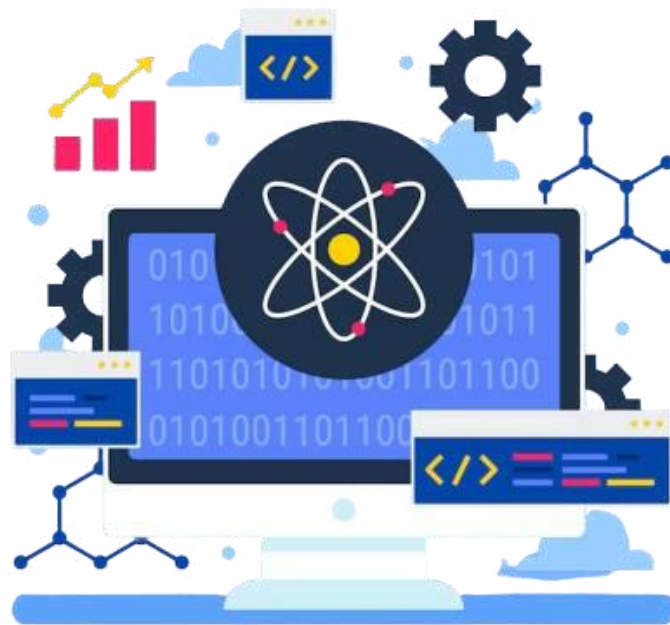


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دفترچه سوالات مرحله اول المپیاد کامپیوتر از ابتدا تاکنون

(همراه با کلید)



amoozz.ir



sampaadia.ir

- [برای هدایت به صفحه راهکارهای مؤثر برای موفقیت در المپیاد: از برنامه‌ریزی تا مدیریت زمان بر روی این متن کلیک کنید](#)
- [برای هدایت به صفحه امتیاز و تسهیلات کسب مدال در المپیادهای علمی دانش آموزی چیست؟ بر روی این متن کلیک کنید](#)
- [برای هدایت به صفحه نمره کف قبولی المپیاد چیست؟ بر روی این متن کلیک کنید](#)

سایر مطالب مرتبط:

- [آشنایی با المپیاد کامپیوتر](#)
- [دانلود سوال و پاسخنامه آزمون‌های مرحله اول و مرحله دوم المپیادهای کامپیوتر ایران](#)
- [کلاس المپیاد ریاضی و کامپیوتر](#)
- [منابع، مراجع و سوالات مرحله اول و دوم المپیاد کامپیوتر](#)
- [آزمون‌های آنلاین مرحله اول المپیاد کامپیوتر](#)
- [آزمون‌های آنلاین مرحله دوم المپیاد کامپیوتر](#)

باسمه تعالی
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش پژوهان جوان



مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچه سؤالات مرحله اول سال ۱۴۰۳ سی و پنجمین دوره المپیاد کامپیوتر

تعداد سؤالات	مدت آزمون
۲۰ سؤال	۱۵۰ دقیقه

نام:

نام خانوادگی:

شماره صندلی:

توضیحات مهم

استفاده از هر نوع ماشین حساب ممنوع است.

- ۱- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و همه برگه های دفترچه سؤالات را بررسی نمایید، در صورت هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسؤول جلسه را مطلع کنید.
- ۲- يك برگ پاسخ برگ در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است، در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسؤول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در پایین پاسخ برگ را با مداد مشکی بنویسید.
- ۳- برگه پاسخ برگ را دستگاه تصحیح می کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محلّ مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۴- دفترچه سوال باید همراه پاسخ برگ تحویل داده شود.
- ۵- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره منفی دارد.
- ۶- شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می شوند.
- ۷- سایت المپیاد کامپیوتر opedia.ir می باشد.

کلیه حقوق این سؤالات برای باشگاه دانش پژوهان جوان محفوظ است.
آدرس سایت اینترنتی: ysc.medu.gov.ir

مرحله ی اول سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۱۵۰ دقیقه است.
- آزمون ۲۰ سوال دارد.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه ها به طور تصادفی است.
- سوالات ۱۸ تا ۲۰ در یک دسته ی چند سوالی آمده اند و قبل از این دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ ۱۴۰۳ نفر دور دایره ای قرار دارند. هر کدام از این افراد یا **راست گو** است یا **دروغ گو**. فرض بر این است که افراد دروغ گو همواره دروغ، و افراد راست گو همیشه راست می گویند. همه ی افراد می گویند که حداقل یکی از دو نفر مجاورشان (در دایره) دروغ گو است. در این جمع، حداقل و حداکثر چند نفر دروغ گو وجود دارد؟

(۱) ۴۶۷ و ۷۰۲ (۲) ۴۶۸ و ۷۰۱ (۳) ۴۶۸ و ۷۰۲ (۴) ۴۶۷ و ۷۰۱ (۵) ۴۶۷ و ۱۴۰۳

۲ جدولی 10×3 داریم. به یک مجموعه ی ۴ عضوی از خانه های جدول **الماس** می گوئیم اگر خانه ی دیگری از جدول وجود داشته باشد که با هر یک از این ۴ خانه ضلع مشترک داشته باشد. می خواهیم تعدادی از خانه های این جدول را علامت بزنییم به طوری که در هر الماس، حداقل یک خانه علامت خورده باشد. کم ترین تعداد خانه ای که باید علامت بزنییم چند است؟

(۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۹ (۴) ۱۰ (۵) ۴

۳ یک عدد طبیعی x داریم که می خواهیم آن را به عدد ۱ تبدیل کنیم. در هر مرحله، می توانیم یکی از دو عمل زیر را روی آن انجام دهیم:

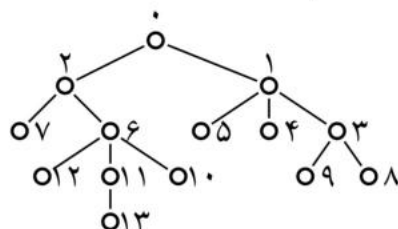
- کاهش عدد: با انجام این عمل، اگر مقدار عدد ما در این مرحله از ۵ بیش تر بود، ۵ واحد از مقدار آن کم می شود.
- شیفت دورانی ارقام عدد: با انجام این عمل، چپ ترین رقم عدد (رقم پرارزش) به سمت راست عدد منتقل می شود و پس از آن، همه ی صفرهای سمت چپ عدد (در صورت وجود) پاک می شوند؛ مثلاً اگر عدد ما در این مرحله ۳۰۰۰۴۵۲ باشد، با یک مرتبه انجام این عمل، به ۴۵۲۳، و با انجام مجدد آن، به ۵۲۳۴ تبدیل می شود.

به ازای چند عدد ۳ رقمی x (یعنی $999 \geq x \geq 100$)، می توانیم با انجام تعدادی متناهی از دو عمل بالا به عدد ۱ برسیم؟

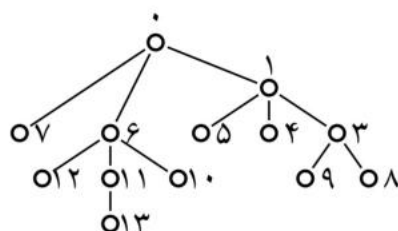
(۱) ۹۰۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۸۰۰ (۴) ۷۲۰ (۵) ۳۶۰

مرحله ی اول سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

۴ ۱۴ شرکت داریم که از ۰ تا ۱۳ شماره گذاری شده اند. هر شرکت با تعدادی شرکت دیگر ارتباط دارد. ارتباط این شرکت ها با هم به صورت شکل زیر مدل می شود که در آن، هر نقطه نمایانگر یک شرکت است و دو شرکت با هم ارتباط دارند اگر پاره خطی بین آن ها رسم شده باشد.



در هر مرحله، شرکت ۰ می تواند یکی از شرکت هایی را که با آن ارتباط دارد، حذف کند و با شرکت هایی که پیش تر با شرکت حذف شده ارتباط داشتند، ارتباط برقرار کند. بیش ترین تعداد ارتباطی که شرکت ۰ می تواند بعد از اعمال تعدادی از این مراحل داشته باشد، چند است؟
به عنوان مثال، فرض کنید شرکت ۰ که در ابتدا با دو شرکت ۱ و ۲ ارتباط دارد، بخواهد شرکت ۲ را حذف کند و با شرکت هایی که پیش تر با شرکت ۲ ارتباط داشتند، ارتباط بگیرد. پس از این مرحله، ارتباط شرکت ها با هم به شکل زیر در می آید و شرکت ۰ با سه شرکت ۱، ۶ و ۷ ارتباط خواهد داشت.



۶ (۵)

۵ (۴)

۸ (۳)

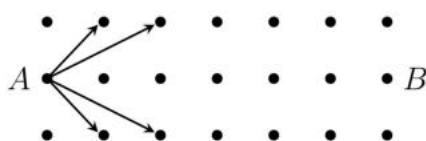
۹ (۲)

۷ (۱)

۵ در شکل زیر، تعداد روش های رسیدن از نقطه ی A به نقطه ی B با حداکثر ۵ بار استفاده از حرکات مجاز چیست؟ یک حرکت مجاز عبارت است از رفتن از نقطه ی فعلی به یکی از چهار نقطه ی زیر (در صورت وجود):

- نقطه ای که یک واحد بالاتر و یک واحد راست تر از نقطه ی فعلی است،
- نقطه ای که یک واحد پایین تر و یک واحد راست تر از نقطه ی فعلی است،
- نقطه ای که یک واحد بالاتر و دو واحد راست تر از نقطه ی فعلی است،
- نقطه ای که یک واحد پایین تر و دو واحد راست تر از نقطه ی فعلی است.

به عنوان نمونه، در شکل زیر، حرکات مجاز از نقطه ی A با پیکان نشان داده شده اند.



۲۴ (۵)

۳۶ (۴)

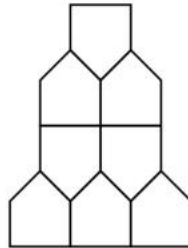
۱۶ (۳)

۳۲ (۲)

۱۲ (۱)

مرحله اول سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

۶ شکل زیر نقشه‌ی یک برج را نشان می‌دهد که می‌خواهیم آن را با ۸ بلوک پنج ضلعی بسازیم. در هر مرحله، برای این که بتوانیم یک بلوک جدید را در جای خود قرار دهیم، لازم است این بلوک یا در پایین‌ترین ردیف (روی سطح زمین) باشد، و یا تمام بلوک‌های پایین‌تر از آن که با آن، حداقل یک ضلع مشترک دارند، قبل از آن در جای خود قرار داده شده باشند. به چند روش می‌توانیم این برج را بسازیم؟ دو روش ساخت برج متمایزند اگر و تنها اگر ترتیب قرار دادن بلوک‌ها در جایشان در این دو روش تفاوت داشته باشد.



۲۲ (۵)

۵۲ (۴)

۲۴ (۳)

۵۶ (۲)

۴۵ (۱)

۷ تعدادی آدم با قد‌های مختلف به ترتیب از جلوی یک نانوایی عبور می‌کنند. نانوایی یک صف عجیب دارد که در ابتدا خالی است. هر نفر که از جلوی نانوایی عبور می‌کند، تصمیم می‌گیرد که وارد نانوایی بشود یا نه. اگر تصمیم گرفت وارد نشود، محل را ترک می‌کند و دیگر به آنجا باز نمی‌گردد. ولی در صورت ورود به نانوایی، به روش زیر به صف عجیب آن ملحق می‌شود:

- در صورتی که صف خالی باشد یا قدش از نفر آخر صف بلندتر باشد، به آخر صف اضافه می‌شود؛
- اگر قدش از نفر آخر بلندتر نباشد، نفر اول صف باید از صف خارج شود و محل را ترک کند و سپس، این فرد به آخر صف اضافه می‌شود. نفر اول پس از ترک محل، هرگز به صف باز نمی‌گردد.

فرض کنید دنباله‌ی زیر از چپ به راست، قد افراد را به ترتیب عبورشان از جلوی نانوایی نشان می‌دهد. در میان تمامی حالات تصمیم‌گیری این افراد برای وارد شدن/نشدن به نانوایی، طول این صف عجیب حداکثر چه قدر می‌شود؟

۱, ۹, ۱۰, ۶, ۱۱, ۱۵, ۲, ۱۲, ۳, ۱۳, ۷, ۸, ۵, ۱۴, ۴

۱۰ (۵)

۷ (۴)

۶ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۸ به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۶ را در یک ردیف قرار داد به طوری که ۱ با ۲ مجاور نباشد، ۳ با ۴ مجاور نباشد، و ۵ هم با ۶ مجاور نباشد؟ به عنوان مثال، ترتیب ۱۴۳۵۲۶ شرایط خواسته شده را ندارد چون اعداد ۴ و ۳ در آن مجاور هستند، ولی ترتیب ۱۳۶۲۵۴ این شرایط را دارد.

۲۴۰ (۵)

۸۰ (۴)

۱۹۲ (۳)

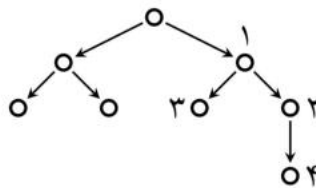
۴۸ (۲)

۲۱۶ (۱)

مرحله اول سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

۹

مداری داریم که از تعدادی لامپ و سیم یک طرفه تشکیل شده است. هر سیم یک طرفه از یک لامپ مانند A خارج، و به یک لامپ مانند B وارد می شود. در این صورت، این سیم را یک **سیم خروجی** از لامپ A ، و لامپ B را لامپ **انتهای** این سیم می نامیم. هر گاه به یک لامپ جریان برق وارد شود، آن لامپ روشن شده و سپس، جریان برق از طریق همه ی سیم های خروجی آن لامپ به لامپ هایی وارد می شود که در انتهای این سیم ها قرار دارند؛ و این روند به همین شکل، برای لامپ های بعدی ادامه پیدا می کند. به عنوان مثال، شکل زیر مداری را نشان می دهد که در آن، لامپ ها با دایره و سیم های یک طرفه با پاره خط های جهت دار نشان داده شده اند. با وارد شدن جریان برق به لامپ شماره ۱ در این مدار، لامپ های ۱، ۲، ۳ و ۴ روشن می شوند، ولی وضعیت بقیه ی لامپ ها تغییر نمی کند.

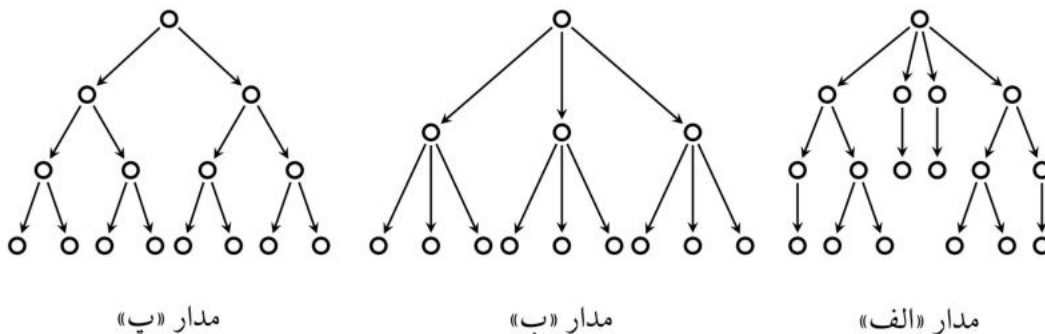


حسین و زهرا روی یک مدار بازی می کنند. این بازی به صورت زیر است:

در ابتدا، تمامی لامپ ها خاموش هستند و جریان برق در هیچ جای مدار وجود ندارد. با شروع از حسین، هر شخص در نوبت خود، یک لامپ خاموش را که حداقل یکی از دو ویژگی زیر را داشته باشد، انتخاب، و جریان برق را به آن وارد می کند.

- هیچ سیم خروجی ای نداشته باشد.
- حداقل یک سیم خروجی به یک لامپ روشن داشته باشد.

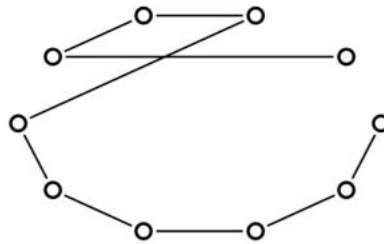
بالتبع پس از تعدادی مرحله، همه ی لامپ ها روشن خواهند شد. کسی که آخرین حرکت را انجام دهد، برنده ی بازی محسوب می شود. می گوییم حسین برای یک مدار **استراتژی بُرد** دارد اگر بتواند در بازی روی آن مدار، طوری اقدام کند که (مستقل از حرکت های زهرا) همواره برنده ی بازی باشد. در شکل زیر، سه مدار «الف»، «ب» و «پ» نشان داده شده است. کدام گزینه همه ی مدارهایی را نشان می دهد که حسین برایشان استراتژی بُرد دارد؟



(۱) مدار «الف» (۲) مدارهای «ب» و «پ» (۳) مدارهای «الف» و «ب» (۴) مدار «ب» (۵) مدار «پ»

مرحله ی اول سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۰ اکبر آقا و محمد آقا در حال انجام یک بازی روی کاغذ هستند. آن ها ۱۰ رأس روی کاغذ کشیده اند و همانند شکل زیر، میان برخی از آن ها پاره خط رسم کرده اند. می دانیم هیچ سه رأسی هم خط نیستند.



به یک نحوه ی رسم پاره خطها **نقلی** می گوئیم اگر بتوان رأس ها را طوری از ۱ تا ۱۰ شماره گذاری کرد که برای هر $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$ ، بین رأس های با شماره ی i و $i + 1$ پاره خط کشیده شده باشد و هیچ پاره خط دیگری در صفحه کشیده نشده باشد. مثلاً در شکل بالا، نحوه ی رسم پاره خطها نقلی محسوب می شود. در آغاز بازی، اکبر آقا مهره ای را روی یکی از رأس ها قرار داده و یک رأس دیگر (متفاوت با رأس دارای مهره) را به عنوان رأس **مقصد** انتخاب می کند. بازی به این صورت است که در ابتدای هر مرحله، اکبر آقا یکی از رأس هایی را که مستقیماً با پاره خط به رأس دارای مهره متصل است، انتخاب کرده و مهره را به آن رأس انتقال می دهد. در ادامه، محمد آقا یکی از پاره خط های کشیده شده (بین دو رأس) را پاک می کند و پاره خط دیگری را به دل خواه خود بین دو رأس رسم می کند، با این شرط که نحوه ی رسم پاره خطها هم چنان نقلی باقی بماند. به ازای چند حالت از روش های انتخاب رأس دارای مهره و رأس مقصد، اکبر آقا می تواند مهره را با تعداد متناهی مرحله به رأس مقصد برساند (و محمد آقا تحت هیچ شرایطی نمی تواند جلوی او را بگیرد)؟

۹ (۵)

۱۸ (۴)

۴۵ (۳)

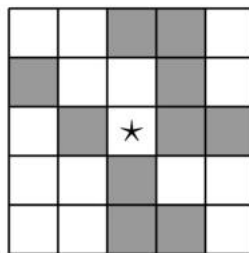
۹۰ (۲)

۰ (۱)

۱۱ جدولی 5×5 داریم که در ابتدا، هیچ یک از خانه های آن رنگ نشده است. در هر مرحله، یک خانه از جدول را که تاکنون رنگ نشده است، رنگ می کنیم و به تعداد خانه های رنگ شده ی متصل به آن امتیاز می گیریم. دو خانه ی متمایز از جدول **متصل** محسوب می شوند اگر:

- هم سطر باشند و تمامی خانه های آن سطر که بین آن دو خانه هستند، رنگ شده باشند،
- یا هم ستون باشند و تمامی خانه های آن ستون که بین آن دو خانه هستند، رنگ شده باشند.

برای مثال در شکل زیر، خانه های رنگی با خاکستری رنگ شده اند. با رنگ کردن خانه ای که با ستاره مشخص شده است، ۵ امتیاز می گیریم، چرا که این خانه به ۳ خانه ی دیگر در سطرش و ۲ خانه ی دیگر در ستونش متصل است. مجموع امتیازی که می توانیم با رنگ کردن همه ی خانه ها به دست آوریم، حداکثر چند است؟



۷۶ (۵)

۱۵۰ (۴)

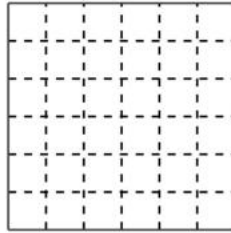
۱۲۵ (۳)

۱۰۰ (۲)

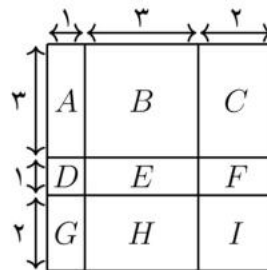
۶۰ (۱)

مرحله ی اول سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

نگار یک تخته شکلات دارد. این تخته شکلات به صورت یک جدول 6×6 مانند شکل زیر است که ۵ خط افقی و ۵ خط عمودی برای بُرش دارد. این خطوط در شکل زیر با خط چین مشخص شده اند.



او ۲ خط از ۵ خط افقی و ۲ خط از ۵ خط عمودی را انتخاب می کند و شکلات را از روی آن خط ها بُرش می دهد تا تعدادی تکه ی کوچک تر ایجاد شود. هدف نگار این است که حداقل یکی از تکه های ایجاد شده 1×1 باشد. به عنوان مثال، اگر اولین و چهارمین خط عمودی از چپ، و سومین و چهارمین خط افقی از بالا برای بُرش انتخاب شوند، ۹ تکه ایجاد می شوند که مطابق شکل زیر، با حروف A، B، ... و I نام گذاری شده اند. با این شرایط، تکه شکلات D یک تکه ی 1×1 خواهد شد.



این کار به چند روش قابل انجام است؟ دو روش برای انجام این کار متمایز محسوب می شوند، اگر و تنها اگر مجموعه ی خطوط انتخاب شده ی آن ها با هم برابر نباشد.

۲۵ (۵)

۸۱ (۴)

۱۰۰ (۳)

۴۹ (۲)

۶۴ (۱)

یک بیماری داریم که فرآیند ارث بری آن به صورت زیر است:

- اگر دقیقاً یکی از پدر و مادر بیمار باشد، فرزند نیز بیمار می شود،
- وگرنه (اگر هر دو والد بیمار باشند یا هیچ کدام بیمار نباشند)، فرزند بیمار نمی شود.

۵ زوج (پدر و مادر) داریم که به آن ها نسل اول می گوئیم. هر یک از زوج های نسل اول دارای یک فرزند دختر و یک فرزند پسر هستند که به این فرزندان، نسل دوم می گوئیم. به صورت تصادفی، یک دختر و یک پسر از نسل دوم را که با هم خواهر و برادر نیستند، انتخاب کردیم تا با هم ازدواج کنند. این زوج صاحب فرزندى به نام «شاخ شمشاد» شدند. در فرآیند انتخاب پدر و مادر شاخ شمشاد، احتمال انتخاب همه ی زوج های ممکن از نسل دوم برابر بوده است. با این شرایط، به ازای چند حالت از 2^{10} حالت بیمار بودن یا نبودن هر یک از ۱۰ نفر نسل اول، احتمال بیمار بودن شاخ شمشاد بیش تر از $\frac{1}{4}$ می شود؟

۶۴۰ (۵)

۳۲۰ (۴)

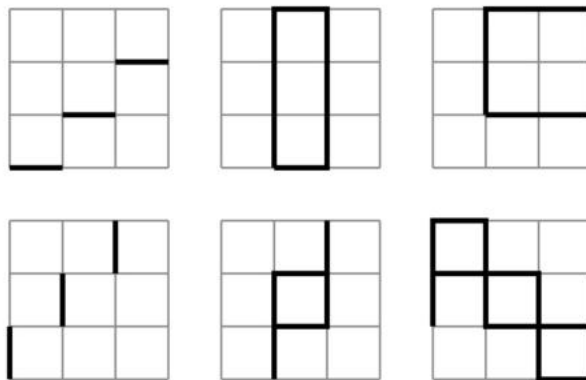
۱۰۲۲ (۳)

۱۲۰ (۲)

۵۱۲ (۱)

مرحله اول سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

یک جدول 3×3 داریم که روی آن، ۶ الگو به شکل زیر تعریف شده اند:



به یک زیرمجموعه از این الگوها روان می‌گوییم اگر تنها با عبور از اجتماع خطوط پررنگی که در آن زیرمجموعه از الگوها آمده‌اند، بتوان از نقطه‌ی پایین چپ جدول به نقطه‌ی بالا راست آن رسید. کدام گزینه پاسخ درست به پرسش‌های زیر است؟

۱. کمینه‌ی اندازه‌ی یک مجموعه‌ی روان چند است؟

۲. چند زیرمجموعه‌ی روان وجود دارد؟ (لازم نیست اندازه‌ی آن‌ها کمینه باشد.)

هر گزینه به شکل « x و y » است که در آن، x پاسخ پرسش اول، و y پاسخ پرسش دوم می‌باشد.

۱۵ و ۴ (۵)

۱۲ و ۳ (۴)

۱۷ و ۳ (۳)

۱۶ و ۳ (۲)

۱۲ و ۴ (۱)

در یک سرزمین، ۱۰ شهر با شماره‌های ۱ تا ۱۰ قرار دارند. جادوگر این سرزمین فعالیت حرفه‌ای خود را از ابتدای یک روز، در شهر ۱ شروع کرده است. این جادوگر شهر (محل اقامت) خود را هر روز تغییر می‌دهد و نحوه‌ی جابه‌جایی‌اش بر اساس قوانین زیر است:

- قانون ۱: اگر روزی در شهر ۱ باشد، ۹ روز بعدی را به ترتیب در شهرهای ۲، ۳، ۴، ... و نهایتاً ۱۰ سپری می‌کند.
- قانون ۲: اگر روزی در شهر ۱۰ باشد، ۹ روز بعدی را به ترتیب در شهرهای ۹، ۸، ۷، ... و نهایتاً ۱ سپری می‌کند.

به عنوان مثال، جادوگر روز هفتم فعالیتش را در شهر ۷، روز یازدهم فعالیتش را در شهر ۹، و روز بیستم فعالیتش را در شهر ۲ می‌گذراند.

ما نمی‌دانیم جادوگر در چه روزی کار خود را شروع کرده، ولی از قوانین ۱ و ۲ مطلع هستیم و هم‌چنین می‌دانیم در روز اول کارش، در شهر ۱ بوده است. قصد داریم که در برخی از شهرها دوربین نصب کنیم و شهرهای دوربین‌دار را از صبح روز ۱ فروردین تا پایان روز ۶ فروردین (فقط برای ۶ روز) رصد کنیم. با این کار، به ازای هر شهر دوربین‌دار می‌فهمیم که از میان این ۶ روز رصد، جادوگر دقیقاً در کدام روز (یا شاید روزها) در آن شهر بوده است. هدف این است که از روز ۷ فروردین به بعد، شهر محل اقامت جادوگر را بدون نیاز به هیچ دوربینی بدانیم. باید حداقل در چند شهر دوربین نصب کنیم تا همواره بتوانیم به هدف خود برسیم؟

۱ (۵)

۵ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

مرحله اول سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۶

پریسا و زینب مشغول انجام یک بازی هستند. در ابتدا، پریسا باید بین دو گزینه‌ی زیر، یکی را انتخاب کند:

الف) ۲ تاس پرتاب کند و زینب ۱ تاس.

ب) ۱۰۰ تاس پرتاب کند و زینب ۱۰ تاس.

پس از آن که پریسا انتخابش را کرد، هر کدام از دو نفر به تعداد مشخص شده تاس می‌ریزد و بیشینه‌ی مقدار تاس‌های این دو نفر مقایسه می‌شود. فرض کنید بیش‌ترین مقدار در بین تاس‌های زینب برابر Z و برای پریسا برابر P باشد. اگر $P > Z$ ، پریسا برنده‌ی بازی محسوب می‌شود، و در غیر این صورت (یعنی اگر $P \leq Z$)، زینب برنده‌ی بازی خواهد بود.

به عنوان مثال، اگر پریسا حالت «الف» را انتخاب کند، ۲ تاس می‌ریزد و زینب ۱ تاس. حال، فرض کنید نتیجه‌ی پرتاب تاس‌های پریسا به ترتیب ۱ و ۵، و نتیجه‌ی پرتاب تاس زینب نیز ۵ باشد. در این صورت، داریم $P = Z = 5$ ، و در نتیجه، زینب برنده‌ی بازی خواهد بود.

