi$$

$$S_{\text{مخروط کل}} = \pi RL + \pi R^2 = \pi \times 5 \times 13 + 25\pi = 65\pi + 25\pi = 90\pi$$


از دوران نیم‌دایره یا دایره حول قطر آن، یک کره حاصل می‌شود.

از دوران ربع دایره، حول شعاعش، یک نیم‌کره حاصل می‌شود.



نیم‌کره

کره

ربع دایره‌ای به شعاع ۹ سانتی‌متر را حول شعاعش دوران می‌دهیم. حجم و مساحت کل شکل حاصل را حساب کنید. 

WWW.Amoozz.ir

$$V_{\text{نیم کره}} = \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 9^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 729 = 486\pi$$

شکل حاصل نیم کره است. 

$$S_{\text{کل نیم کره}} = 3\pi R^2 = 3\pi \times 9^2 = 243\pi$$