می‌دانیم احتمال آمدن هر یک از مقادیر ۱ تا ۶ در هر پرتاب تاس، برابر $\frac{1}{6}$ است. احتمال برنده شدن پریسا در حالت «الف» را با A و احتمال برنده شدنش در حالت «ب» را با B نمایش می‌دهیم. کدام یک از گزینه‌های داده‌شده گزاره‌ی درستی را بیان می‌کند؟

$$(۱) A < \frac{1}{4} < B \quad (۲) B < \frac{1}{4} < A \quad (۳) A < B < \frac{1}{4} \quad (۴) \frac{1}{4} < A < B \quad (۵) \frac{1}{4} < B < A$$

۱۷

هر یک از خانه‌های جدول 8×5 زیر را می‌توان با یکی از دو حرف X یا O پُر کرد. مطابق شکل، ۸ خانه‌ی این جدول از قبل پر شده‌اند. می‌خواهیم بقیه‌ی خانه‌های جدول را نیز با X یا O پر کنیم و سپس، مجموعه‌ی همه‌ی خانه‌های جدول را به تعدادی مجموعه افراز کنیم به این صورت که هر دو خانه‌ای که ضلع مشترک دارند، در یک مجموعه قرار گیرند اگر و فقط اگر با حرف یکسانی پر شده باشند. این افراز حداکثر چند مجموعه می‌تواند داشته باشد؟

		O	O	O	O		
		X	X	X	X		

۲۰ (۵)

۲۲ (۴)

۱۹ (۳)

۲۴ (۲)

۲۶ (۱)

مرحله ی اول سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

در هر شرکت، روابط دوستی بین کارمندان دو طرفه است. در صورت نیاز، می توان روابط دوستی در یک شرکت را به این صورت نشان داد که برای هر فرد، در صفحه یک نقطه گذاشته، و بین نقاط متناظر با هر دو نفر که با یکدیگر دوست هستند، یک پاره خط کشید.

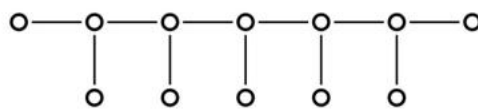
قرار است مجموعه ای از کارمندان شرکت به عنوان کارمند نمونه انتخاب شوند. یک کارمند خوشحال است اگر و تنها اگر در مجموعه ی متشکل از خود او و همه ی دوستانش در این شرکت، تعداد افراد انتخاب شده به عنوان کارمند نمونه عددی فرد باشد. شرکت در آرامش است اگر و تنها اگر همه ی کارمندانش خوشحال باشند. به تعداد حالات انتخاب کارمندان نمونه ی یک شرکت به طوری که شرکت در آرامش باشد، درجه ی آزادی آن شرکت گفته می شود.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید _____

۱۸ در یک شرکت با ۲۰۲۵ کارمند، روابط دوستی به گونه ای است که می توان همه ی کارمندان را دور یک میز دایره ای نشان داد به طوری که هر کس با دو نفر مجاورش دوست باشد و با فرد دیگری دوست نباشد. درجه ی آزادی این شرکت چند است؟

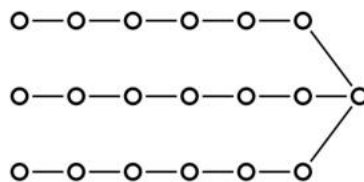
- ۰ (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۵ (هیچ کدام)

۱۹ شکل زیر روابط دوستی در یک شرکت با ۱۲ کارمند را نشان می دهد. درجه ی آزادی این شرکت چند است؟



- ۲ (۱) ۰ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۸ (۵)

۲۰ شکل زیر روابط دوستی در یک شرکت با ۱۹ کارمند را نشان می دهد. درجه ی آزادی این شرکت چند است؟



- ۱۶ (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۸ (۴) ۲ (۵)

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۱/۰۷

المپیاد کامپیوتر



کد ملی:
نام و نام خانوادگی:
منطقه حوزه:
کد داوطلبی:

استان:
جنسیت داوطلب:
کد حوزه:
کد داوطلبی:

مهر حفاظت آزمون

لطفاً داخل کادر چپری ننویسید و گریته ها را با مداد مشکی نرم و به طور کامل پر کنید.

۱	۱	۲	۳	۴	۵
۲	۱	۲	۳	۴	۵
۳	۱	۲	۳	۴	۵
۴	۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴	۵
۶	۱	۲	۳	۴	۵
۷	۱	۲	۳	۴	۵
۸	۱	۲	۳	۴	۵
۹	۱	۲	۳	۴	۵
۱۰	۱	۲	۳	۴	۵
۱۱	۱	۲	۳	۴	۵
۱۲	۱	۲	۳	۴	۵
۱۳	۱	۲	۳	۴	۵
۱۴	۱	۲	۳	۴	۵
۱۵	۱	۲	۳	۴	۵
۱۶	۱	۲	۳	۴	۵
۱۷	۱	۲	۳	۴	۵
۱۸	۱	۲	۳	۴	۵
۱۹	۱	۲	۳	۴	۵
۲۰	۱	۲	۳	۴	۵
۲۱	۱	۲	۳	۴	۵
۲۲	۱	۲	۳	۴	۵
۲۳	۱	۲	۳	۴	۵
۲۴	۱	۲	۳	۴	۵
۲۵	۱	۲	۳	۴	۵
۲۶	۱	۲	۳	۴	۵
۲۷	۱	۲	۳	۴	۵
۲۸	۱	۲	۳	۴	۵
۲۹	۱	۲	۳	۴	۵
۳۰	۱	۲	۳	۴	۵

۳۱	۱	۲	۳	۴	۵
۳۲	۱	۲	۳	۴	۵
۳۳	۱	۲	۳	۴	۵
۳۴	۱	۲	۳	۴	۵
۳۵	۱	۲	۳	۴	۵
۳۶	۱	۲	۳	۴	۵
۳۷	۱	۲	۳	۴	۵
۳۸	۱	۲	۳	۴	۵
۳۹	۱	۲	۳	۴	۵
۴۰	۱	۲	۳	۴	۵
۴۱	۱	۲	۳	۴	۵
۴۲	۱	۲	۳	۴	۵
۴۳	۱	۲	۳	۴	۵
۴۴	۱	۲	۳	۴	۵
۴۵	۱	۲	۳	۴	۵
۴۶	۱	۲	۳	۴	۵
۴۷	۱	۲	۳	۴	۵
۴۸	۱	۲	۳	۴	۵
۴۹	۱	۲	۳	۴	۵
۵۰	۱	۲	۳	۴	۵
۵۱	۱	۲	۳	۴	۵
۵۲	۱	۲	۳	۴	۵
۵۳	۱	۲	۳	۴	۵
۵۴	۱	۲	۳	۴	۵
۵۵	۱	۲	۳	۴	۵
۵۶	۱	۲	۳	۴	۵
۵۷	۱	۲	۳	۴	۵
۵۸	۱	۲	۳	۴	۵
۵۹	۱	۲	۳	۴	۵
۶۰	۱	۲	۳	۴	۵

۶۱	۱	۲	۳	۴	۵
۶۲	۱	۲	۳	۴	۵
۶۳	۱	۲	۳	۴	۵
۶۴	۱	۲	۳	۴	۵
۶۵	۱	۲	۳	۴	۵
۶۶	۱	۲	۳	۴	۵
۶۷	۱	۲	۳	۴	۵
۶۸	۱	۲	۳	۴	۵
۶۹	۱	۲	۳	۴	۵
۷۰	۱	۲	۳	۴	۵
۷۱	۱	۲	۳	۴	۵
۷۲	۱	۲	۳	۴	۵
۷۳	۱	۲	۳	۴	۵
۷۴	۱	۲	۳	۴	۵
۷۵	۱	۲	۳	۴	۵
۷۶	۱	۲	۳	۴	۵
۷۷	۱	۲	۳	۴	۵
۷۸	۱	۲	۳	۴	۵
۷۹	۱	۲	۳	۴	۵
۸۰	۱	۲	۳	۴	۵
۸۱	۱	۲	۳	۴	۵
۸۲	۱	۲	۳	۴	۵
۸۳	۱	۲	۳	۴	۵
۸۴	۱	۲	۳	۴	۵
۸۵	۱	۲	۳	۴	۵
۸۶	۱	۲	۳	۴	۵
۸۷	۱	۲	۳	۴	۵
۸۸	۱	۲	۳	۴	۵
۸۹	۱	۲	۳	۴	۵
۹۰	۱	۲	۳	۴	۵

باسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیتهاست. امام خمینی (ره)

دفترچه سؤالات مرحله اول سال ۱۴۰۲

سی و چهارمین دوره المپیاد کامپیوتر

کد دفترچه: ۱

تعداد سؤالات	مدت آزمون
۱۵ سؤال	۱۲۰ دقیقه

نام:

نام خانوادگی:

شماره صندلی:

توضیحات مهم

استفاده از هر نوع ماشین حساب ممنوع است.

- ۱- کد دفترچه سؤالات شما یک است. این کد را در محل مربوط روی پاسخنامه با مداد پر کنید، در غیر این صورت پاسخنامه شما تصحیح نخواهد شد.
- ۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و همه برگه های دفترچه سؤالات را بررسی نمایید، در صورت هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسؤول جلسه را مطلع کنید.
- ۳- یک برگ پاسخنامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است، در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسؤول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در پایین پاسخنامه را با مداد مشکی بنویسید.
- ۴- برگه پاسخنامه را دستگاه تصحیح می کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۵- دفترچه باید همراه پاسخنامه تحویل داده شود.
- ۶- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره منفی دارد.
- ۷- شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می شوند.
- ۸- خبرگاه المپیاد کامپیوتر: inoi.ir می باشد.

کلیه حقوق این سؤالات برای باشگاه دانش پژوهان جوان محفوظ است.

آدرس سایت اینترنتی: ysc.medu.ir

مرحله ی یکم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۱۲۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره ی منفی دارد.
- سوالات ۷ تا ۱۵ در دسته های چند سوالی آمده اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ **جیبارا** سیاره ای شامل موجودات فرازمینی است. هر سال در این سیاره شامل ۱۶ ماه ۳۲ روزه است. ساکنین جیبارا تاریخ را در دو قالب «روز/ماه/سال» و «ماه/روز/سال» می نویسند. این کار باعث می شود برخی اوقات نتوانند روز دقیق را از روی تاریخ نوشته شده تشخیص دهند (برای مثال «۱۲۰۰/۴/۱۲» مشخص نیست که به روز دوازدهم ماه چهارم اشاره می کند یا به روز چهارم ماه دوازدهم). در جیبارا به یک روز مقدس گویند، اگر از تاریخ نوشته شده ی آن روز (بدون دانستن نوع قالب نوشته شده)، بتوان روز را به طور یکتا تشخیص داد. در جیبارا، طی سال ۱۴۰۲ چند روز مقدس وجود دارد؟

۵۱۲ (۱) ۷۶۸ (۲) ۲۷۲ (۳) ۲۵۶ (۴) ۳۰۰ (۵)

۲ به هنگام جمع کردن دو عدد، ده بر یک وقتی رخ می دهد که جمع دو رقم متناظر از ۹ بیش تر شود. برای مثال به هنگام جمع کردن دو عدد ۱۵۳ و ۶۹ ارقام ۵ (از عدد اول) و ۶ (از عدد دوم) ده بر یک می سازند. می خواهیم دو عدد پنج رقمی A و B انتخاب کنیم، طوری که اولاً هر یک از ارقام ۰ تا ۹ دقیقاً یک بار در یکی از این دو عدد به کار رفته باشد؛ ثانیاً به هنگام جمع کردن این دو عدد، ده بر یک رخ ندهد. به چند طریق این کار ممکن است؟

۱۴۴۰۰ (۱) ۳۲ (۲) ۳۰۷۲ (۳) ۳۸۴۰ (۴) ۱۲۸ (۵)

۳ یک فروشگاه برای خریداران باتری پیشنهاد ویژه ای در نظر گرفته است. خریداران پس از مصرف، با برگرداندن هر سه باتری خالی (مصرف شده) به فروشگاه، یک باتری نو به صورت مجانی می گیرند. اگر قیمت هر باتری هزار تومان باشد، حداقل چند هزار تومان پول نیاز داریم تا بتوانیم ۱۰۸۴ باتری مصرف کنیم؟

۷۲۳ (۱) ۷۲۹ (۲) ۸۱۰ (۳) ۸۱۳ (۴) ۱۰۸۴ (۵)

۴ ایلیچ می خواهد روی هر یک از خانه های جدول زیر، یکی از اعداد ۱ تا ۵ را بنویسد (الزامی ندارد اعداد نوشته شده متمایز باشند):

پس از نوشتن اعداد توسط ایلیچ، قورباغه ای در خانه ی سمت چپ جدول قرار می گیرد. هر مرحله قورباغه عدد خانه ی خود را دیده و به همان مقدار، به سمت راست می پرد (برای مثال اگر عدد خانه ی قورباغه برابر ۱ باشد، قورباغه به خانه ی مجاور راستی می پرد). اگر عدد قورباغه به قدری بزرگ باشد که خانه ای برای مقصد پرش وجود نداشته باشد، قورباغه نخواهد پرید. ایلیچ به چند روش می تواند اعداد را در خانه های جدول بنویسد، طوری که قورباغه پس از تعدادی گام، به خانه ی سمت راست جدول برسد؟

۶۲۵ (۱) ۵۶۲۵ (۲) ۳۱۲۵ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴۸۰ (۵)

مرحله ی یکم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

۵ به هر یک از ارقام ۰ و ۱ یک بیت می‌گوییم. عمل $\wedge$ روی دو بیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$0 \wedge 0 = 0 \quad 0 \wedge 1 = 0 \quad 1 \wedge 0 = 0 \quad 1 \wedge 1 = 1$$

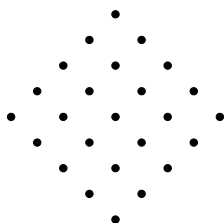
عمل $\wedge$ بین دو عدد به این صورت انجام می‌شود که ابتدا دو عدد را در مبنای ۲ می‌نویسیم، سپس برای هر بیت متناظر عمل $\wedge$ را انجام می‌دهیم. برای مثال:

$$6 \wedge 13 = (110)_2 \wedge (1101)_2 = (100)_2 = 4$$

به ازای هر عدد طبیعی x از ۱ تا 1024 مقدار $x \wedge (2x)$ را محاسبه می‌کنیم. مجموع اعداد به دست آمده چقدر است؟

۲۶۱۸۸۸ (۵) ۵۲۳۲۶۴ (۴) ۵۲۴۰۳۲ (۳) ۵۲۳۷۷۶ (۲) ۲۶۱۶۳۲ (۱)

۶ شکل زیر، شبکه‌ای از ۲۵ نقطه است:



منظور از یک امینک، مربعی با اضلاع افقی و عمودی است که رأس‌های آن از نقاط شکل بالا باشند. در ابتدا تمام نقاط شکل بالا سیاه هستند. هر مرحله می‌توانیم یکی از دو کار زیر را انجام دهیم:

- یک نقطه‌ی سیاه را انتخاب کرده و آن را سفید کنیم.
- یک امینک انتخاب کرده و تمام نقطه‌های روی رأس‌ها و ضلع‌های آن را سفید کنیم.

حداقل چند مرحله نیاز داریم تا بتوانیم تمام نقاط شکل بالا را سفید کنیم؟

۱۱ (۵) ۱۰ (۴) ۹ (۳) ۸ (۲) ۷ (۱)

یک جدول شماره‌دار، جدولی $n \times n$ است که سطرهای آن به ترتیب از بالا به پایین با اعداد ۱ تا n و ستون‌های آن نیز به ترتیب از چپ به راست با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. برای مثال، شکل زیر یک جدول شماره‌دار 3×3 است:

	۱	۲	۳
۱			
۲			
۳			

به یک جدول شماره‌دار سلطانی می‌گوییم، اگر خانه‌های آن با سیاه و سفید رنگ شده باشند و همچنین به ازای هر $i, j \in \{1, 2, 3\}$ سطر شماره i و ستون شماره j مجموعاً حداقل $|j - i|$ خانه‌ی سیاه داشته باشند.

مرحله ی یکم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

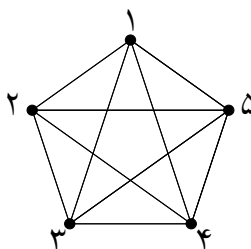
۷ یک جدول شماره دار سلطانی 3×3 حداقل چند خانه ی سیاه دارد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴ (۵)

۸ یک جدول شماره دار سلطانی 4×4 حداقل چند خانه ی سیاه دارد؟

- ۸ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۵ (۴) ۴ (۵)

در شکل زیر، پنج نقطه با شماره های ۱ تا ۵ داریم که تمام پاره خط های میان آن ها کشیده شده است:



به هر یک از پنج نقطه ی گفته شده یک رأس می گوئیم. هر یک از پاره خط های میان رأس ها را نیز یک یال می نامیم. عمل علم فور شامل انتخاب چهار رأس و علامت زدن تمام یال های میان آن ها است.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

۹ حداقل چند عمل علم فور نیاز است تا تمام یال ها دست کم یک بار علامت زده شوند؟

- ۲ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵)

۱۰ می خواهیم تعدادی عمل علم فور انجام دهیم، طوری که هر یال دقیقاً k بار علامت بخورد و k عددی طبیعی باشد. کمینه ی ممکن برای k چیست؟

- ۵ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۶ (۵)

در زمان پادشاهی سلطان، کتیبه هایی نوشته شده بودند که به تازگی کشف شده اند. هر کتیبه از تعدادی دایره ی سیاه و سفید تشکیل شده که برخی از آن ها با پاره خط هایی به هم وصل هستند. باستان شناسان متوجه شدند که کتیبه های سلطان با اعداد ۱، ۲، ۳ و ... شماره گذاری شده اند. هر کدام از کتیبه های شماره ۱ و ۲ فقط یک دایره دارند و به صورت زیر هستند:



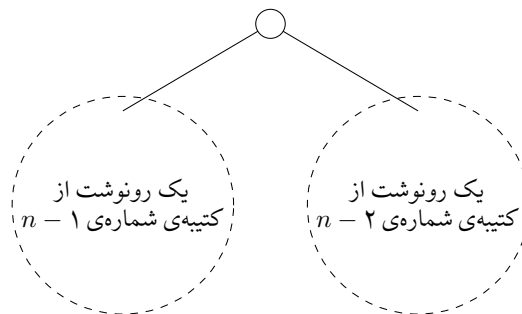
کتیبه ی شماره ی ۲



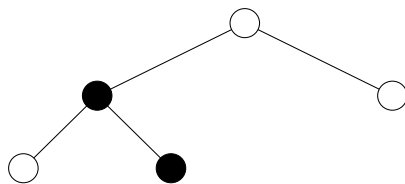
کتیبه ی شماره ی ۱

مرحله ی یکم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

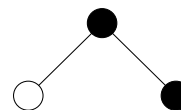
به ازای هر $n \geq 3$ نیز کتبیهای شماره n به شکل زیر است (که در آن دایره ی بالا به دایره های بالایی دو رونوشت از کتبیهای شماره ی $n-1$ و $n-2$ با یک پاره خط وصل شده است):



دایره ی بالایی کتبیهای با شماره ی زوج، سفید و دایره ی بالایی کتبیهای با شماره ی فرد، سیاه است. برای مثال، کتبیهای شماره ۳ و ۴ در شکل زیر قابل مشاهده است:



کتبیهای شماره ی ۴



کتبیهای شماره ی ۳

هر مسیر در یک کتبی، از یک دایره آغاز می شود، هر مرحله با طی کردن یک پاره خط به یک دایره ی دیگر می رود تا در نهایت به دایره ی مقصد برسد (عبور از دایره ی تکراری در مسیر، مجاز نیست). توجه کنید ممکن است مسیر شامل فقط یک دایره باشد.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

۱۱ بزرگی یک مسیر در یک کتبی، تعداد دایره های آن است. در کتبیهای شماره ی ۷، چند مسیر با بزرگی ۳ وجود دارد؟

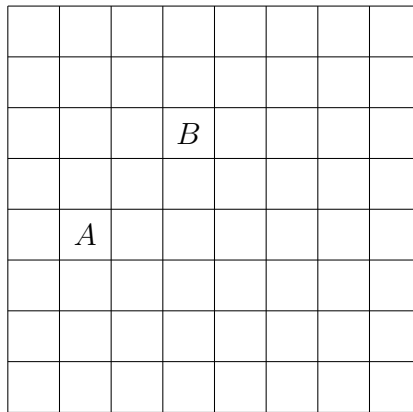
۳۴ (۱) ۱۲ (۲) ۶۰ (۳) ۴۱ (۴) ۰ (۵)

۱۲ به یک مسیر در یک کتبی، تکفام گوئیم، اگر تمام دایره های آن هم رنگ باشند. در کتبیهای شماره ی ۷ چند مسیر تکفام وجود دارد؟

۲۴ (۱) ۱۳ (۲) ۵۵ (۳) ۳۸ (۴) ۴۲ (۵)

هر حرکت مهره ی فیل در شطرنج، با در نظر گرفتن یکی از قطرهای شامل خانه ی فعلی و منتقل کردن مهره به یک خانه ی دیگر از آن قطر انجام می شود. برای مثال در شکل زیر، مهره ی فیل می تواند با یک حرکت از خانه ی A به خانه ی B برود:

مرحله ی یکم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

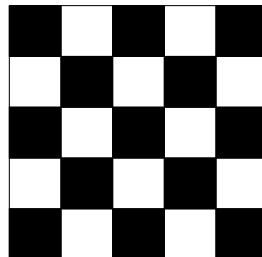


دو مهره ی فیل یکدیگر را تهدید می کنند، اگر در یک قطر قرار داشته باشند. برای مثال در شکل بالا، اگر دو مهره ی فیل در خانه های A و B وجود داشته باشد، یکدیگر را تهدید می کنند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید _____

در تخته ی شطرنجی 5×5 زیر، می خواهیم یک مهره ی فیل روی یکی از خانه های سیاه قرار دهیم و با تعدادی حرکت، کاری کنیم که مهره ی فیل، تمام خانه های سیاه را ببیند (تمام خانه هایی که در مسیر یک حرکت هستند نیز توسط مهره دیده می شوند). مهره را حداقل چند بار باید حرکت بدهیم تا به هدفمان برسیم؟

۱۳



۸ (۵) ۷ (۴) ۶ (۳) ۹ (۲) ۱۰ (۱)

در یک تخته ی شطرنج 5×9 حداکثر چند مهره ی فیل می توان قرار داد، طوری که یکدیگر را تهدید نکنند؟

۱۴

۱۳ (۵) ۱۰ (۴) ۱۱ (۳) ۱۴ (۲) ۱۲ (۱)

پاسخ سوال قبل را k در نظر بگیرید. به چند طریق می توان k مهره ی فیل در خانه های یک تخته ی شطرنج 5×9 قرار داد، طوری که یکدیگر را تهدید نکنند؟

۱۵

۷۵ (۵) ۳ (۴) ۱ (۳) ۴۲ (۲) ۲۵ (۱)

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۱۲۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ نامه کنید.
- سوالات ۷ تا ۱۵ در دسته های چند سوالی آمده اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ چهار خودرو در یک مسیر، مسابقه می دهند. خودروها در ابتدای مسابقه، از جلو به عقب به ترتیب با ۱ تا ۴ شماره گذاری شده اند. می دانیم در طول مسابقه مجموعاً دو بار عمل سبقت رخ می دهد (در هر عمل سبقت، یک خودرو از خودروی جلویی سبقت می گیرد). در انتهای مسابقه، چند ترتیب مختلف از خودروها برای عبور از خط پایان می تواند وجود داشته باشد (ترتیب انجام سبقت ها مهم نیست و صرفاً وضعیت نهایی خودروها مهم است)؟

۷ (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۹ (۵)

۲ امین در یک آزمون با تعدادی سوال پنج گزینه ای شرکت کرده است. پاسخ درست به هر سوال، چهار امتیاز مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال، یک امتیاز منفی دارد؛ هم چنین برای سوالات نزده (سوالاتی که امین به آنها پاسخ نداده)، صفر امتیاز در نظر گرفته می شود. امین برای ۱۰ سوال از آزمون، پس از حذف قطعی سه گزینه، بین دو گزینه ی دیگر به صورت تصادفی و با احتمال برابر یکی را انتخاب کرده است. پس از اتمام آزمون، امین شک کرد که شاید بهتر بود تمام آن ۱۰ سوال را نزده باقی می گذاشت. احتمال آن که امین از مجموع این ۱۰ سوال امتیاز منفی دریافت کند چه قدر است؟

(۱) بین ۱۰ تا ۲۰ درصد (۲) بین ۵ تا ۱۰ درصد (۳) بین ۲۰ تا ۵۰ درصد (۴) کم تر از ۵ درصد (۵) بیش از ۵۰ درصد

۳ یک تیم، شش نفر با شماره های ۱ تا ۶ دارد. می دانیم:

- سه نفر از اعضای تیم، هر کدام، یک دوست درون تیم دارند.
- دو نفر از اعضای تیم، هر کدام، دو دوست درون تیم دارند.
- یک نفر از اعضای تیم، سه دوست درون تیم دارد.

دوستی های بین افراد تیم، دوطرفه است (یعنی اگر A دوست B باشد، B نیز دوست A است). چند حالت مختلف از دوستی این افراد با شرایط گفته شده وجود دارد؟ دو حالت را متفاوت گوئیم، اگر دو نفر مانند X و Y وجود داشته باشند که در یک حالت، دوست باشند و در حالت دیگر، دوست نباشند.

۷۲۰ (۱) ۱۰۰۰ (۲) ۹۰۰ (۳) ۳۶۰ (۴) ۱۸۰ (۵)

۴ امیرمحمد و سینا با هم یک بازی می کنند. امیرمحمد در جاده ای راه می رود و سینا او را دنبال می کند. آنها از قبل، شش اسکناس با ارزش های $\{۸, ۳, ۶, ۳, ۱۰, ۹\}$ را به ترتیب (از چپ به راست) در طول جاده انداخته اند. هر کسی زودتر به اسکناسی برسد می تواند آن را بردارد، ولی فرد عقب تر از او جلو می زند و ترتیب دو نفر عوض می شود. اگر فرد جلوتر اسکناس را بردارد، فرد عقب تر می تواند اسکناس را بردارد و ترتیب دو نفر هم عوض نمی شود. هر کسی می خواهد بیشترین پول را برای خود جمع کند. حداکثر پولی که امیرمحمد می تواند در انتها جمع کند چه قدر است؟

۲۲ (۱) ۲۱ (۲) ۲۴ (۳) ۲۳ (۴) ۲۵ (۵)

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

۵ یک آب خوری با سه شیر آب در حیاط وجود دارد. سرعت آب ورودی به این آب خوری ثابت است، به این صورت که:

- اگر فقط یک شیر آب باز باشد، یک بطری را در پنج دقیقه پُر می کند.
- اگر دو شیر آب باز باشند، هر یک از آن ها نصف یک بطری را در پنج دقیقه پر می کند.
- اگر هر سه شیر آب باز باشند، هر شیر آب، $\frac{1}{3}$ یک بطری را در پنج دقیقه پر می کند.

سارا ساعت ۰۰ : ۰۰ : ۸ شروع به پر کردن بطری اش می کند که دو دقیقه پس از آن، هستی به آب خوری می رود و شیر دیگری را باز می کند تا بطری اش را پر کند. زهرا سه دقیقه بعد از هستی به آب خوری می رود. زهرا می تواند هر موقع که خواست شیر سوم را باز کند و شروع به پر کردن بطری اش کند. زودترین زمانی که او می تواند پر کردن بطری اش را به پایان برساند، کدام است؟ توجه کنید که اندازه ی تمام بطری ها یکسان است و هم چنین هر کسی که بطری اش به طور کامل پر شود، همان لحظه شیر آبی را که باز کرده، می بندد.

(۱) ۸ : ۱۵ : ۰۰ (۲) ۸ : ۱۲ : ۳۰ (۳) ۸ : ۲۰ : ۰۰ (۴) ۸ : ۱۷ : ۵۰ (۵) ۸ : ۱۷ : ۰۰

۶ در ابتدا مقادیر زیر را داریم:

$$A[0] = 40 \quad A[1] = 12 \quad A[2] = 10 \quad A[3] = 21 \quad A[4] = 17$$

الگوریتم زیر را اجرا می کنیم:

۱. مقدار sum را برابر ۰ قرار بده.

۲. به ازای k از ۱ تا ۵ انجام بده:

۱-۲. به ازای i از ۰ تا ۴ انجام بده:

۱-۱-۲. j را برابر i قرار بده.

۲-۱-۲. تا وقتی j از ۵ کمتر است انجام بده:

۱-۲-۱-۲. مقدار sum را به اندازه ی $A[j]$ زیاد کن.

۲-۲-۱-۲. مقدار j را به اندازه ی k زیاد کن.

در انتهای اجرای الگوریتم، مقدار sum چه خواهد بود؟

(۱) ۷۸۳ (۲) ۱۰۰ (۳) ۸۵۶ (۴) ۲۳۲ (۵) ۵۰۰

در بازی شکرز، یک جدول $n \times n$ داریم، که در ابتدا روی یک خانه ی آن مهره ای سفید، و روی برخی دیگر از خانه ها مهره ای سیاه قرار دارد. در هر مرحله، مهره ی سفید می تواند به یک خانه ی خالی هم سطر یا هم ستون برود، به شرط آن که در مسیر مستقیم خانه ی فعلی مهره ی سفید تا خانه ی مقصد، دقیقاً یک مهره ی سیاه قرار داشته باشد. پس از حرکت مهره ی سفید مهره ی سیاهی که از روی آن پریده شده، حذف می شود. می خواهیم در ابتدا، بیش ترین تعداد مهره ی سیاه را روی جدول قرار دهیم، طوری که بتوانیم با تعدادی مرحله همه ی مهره های سیاه را از جدول حذف کنیم.

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

۷ بیشترین تعداد مهره ی سیاه به ازای $n = 3$ چه قدر است؟

۶ (۱) ۷ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۸ بیشترین تعداد مهره ی سیاه به ازای $n = 4$ چه قدر است؟

۶ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۷ (۵)

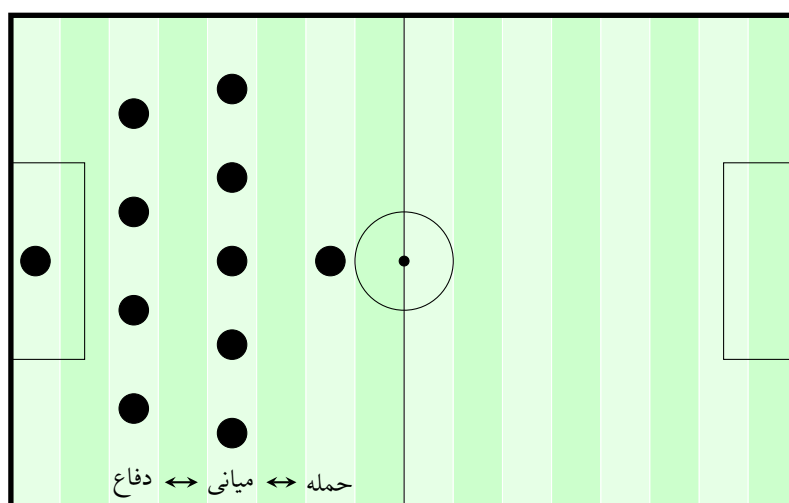
در این دسته سوال، با یک تیم فوتبال سر و کار داریم که ۱۱ بازیکن در آن عضو هستند. در یک چینش تیم، بازیکن ها در ۱۱ جایگاه متمایز قرار می گیرند. آن ها در ابتدا در یک چینش اولیه قرار گرفته اند. بازیکن های تیم می توانند جابه جا شوند و یک چینش جدید بسازند. چینش جدید می تواند همان چینش اولیه هم باشد. می خواهیم تعداد چینش های جدید تیم با شرایط گفته شده در هر سوال را حساب کنیم. دو چینش را متمایز در نظر می گیریم، اگر جایگاهی وجود داشته باشد که بازیکن آن جایگاه، در این دو چینش متفاوت باشند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

۹ در این سوال، به جز دروازه بان، چهار بازیکن در خط دفاع، پنج بازیکن در خط میانی و یک بازیکن در خط حمله حضور دارند. جایگاه های مجاز هر بازیکن در چینش جدید، به صورت زیر است:

- دروازه بان چینش اولیه، باید سر جایش باقی بماند.
- هر بازیکن خط دفاع از چینش اولیه، می تواند در یکی از جایگاه های خط دفاع یا خط میانی بازی کند.
- هر بازیکن خط میانی از چینش اولیه، می تواند در تمام جایگاه ها به جز جایگاه دروازه بان بازی کند.
- هر بازیکن خط حمله از چینش اولیه، می تواند در یکی از جایگاه های خط میانی یا خط حمله بازی کند.

با این شرایط، چند چینش جدید برای تیم وجود دارد؟



۹۲۱۶۰ (۵)

۱۰۰۸۰۰۰ (۴)

۳۲۶۵۹۲۰ (۳)

۳۶۲۸۸۰۰ (۲)

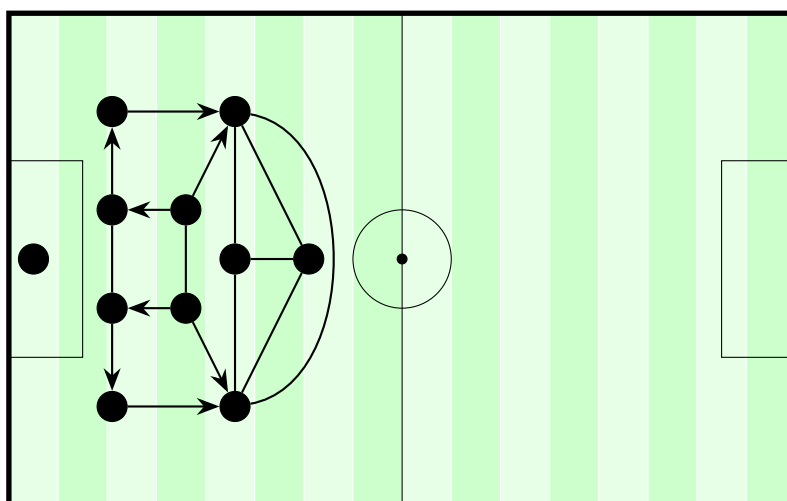
۱۳۷۰۸۸۰ (۱)

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۰ در این سوال، مطابق شکل زیر، هر بازیکن مانند P می تواند در جایگاه های زیر بازی کند:

- در جایگاه خودش در چینش اولیه
- در جایگاه بازیکن هایی مانند Q که P و Q در شکل، با خطی بدون جهت به هم وصل شده باشند.
- در جایگاه بازیکن هایی مانند Q که در شکل، خطی جهت دار از P به Q موجود باشد.

با این شرایط، چند چینش جدید برای تیم وجود دارد؟



۷۲۰ (۵)

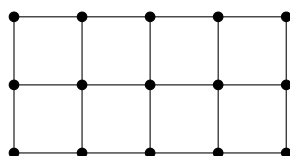
۹۶ (۴)

۴۸ (۳)

۲۴ (۲)

۱۰۲۴ (۱)

شبکه ی ۵×۳ زیر را در نظر بگیرید. به دو نقطه مجاور می گوئیم اگر با یک پاره خط مستقیم (بدون عبور از نقطه ای دیگر)، به هم وصل شده باشند.



_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید _____

۱۱ حداقل چند نقطه را باید علامت بزنیم، به طوری که هر نقطه ی بی علامت با حداقل یک نقطه ی علامت دار، مجاور باشد؟

۷ (۵)

۶ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

۱۲ پاسخ سوال قبل را k نقطه در نظر بگیرید. به چند روش می توانیم k نقطه را علامت بزنیم، به طوری که هر نقطه ی بی علامت با حداقل یک نقطه ی علامت دار، مجاور باشد؟

۲ (۵)

۳ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۱ (۱)

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۳ حداقل چند نقطه را باید علامت بزنیم، به طوری که هر نقطه ی بی علامت با حداقل دو نقطه ی علامت دار، مجاور باشد؟

۶ (۵)

۵ (۴)

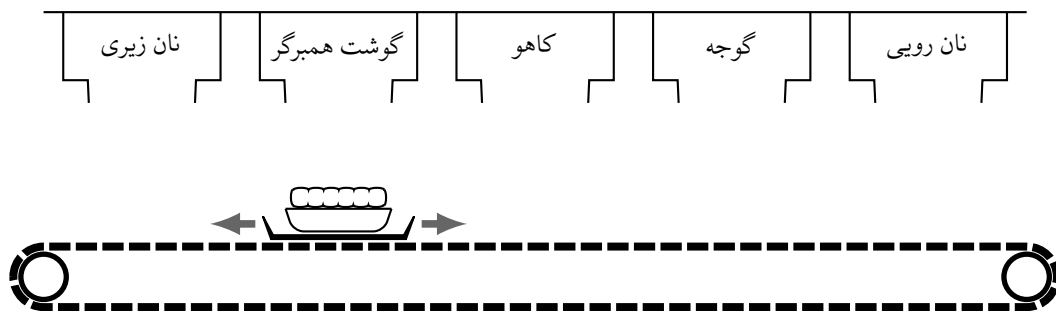
۹ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

سندی سنجابه برای رستوران آقای خرچنگ، یک دستگاه برگرساز جدید ساخته است. مطابق شکل زیر، این دستگاه پنج مخزن مواد غذایی دارد که در یک ردیف، بالای یک تسمه ی متحرک قرار گرفته اند. مخزن ها به ترتیب از چپ به راست دارای نان زیری همبرگر، گوشت همبرگر، کاهو، گوجه، و نان رویی همبرگر هستند. برای درست کردن یک همبرگر، باب اسفنجی (سراشیز رستوران) ابتدا باید یک سینی را روی تسمه ی متحرک و دقیقاً زیر خروجی چپ ترین مخزن (نان زیری) قرار دهد. دستگاه دو دکمه دارد که باب اسفنجی با فشردن آن ها، سینی را (در صورت امکان) یک واحد به راست یا چپ حرکت می دهد. هر دفعه که سینی، زیر خروجی یک مخزن قرار بگیرد، یک واحد از ماده ی غذایی آن مخزن، به صورت خودکار به روی سینی، بالای مواد قبلی (در صورت وجود) افزوده می شود. به این ترتیب، هر همبرگر از تعدادی طبقه (ماده ی غذایی) تشکیل می گردد. نان های زیری و رویی همبرگر نیز جزء طبقات محسوب می شوند. بنا به دستور آقای خرچنگ، هر همبرگر لازم است دو ویژگی زیر را داشته باشد:

- ماده ی هیچ دو طبقه ی متوالی آن یکسان نباشند.
- پایین ترین طبقه ی آن، یک نان زیری، و بالاترین طبقه ی آن یک نان رویی باشد و در طبقه ی دیگری، از نان استفاده نشده باشد.



با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۴ باب اسفنجی چند همبرگر ۱۵ طبقه ی متفاوت می تواند با این دستگاه درست کند؟

۳۶۴ (۵)

۳۲ (۴)

۱۲۸ (۳)

۶۲۵ (۲)

۸۱ (۱)

۱۵ به دلیل استقبال مشتریان از همبرگرها، سندی سنجابه دستگاه را ارتقا داده و یک مخزن پنیر را بین مخزن گوشت همبرگر و مخزن کاهو اضافه کرده است. با دستگاه همبرگرساز جدید، باب اسفنجی چند همبرگر ۸ طبقه ی متفاوت می تواند درست کند؟

۱۶ (۵)

۱ (۴)

۳ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۱۲۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ نامه کنید.
- سوالات ۷ تا ۱۵ در دسته های چند سوالی آمده اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ چهار خودرو در یک مسیر، مسابقه می دهند. خودروها در ابتدای مسابقه، از جلو به عقب به ترتیب با ۱ تا ۴ شماره گذاری شده اند. می دانیم در طول مسابقه مجموعاً دو بار عمل سبقت رخ می دهد (در هر عمل سبقت، یک خودرو از خودروی جلویی سبقت می گیرد). در انتهای مسابقه، چند ترتیب مختلف از خودروها برای عبور از خط پایان می تواند وجود داشته باشد (ترتیب انجام سبقت ها مهم نیست و صرفاً وضعیت نهایی خودروها مهم است)؟

۶ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

گوییم یک خودرو در یک سبقت حضور دارد، اگر با آن سبقت، مکانش در جایگشت عوض شود. دو حالت داریم:

- هیچ خودرویی در هر دو سبقت حضور نداشته باشد: در این صورت باید یک عمل سبقت بین دو خودروی شماره ۳ و ۴، و یک عمل سبقت بین دو خودروی شماره ۱ و ۲ انجام شود که جایگشت نهایی یکتاست:

$\langle 2, 1, 4, 3 \rangle$

- دقیقاً یک خودرو در هر دو سبقت حضور داشته باشد: در این صورت آن خودرو در طی دو مرحله، دو واحد به جلو یا دو واحد به عقب می رود. با انتخاب این خودرو، جایگشت نهایی به صورت یکتا تعیین می شود (در مجموع ۴ حالت).

- دو خودرو در هر دو سبقت حضور داشته باشند: در این صورت یک خودرو از دیگری سبقت گرفته و سپس دوباره جایشان را عوض می کنند. در این صورت جایگشت نهایی یکتا و برابر جایگشت اولیه است.

پس پاسخ برابر

$$1 + 4 + 1 = 6$$

□

است.

۲ امین در یک آزمون با تعدادی سوال پنج گزینه ای شرکت کرده است. پاسخ درست به هر سوال، چهار امتیاز مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال، یک امتیاز منفی دارد؛ همچنین برای سوالات نزده (سوالاتی که امین به آن ها پاسخ نداده)، صفر امتیاز در نظر گرفته می شود. امین برای ۱۰ سوال از آزمون، پس از حذف قطعی سه گزینه، بین دو گزینه ی دیگر به صورت تصادفی و با احتمال برابر یکی را انتخاب کرده است. پس از اتمام آزمون، امین شک کرد که شاید بهتر بود تمام آن ۱۰ سوال را نزده باقی می گذاشت. احتمال آن که امین از مجموع این ۱۰ سوال امتیاز منفی دریافت کند چه قدر است؟

(۱) بیش از ۵۰ درصد (۲) بین ۲۰ تا ۵۰ درصد (۳) بین ۱۰ تا ۲۰ درصد (۴) بین ۵ تا ۱۰ درصد (۵) کم تر از ۵ درصد

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

اگر به k سوال از ۱۰ سوال، پاسخ درست و به $۱۰ - k$ سوال، پاسخ نادرست داده شود، نمره ی کسب شده از این ۱۰ سوال برابر

$$۴k - (۱۰ - k) = ۵k - ۱۰$$

خواهد بود. این مقدار فقط به ازای $k = ۰$ و $k = ۱$ منفی می شود. پس باید احتمال آن را محاسبه کنیم که تعداد پاسخ های درست، دقیقاً ۰ یا ۱ باشد. این مقدار برابر

$$\frac{۱ + ۱۰}{۲^{۱۰}}$$

□

است که از ۵ درصد کم تر می باشد.

۳

یک تیم، شش نفر با شماره های ۱ تا ۶ دارد. می دانیم:

- سه نفر از اعضای تیم، هر کدام، یک دوست درون تیم دارند.
- دو نفر از اعضای تیم، هر کدام، دو دوست درون تیم دارند.
- یک نفر از اعضای تیم، سه دوست درون تیم دارد.

دوستی های بین افراد تیم، دوطرفه است (یعنی اگر A دوست B باشد، B نیز دوست A است). چند حالت مختلف از دوستی این افراد با شرایط گفته شده وجود دارد؟ دو حالت را متفاوت گوئیم، اگر دو نفر مانند X و Y وجود داشته باشند که در یک حالت، دوست باشند و در حالت دیگر، دوست نباشند.

۱۰۰۰ (۵)

۱۸۰ (۴)

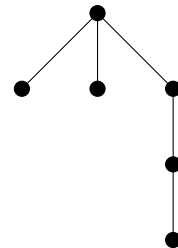
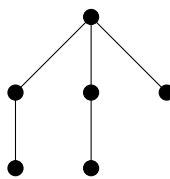
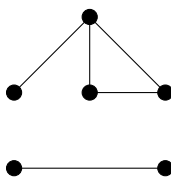
۳۶۰ (۳)

۷۲۰ (۲)

۹۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

پاسخ مسئله برابر تعداد گراف های ساده با رأس های ۱ تا ۶ و دنباله ی درجات $\langle ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۳ \rangle$ است. با در نظر گرفتن رأس درجه ۳ و حالت بندی روی یال های سایر رأس ها، در حد یکریختی تنها سه گراف زیر وجود دارد:



جایگشت دادن رأس ها در سه گراف بالا به ترتیب از راست به چپ $\frac{6!}{4} = ۳۶۰$ ، $\frac{6!}{4} = ۳۶۰$ و $۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۱۸۰$ حالت دارد. پس پاسخ برابر $۳۶۰ + ۳۶۰ + ۱۸۰ = ۹۰۰$ است. □

۴

امیرمحمد و سینا با هم یک بازی می کنند. امیرمحمد در جاده ای راه می رود و سینا او را دنبال می کند. آن ها از قبل، شش اسکناس با ارزش های $\langle ۸, ۳, ۶, ۳, ۱۰, ۹ \rangle$ را به ترتیب (از چپ به راست) در طول جاده انداخته اند. هر کسی زودتر به اسکناسی برسد می تواند آن را بردارد، ولی فرد عقب تر از او جلو می زند و ترتیب دو نفر عوض می شود. اگر فرد جلوتر اسکناس را بردارد، فرد عقب تر می تواند اسکناس را بردارد و ترتیب دو نفر هم عوض نمی شود. هر کسی می خواهد بیش ترین پول را برای خود جمع کند. حداکثر پولی که امیرمحمد می تواند در انتها جمع کند چه قدر است؟

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۱ (۵)

۲۲ (۴)

۲۵ (۳)

۲۴ (۲)

۲۳ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

به ازای هر $۱ \leq i \leq ۶$ مقدار $f(i)$ را برابر پاسخ مسئله در حالتی در نظر می گیریم که فقط سکه های i ام تا ششم را داشته باشیم. همچنین به ازای هر $۱ \leq i \leq ۶$ مقدار $g(i)$ را مشابه $f(i)$ تعریف می کنیم، با این تفاوت که در ابتدا سینه جلوتر باشد. اگر ارزش سکه ی i ام را با $C(i)$ نشان دهیم، با حالت بندی روی برداشتن یا برنداشتن سکه ی آغازین توسط نفر جلوتر، داریم:

$$f(i) = \max(f(i+1), A[i] + g(i+1)) \quad g(i) = \min(f(i+1), A[i] + g(i+1))$$

بنابراین:

$$f(۶) = ۹, g(۶) = ۰$$

$$\Rightarrow f(۵) = ۱۰, g(۵) = ۹$$

$$\Rightarrow f(۴) = ۱۲, g(۴) = ۱۰$$

$$\Rightarrow f(۳) = ۱۶, g(۳) = ۱۲$$

$$\Rightarrow f(۲) = ۱۶, g(۲) = ۱۵$$

$$\Rightarrow f(۱) = ۲۳, g(۱) = ۱۶$$

□

پاسخ برابر $f(۱) = ۲۳$ است.

یک آب خوری با سه شیر آب در حیاط وجود دارد. سرعت آب ورودی به این آب خوری ثابت است، به این صورت که:

- اگر فقط یک شیر آب باز باشد، یک بطری را در پنج دقیقه پُر می کند.
- اگر دو شیر آب باز باشند، هر یک از آن ها نصف یک بطری را در پنج دقیقه پُر می کند.
- اگر هر سه شیر آب باز باشند، هر شیر آب، $\frac{1}{3}$ یک بطری را در پنج دقیقه پُر می کند.

سارا ساعت ۰۰ : ۰۰ : ۸ شروع به پر کردن بطری اش می کند که دو دقیقه پس از آن، هستی به آب خوری می رود و شیر دیگری را باز می کند تا بطری اش را پر کند. زهرا سه دقیقه بعد از هستی به آب خوری می رود. زهرا می تواند هر موقع که خواست شیر سوم را باز کند و شروع به پر کردن بطری اش کند. زودترین زمانی که او می تواند پر کردن بطری اش را به پایان برساند، کدام است؟ توجه کنید که اندازه ی تمام بطری ها یکسان است و همچنین هر کسی که بطری اش به طور کامل پر شود، همان لحظه شیر آبی را که باز کرده، می بندد.

۸ : ۱۷ : ۵۰ (۵)

۸ : ۲۰ : ۰۰ (۴)

۸ : ۱۷ : ۰۰ (۳)

۸ : ۱۲ : ۳۰ (۲)

۸ : ۱۵ : ۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

مجموعاً باید سه بطری پر بشوند. با توجه به این که هر پنج دقیقه، دقیقاً به اندازه ی یک بطری آب از شیرها خارج می شود، پس دقیقاً ۱۵ دقیقه طول می کشد تا هر سه بطری پر بشوند.

□

۶ در ابتدا مقادیر زیر را داریم:

$$A[0] = 40 \quad A[1] = 12 \quad A[2] = 10 \quad A[3] = 21 \quad A[4] = 17$$

الگوریتم زیر را اجرا می کنیم:

۱. مقدار sum را برابر ۰ قرار بده.

۲. به ازای k از ۱ تا ۵ انجام بده:

۱-۲. به ازای i از ۰ تا ۴ انجام بده:

۱-۱-۲. j را برابر i قرار بده.

۲-۱-۲. تا وقتی j از ۵ کمتر است انجام بده:

۱-۲-۱-۲. مقدار sum را به اندازه ی $A[j]$ زیاد کن.

۲-۲-۱-۲. مقدار j را به اندازه ی k زیاد کن.

در انتهای اجرای الگوریتم، مقدار sum چه خواهد بود؟

۱۰۰ (۵)

۸۵۶ (۴)

۲۳۲ (۳)

۵۰۰ (۲)

۷۸۳ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

به ازای هر k ، عدد m دقیقاً $\lceil \frac{m+1}{k} \rceil$ بار به sum اضافه خواهد شد (زیرا دقیقاً به همین تعداد i وجود دارد که با شروع از آن ها و اضافه کردن k تا k تا به آن، به m می رسیم). پس عدد m در مجموع به مقدار زیر به sum اضافه خواهد کرد:

$$\lceil \frac{m+1}{1} \rceil + \lceil \frac{m+1}{2} \rceil + \dots + \lceil \frac{m+1}{5} \rceil$$

پس پاسخ برابر است با:

$$40 \times 5 + 12 \times 6 + 10 \times 8 + 21 \times 10 + 17 \times 13 = 783$$

□

در بازی شکرز، یک جدول $n \times n$ داریم، که در ابتدا روی یک خانه ی آن مهره ای سفید، و روی برخی دیگر از خانه ها مهره های سیاه قرار دارد. در هر مرحله، مهره ی سفید می تواند به یک خانه ی خالی هم سطر یا هم ستون برود، به شرط آن که در مسیر مستقیم خانه ی فعلی مهره ی سفید تا خانه ی مقصد، دقیقاً یک مهره ی سیاه قرار داشته باشد. پس از حرکت مهره ی سفید مهره ی سیاهی که از روی آن پریده شده، حذف می شود. می خواهیم در ابتدا، بیشترین تعداد مهره ی سیاه را روی جدول قرار دهیم، طوری که بتوانیم با تعدادی مرحله همه ی مهره های سیاه را از جدول حذف کنیم.

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

بیشترین تعداد مهره ی سیاه به ازای $n = 3$ چه قدر است؟ ۷

۷ (۵)

۶ (۴)

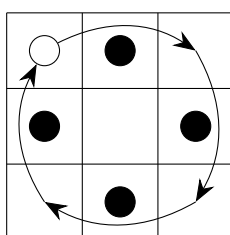
۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

تنها حرکت مجاز در جدول 3×3 حرکت از یک گوشه به گوشه ای دیگر (در راستای افقی یا عمودی) است، طوری که خانه ی وسط این دو گوشه شامل مهره ای سیاه باشد. از آنجایی که تنها چهار خانه با این ویژگی داریم، پاسخ از ۴ بیش تر نیست. برای تحقق ۴ مهره ی سیاه نیز، مثال زیر را در نظر بگیرید:



□

بیشترین تعداد مهره ی سیاه به ازای $n = 4$ چه قدر است؟ ۸

۷ (۵)

۶ (۴)

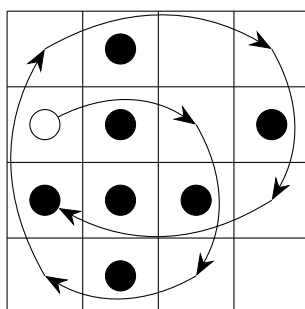
۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

ابتدا برای ۷ مهره، روشی ارائه می دهیم:



توجه کنید در روش بالا، گام آخر نیز معتبر است (در لحظه ی انجام گام آخر، دو تا از سه مهره ی سیاه درون مسیر، تا آن لحظه برداشته شده اند).

حال ثابت می کنیم پاسخ نمی تواند از ۷ بیش تر باشد. خانه ها را به شکل زیر، به سه دسته ی گوشه ای، حاشیه ای و میانی تقسیم می کنیم:

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

گوشه ای	حاشیه ای	حاشیه ای	گوشه ای
حاشیه ای	میان	میان	حاشیه ای
حاشیه ای	میان	میان	حاشیه ای
گوشه ای	حاشیه ای	حاشیه ای	گوشه ای

- مهره ی سیاهی که در خانه های گوشه باشد، نمی تواند برداشته شود.
 - اگر تمام چهار خانه ی میانی، مهره ی سیاه داشته باشند، هیچ کدامشان قابل استفاده نیستند. پس حداکثر از سه مهره ی سیاه در خانه های میانی می توان بهره برد.
 - اگر دو خانه ی حاشیه ای مجاور، مهره ی سیاه داشته باشند، هیچ کدامشان قابل استفاده نیستند. پس حداکثر از چهار مهره ی سیاه در خانه های حاشیه ای می توان بهره برد.
- پس تعداد مهره های سیاه از برابر $۷ = ۴ + ۳ + ۰$ نمی تواند بیش تر باشد.

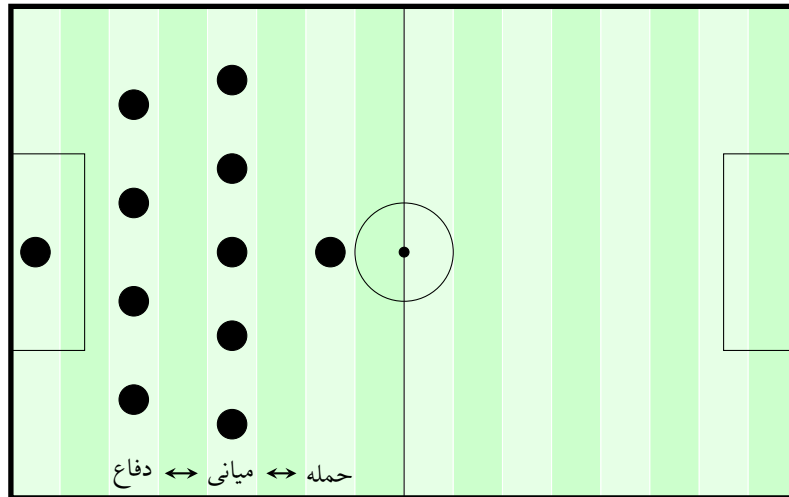
در این دسته سوال، با یک تیم فوتبال سر و کار داریم که ۱۱ بازی کن در آن عضو هستند. در یک چینش تیم، بازی کن ها در ۱۱ جایگاه متمایز قرار می گیرند. آن ها در ابتدا در یک چینش اولیه قرار گرفته اند. بازی کن های تیم می توانند جابه جا شوند و یک چینش جدید بسازند. چینش جدید می تواند همان چینش اولیه هم باشد. می خواهیم تعداد چینش های جدید تیم با شرایط گفته شده در هر سوال را حساب کنیم. دو چینش را متمایز در نظر می گیریم، اگر جایگاهی وجود داشته باشد که بازی کن آن جایگاه، در این دو چینش متفاوت باشند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

در این سوال، به جز دروازه بان، چهار بازی کن در خط دفاع، پنج بازی کن در خط میانی و یک بازی کن در خط حمله حضور دارند. جایگاه های مجاز هر بازی کن در چینش جدید، به صورت زیر است:

- دروازه بان چینش اولیه، باید سر جایش باقی بماند.
 - هر بازی کن خط دفاع از چینش اولیه، می تواند در یکی از جایگاه های خط دفاع یا خط میانی بازی کند.
 - هر بازی کن خط میانی از چینش اولیه، می تواند در تمام جایگاه ها به جز جایگاه دروازه بان بازی کند.
 - هر بازی کن خط حمله از چینش اولیه، می تواند در یکی از جایگاه های خط میانی یا خط حمله بازی کند.
- با این شرایط، چند چینش جدید برای تیم وجود دارد؟

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور



۳۲۶۵۹۲۰ (۵)

۳۶۲۸۸۰۰ (۴)

۹۲۱۶۰ (۳)

۱۰۰۸۰۰۰ (۲)

۱۳۷۰۸۸۰ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

دروازه بان باید سر جایش بماند. برای سایر جایگاه ها دو حالت داریم:

- بازیکن خط حمله سر جایش بماند: در این صورت تمام جایگاه های باقی مانده برای تمام بازیکنان باقی مانده مجاز است و $۹! = ۳۶۲۸۸۰$ چینش داریم.
- بازیکن خط حمله سر جایش نماند: در این صورت، انتخاب جایگاه جدید برای بازیکن خط حمله ۵ حالت دارد (یکی از جایگاه های خط میانی). جایگاه خط حمله را نیز باید یکی از بازیکنان سابق خط میانی پر کند (به ۵ حالت). برای سایر بازیکنان، تمام جایگاه های باقی مانده مجاز است. پس در این حالت $۵ \times ۵ \times ۸! = ۱۰۰۸۰۰۰$ چینش داریم.

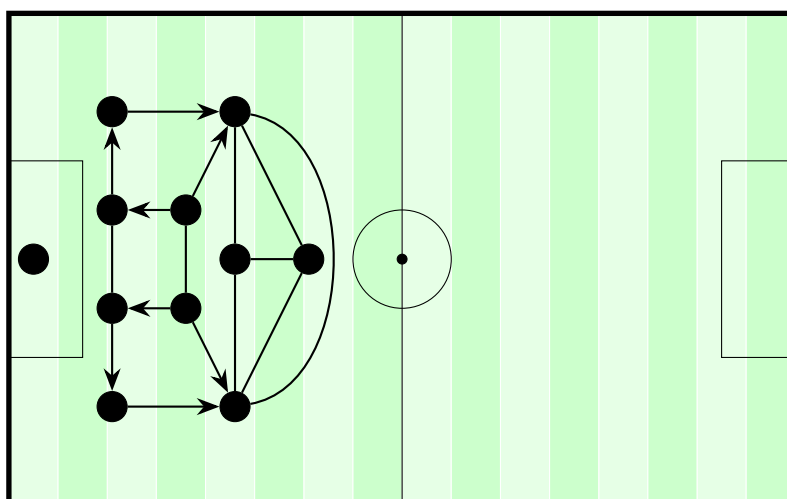
□

پس پاسخ برابر $۱۳۷۰۸۸۰ = ۱۰۰۸۰۰۰ + ۳۶۲۸۸۰$ است.در این سوال، مطابق شکل زیر، هر بازیکن مانند P می تواند در جایگاه های زیر بازی کند:

- در جایگاه خودش در چینش اولیه
- در جایگاه بازیکن هایی مانند Q که P و Q در شکل، با خطی بدون جهت به هم وصل شده باشند.
- در جایگاه بازیکن هایی مانند Q که در شکل، خطی جهت دار از P به Q موجود باشد.

با این شرایط، چند چینش جدید برای تیم وجود دارد؟

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور



۷۲۰ (۵)

۱۰۲۴ (۴)

۴۸ (۳)

۹۶ (۲)

۲۴ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

دروازه بان سر جایش می ماند و جایگاهش ۱ حالت دارد. دو هافبک دفاعی باید باز هم هافبک دفاعی بمانند، زیرا بازیکنان جایگاه های دیگر نمی توانند به جای آن ها بازی کنند. پس جایگاه این دو بازیکن ۲ حالت دارد. حال، مدافعان میانی را در نظر بگیرید. با استدلال مشابه، این دو نفر نیز باید مدافع میانی بمانند و جایگاهشان ۲ حالت دارد.

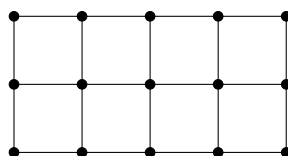
با استدلال مشابه، مدافعان کناری نیز باید سر جایشان بمانند و جایگاهشان ۱ حالت دارد. بازیکنان باقی مانده در هر یک از جایگاه های باقی مانده می توانند قرار بگیرند و چینش آن ها ۴! حالت دارد. پس پاسخ برابر

$$۲ \times ۲ \times ۴! = ۹۶$$

□

است.

شبکه ی ۵×۳ زیر را در نظر بگیرید. به دو نقطه مجاور می گوئیم اگر با یک پاره خط مستقیم (بدون عبور از نقطه ای دیگر)، به هم وصل شده باشند.



_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید _____

حداقل چند نقطه را باید علامت بزنیم، به طوری که هر نقطه ی بی علامت با حداقل یک نقطه ی علامت دار، مجاور باشد؟

۱۱

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

۷ (۵)

۶ (۴)

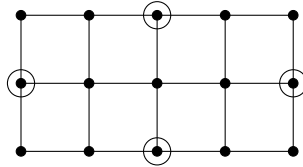
۵ (۳)

۴ (۲)

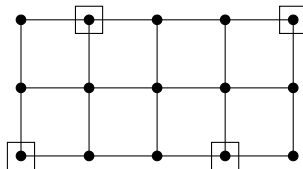
۳ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

ابتدا روشی با چهار نقطه ی علامت دار ارائه می کنیم:



حال ثابت می کنیم پاسخ نمی تواند از چهار کم تر باشد. گوئیم نقطه ی علامت دار A ، نقطه ی B را پوشش می دهد، اگر B مجاور A یا روی آن باشد (از این تعریف در پاسخ دو سوال بعدی نیز استفاده خواهیم کرد). هر نقطه ی علامت دار، حداکثر یکی از چهار نقطه ی مشخص شده در شکل زیر را پوشش می دهد.



□

پس به حداقل چهار نقطه ی علامت دار نیاز داریم.

پاسخ سوال قبل را k نقطه در نظر بگیرید. به چند روش می توانیم k نقطه را علامت بزنیم، به طوری که هر نقطه ی بی علامت با حداقل یک نقطه ی علامت دار، مجاور باشد؟

۱۲

۵ (۵)

۴ (۴)

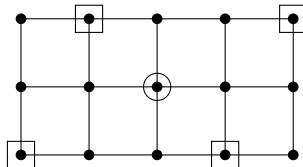
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

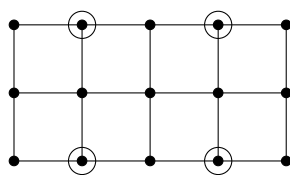
با توجه به پاسخ سوال قبل، می دانیم $k = 4$ است. ابتدا ثابت می کنیم نقطه ی وسط نمی تواند علامت دار باشد. چهار نقطه ی مشخص شده با علامت مربع در شکل زیر، توسط نقطه ی وسط پوشش داده نمی شوند و همچنین هر نقطه ی علامت دار، حداکثر یکی از آن ها را پوشش می دهد:



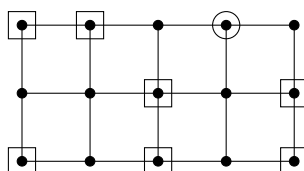
پس اگر نقطه ی وسط علامت دار باشد، در مجموع دست کم پنج نقطه ی علامت دار خواهیم داشت که مطلوب نیست. پس نقطه ی وسط علامت دار نیست.

حال ثابت می کنیم هیچ یک از چهار نقطه ی مشخص شده با علامت دایره در شکل زیر نیز نمی توانند علامت دار باشند:

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

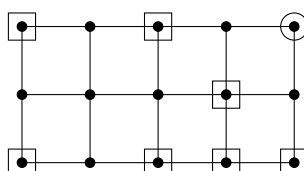


از برهان خلف استفاده می کنیم و بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید نقطه ی مشخص شده با علامت دایره در شکل زیر، علامت دار باشد:



نقطه ی گفته شده هیچ یک از نقاط مشخص شده با علامت مربع را پوشش نمی دهد. هم چنین هر نقطه ی علامت دار حداکثر دو نقطه ی مشخص شده با علامت مربع را پوشش می دهد. پس در مجموع به دست کم $\lceil \frac{9}{2} + 1 \rceil = 5$ نقطه ی علامت دار نیاز داریم که مطلوب نیست. بنابراین هیچ یک از چهار نقطه ی مذکور نمی توانند علامت دار باشند.

حال ثابت می کنیم هیچ یک از چهار نقطه ی گوشه نیز نمی توانند علامت دار باشند. از برهان خلف استفاده می کنیم. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید نقطه ی بالا-راست علامت دار باشد. این نقطه، هیچ یک از نقاط مشخص شده با علامت مربع در شکل زیر را پوشش نمی دهد و هم چنین هر نقطه ی علامت دار، حداکثر دو تا از نقاط مشخص شده با علامت مربع در شکل زیر را پوشش می دهند (با توجه به این که برای برخی از نقاط، ثابت کردیم علامت دار نیستند):



پس اگر نقطه ی بالا-راست علامت دار باشد، در مجموع به دست کم $\lceil \frac{9}{2} + 1 \rceil = 5$ نقطه ی علامت دار نیاز داریم که مطلوب نیست. بنابراین هیچ یک از نقاط گوشه نمی توانند علامت دار باشند. پس تنها چهار خانه ی کاندید برای علامت دار شدن باقی می ماند که باید همگی علامت دار باشند. این حالت معتبر است (روش پاسخ سوال قبل). پس دقیقاً یک روش برای علامت دار کردن نقاط داریم و پاسخ مسئله برابر ۱ است. □

حداقل چند نقطه را باید علامت بزنیم، به طوری که هر نقطه ی بی علامت با حداقل دو نقطه ی علامت دار، مجاور باشد؟

۱۳

۸ (۵)

۷ (۴)

۶ (۳)

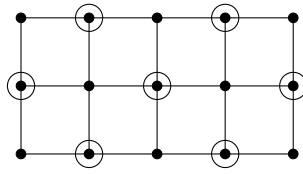
۵ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

ابتدا برای ۷ نقطه ی علامت دار، روش زیر را ارائه می دهیم:

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

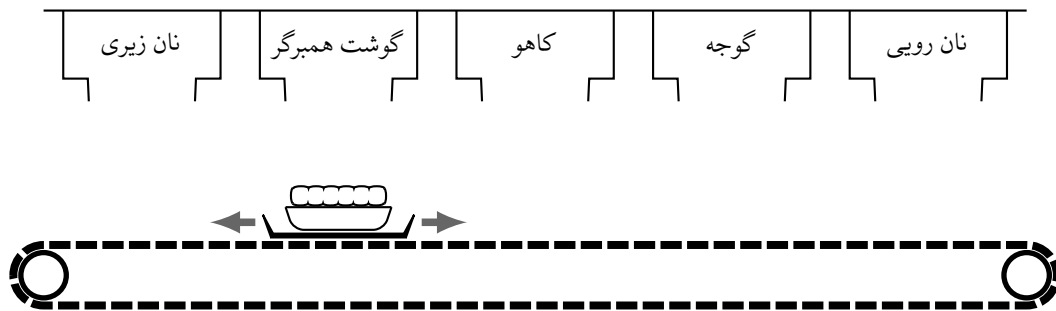


با حالت بندی روی تعداد خانه های گوشه ی علامت دار نیز به سادگی می توانید ثابت کنید با کم تر از ۷ نقطه ی علامت دار، این امر ممکن نیست.

□

سندی سنجابه برای رستوران آقای خرچنگ، یک دستگاه برگرساز جدید ساخته است. مطابق شکل زیر، این دستگاه پنج مخزن مواد غذایی دارد که در یک ردیف، بالای یک تسمه ی متحرک قرار گرفته اند. مخزن ها به ترتیب از چپ به راست دارای نان زیری همبرگر، گوشت همبرگر، کاهو، گوجه، و نان رویی همبرگر هستند. برای درست کردن یک همبرگر، باب اسفنجی (سراشیز رستوران) ابتدا باید یک سینی را روی تسمه ی متحرک و دقیقاً زیر خروجی چپ ترین مخزن (نان زیری) قرار دهد. دستگاه دو دکمه دارد که باب اسفنجی با فشردن آن ها، سینی را (در صورت امکان) یک واحد به راست یا چپ حرکت می دهد. هر دفعه که سینی، زیر خروجی یک مخزن قرار بگیرد، یک واحد از ماده ی غذایی آن مخزن، به صورت خودکار به روی سینی، بالای مواد قبلی (در صورت وجود) افزوده می شود. به این ترتیب، هر همبرگر از تعدادی طبقه (ماده ی غذایی) تشکیل می گردد. نان های زیری و رویی همبرگر نیز جزء طبقات محسوب می شوند. بنا به دستور آقای خرچنگ، هر همبرگر لازم است دو ویژگی زیر را داشته باشد:

- ماده ی هیچ دو طبقه ی متوالی آن یکسان نباشند.
- پایین ترین طبقه ی آن، یک نان زیری، و بالاترین طبقه ی آن یک نان رویی باشد و در طبقه ی دیگری، از نان استفاده نشده باشد.



با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

باب اسفنجی چند همبرگر ۱۵ طبقه ی متفاوت می تواند با این دستگاه درست کند؟

۱۴

۱۲۸ (۵)

۸۱ (۴)

۳۲ (۳)

۶۲۵ (۲)

۳۶۴ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

با توجه به این که هر بار، سینی به زیر یک مخزن مجاور می رود، در طبقات با شماره ی فرد، فقط می توانیم نان یا کاهو، و در طبقات زوج، فقط می توانیم گوشت همبرگر یا گوجه داشته باشیم. ماده ی طبقات فرد به طور یکتا

مرحله ی یکم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

تعیین می شود؛ زیرا طبقات اول و آخر باید به ترتیب شامل نان زیری و نان رویی باشند و سایر طبقات فرد، کاهو دارند. طبقه ی دوم و چهاردهم نیز به طور یکتا تعیین می شود؛ زیرا باید به ترتیب شامل گوشت همبرگر و گوجه باشند. هر کدام از سایر طبقات زوج (طبقات چهارم، ششم، هشتم، دهم و دوازدهم) می توانند گوشت همبرگر یا گوجه داشته باشند. پس پاسخ برابر $32 = 25$ است. □

به دلیل استقبال مشتریان از همبرگرها، سندی سنجابه دستگاه را ارتقا داده و یک مخزن پنیر را بین مخزن گوشت همبرگر و مخزن کاهو اضافه کرده است. با دستگاه همبرگرساز جدید، باب اسفنجی چند همبرگر ۸ طبقه ی متفاوت می تواند درست کند؟

۱۵

۸ (۵)

۹ (۴)

۱۶ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

در حین فرآیند، سینی دقیقاً یک بار باید به چپ برود تا تعداد طبقات دقیقاً ۸ شود. انتخاب جایی که سینی به چپ می رود، ۳ حالت دارد. □

مرحله ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۹۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ نامه کنید.
- سوالات ۱۴ تا ۱۵ در دسته های چند سوالی آمده اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ فرض کنید $A_0 = \emptyset$ ، و به ازای هر عدد طبیعی n ، داشته باشیم $A_n = \{\emptyset, \{A_{n-1}\}\}$. برای مثال $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ در عبارتی که برای نمایش A_1 نوشته می شود، اگر به جای هر علامت « $\emptyset$ »، عبارت « $\{\}$ » را جایگزین کنیم، رشته ی حاصل چند علامت « $\{\}$ » خواهد داشت؟

۳۱ (۱) ۱۰۲۴ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴) ۳۰ (۵)

۲ به یک عبارت ریاضی ساده گوییم، اگر تنها از اعداد طبیعی، دو عمل جمع و ضرب، و پرانتز ساخته شده باشد (لزومی ندارد از تمام موارد گفته شده استفاده شده باشد). فرض کنید مجموع تمام اعداد به کار رفته در یک عبارت ریاضی ساده، برابر ۸ باشد. اگر تمام اعداد این عبارت را در ۲ ضرب کنیم، حاصل عبارت حداکثر می تواند چند برابر شود؟

۲۵۶ (۱) ۵۱۲ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۲ (۵)

۳ سنگ، کاغذ، قیچی یک بازی معروف دو نفره است که به شکل زیر انجام می شود:

هر بازیکن یک دستش را به یکی از سه شکل سنگ، کاغذ و قیچی در می آورد (دو بازیکن به طور هم زمان این کار را انجام می دهند). اگر هر دو بازیکن یک شکل را انتخاب کرده باشند، نتیجه ی بازی مساوی می شود؛ در غیر این صورت، برنده به صورت زیر مشخص می گردد:

- اگر یک دست به شکل سنگ و دست دیگر به شکل قیچی باشد، برنده ی بازی کسی است که دستش به شکل سنگ است.
- اگر یک دست به شکل قیچی و دست دیگر به شکل کاغذ باشد، برنده ی بازی کسی است که دستش به شکل قیچی است.
- اگر یک دست به شکل کاغذ و دست دیگر به شکل سنگ باشد، برنده ی بازی کسی است که دستش به شکل کاغذ است.

۶ نفر با شماره های ۱ تا ۶ به ترتیب از راست به چپ در یک ردیف ایستاده اند. به ازای هر $1 \leq i \leq 5$ ، دست چپ نفر شماره ی i با دست راست نفر شماره ی $i + 1$ بازی سنگ، کاغذ، قیچی را (دقیقاً یک مرتبه) انجام می دهد. یک نفر خسته کننده نامیده می شود، اگر نتیجه ی هر دو بازی اش یکسان شود (یعنی هر دو بازی را ببرد، یا هر دو بازی را ببازد، یا هر دو بازی اش مساوی شود). نفرات با شماره های ۱ و ۶ (که تنها یک بازی انجام می دهند)، خسته کننده محسوب نمی شوند. در چند حالت متمایز از انجام بازی ها، فرد خسته کننده ای وجود ندارد؟ دو حالت از انجام بازی ها را متمایز در نظر می گیریم، اگر دستی باشد که در این دو حالت، دو شکل مختلف (از سه شکل سنگ، کاغذ، و یا قیچی) را انتخاب کرده باشد.

۲۳۳۲۸ (۱) ۱۱۶۶۴ (۲) ۷۲۹ (۳) ۶۹۹۸۴ (۴) ۷۷۷۶ (۵)

مرحله ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

۴ در یک مرغ داری، برای باز شدن هر تخم مرغ و در آمدن جوجه از آن باید تعدادی نوک به آن زده شود (این مقدار به میزان استحکام پوست تخم مرغ بستگی دارد). ۷ تخم مرغ داریم که به ترتیب به ۰، ۱، ۲، ... و ۶ نوک برای باز شدن نیاز دارند. می خواهیم این تخم مرغ ها را در یک ردیف بچینیم. در هر مرحله، یکی از تخم مرغ هایی که به ۰ نوک نیاز دارد، باز می شود و جوجه از آن بیرون می آید؛ سپس جوجه ی بیرون آمده به تمام تخم مرغ های سمت راستش در ردیف ۲ نوک می زند (اگر تخم مرغی به کم تر از ۲ نوک نیاز داشته باشد، به همان مقدار مورد نیاز به آن نوک زده می شود). در چند ترتیب اولیه از تخم مرغ ها در ردیف مذکور، تمام تخم مرغ ها جوجه خواهند شد؟

۴۸ (۱) ۱۲۰ (۲) ۷۲۰ (۳) ۱۴۴ (۴) ۹۶ (۵)

۵ جدول زیر از ۸ سطر و ۸ ستون با شماره های ۱ تا ۸ تشکیل شده است:

۸								
۷								
۶								
۵								
۴								
۳								
۲								
۱								
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸

به دو خانه مجاور می گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. هر گاه از خانه ی پایین-چپ جدول آغاز کنیم، هر مرحله به خانه ی مجاور راستی یا خانه ی مجاور بالایی برویم و در پایان به خانه ی بالا-راست جدول برسیم، یک مسیر استاندارد را طی کرده ایم.

به ازای هر $1 \leq i, j \leq 8$ ، ارزش خانه ی واقع در سطر i و ستون j برای کیوان $i + j$ ، و برای پیمان $i - j$ است (ارزش برخی از خانه ها برای پیمان منفی می شود). برای هر یک از این دو نفر، ارزش یک مسیر استاندارد، برابر مجموع ارزش خانه های آن مسیر برای آن شخص است. میانگین ارزش تمام مسیرهای استاندارد برای کیوان و پیمان به ترتیب (از راست به چپ) چیست؟

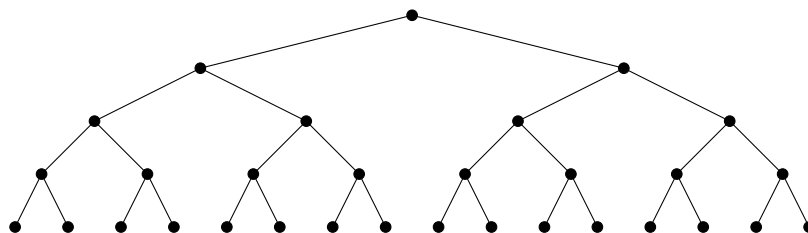
۱۳۶ (۱) و ۰ ۲۷۲ (۲) و ۳۶- ۱۳۵ (۳) و ۰ ۲۷۲ (۴) و ۰ ۳۶ (۵) و ۳۶-

۶ به یک جایگشت از اعداد ۱ تا n ابرزوج می گوییم، اگر مجموع هر ۳ عدد متوالی در آن زوج باشد. بیشینه n را بیابید، به نحوی که جایگشتی ابرزوج از اعداد ۱ تا n وجود داشته باشد.

۵ (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۷ (۴) ۸ (۵)

مرحله ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

۷ شکل زیر از ۳۱ رأس (نقطه) متمایز و ۳۰ یال (پاره خط) ساخته شده است.



فاصله ی دو رأس برابر کمترین تعداد یال های مورد نیاز برای رفتن از یکی به دیگری است. فاصله ی چند جفت رأس در این شکل برابر ۵ است؟ دقت کنید برای دو رأس a و b ، جفت (a, b) و (b, a) یکسان محسوب می شوند.

۱۶ (۱) ۹۶ (۲) ۱۲۸ (۳) ۶۴ (۴) ۸۰ (۵)

۸ ۱۰ دانش آموز یک مدرسه در صفی ایستاده اند و روی سر هر کدام از آن ها کلاهی قرمز یا آبی قرار دارد. ناظم در هر مرحله، یکی از دانش آموزان صف را از صف خارج کرده و به کلاس می فرستد. نحوه ی انتخاب دانش آموز توسط ناظم در هر مرحله به شکل زیر است:

اگر تنها یک نفر در صف باشد، همان فرد انتخاب می شود؛ در غیر این صورت (در صورت وجود حداقل دو نفر در صف)، اگر نفر اول صف کلاه آبی و نفر دوم کلاه قرمز داشته باشند، نفر دوم صف، و در غیر این صورت، نفر اول صف انتخاب می شود.

پس از ۱۰ مرحله، تمام دانش آموزان صف به کلاس می روند. یک دنباله از رنگ های قرمز و آبی را به این صورت می سازیم که از یک دنباله ی خالی شروع می کنیم و به ازای هر دانش آموزی که از صف خارج شد، رنگ کلاه او را در انتهای دنباله اضافه می کنیم. به دنباله ی ۱۰ عنصری حاصل دنباله ی سلطانی صف می گوئیم. تمام ۲۱۰ حالت اولیه برای رنگ کلاه های دانش آموزان صف، روی هم چند دنباله ی سلطانی متمایز تولید می کنند؟

۱۰۲۴ (۱) ۵۱۳ (۲) ۱۴۴ (۳) ۵۱۲ (۴) ۱۲۸ (۵)

۹ می خواهیم ۲۰ جایزه با ارزش های ۲۰، ۲۱، ... و ۲۱۹ را بین ۱۰ بچه تقسیم کنیم (لزومی ندارد به هر نفر دقیقاً ۲ جایزه برسد؛ حتی ممکن است به یک نفر هیچ جایزه ای نرسد). هر بچه به میزان مجموع ارزش جایزه های دریافتی اش خوشحال می شود. پس از پخش جایزه ها، به خوشحال ترین بچه، شنگول و به بچه ای که کمترین خوشحالی را دارد، منگول می گوئیم. کمینه ی اختلاف خوشحالی شنگول و منگول چه قدر است؟

۵۲۲۲۴۱ (۱) ۱۰۲۴ (۲) ۵۲۲۷۵۳ (۳) ۴۲۵۷۰۰ (۴) ۳۲۵۲۳ (۵)

۱۰ جدولی ۲×۳ داریم. به دو خانه از جدول مجاور گوئیم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. به مجموعه ای از خانه ها همبند گوئیم اگر به ازای هر دو خانه ی A و B از آن مجموعه، بتوانیم از A آغاز کرده، هر مرحله به یک خانه ی مجاور برویم، و در پایان به B برسیم. به چند طریق می توان خانه های این جدول را به ۴ مجموعه ی همبند افراز کرد؟

۲ (۱) ۱۰ (۲) ۶ (۳) ۳۱ (۴) ۲۱ (۵)

مرحله ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

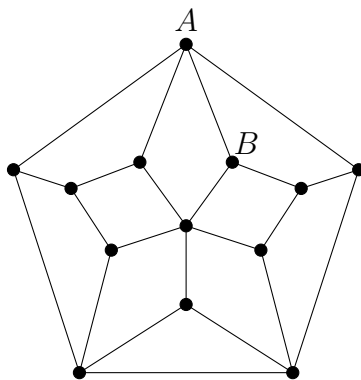
۱۱ یک جدول 3×2 داریم که در ابتدا، تمام خانه های آن سفید هستند. به دو خانه ی سفید با یک ضلع مشترک در جدول دومینوس می گوییم. الگوریتم زیر را اجرا می کنیم:

تا زمانی که در جدول دومینوس وجود دارد، از میان همه ی دومینوس ها، یکی را به صورت تصادفی (با احتمال های برابر) انتخاب کرده و هر دو خانه ی آن را سیاه می کنیم.

به چه احتمالی پس از پایان الگوریتم، کل جدول سیاه خواهد شد؟

- ۱) $\frac{13}{21}$ ۲) $\frac{5}{7}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{7}$ ۵) $\frac{17}{21}$

۱۲ در شکل زیر، به دو نقطه (رأس) مجاور می گوییم، اگر با یک پاره خط مستقیم به هم وصل باشند:



می خواهیم از نقطه ی A آغاز کنیم، در هر مرحله به یک نقطه ی مجاور برویم و پس از دقیقاً ۶ مرحله به نقطه ی B برسیم (عبور از نقطه یا پاره خط تکراری اشکالی ندارد). این کار به چند طریق ممکن است؟

- ۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۰ ۵) ۸

۱۳ فرض کنید $\langle a_1, a_2, \dots, a_{14} \rangle$ رشته ای از ارقام ۰ و ۱ باشد. به تعدادی رقم متوالی و برابر، یک زنجیره می گوییم. زنجیره ای که بخشی از یک زنجیره ی بزرگ تر نباشد، بلوک نامیده می شود. برای مثال، رشته ی زیر از ۴ بلوک ساخته شده است:

$\langle 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$

الگوریتم زیر را اجرا می کنیم:

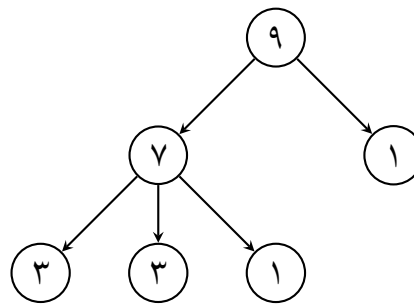
تا زمانی که تعداد بلوک های رشته بیش تر از یک است، بلوک اول و دوم (از سمت چپ) را در نظر می گیریم و بلوک کوچک تر را حذف می کنیم (اگر اندازه ی دو بلوک یکسان بود، بلوکی که شامل ارقام ۰ است، حذف می شود).

برای مثال، رشته ی بالا پس از یک مرحله به رشته ی $\langle 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$ تبدیل می شود. در میان تمام حالات ممکن برای رشته ی ۱۴ رقمی آغازین، کمینه ی تعداد ارقام رشته ی نهایی (پس از اجرای کامل الگوریتم مذکور) چیست؟

- ۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۵ ۵) ۳

مرحله ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

- دنباله ای از اعداد طبیعی داریم. می خواهیم تعدادی رابطه بین اعداد این دنباله با شرایط زیر تعریف کنیم:
- در هر رابطه، دو عدد نابرابر درگیر می شوند که عدد بزرگتر را پدر رابطه و عدد کوچکتر را فرزند رابطه می نامیم.
 - هر عدد باید حداکثر در یک رابطه، نقش فرزند را داشته باشد.
 - مجموع فرزندان هر عدد باید کم تر یا مساوی خودش باشد.
- به یک عدد **بدسگال** گوییم، اگر در هیچ رابطه ای فرزند نباشد. هدف، تعریف تعدادی رابطه بین اعداد دنباله است، طوری که تعداد عددهای بدسگال کمینه شود. به عنوان مثال، اگر دنباله ی اعداد برابر $\langle 1, 1, 3, 3, 7, 9 \rangle$ باشد، می توانیم به شکل زیر، رابطه ها را طوری تعریف کنیم که فقط یک عدد بدسگال داشته باشیم (هر پاره خط جهت دار نشان گر یک رابطه است که از پدر به فرزند کشیده شده است):



با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۴ اگر دنباله ی اعداد برابر $\langle 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5 \rangle$ باشد، حداقل چند عدد بدسگال خواهیم داشت؟

۵ (۵)

۱ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

۱۵ الگوریتم های زیر را در نظر بگیرید:

- (آ) دنباله ی اعداد را از بزرگ به کوچک مرتب، و سپس آن را پیمایش می کنیم. به ترتیب به هر عدد که رسیدیم، آن را فرزند کوچکترین پدر ممکن قرار می دهیم (اگر پدر مجاز با شرایط مسئله برای او وجود نداشت، او را فرزند کسی قرار نمی دهیم و در نتیجه، بدسگال می شود).
- (ب) دنباله ی اعداد را از بزرگ به کوچک مرتب، و سپس آن را پیمایش می کنیم. به ترتیب به هر عدد که رسیدیم، آن را فرزند بزرگترین پدر ممکن قرار می دهیم (اگر پدر مجاز با شرایط مسئله برای او وجود نداشت، او را فرزند کسی قرار نمی دهیم و در نتیجه، بدسگال می شود).
- (پ) دنباله ی اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب، و سپس آن را پیمایش می کنیم. به ترتیب به هر عدد که رسیدیم، با بررسی تمام حالات ایجاد رابطه بین این عدد و اعداد بدسگال کنونی کوچکتر از آن، بیشترین تعداد بدسگال ممکن را (مطابق با شرایط مسئله)، فرزند عدد فعلی قرار می دهیم.

کدام الگوریتم ها به ازای هر دنباله ی اولیه ای از اعداد، کمترین تعداد بدسگال ممکن را ایجاد می کنند؟

پ فقط (۵)

ب و پ (۴)

هیچ کدام (۳)

هر سه (۲)

آ و پ (۱)

مرحله ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۹۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ نامه کنید.
- سوالات ۱۴ تا ۱۵ در دسته های چند سوالی آمده اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ فرض کنید $A_0 = \emptyset$ ، و به ازای هر عدد طبیعی n ، داشته باشیم $A_n = \{\emptyset, \{A_{n-1}\}\}$. برای مثال $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ در عبارتی که برای نمایش A_1 نوشته می شود، اگر به جای هر علامت « $\emptyset$ »، عبارت « $\{\}$ » را جایگزین کنیم، رشته ی حاصل چند علامت « $\{\}$ » خواهد داشت؟

۳۰ (۵) ۲۲ (۴) ۲۱ (۳) ۱۰۲۴ (۲) ۳۱ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

p_n را تعداد علامت های « $\{\}$ » در A_n در نظر می گیریم. می دانیم $p_0 = ۱$ است و همچنین به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$p_n = p_{n-1} + 3$$

□

بنابراین $p_n = ۱ + 3n$ و در نتیجه پاسخ برابر است با $p_{۱۰} = ۳۱$.

۲ به یک عبارت ریاضی ساده گوییم، اگر تنها از اعداد طبیعی، دو عمل جمع و ضرب، و پرانتز ساخته شده باشد (لزومی ندارد از تمام موارد گفته شده استفاده شده باشد). فرض کنید مجموع تمام اعداد به کار رفته در یک عبارت ریاضی ساده، برابر ۸ باشد. اگر تمام اعداد این عبارت را در ۲ ضرب کنیم، حاصل عبارت حداکثر می تواند چند برابر شود؟

۲ (۵) ۱۶ (۴) ۸ (۳) ۵۱۲ (۲) ۲۵۶ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

به ازای هر عبارت ساده ی e ، مقدار $f(e)$ را برابر عبارت حاصل از e (پس از ۲ برابر کردن اعداد آن) در نظر می گیریم.

ابتدا ثابت می کنیم آخرین عمل عبارت ساده ی بهینه (به ترتیب انجام اعمال در هنگام محاسبه)، عمل ضرب است. فرض کنید عبارت ساده ای به صورت $x + y$ است (که خود x و y نیز، عباراتی ساده هستند). از آنجایی که $f(x) > x$ و $f(y) > y$ داریم:

$$xf(x)f(y) > xf(x)y, \quad yf(y)f(x) > yf(y)x$$

با جمع کردن دو نابرابری بالا داریم:

$$\begin{aligned} & xf(x)f(y) + yf(y)f(x) > xf(x)y + yf(y)x \\ \implies & (x+y)(f(x)f(y)) > xy(f(x) + f(y)) \\ \implies & \frac{f(x) \times f(y)}{x \times y} > \frac{f(x) + f(y)}{x + y} \end{aligned}$$

مرحله ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

پس جایگزینی عبارت $x + y$ با $x \times y$ نسبتی بزرگ تر می سازد. با همین استدلال، می توان نتیجه گرفت تمام اعمال عبارت بهینه، ضرب هستند. با توجه به این که تعداد اعداد عبارت حداکثر ۸ است، عبارت حاصل حداکثر $2^8 = 256$ برابر عبارت اولیه می تواند باشد. از طرفی عبارت زیر، نسبت ۲۵۶ را برای ما می سازد:

$$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$$

□

پس پاسخ برابر ۲۵۶ است.

سنگ، کاغذ، قیچی یک بازی معروف دو نفره است که به شکل زیر انجام می شود:

۳

هر بازیکن یک دستش را به یکی از سه شکل سنگ، کاغذ و قیچی در می آورد (دو بازیکن به طور هم زمان این کار را انجام می دهند). اگر هر دو بازیکن یک شکل را انتخاب کرده باشند، نتیجه ی بازی مساوی می شود؛ در غیر این صورت، برنده به صورت زیر مشخص می گردد:

- اگر یک دست به شکل سنگ و دست دیگر به شکل قیچی باشد، برنده ی بازی کسی است که دستش به شکل سنگ است.
- اگر یک دست به شکل قیچی و دست دیگر به شکل کاغذ باشد، برنده ی بازی کسی است که دستش به شکل قیچی است.
- اگر یک دست به شکل کاغذ و دست دیگر به شکل سنگ باشد، برنده ی بازی کسی است که دستش به شکل کاغذ است.

۶ نفر با شماره های ۱ تا ۶ به ترتیب از راست به چپ در یک ردیف ایستاده اند. به ازای هر $1 \leq i \leq 5$ ، دست چپ نفر شماره ی i با دست راست نفر شماره ی $i + 1$ بازی سنگ، کاغذ، قیچی را (دقیقاً یک مرتبه) انجام می دهد. یک نفر خسته کننده نامیده می شود، اگر نتیجه ی هر دو بازی اش یکسان شود (یعنی هر دو بازی را ببرد، یا هر دو بازی را ببازد، یا هر دو بازی اش مساوی شود). نفرات با شماره های ۱ و ۶ (که تنها یک بازی انجام می دهند)، خسته کننده محسوب نمی شوند. در چند حالت متمایز از انجام بازی ها، فرد خسته کننده ای وجود ندارد؟ دو حالت از انجام بازی ها را متمایز در نظر می گیریم، اگر دستی باشد که در این دو حالت، دو شکل مختلف (از سه شکل سنگ، کاغذ، و یا قیچی) را انتخاب کرده باشد.

(۱) ۲۳۳۲۸ (۲) ۱۱۶۶۴ (۳) ۷۲۹ (۴) ۶۹۹۸۴ (۵) ۷۷۷۶

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

هر بازی $3 \times 3 = 9$ حالت برای انجام دارد. بازی اول (بین نفرات شماره ۱ و شماره ۲) ۹ حالت دارد. به ازای هر $2 \leq i \leq 5$ بازی i ام (بین نفرات شماره i و شماره $i + 1$) ۶ حالت دارد (تا نتیجه ی برابر با بازی $i - 1$ ام نداشته باشد). پس پاسخ برابر است با:

$$9 \times 6^4 = 11664$$

□

مرحله ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

۴ در یک مرغ داری، برای باز شدن هر تخم مرغ و در آمدن جوجه از آن باید تعدادی نوک به آن زده شود (این مقدار به میزان استحکام پوست تخم مرغ بستگی دارد). ۷ تخم مرغ داریم که به ترتیب به ۰، ۱، ۲، ... و ۶ نوک برای باز شدن نیاز دارند. می خواهیم این تخم مرغ ها را در یک ردیف بچینیم. در هر مرحله، یکی از تخم مرغ هایی که به ۰ نوک نیاز دارد، باز می شود و جوجه از آن بیرون می آید؛ سپس جوجه ی بیرون آمده به تمام تخم مرغ های سمت راستش در ردیف ۲ نوک می زند (اگر تخم مرغی به کم تر از ۲ نوک نیاز داشته باشد، به همان مقدار مورد نیاز به آن نوک زده می شود). در چند ترتیب اولیه از تخم مرغ ها در ردیف مذکور، تمام تخم مرغ ها جوجه خواهند شد؟

۴۸ (۱) ۱۲۰ (۲) ۷۲۰ (۳) ۱۴۴ (۴) ۹۶ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

در هر لحظه، ترتیب باز شدن تخم مرغ هایی که به ۰ نوک برای جوجه شدن نیاز دارند، قابل صرف نظر کردن است (و اگر قرار باشد تمام تخم مرغ ها جوجه شوند، با هر ترتیبی از اجرا، این امر محقق خواهد شد). پس فرض می کنیم تخم مرغ های مستعد برای باز شدن، به ترتیب از چپ به راست باز می شوند.

تخم مرغ سمت چپ ردیف، باید آن تخم مرغی باشد که به ۰ نوک برای جوجه شدن نیاز دارد (در غیر این صورت جوجه نخواهد شد). پس از جوجه شدن این تخم مرغ، تخم مرغ های دیگر به ترتیب به ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ نوک برای باز شدن نیاز دارند. تخم مرغ دوم ردیف، باید از بین دو تخم مرغی انتخاب شود که به ۰ نوک برای جوجه شدن نیاز دارند (۲ حالت). با جوجه شدن تخم مرغ دوم، تخم مرغ های دیگر به ترتیب به ۰، ۱، ۰، ۰ و ۲ نوک برای باز شدن نیاز دارند. تخم مرغ سوم باید از بین سه تخم مرغی انتخاب شود که به ۰ نوک برای جوجه شدن نیاز دارند (۳ حالت). با جوجه شدن تخم مرغ سوم، همه ی تخم مرغ های دیگر برای باز شدن آماده هستند و ترتیب آن ها ۴! حالت دارد. پس پاسخ برابر است با: $4! \times 3 \times 2 = 144$ □

۵ جدول زیر از ۸ سطر و ۸ ستون با شماره های ۱ تا ۸ تشکیل شده است:

۸							
۷							
۶							
۵							
۴							
۳							
۲							
۱							
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

به دو خانه مجاور می گوئیم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. هر گاه از خانه ی پایین-چپ جدول آغاز کنیم،

مرحله ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

هر مرحله به خانه ی مجاور راستی یا خانه ی مجاور بالایی برویم و در پایان به خانه ی بالا-راست جدول برسیم، یک مسیر استاندارد را طی کرده ایم.

به ازای هر $1 \leq i, j \leq 8$ ، ارزش خانه ی واقع در سطر i و ستون j برای کیوان $i + j$ ، و برای پیمان $i - j$ است (ارزش برخی از خانه ها برای پیمان منفی می شود). برای هر یک از این دو نفر، ارزش یک مسیر استاندارد، برابر مجموع ارزش خانه های آن مسیر برای آن شخص است. میانگین ارزش تمام مسیرهای استاندارد برای کیوان و پیمان به ترتیب (از راست به چپ) چیست؟

(۱) ۱۳۶ و ۰ (۲) ۲۷۲ و ۳۶- (۳) ۱۳۵ و ۰ (۴) ۲۷۲ و ۰ (۵) ۳۶ و ۳۶-

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

ارزش تمام مسیرهای استاندارد برای کیوان برابر $1 = \frac{16 \times 17}{2} - 1 = 135$ ، زیرا ارزش خانه ی مبدأ ۲ بوده و با طی کردن هر گام در مسیر، به ارزش خانه دقیقاً یک واحد اضافه می شود. پس میانگین ارزش مسیرهای استاندارد برای پیمان ۰ است.

برای هر مسیر استاندارد، دوست آن را مسیری استاندارد تعریف می کنیم که از قرینه کردن مسیر نسبت به قطر اصلی جدول به دست می آید. ارزش دوست هر مسیر استاندارد برای پیمان، قرینه ی ارزش خود آن مسیر برای پیمان است. بنابراین مسیرها به جفت هایی افراز می شوند که مجموع ارزش آن ها برای پیمان ۰ است. پس میانگین ارزش مسیرهای استاندارد برای پیمان ۰ می باشد. □

۶ به یک جایگشت از اعداد ۱ تا n ابرزوج می گوئیم، اگر مجموع هر ۳ عدد متوالی در آن زوج باشد. بیشینه ی n را بیابید، به نحوی که جایگشتی ابرزوج از اعداد ۱ تا n وجود داشته باشد.

(۱) ۵ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۷ (۵) ۸

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

با مشخص شدن زوجیت دو عنصر ابتدای دنباله، زوجیت بقیه ی عناصر به صورت یکتا تعیین می شود. روی زوجیت دو عنصر آغازین دنباله حالت بندی می کنیم:

- دو عنصر آغازین، هر دو زوج باشند؛ در این صورت تمام عناصر دنباله باید زوج باشند که امکان ندارد (زیرا عدد ۱ حتماً باید در دنباله موجود باشد).

- دو عنصر آغازین دنباله، هر دو فرد باشند؛ در این صورت زوجیت عناصر دنبال به صورت زیر خواهد بود:

(... , زوج, فرد, فرد, زوج, فرد, فرد, زوج, فرد, فرد)

در الگوی بالا از عنصر چهارم به بعد، همواره تعداد اعداد فرد دنباله (از ابتدای دنباله تا آن عنصر)، حداقل دو تا بیش تر از تعداد اعداد زوج آن است. اما در اعداد ۱ تا n تعداد اعداد فرد حداکثر یکی بیش تر از تعداد اعداد زوج است. پس الگوی بالا حداکثر به ازای $n = 3$ می تواند ممکن باشد.

- دو عنصر آغازین دنباله به ترتیب فرد و زوج باشند؛ در این صورت زوجیت عناصر دنبال به صورت زیر خواهد بود:

(... , زوج, فرد, فرد, زوج, فرد, فرد, زوج, فرد, فرد)

مرحله ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

در این الگو مانند استدلال حالت قبل، حداکثر تا عنصر پنجم پیش خواهیم رفت و n نمی تواند از ۵ بیش تر باشد.

- دو عنصر آغازین دنباله به ترتیب زوج و فرد باشند؛ در این صورت زوجیت عناصر دنبال به صورت زیر خواهد بود:

$\langle \dots, \text{زوج}, \text{فرد}, \text{فرد}, \text{زوج}, \text{فرد}, \text{فرد}, \text{زوج}, \text{فرد}, \text{فرد}, \text{زوج} \rangle$

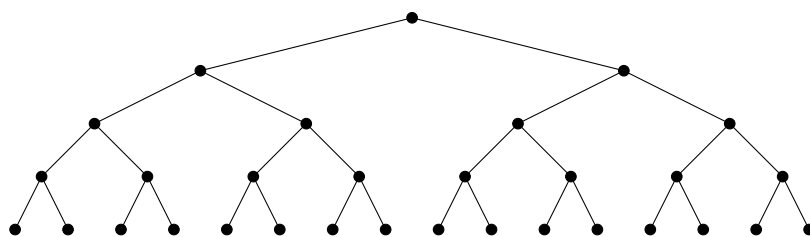
در این الگو مانند استدلال حالت قبل، حداکثر تا عنصر هفتم پیش خواهیم رفت و n نمی تواند از ۷ بیش تر باشد.

ثابت کردیم n نمی تواند از ۷ بیش تر باشد. برای $n = 7$ نیز جایگشت زیر، شرایط مسئله را دارد:

$\langle 2, 1, 3, 4, 5, 7, 6 \rangle$

□

۷ شکل زیر از ۳۱ رأس (نقطه) متمایز و ۳۰ یال (پاره خط) ساخته شده است.



فاصله ی دو رأس برابر کمترین تعداد یال های مورد نیاز برای رفتن از یکی به دیگری است. فاصله ی چند جفت رأس در این شکل برابر ۵ است؟ دقت کنید برای دو رأس a و b ، جفت (a, b) و (b, a) یکسان محسوب می شوند.

۸۰ (۵) ۶۴ (۴) ۱۲۸ (۳) ۹۶ (۲) ۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

دو رأس مد نظر نمی توانند هم عمق باشند (زیرا فاصله ی آن ها فرد است). روی رأس با عمق کم تر حالت بندی می کنیم:

- رأس بالایی، ریشه (در عمق ۰) باشد؛ این حالت امکان ندارد، زیرا رأس دیگر باید در عمق ۵ باشد، اما حداکثر عمق رأس ها ۴ است.
- رأس بالایی، رأسی در عمق ۱ باشد؛ در این صورت انتخاب خود رأس ۲ حالت و انتخاب رأس دیگر ۸ حالت دارد.
- رأس بالایی، رأسی در عمق ۲ باشد؛ در این صورت انتخاب خود رأس ۴ حالت و انتخاب رأس دیگر ۴ حالت دارد.
- رأس بالایی، رأسی در عمق ۳ باشد؛ در این صورت انتخاب خود رأس ۸ حالت و انتخاب رأس دیگر ۴ حالت دارد.
- رأس بالایی، رأسی در عمق ۴ یا ۵ باشد؛ این حالت امکان ندارد، زیرا رأس های با فاصله ی ۵ از این رأس ها، در عمق های کم تر قرار دارند.

مرحله ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

پس پاسخ برابر

$$۱۶ + ۱۶ + ۳۲ = ۶۴$$

□

است.

۱۰ دانش آموز یک مدرسه در صفی ایستاده اند و روی سر هر کدام از آن ها کلاهی قرمز یا آبی قرار دارد. ناظم در هر مرحله، یکی از دانش آموزان صف را از صف خارج کرده و به کلاس می فرستد. نحوه ی انتخاب دانش آموز توسط ناظم در هر مرحله به شکل زیر است:

اگر تنها یک نفر در صف باشد، همان فرد انتخاب می شود؛ در غیر این صورت (در صورت وجود حداقل دو نفر در صف)، اگر نفر اول صف کلاه آبی و نفر دوم کلاه قرمز داشته باشند، نفر دوم صف، و در غیر این صورت، نفر اول صف انتخاب می شود.

پس از ۱۰ مرحله، تمام دانش آموزان صف به کلاس می روند. یک دنباله از رنگ های قرمز و آبی را به این صورت می سازیم که از یک دنباله ی خالی شروع می کنیم و به ازای هر دانش آموزی که از صف خارج شد، رنگ کلاه او را در انتهای دنباله اضافه می کنیم. به دنباله ی ۱۰ عنصری حاصل **دنباله ی سلطانی** صف می گوئیم. تمام ۲۱۰ حالت اولیه برای رنگ کلاه های دانش آموزان صف، روی هم چند دنباله ی سلطانی متمایز تولید می کنند؟

۱۰۲۴ (۱) ۵۱۳ (۲) ۱۴۴ (۳) ۵۱۲ (۴) ۱۲۸ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

می توانیم فرض کنیم اگر کلاه نفر اول صف آبی است، نفر دوم انتخاب می شود (مگر این که فقط یک نفر در صف باقی مانده باشد). اگر حداقل یک کلاه آبی موجود باشد، قطعاً عنصر آخر دنباله آبی خواهد بود. از طرفی تمام دنباله هایی که عنصر آخرشان آبی است، قابل تولید هستند؛ زیرا کافی است به نفر اول صف کلاه آبی بدهیم (متناظر عنصر آخر دنباله) و به بقیه، به ترتیب سایر اعضای دنباله کلاه متناظر را بدهیم. یک حالت مطلوب نیز این است که تمام کلاه ها قرمز باشد. پس پاسخ برابر $۵۱۳ + ۱ = ۵۱۴$ است. □

۹ می خواهیم ۲۰ جایزه با ارزش های ۲۰، ۲۱، ... و ۲۱۹ را بین ۱۰ بچه تقسیم کنیم (لزومی ندارد به هر نفر دقیقاً ۲ جایزه برسد؛ حتی ممکن است به یک نفر هیچ جایزه ای نرسد). هر بچه به میزان مجموع ارزش جایزه های دریافتی اش خوشحال می شود. پس از پخش جایزه ها، به خوشحال ترین بچه، سنگول و به بچه ای که کمترین خوشحالی را دارد، منگول می گوئیم. کمینه ی اختلاف خوشحالی سنگول و منگول چه قدر است؟

۵۲۲۲۴۱ (۱) ۱۰۲۴ (۲) ۵۲۲۷۵۳ (۳) ۴۲۵۷۰۰ (۴) ۳۲۵۲۳ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

فردی که جایزه ی با ارزش ۲۱۹ را دریافت می کند، A در نظر بگیرد. با توجه به وجود ۱۰ نفر، قطعاً فردی وجود دارد که هیچ یک از ۹ جایزه ی با ارزش های ۲۱ تا ۲۱۹ را دریافت نمی کند؛ یکی از این افراد را در نظر گرفته و B بنامید. اختلاف خوشحالی A و B حداقل

$$۲۱۹ - (۲^0 + \dots + ۲^{10}) = ۲۱۹ - (۲^{11} - ۱) = ۵۲۲۲۴۱$$

مرحله ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

است. از طرفی اگر جایزه های با ارزش های 2° تا 21° را به یک نفر، و هر یک از جایزه های دیگر را به نفراتی جداگانه بدهیم، مقدار بالا محقق می شود. پس پاسخ برابر 522241 است. $\square$

جدولی 3×2 داریم. به دو خانه از جدول مجاور گوئیم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. به مجموعه ای از خانه ها همبند گوئیم اگر به ازای هر دو خانه ی A و B از آن مجموعه، بتوانیم از A آغاز کرده، هر مرحله به یک خانه ی مجاور برویم، و در پایان به B برسیم. به چند طریق می توان خانه های این جدول را به 4 مجموعه ی همبند افراز کرد؟

۲ (۱) ۱۰ (۲) ۶ (۳) ۳۱ (۴) ۲۱ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

دو حالت داریم:

- خانه ها به دو بخش ۲ خانه ای و دو بخش ۱ خانه ای افراز شوند.
- خانه ها به سه بخش ۱ خانه ای و یک بخش ۳ خانه ای افراز شوند.

هر یک از پاسخ های مسئله (چه در حالت اول بگنجد و چه در حالت دوم)، متناظر انتخاب ۲ زیرجدول 1×2 از ۷ زیرجدول 1×2 ممکن است؛ زیرا اگر آن دو زیرجدول اشتراک نداشته باشند، یک پاسخ مسئله (از حالت اول) ساخته می شود. هم چنین اگر آن دو زیرجدول اشتراک داشته باشند، با ادغام کردن آن دو، پاسخی از مسئله (از حالت دوم) ساخته می شود. پس پاسخ مسئله برابر $21 = \binom{7}{2}$ است. $\square$

یک جدول 3×2 داریم که در ابتدا، تمام خانه های آن سفید هستند. به دو خانه ی سفید با یک ضلع مشترک در جدول دومینوس می گوئیم. الگوریتم زیر را اجرا می کنیم:

تا زمانی که در جدول دومینوس وجود دارد، از میان همه ی دومینوس ها، یکی را به صورت تصادفی (با احتمال های برابر) انتخاب کرده و هر دو خانه ی آن را سیاه می کنیم.

به چه احتمالی پس از پایان الگوریتم، کل جدول سیاه خواهد شد؟

$\frac{13}{21}$ (۱) $\frac{5}{7}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{17}{21}$ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

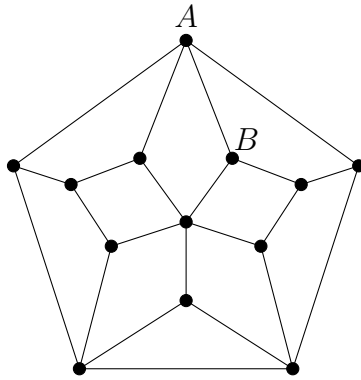
اگر در مرحله ی اول یک دومینوی عمودی گذاشته شود، کل جدول به ناچار سیاه خواهد شد. اگر دومینوی آغازین افقی باشد، تنها در یکی از سه حالت دومینوی دوم، جدول سیاه نخواهد شد. پس پاسخ برابر است با:

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{17}{21}$$

$\square$

در شکل زیر، به دو نقطه (رأس) مجاور می گوئیم، اگر با یک پاره خط مستقیم به هم وصل باشند:

مرحله ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور



می خواهیم از نقطه ی A آغاز کنیم، در هر مرحله به یک نقطه ی مجاور برویم و پس از دقیقاً ۶ مرحله به نقطه ی B برسیم (عبور از نقطه یا پاره خط تکراری اشکالی ندارد). این کار به چند طریق ممکن است؟

- ۴ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۰ (۴) ۸ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

با حذف کردن یال پایین شکل، گرافی دوبخشی پدید می آید (که در آن گشتی به طول زوج از A به B وجود ندارد). پس حتماً باید از یال پایین شکل عبور کنیم. فاصله ی A و B تا این یال به ترتیب ۲ و ۳ است؛ بنابراین ناچاریم ابتدا با یک مسیر به طول ۲ به یکی از رأس های این یال برویم، سپس یال را طی کرده و در انتها با یک مسیر به طول ۳ به B برویم. با بررسی حالات این مسیرها، مشاهده می کنیم که ۸ مسیر وجود دارد. □

فرض کنید $\langle a_1, a_2, \dots, a_{14} \rangle$ رشته ای از ارقام ۰ و ۱ باشد. به تعدادی رقم متوالی و برابر، یک زنجیره می گوئیم. زنجیره ای که بخشی از یک زنجیره ی بزرگ تر نباشد، بلوک نامیده می شود. برای مثال، رشته ی زیر از ۴ بلوک ساخته شده است:

$$\langle 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$$

الگوریتم زیر را اجرا می کنیم:

تا زمانی که تعداد بلوک های رشته بیش تر از یک است، بلوک اول و دوم (از سمت چپ) را در نظر می گیریم و بلوک کوچک تر را حذف می کنیم (اگر اندازه ی دو بلوک یکسان بود، بلوکی که شامل ارقام ۰ است، حذف می شود).

برای مثال، رشته ی بالا پس از یک مرحله به رشته ی $\langle 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$ تبدیل می شود. در میان تمام حالات ممکن برای رشته ی ۱۴ رقمی آغازین، کمینه ی تعداد ارقام رشته ی نهایی (پس از اجرای کامل الگوریتم مذکور) چیست؟

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۳ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

هر دو مرحله، طول بلوکی که حذف می شود حداقل یکی اضافه می گردد. طول بلوکی که در انتها باقی می ماند نیز کم تر از طول آخرین بلوک حذف شده نیست. پس اگر طول بلوک نهایی k باشد، حداکثر

$$2(1 + 2 + \dots + k) = k(k + 1)$$

مرحله ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

عنصر دیگر حذف شده است. با توجه به این که

$$k(k+1) + k \geq 14$$

پس $k \geq 3$ است. برای $k = 3$ نیز رشته ی زیر را در نظر بگیرید:

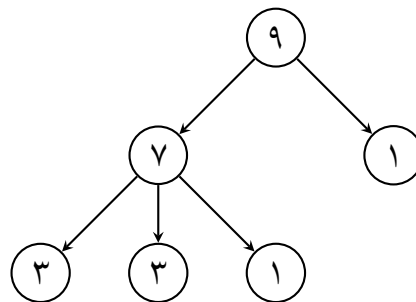
$\langle 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0 \rangle$

□

دنباله ای از اعداد طبیعی داریم. می خواهیم تعدادی رابطه بین اعداد این دنباله با شرایط زیر تعریف کنیم:

- در هر رابطه، دو عدد نابرابر درگیر می شوند که عدد بزرگتر را پدر رابطه و عدد کوچکتر را فرزند رابطه می نامیم.
- هر عدد باید حداکثر در یک رابطه، نقش فرزند را داشته باشد.
- مجموع فرزندان هر عدد باید کم تر یا مساوی خودش باشد.

به یک عدد **بدسگال** گوییم، اگر در هیچ رابطه ای فرزند نباشد. هدف، تعریف تعدادی رابطه بین اعداد دنباله است، طوری که تعداد عددهای بدسگال کمینه شود. به عنوان مثال، اگر دنباله ی اعداد برابر $\langle 1, 1, 3, 3, 7, 9 \rangle$ باشد، می توانیم به شکل زیر، رابطه ها را طوری تعریف کنیم که فقط یک عدد بدسگال داشته باشیم (هر پاره خط جهت دار نشان گر یک رابطه است که از پدر به فرزند کشیده شده است):



_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

۱۴ اگر دنباله ی اعداد برابر $\langle 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5 \rangle$ باشد، حداقل چند عدد بدسگال خواهیم داشت؟

۵ (۵)

۱ (۴)

۳ (۳)

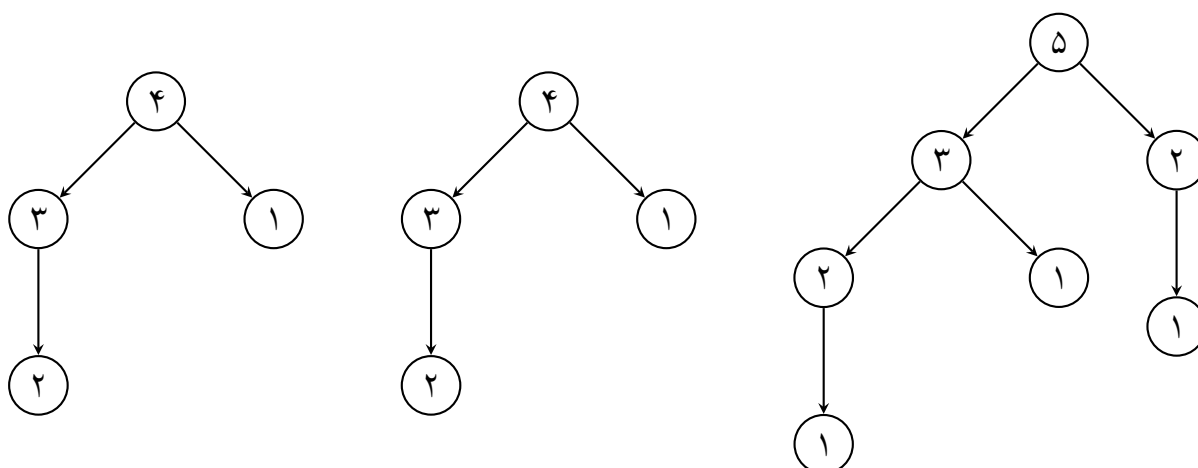
۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

هیچ دو تا از اعداد ۳ نمی توانند در زیردرخت یک عدد بدسگال مشترک باشند، پس دست کم به سه عدد بدسگال نیاز داریم. هم چنین اگر رابطه ها را به صورت زیر تنظیم کنیم، دقیقاً سه عدد بدسگال ساخته می شود.

مرحله ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور



□

الگوریتم های زیر را در نظر بگیرید: ۱۵

آ) دنباله ی اعداد را از بزرگ به کوچک مرتب، و سپس آن را پیمایش می کنیم. به ترتیب به هر عدد که رسیدیم، آن را فرزند کوچک ترین پدر ممکن قرار می دهیم (اگر پدر مجاز با شرایط مسئله برای او وجود نداشت، او را فرزند کسی قرار نمی دهیم و در نتیجه، بدسگال می شود).

ب) دنباله ی اعداد را از بزرگ به کوچک مرتب، و سپس آن را پیمایش می کنیم. به ترتیب به هر عدد که رسیدیم، آن را فرزند بزرگ ترین پدر ممکن قرار می دهیم (اگر پدر مجاز با شرایط مسئله برای او وجود نداشت، او را فرزند کسی قرار نمی دهیم و در نتیجه، بدسگال می شود).

پ) دنباله ی اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب، و سپس آن را پیمایش می کنیم. به ترتیب به هر عدد که رسیدیم، با بررسی تمام حالات ایجاد رابطه بین این عدد و اعداد بدسگال کنونی کوچک تر از آن، بیش ترین تعداد بدسگال ممکن را (مطابق با شرایط مسئله)، فرزند عدد فعلی قرار می دهیم.

کدام الگوریتم ها به ازای هر دنباله ی اولیه ای از اعداد، کم ترین تعداد بدسگال ممکن را ایجاد می کنند؟

(۱) ب و پ (۲) آ و پ (۳) هر سه (۴) هیچ کدام (۵) فقط پ

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

هیچ کدام از سه الگوریتم، ما را به هدف نمی رسانند. برای هر یک از الگوریتم ها مثال نقضی ارائه می کنیم:

• الگوریتم (آ):

$\langle 4, 3, 2, 2, 2 \rangle$

• الگوریتم (ب):

$\langle 21, 10, 9, 8, 3, 3, 3, 3, 3, 3 \rangle$

• الگوریتم (پ):

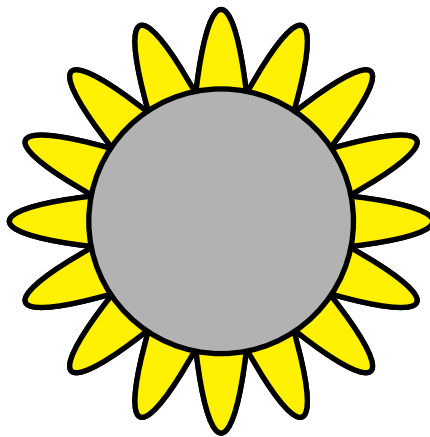
$\langle 15, 10, 6, 5, 5 \rangle$

□

مرحله ی یکم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۹۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ نامه کنید.
- سوالات ۱۱ تا ۱۵ در دسته های چند سوالی آمده اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ یک گل آفتاب گردان ۱۶ گل برگ دارد که در کنار هم، دور تا دور گل را پوشش می دهند. پیمان هر مرحله، یک گل برگ را از گل جدا می کند و به اندازه ی تعداد گل برگ های مجاور جدا نشده ی آن گل برگ، از آبولف یک تومان پول می گیرد. به ترتیب (از سمت راست) حداقل و حداکثر مقدار پولی که پیمان می تواند از آبولف بگیرد، چند تومان است؟



۱۶ و ۱۵ (۵)

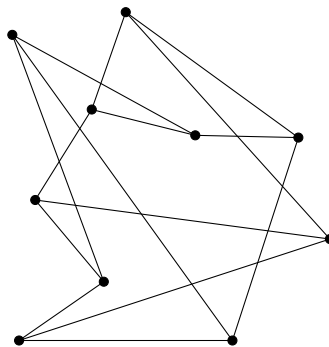
۲۴ و ۱۶ (۴)

۱۶ و ۱۲ (۳)

۱۶ و ۱۶ (۲)

۲۴ و ۱۵ (۱)

۲ ۱۰ رأس مطابق شکل زیر در صفحه داریم که تعدادی از آن ها با یک پاره خط به یک دیگر وصل شده اند. در هر مرحله می توانیم یک رأس و تمام پاره خط های متصل به آن را پاک کرده، سپس آن رأس را در یک نقطه ی خالی از صفحه رسم کرده و دوباره با پاره خط به همان رأس هایی که به این رأس وصل بودند، وصل کنیم. مراحل باید به نحوی انجام شوند که پاره خط بین هر دو رأس، از رأس دیگری عبور نکند. کمینه ی تعداد مراحل برای آن که در شکل نهایی هیچ دو پاره خطی یک دیگر را قطع نکنند (جز در نقاط شکل) چیست؟



۴ (۵)

۳ (۴)

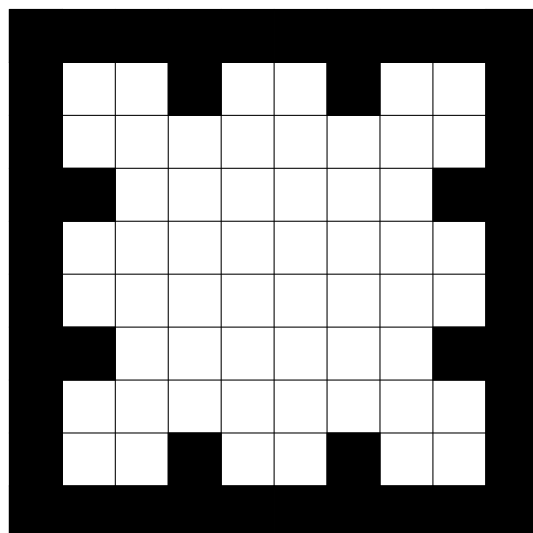
۵ (۳)

۶ (۲)

۲ (۱)

مرحله ی یکم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

۳ رباتی می خواهد ابتدا در یکی از خانه های سفید شکل زیر قرار بگیرد. سپس یکی از چهار جهت راست، بالا، چپ و پایین را انتخاب می کند و در آن راستا شروع به حرکت می نماید. ربات در هر مرحله سعی می کند در جهتی که دارد، یک واحد حرکت کند. اگر ربات نتواند این کار را انجام دهد (خانه ی بعدی در آن جهت سیاه باشد)، ۹۰ درجه به راست می چرخد. ربات حداکثر چند خانه ی متفاوت را خواهد دید؟



۱۶ (۵)

۳۶ (۴)

۲۴ (۳)

۳۲ (۲)

۳۸ (۱)

۴ در شکل زیر می خواهیم از خانه ی A به خانه ی B برویم. در هر مرحله می توانیم به یک خانه ی مجاور (دارای ضلع مشترک با خانه ی کنونی) برویم. برای عبور از هر خانه، باید به مقدار عدد درون آن خانه هزینه بدهیم. کمینه ی هزینه ی لازم برای رسیدن از A به B چیست؟

۱	۱۴	۲	۱	۳	۱
۲	۱۳	۱	۱۳	۴	۱
۱	A	۱۰۰	B	۵	۱
۳	۱۴	۵	۱۰	۱	۲
۱	۱۳	۴	۲	۱	۱
۲	۳	۱	۱	۱۳	۵

۱۸ (۵)

۲۷ (۴)

۲۴ (۳)

۲۱ (۲)

۲۹ (۱)

۵ اگر n یک عدد طبیعی باشد، $f(n)$ را تعداد رقم های ۱ متوالی سمت راست نمایش دودویی (مبنای ۲) عدد n در نظر می گیریم. برای مثال $f(۸) = ۰$ و $f(۱۹) = ۲$. مجموع مقادیر $f(n)$ به ازای n از ۱ تا ۲۵۵ چیست؟

۱۲۸ (۵)

۲۵۵ (۴)

۱۲۷ (۳)

۲۴۷ (۲)

۲۵۶ (۱)

مرحله ی یکم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

۶ به چند طریق می توان برخی از خانه های یک جدول 5×5 را علامت زد، طوری که در هر زیرجدول 4×2 و 2×4 دقیقاً یک خانه ی علامت دار و در هر زیرجدول 3×3 حداقل یک خانه ی علامت دار وجود داشته باشد؟

۹ (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۸ (۴) ۴ (۵)

۷ حداکثر چند مکعب واحد از یک مکعب $5 \times 5 \times 5$ را می توان رنگ کرد، به طوری که در هر زیرمکعب $2 \times 2 \times 2$ حداکثر یک مکعب واحد رنگ شده باشد؟

۲۵ (۱) ۳۰ (۲) ۱۸ (۳) ۲۷ (۴) ۲۴ (۵)

۸ منظور از $f(x)$ باقی مانده ی عدد x در تقسیم بر ۲ است. برای مثال $f(15) = 1$. فرض کنید دو عدد صحیح a و b را داریم. الگوریتم زیر را اجرا می کنیم:

۱. اگر دو عدد a و b برابر بودند، به مرحله ی ۶ برو.

۲. اگر $a > b$ ، آن گاه مقادیر a و b را جابه جا کن.

۳. مقدار a را برابر $a + 3$ قرار بده.

۴. مقدار b را برابر $b - f(b)$ قرار بده.

۵. به مرحله ی ۱ برو.

۶. پایان.

به چند طریق می توانیم اعداد آغازین الگوریتم (a و b) را با شرط $1 \leq a < b \leq 20$ انتخاب کنیم، طوری که الگوریتم پس از تعدادی مرحله به پایان برسد؟

۸۵ (۱) ۳۰ (۲) ۶۰ (۳) ۵۴ (۴) ۵۷ (۵)

۹ ۱۰ نفر در یک ردیف داریم و می خواهیم ۱۰ میوه ی یکسان را بین آن ها تقسیم کنیم (لزومی ندارد به هر نفر دقیقاً یک میوه برسد). هر مرحله، به طور هم زمان هر فرد میوه دار، یکی از میوه هایش را خورده و بقیه را به نفر راستی اش می دهد (اگر کسی نفر سمت راستی نداشته باشد، خودش بقیه ی میوه هایش را نیز می خورد). به چند طریق در ابتدا می توانیم میوه ها را تقسیم کنیم، طوری که پس از خورده شدن تمام میوه ها، هر فرد دقیقاً یک میوه خورده باشد؟

۸۹ (۱) ۵۱۲ (۲) ۷۲۰ (۳) ۲۴۳ (۴) ۳۴۳ (۵)

۱۰ ۱۰ نفر در یک ردیف داریم و می خواهیم ۱۰ میوه ی یکسان را بین آن ها تقسیم کنیم (لزومی ندارد به هر نفر دقیقاً یک میوه برسد). هر مرحله، به طور هم زمان هر فرد میوه دار کارهای زیر را به ترتیب انجام می دهد:

۱. یکی از میوه هایش را می خورد.

۲. در صورتی که هنوز میوه ای داشته باشد، یکی از میوه هایش را به نفر سمت راستش می دهد (اگر نفر سمت راستی نداشته باشد، آن میوه را خودش می خورد).

۳. در صورتی که هنوز میوه ای داشته باشد، تمام میوه های باقی مانده را به نفر سمت چپش می دهد (اگر نفر سمت چپ نداشته باشد، آن میوه ها را خودش می خورد).

مرحله ی یکم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

به چند طریق در ابتدا می توانیم میوه ها را تقسیم کنیم، طوری که در انتها هر کس دقیقاً یک میوه خورده باشد؟

۲۷۴ (۱) ۱۴۹ (۲) ۱۴۴ (۳) ۸۹ (۴) ۲۵۶ (۵)

در یک جدول، خانه ی واقع در سطر i ام و ستون j ام جدول را با (i, j) نشان می دهیم. فاصله ی سلماسی دو خانه ی (r_1, c_1) و (r_2, c_2) در جدول را برابر با $|c_1 - c_2| + |r_1 - r_2|$ در نظر می گیریم.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

در یک جدول 5×5 به ازای هر دو خانه از جدول، فاصله ی سلماسی آن ها را حساب می کنیم و سپس تمام این فاصله های حساب شده را با هم جمع می کنیم. حاصل جمع به دست آمده کدام است؟

۱۰۰۰ (۱) ۲۵۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۷۵۰ (۴) ۵۰۰ (۵)

افروز در یک جدول 9×9 سه خانه را علامت می زند. فاصله ی سلماسی نزدیک ترین جفت از این سه خانه ی علامت دار (از نظر فاصله ی سلماسی)، حداکثر چه قدر است؟

۱۱ (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۰ (۴) ۹ (۵)

فرض کنید دنباله ای از اعداد داریم. در هر مرحله می توان یکی از سه عملیات زیر را روی دنباله انجام داد:

- دستور $copy$: با دستور $copy(i)$ یک عدد با مقدار i امین عضو دنباله به انتهای دنباله اضافه می شود. برای مثال اگر دنباله ی $\langle 3, 7, 2, 1, 7 \rangle$ را داشته باشیم، با دستور $copy(2)$ به دنباله ی $\langle 3, 7, 2, 1, 7, 7 \rangle$ می رسیم.
- دستور $delete$: با دستور $delete(i)$ عدد i ام دنباله حذف می شود. برای مثال اگر دنباله ی $\langle 4, 1, 9, 2, 5 \rangle$ را داشته باشیم، با دستور $delete(2)$ به دنباله ی $\langle 4, 9, 2, 5 \rangle$ می رسیم.
- دستور $merge$: با دستور $merge(i, j)$ عدد j ام دنباله حذف شده و مقدار آن به عدد i ام دنباله اضافه می شود. در این دستور باید $i < j$ باشد. برای مثال اگر دنباله ی $\langle 4, 1, 9, 2, 5 \rangle$ را داشته باشیم، با دستور $merge(2, 4)$ به دنباله ی $\langle 4, 3, 9, 5 \rangle$ می رسیم.

اجرای هر یک از دستورهای بالا یک واحد هزینه دارد. متغیر $size$ در هر لحظه تعداد عضوهای دنباله را نشان می دهد. برای مثال وقتی دنباله ی $\langle 3, 6, 10, 1 \rangle$ را داریم، $size = 4$ است.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید _____

فرض کنید در ابتدا دنباله ی $\langle 1, 2, \dots, 100 \rangle$ را داریم. پس از اجرای الگوریتم زیر، مجموع اعضای دنباله چه خواهد بود؟

۱. اگر $size < 3$ است، به گام ۵ برو.

۲. $delete(size - 1)$

۳. $merge(size - 1, size)$

مرحله ی یکم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

۴. به گام ۱ برو.

۵. پایان.

۴۹۵۱ (۵)	۲۵۵۱ (۴)	۲۵۵۰ (۳)	۵۰۵۱ (۲)	۲۵۰۱ (۱)

۱۴ فرض کنید در ابتدا دنباله ی $\langle ۰, ۱ \rangle$ را داریم. پس از اجرای الگوریتم زیر، عنصر آخر دنباله چه خواهد بود؟

۱. به ازای i از ۱ تا ۱۰ انجام بده:۱-۱. $copy(size - 1)$ ۱-۲. $copy(size - 1)$ ۱-۳. $merge(size - 1, size)$

۸۹ (۵)	۲۵۶ (۴)	۵۱۲ (۳)	۱۴۴ (۲)	۱۰۲۴ (۱)

۱۵ فرض کنید در ابتدا دنباله ی $\langle ۱ \rangle$ را داریم و می خواهیم با یک برنامه به دنباله ی $\langle ۱, ۲, \dots, ۱۰۰ \rangle$ برسیم. کمینه ی

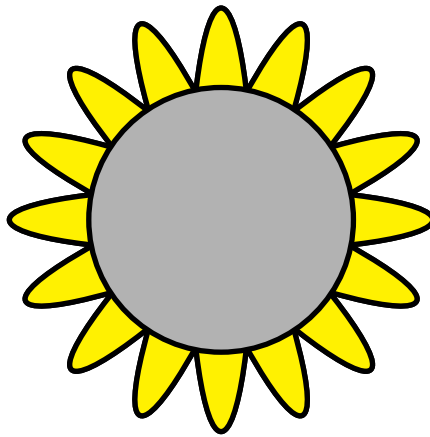
هزینه ی (تعداد اجراهای دستورهای) مورد نیاز چیست؟

۲۹۷ (۵)	۱۹۸ (۴)	۹۹ (۳)	۳۰۰ (۲)	۲۴۰ (۱)

مرحله ی یکم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۹۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ نامه کنید.
- سوالات ۱۱ تا ۱۵ در دسته های چند سوالی آمده اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ یک گل آفتاب گردان ۱۶ گل برگ دارد که در کنار هم، دور تا دور گل را پوشش می دهند. پیمان هر مرحله، یک گل برگ را از گل جدا می کند و به اندازه ی تعداد گل برگ های مجاور جدا نشده ی آن گل برگ، از آبولف یک تومان پول می گیرد. به ترتیب (از سمت راست) حداقل و حداکثر مقدار پولی که پیمان می تواند از آبولف بگیرد، چند تومان است؟



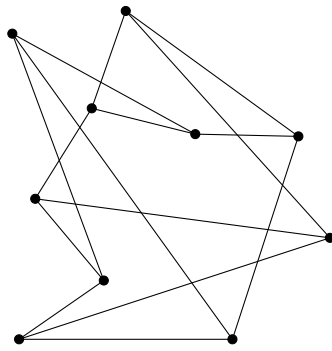
(۱) ۱۵ و ۲۴ (۲) ۱۶ و ۱۶ (۳) ۱۲ و ۱۶ (۴) ۱۶ و ۲۴ (۵) ۱۵ و ۱۶

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

جواب نهایی مسئله ثابت است و ربطی به ترتیب برداشتن گل برگ ها ندارد. به ازای هر دو گل برگ مجاور، گل برگی که زودتر برداشته می شود، سبب گرفتن یک تومان توسط پیمان (به واسطه ی گل برگ دیگر) می شود. پس پیمان همواره بدون توجه به نحوه ی چیدن گل برگ ها ۱۶ تومان پول می گیرد. □

۲ ۱۰ رأس مطابق شکل زیر در صفحه داریم که تعدادی از آن ها با یک پاره خط به یک دیگر وصل شده اند. در هر مرحله می توانیم یک رأس و تمام پاره خط های متصل به آن را پاک کرده، سپس آن رأس را در یک نقطه ی خالی از صفحه رسم کرده و دوباره با پاره خط به همان رأس هایی که به این رأس وصل بودند، وصل کنیم. مراحل باید به نحوی انجام شوند که پاره خط بین هر دو رأس، از رأس دیگری عبور نکند. کمینه ی تعداد مراحل برای آن که در شکل نهایی هیچ دو پاره خطی یک دیگر را قطع نکنند (جز در نقاط شکل) چیست؟

مرحله ی یکم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور



۴ (۵)

۳ (۴)

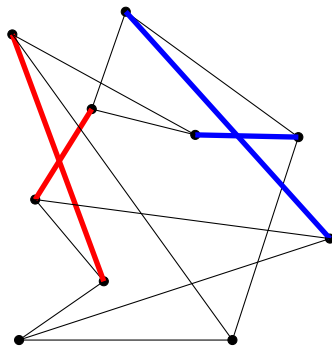
۵ (۳)

۶ (۲)

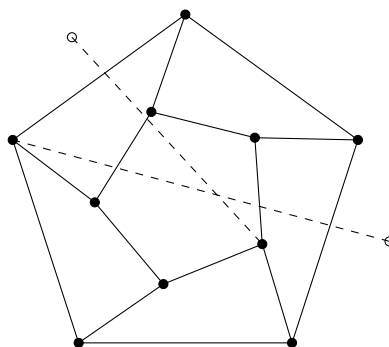
۲ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

دو جفت پاره خط متقاطع داریم که در هر جابه جایی حداکثر یکی از تقاطع ها از بین می رود. پس حداقل دو حرکت برای از بین بردن آن ها نیاز داریم:



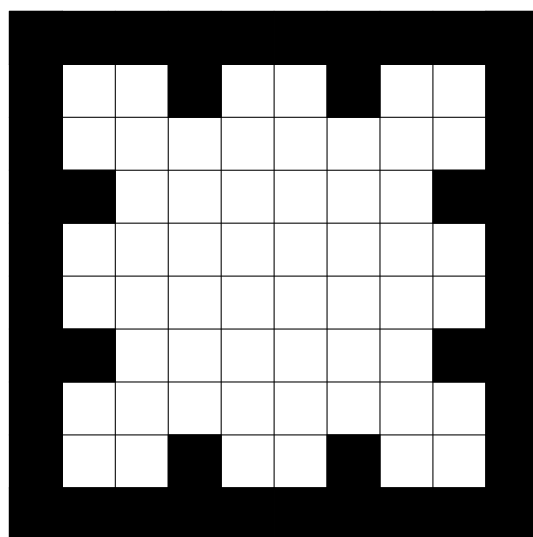
حال مثالی با دو جابه جایی ارائه می کنیم که در آن هیچ تقاطعی در شکل نهایی باقی نماند:



□

۳ رباتی می خواهد ابتدا در یکی از خانه های سفید شکل زیر قرار بگیرد. سپس یکی از چهار جهت راست، بالا، چپ و پایین را انتخاب می کند و در آن راستا شروع به حرکت می نماید. ربات در هر مرحله سعی می کند در جهتی که دارد، یک واحد حرکت کند. اگر ربات نتواند این کار را انجام دهد (خانه ی بعدی در آن جهت سیاه باشد)، ۹۰ درجه به راست می چرخد. ربات حداکثر چند خانه ی متفاوت را خواهد دید؟

مرحله ی یکم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور



۱۶ (۵)

۳۶ (۴)

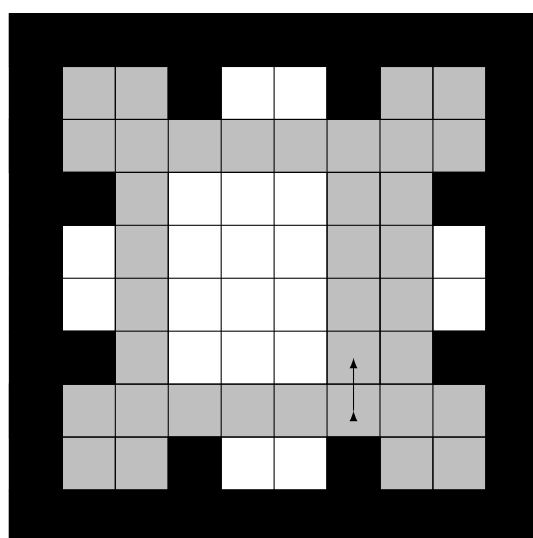
۲۴ (۳)

۳۲ (۲)

۳۸ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

به ازای هر خانه و جهت آغازین، ربات پس از مدتی در یک دور خواهد افتاد که متناوباً آن را طی خواهد کرد. با بررسی این دورها و حالت آغازین، یکی از حالات بهینه به صورت زیر یافت می شود:



□

در شکل زیر می خواهیم از خانه ی A به خانه ی B برویم. در هر مرحله می توانیم به یک خانه ی مجاور (دارای ضلع مشترک با خانه ی کنونی) برویم. برای عبور از هر خانه، باید به مقدار عدد درون آن خانه هزینه بدهیم. کمینه ی هزینه ی لازم برای رسیدن از A به B چیست؟

۴

مرحله ی یکم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱	۱۴	۲	۱	۳	۱
۲	۱۳	۱	۱۳	۴	۱
۱	A	۱۰۰	B	۵	۱
۳	۱۴	۵	۱۰	۱	۲
۱	۱۳	۴	۲	۱	۱
۲	۳	۱	۱	۱۳	۵

۱۸ (۵)

۲۷ (۴)

۲۴ (۳)

۲۱ (۲)

۲۹ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

مسیری با هزینه ی ۲۱ در شکل زیر نشان داده شده است:

۱	۱۴	۲	۱	۳	۱
۲	۱۳	۱	۱۳	۴	۱
۱	A	۱۰۰	B	۵	۱
۳	۱۴	۵	۱۰	۱	۲
۱	۱۳	۴	۲	۱	۱
۲	۳	۱	۱	۱۳	۵

برای اثبات بهینه بودن مسیر بالا، می توانید از حالت بندی و استدلال منطقی کمک بگیرید. یک راه حل دیگر هم این است که با الگوریتم دایکسترا کمینه ی هزینه ی مورد نیاز برای رسیدن به هر خانه را به دست آورید که در شکل زیر نوشته شده است:

۴	۱۸	۱۶	۱۷	۲۰	۲۱
۳	۱۳	۱۴	۲۷	۲۴	۲۲
۱	۰	۱۰۰	۲۱	۲۱	۱۹
۴	۱۸	۲۰	۲۴	۱۶	۱۸
۵	۱۸	۱۵	۱۴	۱۵	۱۶
۷	۱۰	۱۱	۱۲	۲۵	۲۱

□

۵ اگر n یک عدد طبیعی باشد، $f(n)$ را تعداد رقم های ۱ متوالی سمت راست نمایش دودویی (مبنای ۲) عدد n در نظر می گیریم. برای مثال $f(۸) = ۰$ و $f(۱۹) = ۲$. مجموع مقادیر $f(n)$ به ازای n از ۱ تا ۲۵۵ چیست؟

مرحله ی یکم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۲۸ (۵)

۲۵۵ (۴)

۱۲۷ (۳)

۲۴۷ (۲)

۲۵۶ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

راه یکم: رقم i ام (از سمت راست) مجموعاً 2^{8-i} بار در $f(n)$ ها اثر داشته است. پس با محاسبه به ازای i های مختلف پاسخ برابر است با:

$$2^7 + 2^6 + \dots + 2^0 = 255$$

راه دوم: $f(n)$ در حقیقت تعداد عوامل ۲ در عدد $n + 1$ است. پس باید مجموع تعداد عوامل ۲ اعداد ۲ تا ۲۵۶ را به دست آوریم که برابر است با:

$$\left\lfloor \frac{256}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{256}{2^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{256}{2^8} \right\rfloor = 255$$

□

۶ به چند طریق می توان برخی از خانه های یک جدول 5×5 را علامت زد، طوری که در هر زیرجدول 4×2 و 2×4 دقیقاً یک خانه ی علامت دار و در هر زیرجدول 3×3 حداقل یک خانه ی علامت دار وجود داشته باشد؟

۴ (۵)

۸ (۴)

۱ (۳)

۰ (۲)

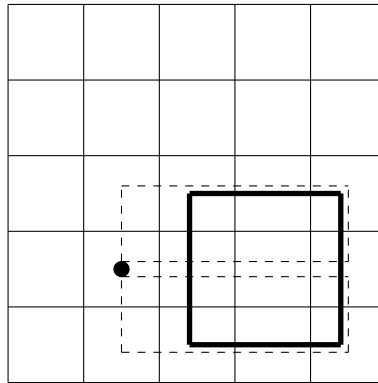
۹ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

•				•
		•		
•				•

از هر خانه (جز خانه های علامت زده شده) می توان دو زیرجدول هم شکل کشید که این خانه در هر دوی آنها در گوشه ی زیرجدول قرار دارد. در این دو زیرجدول نباید هیچ خانه ی سیاه دیگری باشد. در این صورت یک مربع 3×3 ایجاد می شود که در آن هیچ خانه ی سیاهی نیست.

مرحله ی یکم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور



پس تنها در خانه های شکل اول را می توان علامت دار کرد که در این صورت تنها یک حالت برای علامت گذاری وجود دارد.

□

حداکثر چند مکعب واحد از یک مکعب $5 \times 5 \times 5$ را می توان رنگ کرد، به طوری که در هر زیر مکعب $2 \times 2 \times 2$ حداکثر یک مکعب واحد رنگ شده باشد؟

۲۴ (۵)

۲۷ (۴)

۱۸ (۳)

۳۰ (۲)

۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

جواب برای یک مکعب $5 \times 5 \times 5$ کمتر مساوی یک مکعب $6 \times 6 \times 6$ است. از آن جا که در یک مکعب $6 \times 6 \times 6$ تنها ۲۷ مکعب $2 \times 2 \times 2$ قرار دارد، حداکثر ۲۷ خانه ی رنگی خواهیم داشت. حال برای ارائه ی یک روش با ۲۷ خانه ی رنگ شده، سطر، ستون و ارتفاع مکعب های واحد را به ترتیب از ۱ تا ۵ شماره گذاری می کنیم و تمام خانه هایی که هر ۳ عضو مختصات آن ها عددی فرد است را رنگ می کنیم.

□

منظور از $f(x)$ باقی مانده ی عدد x در تقسیم بر ۲ است. برای مثال $f(15) = 1$. فرض کنید دو عدد صحیح a و b را داریم. الگوریتم زیر را اجرا می کنیم:

۱. اگر دو عدد a و b برابر بودند، به مرحله ی ۶ برو.

۲. اگر $a > b$ ، آن گاه مقادیر a و b را جابه جا کن.

۳. مقدار a را برابر $a + 3$ قرار بده.

۴. مقدار b را برابر $b - f(b)$ قرار بده.

۵. به مرحله ی ۱ برو.

۶. پایان.

به چند طریق می توانیم اعداد آغازین الگوریتم (a و b) را با شرط $1 \leq a < b \leq 20$ انتخاب کنیم، طوری که الگوریتم پس از تعدادی مرحله به پایان برسد؟

۵۷ (۵)

۵۴ (۴)

۶۰ (۳)

۳۰ (۲)

۸۵ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

مرحله ی یکم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

با حالت بندی روی زوج یا فرد بودن عدد بزرگتر می توانید بررسی کنید که اگر زمانی عدد کوچکتر آغازین، بزرگتر از عدد دیگر شود، دو عدد هرگز برابر نخواهند شد. پس اگر عدد بزرگتر آغازین k باشد، تعداد حالت های مطلوب برای عدد کوچکتر $\lceil \frac{k-f(k)}{3} - 1 \rceil$ خواهد شد (زیرا باقی مانده ی عدد کوچکتر در تقسیم بر ۳ باید برابر باقی مانده ی $k - f(k)$ در تقسیم بر ۳ باشد). با شمارش تمام حالات به ازای k های مختلف، پاسخ ۵۴ به دست می آید.

۱۰ نفر در یک ردیف داریم و می خواهیم ۱۰ میوه ی یکسان را بین آن ها تقسیم کنیم (لزومی ندارد به هر نفر دقیقاً یک میوه برسد). هر مرحله، به طور هم زمان هر فرد میوه دار، یکی از میوه هایش را خورده و بقیه را به نفر راستی اش می دهد (اگر کسی نفر سمت راستی نداشته باشد، خودش بقیه ی میوه هایش را نیز می خورد). به چند طریق در ابتدا می توانیم میوه ها را تقسیم کنیم، طوری که پس از خورده شدن تمام میوه ها، هر فرد دقیقاً یک میوه خورده باشد؟

۸۹ (۱) ۵۱۲ (۲) ۷۲۰ (۳) ۲۴۳ (۴) ۳۴۳ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

با تعیین این که هر نفر میوه اش را خودش از ابتدا داشته باشد یا این که از دیگران بگیرد (دو حالت)، تقسیم میوه ها به صورت یکتا معین می گردد. پس $512 = 2^9$ حالت داریم.

۱۰ نفر در یک ردیف داریم و می خواهیم ۱۰ میوه ی یکسان را بین آن ها تقسیم کنیم (لزومی ندارد به هر نفر دقیقاً یک میوه برسد). هر مرحله، به طور هم زمان هر فرد میوه دار کارهای زیر را به ترتیب انجام می دهد:

۱. یکی از میوه هایش را می خورد.
 ۲. در صورتی که هنوز میوه ای داشته باشد، یکی از میوه هایش را به نفر سمت راستش می دهد (اگر نفر سمت راستی نداشته باشد، آن میوه را خودش می خورد).
 ۳. در صورتی که هنوز میوه ای داشته باشد، تمام میوه های باقی مانده را به نفر سمت چپش می دهد (اگر نفر سمت چپ نداشته باشد، آن میوه ها را خودش می خورد).
- به چند طریق در ابتدا می توانیم میوه ها را تقسیم کنیم، طوری که در انتها هر کس دقیقاً یک میوه خورده باشد؟

۲۷۴ (۱) ۱۴۹ (۲) ۱۴۴ (۳) ۸۹ (۴) ۲۵۶ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

تعداد حالت های تقسیم n میوه بین n نفر را با a_n نشان می دهیم. نفر سمت چپ حداکثر دو میوه در ابتدا دارد (در غیر این صورت خودش حداقل دو میوه می خورد). روی تعداد میوه های نفر سمت چپ (در ابتدا) حالت بندی می کنیم:

- نفر سمت چپ دو میوه داشته باشد؛ در این صورت او و نفر سمت راستش همین دو میوه را خواهند خورد. بقیه باید بین خودشان حالت معتبری داشته باشند که a_{n-2} حالت دارد.
- نفر سمت چپ یک میوه داشته باشد؛ در این صورت او این میوه را خواهد خورد. بقیه باید بین خودشان حالت معتبری داشته باشند که a_{n-1} حالت دارد.

مرحله ی یکم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

- نفر سمت چپ میوه ای نداشته باشد؛ در این صورت میوه ی میل شده توسط او در انتها، باید در ابتدا در اختیار نفر سمت راستش باشد و در همان مرحله ی آغازین به او برسد (در غیر این صورت یکی از افراد، بیش از یک میوه خواهد خورد). پس حالات، متناظر حالات معتبر مسئله برای $n - 1$ نفر است، طوری که نفر سمت چپ (بین $n - 1$ نفر) دقیقاً سه میوه در ابتدا داشته باشد. در این حالت $n - 3$ نفر سمت راست، باید حالتی معتبر بین خودشان داشته باشند.

بنابراین داریم:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

از آن جایی که $a_0 = 1$ ، $a_1 = 1$ و $a_2 = 2$ مقدار $a_{10} = 274$ به دست می آید.

□

در یک جدول، خانه ی واقع در سطر i ام و ستون j ام جدول را با (i, j) نشان می دهیم. فاصله ی سلماسی دو خانه ی (r_1, c_1) و (r_2, c_2) در جدول را برابر با $|c_1 - c_2| + |r_1 - r_2|$ در نظر می گیریم.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

در یک جدول 5×5 به ازای هر دو خانه از جدول، فاصله ی سلماسی آن ها را حساب می کنیم و سپس تمام این فاصله های حساب شده را با هم جمع می کنیم. حاصل جمع به دست آمده کدام است؟

۱۱

۱۰۰۰ (۱) ۲۵۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۷۵۰ (۴) ۵۰۰ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

جابجایی کل در راستای افقی برابر با جابجایی کل در راستای عمودی است. حال برای محاسبه ی جابجایی در راستای افقی، به ازای یک مقدار دلخواه X کفایت تعداد جفت خانه هایی را حساب کنیم که در حین رفتن از اولی به دومی، مولفه ی x آن ها لحظه ای برابر X بوده است. برای محاسبه تعداد این جفت ها کفایت تعداد جفت هایی مثل (i, j) را حساب کنیم که $x_i \leq X < x_j$ است که تعداد این خانه ها برابر با

$$(5 \times x_i) \times (5 \times (5 - x_i)) = 25 \times x_i \times (5 - x_i)$$

است که جمع این عبارت به ازای $1 \leq X \leq 5$ برابر با ۵۰۰ است؛ پس جواب برای هر دو مولفه، برابر با ۱۰۰۰ = 2×500 خواهد بود.

□

افروز در یک جدول 9×9 سه خانه را علامت می زند. فاصله ی سلماسی نزدیک ترین جفت از این سه خانه ی علامت دار (از نظر فاصله ی سلماسی)، حداکثر چه قدر است؟

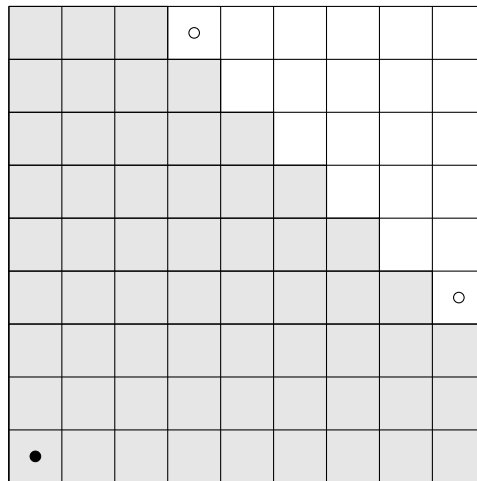
۱۲

۹ (۵) ۱۰ (۴) ۱۲ (۳) ۸ (۲) ۱۱ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

با حرکت دادن هر سه خانه در یک راستا می توان کاری کرد که یکی از نقاط در یکی از چهار گوشه ی مربع باشند. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می کنیم این گوشه در قسمت پایین راست شکل قرار دارد.

مرحله ی یکم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور



برای اینکه جواب بیشتر از ۱۰ شود، نباید هیچ نقطه ی دیگری در ناحیه ی رنگ شده قرار داشته باشد. خارج از ناحیه ی رنگ شده نیز دورترین جفت خانه از هم، دو خانه ی علامت دار هستند که فاصله ی آن ها نیز برابر ۱۰ است.

□

فرض کنید دنباله ای از اعداد داریم. در هر مرحله می توان یکی از سه عملیات زیر را روی دنباله انجام داد:

- دستور $copy$: با دستور $copy(i)$ یک عدد با مقدار i امین عضو دنباله به انتهای دنباله اضافه می شود. برای مثال اگر دنباله ی $\langle 3, 7, 2, 1 \rangle$ را داشته باشیم، با دستور $copy(2)$ به دنباله ی $\langle 3, 7, 2, 1, 7 \rangle$ می رسیم.
- دستور $delete$: با دستور $delete(i)$ عدد i ام دنباله حذف می شود. برای مثال اگر دنباله ی $\langle 4, 1, 9, 2, 5 \rangle$ را داشته باشیم، با دستور $delete(2)$ به دنباله ی $\langle 4, 9, 2, 5 \rangle$ می رسیم.
- دستور $merge$: با دستور $merge(i, j)$ عدد j ام دنباله حذف شده و مقدار آن به عدد i ام دنباله اضافه می شود. در این دستور باید $j < i$ باشد. برای مثال اگر دنباله ی $\langle 4, 1, 9, 2, 5 \rangle$ را داشته باشیم، با دستور $merge(2, 4)$ به دنباله ی $\langle 4, 3, 9, 5 \rangle$ می رسیم.

اجرای هر یک از دستورهای بالا یک واحد هزینه دارد. متغیر $size$ در هر لحظه تعداد عضوهای دنباله را نشان می دهد. برای مثال وقتی دنباله ی $\langle 3, 6, 10, 1 \rangle$ را داریم، $size = 4$ است.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید _____

۱۳ فرض کنید در ابتدا دنباله ی $\langle 1, 2, \dots, 100 \rangle$ را داریم. پس از اجرای الگوریتم زیر، مجموع اعضای دنباله چه خواهد بود؟

۱. اگر $size < 3$ است، به گام ۵ برو.

۲. $delete(size - 1)$

۳. $merge(size - 1, size)$

۴. به گام ۱ برو.

۵. پایان.

مرحله ی یکم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

۴۹۵۱ (۵)

۲۵۵۱ (۴)

۲۵۵۰ (۳)

۵۰۵۱ (۲)

۲۵۰۱ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

هر مرحله عدد یکی مانده به آخر حذف شده و پس از آن دو عدد انتهایی ادغام می گردند. پس به ترتیب دنباله های زیر را خواهیم داشت:

$$\langle 1, 2, \dots, 99, 100 \rangle$$

$$\langle 1, 2, \dots, 97, 98 + 100 \rangle$$

$$\langle 1, 2, \dots, 95, 96 + 98 + 100 \rangle$$

...

$$\langle 1, 2 + 4 + \dots + 100 \rangle$$

پس پاسخ برابر است با:

$$1 + (2 + 4 + 6 + \dots + 100) = 1 + 2 \times \frac{50 \times 51}{2} = 2551$$

□

فرض کنید در ابتدا دنباله ی $\langle 0, 1 \rangle$ را داریم. پس از اجرای الگوریتم زیر، عنصر آخر دنباله چه خواهد بود؟

۱۴

۱. به ازای i از ۱ تا ۱۰ انجام بده:

$$1-1. \text{ } copy(size - 1)$$

$$2-1. \text{ } copy(size - 1)$$

$$3-1. \text{ } merge(size - 1, size)$$

۸۹ (۵)

۲۵۶ (۴)

۵۱۲ (۳)

۱۴۴ (۲)

۱۰۲۴ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

هر بار جمع دو عنصر آخر دنباله به انتهای دنباله اضافه می شود و روندی مشابه دنباله ی فیبوناچی طی خواهد شد. بنابراین در انتها به دنباله ی زیر می رسیم که عنصر آخر آن ۱۴۴ است:

$$\langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 \rangle$$

□

فرض کنید در ابتدا دنباله ی $\langle 1 \rangle$ را داریم و می خواهیم با یک برنامه به دنباله ی $\langle 1, 2, \dots, 100 \rangle$ برسیم. کمینه ی هزینه ی (تعداد اجراهای دستورهای) مورد نیاز چیست؟

۱۵

مرحله ی یکم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۹۷ (۵)

۱۹۸ (۴)

۹۹ (۳)

۳۰۰ (۲)

۲۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

الگوریتم زیر، هزینه ی ۹۷×۳ دارد و به درستی کار می کند:۱. به ازای i از ۲ تا ۱۰۰ انجام بده:۱-۱. $copy(۱)$ ۱-۲. $copy(size - ۱)$ ۱-۳. $merge(size - ۱, size)$

حال ثابت می کنیم نمی توان الگوریتمی با هزینه ی کمتر ارائه کرد. ساختن یک عدد متمایز با اعداد کنونی دنباله تنها با عمل $merge$ امکان پذیر است. پس باید دست کم ۹۹ عمل $merge$ داشته باشیم. از طرفی اضافه کردن تعداد عناصر دنباله تنها با عمل $copy$ امکان پذیر است. پس با توجه به این که دست کم ۹۹ عمل $merge$ داریم، باید دست کم ۹۹×۲ عمل $copy$ نیز داشته باشیم تا تعداد عناصر دنباله به ۱۰۰ برسد. پس دست کم $۲۹۷ = ۹۷ \times ۳$ مرحله نیاز داریم. $\square$

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۱۵۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ نامه کنید.
- سوالات ۱۴ تا ۲۵ در دسته های چند سوالی آمده اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ پیراهن سلطان هفت دکمه دارد که به ترتیب از بالا به پایین با ۱ تا ۷ شماره گذاری شده اند. منظور از دو دکمه ی مجاور، دو دکمه با اختلاف شماره ی ۱ است. یک دکمه را قفل گوئیم، اگر دکمه ی مجاور باز نداشته باشد. در ابتدا تمام دکمه ها باز هستند. سلطان در هر مرحله می تواند یکی از دکمه های غیر قفل خود را ببندد. سلطان به چند ترتیب مختلف می تواند کارش را انجام دهد و به وضعیتی برسد که تمام دکمه ها بسته باشند؟

(۱) ۶۴ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۲ (۵) ۰

۲ یک جدول 3×3 داریم. می خواهیم هر خانه از جدول به جز خانه ی بالا-راست را با قرمز یا آبی رنگ کنیم. پس از رنگ آمیزی، متحرکی از خانه ی پایین-چپ جدول آغاز می کند و در هر مرحله، اگر در خانه ی آبی باشد یک واحد به راست و در غیر این صورت یک واحد به بالا می رود (ممکن است متحرک از جدول خارج شود). به چند طریق می توان خانه های جدول را رنگ کرد، طوری که متحرک پس از تعدادی گام به خانه ی بالا-راست برسد؟

(۱) ۳۲۰ (۲) ۶ (۳) ۹۶ (۴) ۲۰ (۵) ۱۶

۳ سیستم عاملی می خواهد دو برنامه ی زیر را با هم اجرا کند ولی تنها یک پردازنده در اختیار دارد؛ بنابراین در هر مرحله یکی از برنامه ها را انتخاب کرده و نخستین خط اجرا نشده ی آن را اجرا می کند. پیش از شروع اجرای دو برنامه، مقدار متغیر a برابر صفر است. در چند ترتیب مختلف از اجرای خطوط دو برنامه، مقدار متغیر a در انتها برابر دو خواهد شد؟

برنامه ی اول: برنامه ی دوم:

۱. مقدار متغیر a را در متغیر b بریز.
۲. به مقدار متغیر b یک واحد اضافه کن.
۳. مقدار متغیر b را در متغیر a بریز.
۱. مقدار متغیر a را در متغیر c بریز.
۲. به مقدار متغیر c یک واحد اضافه کن.
۳. مقدار متغیر c را در متغیر a بریز.

(۱) ۲ (۲) ۰ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰ (۵) ۱

۴ منظور از رشته، کلمه ای با حروف a, b, c است. هر گاه رشته ی X از تعدادی (حداقل یک) حرف متوالی رشته ی Y به دست آید، گوئیم X زیررشته ی Y است. برای مثال aab یک زیررشته از $caabca$ است، در حالی که aba زیررشته ی آن نیست. یک رشته را مختلف النامبر گوئیم، هر گاه تعداد a ها، تعداد b ها و تعداد c ها در آن دوه دو متفاوت باشند. برای مثال aab مختلف النامبر است، اما $aacc$ مختلف النامبر نیست. چند رشته ی ۱۰۰ حرفی وجود دارد که زیررشته ی مختلف النامبر نداشته باشد؟

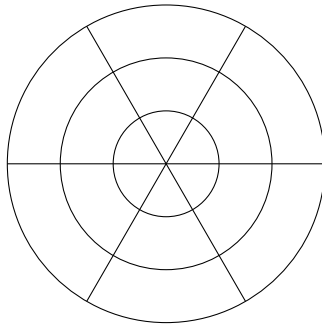
(۱) ۹ (۲) ۰ (۳) ۳ (۴) ۶ (۵) ۸

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

۵ شکل زیر از سه لایه و شش قطاع تشکیل شده است که ۱۸ خانه ی متفاوت ساخته اند. می خواهیم خانه ها را با اعداد ۱ تا ۱۸ شماره گذاری کنیم، طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- هیچ لایه ای نداشته باشیم که ضرب اعداد خانه های آن بر ۲۶ یا ۳۹ بخش پذیر باشد.
- ضرب اعداد هر قطاع بر ۶ بخش پذیر باشد.

به چند طریق این کار ممکن است؟



$$(1) \quad 0 \quad (2) \quad (3!)^6 \times 2^6 \times (6!)^3 \quad (3) \quad 3 \times (6!)^3 \quad (4) \quad 2^6 \times (6!)^3 \quad (5) \quad 3 \times 2^6 \times (6!)^3$$

۶ مهدی می خواهد خانه های یک جدول 3×3 را با اعداد صحیح ۰ تا ۴ پر کند، طوری که عدد هر خانه برابر با باقی مانده ی جمع اعداد همسایه هایش در تقسیم بر ۵ باشد (دو خانه همسایه هستند، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند). در ابتدا مرتضی یک عدد صحیح x از ۰ تا ۴ انتخاب می کند و آن را در هر چهار خانه ی گوشه ی جدول قرار می دهد. مهدی چند راه برای پر کردن پنج خانه ی خالی جدول دارد؟

$$(1) \quad 3125 \quad (2) \quad \text{تعداد راه ها وابسته به } x \text{ است.} \quad (3) \quad 1 \quad (4) \quad 25 \quad (5) \quad 5$$

۷ جدول زیر را در نظر بگیرید. به خانه های شامل دایره ی تو خالی، مولد می گوئیم. می خواهیم، از خانه ی «آ» به خانه ی «ب» برسیم. ما مجاز به حرکت در چهار جهت اصلی هستیم، با این شرط که اگر بخواهیم در جهتی حرکت کنیم، باید در پشت سر خانه ی کنونی (بلافاصله یا با فاصله) خانه ی مولدی قرار داشته باشد. به طور مثال حرکت اول حتماً به سمت راست است. چند راه برای رفتن از خانه ی «آ» به خانه ی «ب» وجود دارد، طوری که هر خانه را حداکثر یک بار ببینیم؟

				○	
	○	آ			
					○
○			ب		
					○
	○				

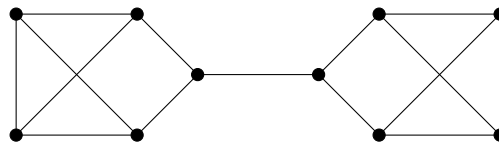
$$(1) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad 0 \quad (5) \quad 3$$

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

۸ سعید و حسام یک بازی فکری را سه دست انجام می دهند و در نهایت کسی برنده می شود که حداقل دو دست بازی را برده باشد. در هر دست، احتمال برد حسام a و احتمال برد سعید $1 - a$ است. احتمال برنده شدن حسام را در کل بازی p در نظر بگیرید. حال فرض کنید این دو نفر، دو دست از بازی را انجام داده اند و سعید، دقیقاً یک دست را برده باشد؛ احتمال برنده شدن حسام را در کل بازی با شرایط جدید p' در نظر بگیرید. شرط لازم و کافی برای این که $p' > p$ باشد، چیست؟

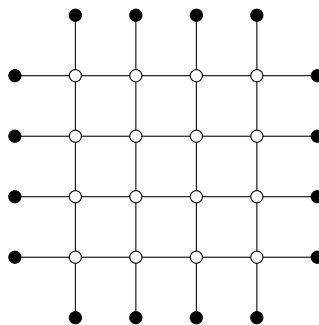
- (۱) $a < 1/5$ (۲) $a < 1/2$ (۳) $a < 2/3$ (۴) هیچ کدام (۵) $a < 1/3$

۹ در شکل زیر به هر یک از ۱۰ نقطه ی مشخص شده یک رأس می گوئیم. دو رأس را مجاور گوئیم، اگر با یک پاره خط مستقیم به هم وصل باشند. به چند طریق می توان رأس ها را با قرمز، آبی و سبز رنگ کرد، طوری که هر دو رأس مجاور، ناهم رنگ باشند؟ الزامی به استفاده از هر سه رنگ نیست.



- (۱) ۳۲ (۲) ۱۶ (۳) ۹۶ (۴) ۰ (۵) ۴۸

۱۰ در ابتدا در هر نقطه ی توپُر از شکل زیر یک متحرک قرار دارد. آن ها قرار است طبق الگوریتمی مشخص حرکت کنند. سرعت حرکت متحرک ها برابر و ثابت است. هم چنین همگی از لحظه ی یکسانی شروع به حرکت می کنند. پس از آغاز فرآیند، هر متحرک به محض این که به یک نقطه ی توپُر برسد، می ایستد.



به ازای کدام موارد از الگوریتم های زیر، پس از ایستادن تمام متحرک ها، در هر نقطه ی توپُر یک متحرک وجود خواهد داشت؟

- الگوریتم (آ): هر متحرک هنگام رسیدن به هر نقطه ی توخالی به راست می پیچد و به حرکت ادامه می دهد.
- الگوریتم (ب): هر متحرک هنگام رسیدن به اولین نقطه ی توخالی به راست می پیچد، هنگام رسیدن به دومین نقطه ی توخالی به چپ می پیچد و همین طور یک در میان با چرخش به راست و چپ ادامه می دهد.
- الگوریتم (پ): هر متحرک هنگام رسیدن به هر خانه ی تو خالی، اگر در آن لحظه متحرک دیگری را نیز در همان نقطه ببیند، به سمت راست می پیچد؛ در غیر این صورت مستقیم می رود.

- (۱) آ و ب (۲) آ و ب (۳) هر سه مورد (۴) هیچ کدام (۵) آ

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

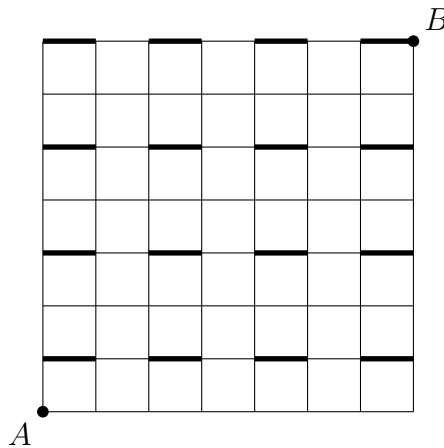
۱۱ مهری رخ در بازی شطرنج، خانه های هم سطر و هم ستون خود را تهدید می کند. می خواهیم در برخی از خانه های یک صفحه شطرنج 8×8 مهری رخ قرار دهیم، طوری که هر مهره، حداکثر یک مهری دیگر را تهدید کند. حداکثر چند مهره می توانیم بگذاریم؟

۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۹ (۴) ۸ (۵)

۱۲ مهری وزیر در بازی شطرنج، خانه های هم سطر، هم ستون و هم قطر خود را تهدید می کند. همان مسئله ی قبل را حل کنید، با این تفاوت که این بار به جای مهره های رخ می خواهیم از مهره های وزیر استفاده کنیم.

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۰ (۴) ۱۵ (۵)

۱۳ سلطان در ابتدا در نقطه ی A از شکل زیر قرار دارد و کلاهش روی سرش است. او هر مرحله می تواند با حرکت روی خطوط، یک واحد به راست یا یک واحد به بالا برود. سلطان به هنگام گذر از پاره خط های پررنگ، وضعیت کلاه روی سرش را تغییر می دهد؛ یعنی اگر کلاه روی سرش باشد آن را برمی دارد و در غیر این صورت آن را روی سرش می گذارد. سلطان به چند طریق می تواند با تعدادی گام به نقطه ی B برسد، طوری که در نقطه ی B کلاه روی سرش باشد؟



(۱) $\binom{12}{6}$ (۲) $\binom{12}{6}$ (۳) $\binom{10}{5} \times 4$ (۴) $\frac{\binom{14}{5}}{2}$ (۵) $\binom{12}{6} \times 2$

فرض کنید دنباله ای از اعداد طبیعی داریم. در هر مرحله می توانیم دو عدد متوالی از دنباله انتخاب کرده، یکی از آن ها را یک واحد افزایش و دیگری را یک واحد کاهش دهیم (پس از انجام مرحله، اعداد دنباله باید مثبت بمانند). به این عمل ارتودنسی می گوئیم! برای مثال دنباله ی $\langle 1, 3, 5, 2, 4 \rangle$ با یک عمل ارتودنسی می تواند به $\langle 1, 3, 6, 1, 4 \rangle$ تبدیل شود. به یک دنباله صاف و صوف گوئیم، اگر تمام اعضای آن ۳ باشند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید _____

۱۴ کدام یک از دنباله های زیر، با تعداد کمتری عمل ارتودنسی می توانند صاف و صوف شوند؟

(۱) $\langle 3, 1, 3, 5, 3 \rangle$ (۲) $\langle 2, 5, 1, 4, 3 \rangle$ (۳) $\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$ (۴) $\langle 3, 2, 2, 4, 4 \rangle$ (۵) $\langle 2, 3, 3, 3, 4 \rangle$

مرحله ی یکم سی‌آمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۵ چند دنباله ی پنج عضوی از اعداد طبیعی وجود دارد که می‌توانند با تعدادی مرحله، صاف و صوف شوند؟

۳۱۲۵ (۱) ۳۰۶۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۲۴۳ (۴) ۱۰۰۱ (۵)

۱۶ فرض کنید تعدادی عمل ارتودنسی روی دنباله‌ای انجام شود. گوییم یک عدد در دنباله در حین مراحل زخمی شده است، اگر دست کم یک بار افزایش و دست کم یک بار کاهش یافته باشد. چند جایگشت از اعداد ۱ تا ۵ را می‌توان با تعدادی عمل ارتودنسی صاف و صوف کرد، طوری که هیچ عددی در حین مراحل زخمی نشود؟

۱۲ (۱) ۱۶ (۲) ۲۴ (۳) ۲۸ (۴) ۱۲۰ (۵)

منظور از بیت، رقم ۰ یا ۱ است. اعمال $\vee$ ، $\wedge$ و $\oplus$ روی بیت‌ها مطابق جدول زیر تعریف می‌شوند:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \oplus q$
۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۰

بوجی پلکانی به شکل زیر دارد:

a_1						
●	a_2					
	●	a_3				
●		●	a_4			
	●		●	a_5		
●		●		●	a_6	
	●		●		●	a_7

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

۱۷ بوجی ابتدا به جای هر یک از a_1 تا a_7 یک بیت می‌گذارد. سپس مقدار هر خانه‌ی دیگر مانند C برابر حاصل عمل $\oplus$ روی خانه‌های بالا و راست C خواهد شد. بوجی به چند طریق می‌تواند کارش را انجام دهد، طوری که مقدار خانه‌ی پایین-چپ پلکان برابر ۱ شود؟ در این مسئله نقاط داخل خانه‌ها تأثیری ندارند.

۰ (۱) ۶۴ (۲) ۲ (۳) ۸ (۴) ۱۲۶ (۵)

مرحله ی یکم سی‌امین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۸ بوجی ابتدا به جای هر یک از a_1 تا a_7 یک بیت می‌گذارد. سپس مقدار هر خانه‌ی دیگر مانند C به صورت زیر مشخص می‌شود:

- اگر C نقطه داشته باشد، مقدار آن برابر حاصل عمل ۸ روی خانه‌های بالا و راست C خواهد شد.
 - اگر C نقطه نداشته باشد، مقدار آن برابر حاصل عمل ۷ روی خانه‌های بالا و راست C خواهد شد.
- بوجی به چند طریق می‌تواند کارش را انجام دهد، طوری که مقدار خانه‌ی پایین-چپ پلکان برابر ۱ شود؟

۱ (۱) ۸۰ (۲) ۱۲۶ (۳) ۱۶ (۴) ۴۸ (۵)

۱۹ همان مسئله‌ی قبل را حل کنید، با این تفاوت که عملکرد خانه‌های نقطه‌دار و بدون نقطه جابه‌جا شود؛ یعنی مقدار هر خانه‌ی نقطه‌دار با عمل ۷ و مقدار هر خانه‌ی بدون نقطه با عمل ۸ به دست آید.

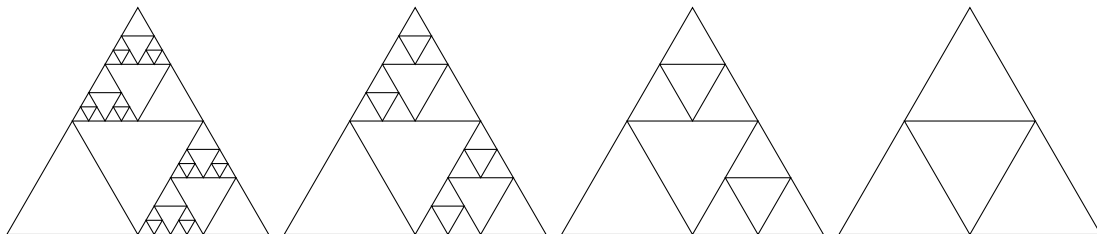
۸۰ (۱) ۴۸ (۲) ۶۴ (۳) ۱ (۴) ۱۶ (۵)

مثلاً شکلی است که مرحله به مرحله تکمیل می‌شود. مثلاً در مرحله‌ی صفرم از یک مثلث متساوی‌الاضلاع بزرگ تشکیل شده است که به چهار مثلث متساوی‌الاضلاع کوچک‌تر و هم‌اندازه تقسیم شده است. به یک مثلث کال گوییم، اگر داخل آن کاملاً خالی باشد. مثلاً را که دقیقاً شامل چهار مثلث کال باشد، جوان می‌گوییم. در هر مرحله تمام مثلث‌های جوان را در نظر می‌گیریم و عملیات زیر را بر روی هر کدام از آن‌ها انجام می‌دهیم:

چهار مثلث کال داخل را مثلث‌های بالا، وسط، پایین‌راست و پایین‌چپ می‌نامیم. دو تا از این چهار مثلث، به چهار مثلث کوچک‌تر تقسیم می‌شوند که انتخاب مثلث‌ها بستگی به باقی‌مانده‌ی شماره‌ی مرحله به سه دارد:

- اگر باقی‌مانده برابر یک باشد، مثلث پایین‌راست و مثلث بالا را تقسیم می‌کنیم.
- اگر باقی‌مانده برابر دو باشد، مثلث پایین‌چپ و مثلث بالا را تقسیم می‌کنیم.
- اگر باقی‌مانده برابر صفر باشد، مثلث پایین‌راست و مثلث پایین‌چپ را تقسیم می‌کنیم.

سه مرحله‌ی اول در شکل زیر نشان داده شده است:



_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید _____

۲۰ پس از مرحله‌ی i ام، چند مثلث کال وجود دارد؟

۲ (۱) $2 \times 3^{i+1} - 2$ (۲) $3 \times 2^{i+1} - 2$ (۳) $2^{i+1} + 2$ (۴) $3^{i+1} + 1$ (۵) $2 \times 3^{i+1} - 2$

مرحله ی یکم سی‌آمین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۱ به یک نقطه در صفحه تیز گوئیم، اگر رأس دست کم یکی از مثلث‌های شکل باشد (نه لزوماً مثلث‌های کال). پس از مرحله ی i ام، تعداد نقاط تیز چند تاست؟

$$(۱) 3 \times 2^{i+1} \quad (۲) 2 \times 3^{i+2} - 4 \quad (۳) 6^{i+1} \quad (۴) 2 \times 3^{i+1} \quad (۵) 2 + 3^{i+1}$$

۲۲ به یک خط افقی در صفحه مشغول گوئیم، اگر شامل حداقل یک نقطه‌ی تیز باشد. لزومی ندارد این خط در مثلثال رسم شده باشد. پس از مرحله ی i ام، تعداد خط‌های افقی مشغول در صفحه چیست؟

$$(۱) 63 \quad (۲) 53 \quad (۳) 128 \quad (۴) 79 \quad (۵) 50$$

پشته یکی از داده‌ساختارهای پرکاربرد در علوم کامپیوتر است که دنباله‌ای از عناصر را ذخیره می‌کند. تغییرات در عناصر پشته فقط از دو نوع می‌تواند باشد:

- یک عضو به انتهای پشته اضافه شود.
- یک عضو از انتهای پشته حذف شود.

برای مثال فرض کنید پشته‌ای به صورت $\langle 1, 4, 5, 3 \rangle$ باشد. با اضافه کردن عضوی با مقدار ۷ به انتها، پشته به صورت $\langle 1, 4, 5, 3, 7 \rangle$ خواهد شد. همچنین اگر از انتهای پشته‌ی $\langle 2, 10, 3 \rangle$ یک عنصر را حذف کنیم، پشته به صورت $\langle 2, 10 \rangle$ خواهد شد.

اکنون می‌خواهیم یکی از روش‌های ذخیره‌سازی پشته در کامپیوتر را شرح دهیم. در این روش، عمل‌های زیر را می‌توان انجام داد:

- **عمل ساختن پشته:** با دستور $create(S)$ پشته‌ای با نام S ساخته می‌شود و یک خانه در حافظه به آن اختصاص پیدا می‌کند که در ابتدا این خانه مقداری ندارد. اجرای این عمل یک واحد زمان مصرف می‌کند.

$$S \square$$

- **عمل اضافه کردن به پشته:** با دستور $push(S, x)$ مقدار x به انتهای پشته‌ی S اضافه می‌شود. دو حالت داریم:

– حافظه‌ی مربوط به S دارای خانه‌ی خالی باشد؛ در این صورت عدد x در نخستین خانه‌ی خالی حافظه‌ی مربوط به پشته‌ی S قرار می‌گیرد. برای مثال اگر حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت چپ باشد و دستور $push(S, 6)$ اجرا شود، حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت راست در خواهد آمد:

$$S \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 5 & 1 & 3 & & \\ \hline \end{array}$$

$$S \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 5 & 1 & 3 & 6 & \\ \hline \end{array}$$

اجرای عمل بالا یک واحد زمان مصرف می‌کند.

– حافظه‌ی مربوط به S دارای خانه‌ی خالی نباشد؛ در این صورت جایی جدید از حافظه با دو برابر تعداد خانه‌های حافظه‌ی فعلی به S اختصاص داده شده و سپس عمل اضافه کردن انجام می‌شود. برای مثال اگر حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت چپ باشد و دستور $push(S, 10)$ اجرا شود، حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت راست خواهد آمد:

$$S \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 5 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$S \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 5 & 2 & 10 & & \\ \hline \end{array}$$

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

اجرای چنین عملی به اندازه ی تعداد خانه های حافظه ی جدید اختصاص داده شده زمان مصرف می کند. برای نمونه، در مثال بالا ۸ واحد زمان مصرف می شود.

- **عمل حذف کردن از پشته:** با دستور $pop(S)$ یک عنصر از انتهای پشته ی S حذف می شود. برای مثال اگر حافظه ی مربوط به S به شکل سمت چپ باشد و دستور $pop(S)$ اجرا شود، حافظه ی مربوط به S به شکل سمت راست در خواهد آمد:

S

۲	۳	۵	۲	۱۰	۱۰		

S

۲	۳	۵	۲	۱۰			

در حالتی که با خالی کردن آخرین خانه ی پر حافظه ی مربوط به S ، دست کم نیمی از خانه ها خالی شود، حافظه ای جدید به S اختصاص داده می شود که خانه های خالی آن حذف شده اند (مگر اینکه S تنها یک خانه داشته باشد که در این صورت آن خانه حذف نمی گردد). برای مثال اگر حافظه ی مربوط به S به شکل سمت چپ باشد و دستور $pop(S)$ اجرا شود، حافظه ی مربوط به S به شکل سمت راست در خواهد آمد:

S

۱	۱	۵	۲	۱۰			

S

۱	۱	۵	۲

اجرای عمل حذف عنصر در حالتی که تعداد خانه ی حافظه ی مربوط به S تغییر کند (نصف شود)، به اندازه ی تعداد خانه های حافظه ی جدید اختصاص داده شده زمان مصرف می کند. برای نمونه در مثال بالا ۴ واحد زمان مصرف می شود. در حالتی نیز که تعداد خانه های حافظه ی مربوط به S تغییر نمی کند، یک واحد زمان مصرف خواهد شد.

- **عمل کپی:** با دستور $copy(A, B)$ حافظه ای به اندازه ی حافظه ی پشته ی A به پشته ی B اختصاص می یابد و مقادیر خانه های حافظه ی B نیز برابر مقادیر خانه های حافظه ی A خواهند شد. اجرای این عمل به اندازه ی تعداد خانه های حافظه ی مربوط به A زمان مصرف می کند.

توجه کنید قبل از عملیات روی پشته، باید آن پشته در خطوط قبلی برنامه با دستور $create$ ساخته شده باشد.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید _____

برنامه ی زیر چند واحد زمان مصرف می کند؟ ۲۳

$create(X)$

$push(X, ۱)$

$push(X, ۱)$

$push(X, ۱)$

$pop(X)$

$push(X, ۱)$

$push(X, ۱)$

$pop(X)$

$push(X, ۱)$

۱۵ (۵)

۱۱ (۴)

۱۹ (۳)

۱۷ (۲)

۱۴ (۱)

مرحله ی یکم سی‌امین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۴ در برنامه‌ای ابتدا با دستور $create(S)$ پشته‌ی S ساخته می‌شود. در ادامه‌ی این برنامه ۱۳۹۸ دستور $push(S, ۱)$ وجود دارد. این برنامه چند واحد زمان مصرف می‌کند؟

۵۴۹۳ (۱) ۴۰۹۵ (۲) ۵۴۸۲ (۳) ۱۳۹۷ + ۲^{۱۳۹۸} (۴) ۱۳۹۹ + ۲^{۱۳۹۹} (۵)

۲۵ یک برنامه حداقل چند خط باید داشته باشد تا در انتهای آن دست کم ۱۰۰ واحد حافظه (در مجموع برای پشته‌ها) وجود داشته باشد؟

۲۷ (۱) ۳۵ (۲) ۵۱ (۳) ۲۲ (۴) ۲۳ (۵)

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۱۵۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ نامه کنید.
- سوالات ۱۴ تا ۲۵ در دسته های چند سوالی آمده اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ پیراهن سلطان هفت دکمه دارد که به ترتیب از بالا به پایین با ۱ تا ۷ شماره گذاری شده اند. منظور از دو دکمه ی مجاور، دو دکمه با اختلاف شماره ی ۱ است. یک دکمه را قفل گوئیم، اگر دکمه ی مجاور باز نداشته باشد. در ابتدا تمام دکمه ها باز هستند. سلطان در هر مرحله می تواند یکی از دکمه های غیر قفل خود را ببندد. سلطان به چند ترتیب مختلف می تواند کارش را انجام دهد و به وضعیتی برسد که تمام دکمه ها بسته باشند؟

۶۴ (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۲ (۴) ۰ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

در آخرین مرحله تنها یک دکمه مانند D برای بستن وجود دارد. از آن جایی که تمام دکمه های مجاور D بسته شده اند، D در آن لحظه قفل است و نمی تواند بسته شود. پس هیچ ترتیبی برای بستن تمام دکمه ها وجود ندارد.

□

۲ یک جدول 3×3 داریم. می خواهیم هر خانه از جدول به جز خانه ی بالا-راست را با قرمز یا آبی رنگ کنیم. پس از رنگ آمیزی، متحرکی از خانه ی پایین-چپ جدول آغاز می کند و در هر مرحله، اگر در خانه ی آبی باشد یک واحد به راست و در غیر این صورت یک واحد به بالا می رود (ممکن است متحرک از جدول خارج شود). به چند طریق می توان خانه های جدول را رنگ کرد، طوری که متحرک پس از تعدادی گام به خانه ی بالا-راست برسد؟

۳۲۰ (۱) ۶ (۲) ۹۶ (۳) ۲۰ (۴) ۱۶ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

فرض کنید متحرک با مسیری به خانه ی بالا-راست برسد. رنگ خانه های مسیر به طور یکتا تعیین می شود. رنگ بقیه ی خانه ها نیز تأثیری در طی کردن مسیر ندارد و هر چیزی می تواند باشد.

انتخاب مسیر و رنگ آمیزی خانه های آن $\binom{4}{2}$ و رنگ بقیه ی خانه ها 2^4 حالت دارد. پس پاسخ برابر $96 = \binom{4}{2} \times 2^4$ است.

□

۳ سیستم عاملی می خواهد دو برنامه ی زیر را با هم اجرا کند ولی تنها یک پردازنده در اختیار دارد؛ بنابراین در هر مرحله یکی از برنامه ها را انتخاب کرده و نخستین خط اجرا نشده ی آن را اجرا می کند. پیش از شروع اجرای دو برنامه، مقدار متغیر a برابر صفر است. در چند ترتیب مختلف از اجرای خطوط دو برنامه، مقدار متغیر a در انتها برابر دو خواهد شد؟

برنامه ی اول: برنامه ی دوم:

۱. مقدار متغیر a را در متغیر b بریز.
۲. به مقدار متغیر b یک واحد اضافه کن.
۳. مقدار متغیر b را در متغیر a بریز.
۱. مقدار متغیر a را در متغیر c بریز.
۲. به مقدار متغیر c یک واحد اضافه کن.
۳. مقدار متغیر c را در متغیر a بریز.

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

۱ (۵)

۲۰ (۴)

۱۸ (۳)

۰ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

انتخاب نخستین خط برای اجرا دو حالت دارد (خط اول یکی از دو برنامه). بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید در مرحله ی اول، خط اول از برنامه ی اول اجرا شود. تنها روش مطلوب، اجرای تمام خطوط برنامه ی اول قبل از برنامه ی دوم است، زیرا اگر خط اول از برنامه ی دوم را زودتر از خط سوم از برنامه ی اول انتخاب کنیم، مقدار متغیر a در تمام حالات در انتها برابر ۱ خواهد شد. بنابراین پاسخ مسئله برابر ۲ است. □

منظور از رشته، کلمه ای با حروف a, b و c است. هر گاه رشته ی X از تعدادی (حداقل یک) حرف متوالی رشته ی Y به دست آید، گوییم X زیررشته ی Y است. برای مثال aab یک زیررشته از $caabca$ است، در حالی که aba زیررشته ی آن نیست. یک رشته را **مختلف النامبر** گوییم، هر گاه تعداد a ها، تعداد b ها و تعداد c ها در آن دوهو متفاوت باشند. برای مثال aab مختلف النامبر است، اما $aacc$ مختلف النامبر نیست. چند رشته ی ۱۰۰ حرفی وجود دارد که زیررشته ی مختلف النامبر نداشته باشد؟

۸ (۵)

۶ (۴)

۳ (۳)

۰ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

لم ۱: در هیچ سه حرف متوالی از رشته نباید حرفی با دقیقاً دو تکرار موجود باشد، زیرا همین سه حرف، یک زیررشته ی مختلف النامبر تشکیل خواهند داد. برای یافتن رشته های مطلوب، دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

- دو حرف اول رشته برابر باشند: در این حالت انتخاب دو حرف اول رشته ۳ حالت دارد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید دو حرف اول رشته a باشد. با توجه به لم ۱، حروف سوم تا صدم رشته باید برابر a باشند. از طرفی رشته ی ساخته شده زیررشته ی مختلف النامبر ندارد، پس رشته ای مطلوب است.
- دو حرف اول رشته برابر نباشند: در این حالت انتخاب دو حرف اول رشته $۶ = ۳ \times ۲$ حالت دارد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید دو حرف اول رشته ab باشد. در این صورت با توجه به لم ۱ حروف سوم تا صدم رشته حداکثر یک حالت دارند و رشته فقط می تواند به شکل

 $abcabc \dots$

باشد. از طرفی این رشته، زیررشته ی مختلف النامبر ندارد، پس رشته ای مطلوب است.

□

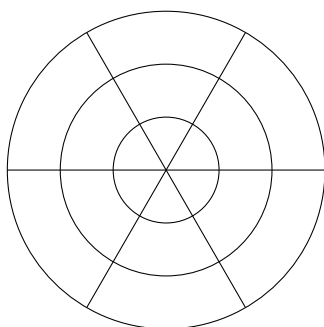
پس پاسخ برابر $۹ = ۶ + ۳$ است.

۵ شکل زیر از سه لایه و شش قطاع تشکیل شده است که ۱۸ خانه ی متفاوت ساخته اند. می خواهیم خانه ها را با اعداد ۱ تا ۱۸ شماره گذاری کنیم، طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- هیچ لایه ای نداشته باشیم که ضرب اعداد خانه های آن بر ۲۶ یا ۳۹ بخش پذیر باشد.
- ضرب اعداد هر قطاع بر ۶ بخش پذیر باشد.

به چند طریق این کار ممکن است؟

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور



$$(1) \quad 0 \quad (2) \quad (3!)^6 \times 2^6 \times (6!)^3 \quad (3) \quad 3 \times (6!)^3 \quad (4) \quad 2^6 \times (6!)^3 \quad (5) \quad 3 \times 2^6 \times (6!)^3$$

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

تنها پنج عدد (۱، ۵، ۷، ۱۱ و ۱۷) می توانند با ۱۳ هم لایه باشند؛ پس این اعداد باید به همراه ۱۳ در یک لایه قرار بگیرند. انتخاب لایه ی آن ها ۳ و ترتیب قرارگیری آن ها در خانه های لایه ۶! حالت دارد. پس از چیدن این شش عدد، شرط یکم گفته شده در صورت سوال برقرار خواهد شد. در شرط دوم صورت سوال گفته شده ضرب اعداد هر قطاع باید مضرب شش باشد. از آنجایی که دقیقاً شش عدد مضرب ۳ وجود دارد؛ پس این اعداد باید در قطاع های مختلفی قرار بگیرند. ترتیب قرارگیری این شش عدد در قطاع های مختلف ۶! و انتخاب خانه ی اعداد از قطاع ها ۲۶ حالت دارد. شش عدد باقی مانده نیز همگی زوج هستند و به هر صورتی (۶! حالت) که در شش خانه ی باقی مانده قرار بگیرند، شرط دوم صورت سوال برقرار خواهد شد.

پس پاسخ برابر

$$3 \times 2^6 \times (6!)^3$$

□

است.

۶ مهدی می خواهد خانه های یک جدول 3×3 را با اعداد صحیح ۰ تا ۴ پر کند، طوری که عدد هر خانه برابر با باقی مانده ی جمع اعداد همسایه هایش در تقسیم بر ۵ باشد (دو خانه همسایه هستند، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند). در ابتدا مرتضی یک عدد صحیح x از ۰ تا ۴ انتخاب می کند و آن را در هر چهار خانه ی گوشه ی جدول قرار می دهد. مهدی چند راه برای پر کردن پنج خانه ی خالی جدول دارد؟

$$(1) \quad 3125 \quad (2) \quad \text{تعداد راه ها وابسته به } x \text{ است.} \quad (3) \quad 1 \quad (4) \quad 25 \quad (5) \quad 5$$

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

فرض کنید جدول به صورت زیر پر شده است:

x	b	x
e	a	c
x	d	x

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

مقدار a به صورت یکتا به دست می آید:

$$a \equiv b + c + d + e \equiv 4(a + 2x) \equiv 4a + 3x$$

$$\Rightarrow 2a \equiv 3x \Rightarrow a \equiv 4x$$

پس از مشخص شدن مقدار a ، مقادیر b, c, d, e نیز به سادگی از روی همسایه ها مشخص می شوند، برای مثال:

$$b \equiv a + 2x \equiv 6x \equiv x$$

از طرفی مقدار هر خانه ی گوشه نیز باید با جمع همسایه هایش در پیمانه ی ۵ برابر باشد، پس:

$$x \equiv 2x$$

که این عبارت تنها به ازای $x = 0$ درست است و به ازای $1, 2, 3, 4$ درست نیست. پس پاسخ به ازای $x = 0$ برابر ۱ و به ازای بقیه ی x ها برابر ۰ است؛ یعنی پاسخ به x وابسته است. □

جدول زیر را در نظر بگیرید. به خانه های شامل دایره ی توخالی، مولد می گوئیم. می خواهیم، از خانه ی «آ» به خانه ی «ب» برسیم. ما مجاز به حرکت در چهار جهت اصلی هستیم، با این شرط که اگر بخواهیم در جهتی حرکت کنیم، باید در پشت سر خانه ی کنونی (بلافاصله یا با فاصله) خانه ی مولدی قرار داشته باشد. به طور مثال حرکت اول حتماً به سمت راست است. چند راه برای رفتن از خانه ی «آ» به خانه ی «ب» وجود دارد، طوری که هر خانه را حداکثر یک بار ببینیم؟

				○	
	○	آ			
					○
○			ب		
					○
	○				

۳ (۵)

۰ (۴)

۴ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

به خانه هایی که بخشی از مرز جدول را تشکیل می دهند، خانه های حاشیه ای می گوئیم. اگر در مرحله ای به یک خانه ی حاشیه ای برویم، دیگر نمی توانیم به خانه های غیر حاشیه ای برگردیم. پس در مسیرهای «آ» به «ب» رفتن به خانه های حاشیه ای مجاز نیست.

با توجه به گزاره ی گفته شده، سه گام نخست مسیر به طور یکتا به ترتیب راست، راست و پایین است تا به خانه ی A برسیم. در خانه ی A دو انتخاب داریم:

- رفتن به پایین: در این صورت ادامه ی مسیر به طور یکتا با گام های پایین، چپ، چپ، چپ، بالا، راست، راست و راست تکمیل خواهد شد.

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

- رفتن به چپ: در این صورت ادامه ی مسیر به طور یکتا با گام های چپ، چپ، پایین، راست و راست تکمیل خواهد شد.

				○	
	○	آ			
				A	○
○			ب		
					○
	○				

□

پس پاسخ برابر ۲ است.

سعید و حسام یک بازی فکری را سه دست انجام می دهند و در نهایت کسی برنده می شود که حداقل دو دست بازی را برده باشد. در هر دست، احتمال برد حسام a و احتمال برد سعید $1 - a$ است. احتمال برنده شدن حسام را در کل بازی p در نظر بگیرید. حال فرض کنید این دو نفر، دو دست از بازی را انجام داده اند و سعید، دقیقاً یک دست را برده باشد؛ احتمال برنده شدن حسام را در کل بازی با شرایط جدید p' در نظر بگیرید. شرط لازم و کافی برای این که $p' > p$ باشد، چیست؟

$$a < \frac{1}{5} \quad (۵) \quad a < \frac{1}{4} \quad (۴) \quad \text{هیچ کدام} \quad a < \frac{2}{3} \quad (۳) \quad a < \frac{1}{3} \quad (۲) \quad a < \frac{1}{6} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

احتمال برنده شدن حسام در کل بازی را با حالت بندی روی تعداد برده های (۲ یا ۳) حساب می کنیم:

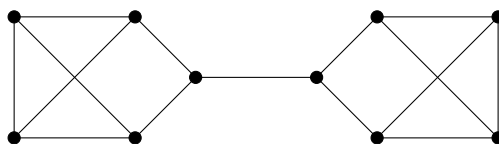
$$p = a^3 + 3(1 - a)a^2$$

احتمال برنده شدن حسام در حالت جدید (p') نیز به وضوح برابر a است، زیرا حسام برای بردن کل بازی، باید در دست باقی مانده برنده شود. پس:

$$p' > p \Rightarrow a > a^3 + 3(1 - a)a^2 \Rightarrow 2a^2 - 3a + 1 > 0 \Rightarrow a < \frac{1}{2}$$

□

در شکل زیر به هر یک از ۱۰ نقطه ی مشخص شده یک رأس می گوئیم. دو رأس را مجاور گوئیم، اگر با یک پاره خط مستقیم به هم وصل باشند. به چند طریق می توان رأس ها را با قرمز، آبی و سبز رنگ کرد، طوری که هر دو رأس مجاور، ناهم رنگ باشند؟ الزامی به استفاده از هر سه رنگ نیست.



مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

۴۸ (۵)

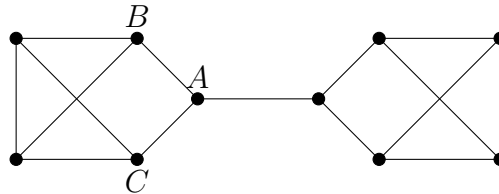
۰ (۴)

۹۶ (۳)

۱۶ (۲)

۳۲ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

دو سر یال وسط شکل به ۳×۲ حالت رنگ می شوند.

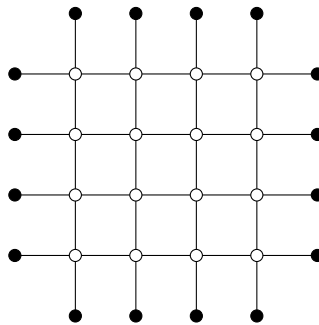
رأس های B و C باید هم رنگ باشند، در غیر این صورت دو رأس سمت چپ شکل حالتی برای رنگ آمیزی نخواهند داشت. انتخاب رنگ برای رأس های B و C دو حالت دارد (رنگی به جز رنگ استفاده شده برای رأس A). دو رأس سمت چپ شکل نیز به دو حالت هر کدام یکی از رنگ های باقی مانده را اختیار می کنند. پس رنگ آمیزی چهار رأس سمت چپ شکل ۲×۲ حالت دارد. با همین استدلال، چهار رأس سمت راست شکل نیز به ۴ حالت رنگ آمیزی می شوند. پس پاسخ برابر

$$۶ \times ۴^۲ = ۹۶$$

□

است.

در ابتدا در هر نقطه ی توپُر از شکل زیر یک متحرک قرار دارد. آن ها قرار است طبق الگوریتمی مشخص حرکت کنند. سرعت حرکت متحرک ها برابر و ثابت است. هم چنین همگی از لحظه ی یکسانی شروع به حرکت می کنند. پس از آغاز فرآیند، هر متحرک به محض این که به یک نقطه ی توپُر برسد، می ایستد.



به ازای کدام موارد از الگوریتم های زیر، پس از ایستادن تمام متحرک ها، در هر نقطه ی توپُر یک متحرک وجود خواهد داشت؟

- الگوریتم (آ): هر متحرک هنگام رسیدن به هر نقطه ی توخالی به راست می پیچد و به حرکت ادامه می دهد.
- الگوریتم (ب): هر متحرک هنگام رسیدن به اولین نقطه ی توخالی به راست می پیچد، هنگام رسیدن به دومین نقطه ی توخالی به چپ می پیچد و همین طور یک در میان با چرخش به راست و چپ ادامه می دهد.
- الگوریتم (پ): هر متحرک هنگام رسیدن به هر خانه ی تو خالی، اگر در آن لحظه متحرک دیگری را نیز در همان نقطه ببیند، به سمت راست می پیچد؛ در غیر این صورت مستقیم می رود.

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

(۵) آ

(۴) هیچکدام

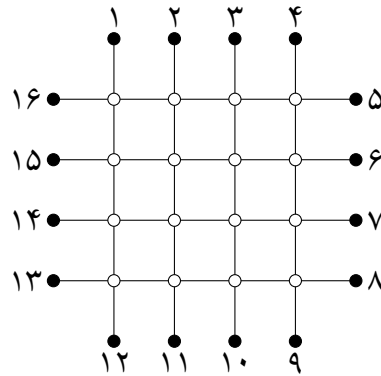
(۳) هر سه مورد

(۲) آ و ب

(۱) آ و پ

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

متحرک ها را به شکل زیر شماره گذاری می کنیم:



- در الگوریتم (آ) به ازای هر $16 \geq i \geq 2$ متحرک i در انتها به نقطه ی آغازین متحرک $i - 1$ خواهد رفت. متحرک ۱ نیز به نقطه ی آغازین متحرک ۱۶ می رود. پس الگوریتم (آ) مطلوب است.
- در الگوریتم (ب) متحرک های ۱، ۲، ۳، ۴ در انتها به ترتیب به نقطه ی آغازین متحرک های ۱۶، ۱۵، ۱۴ و ۱۳ خواهند رفت. به همین ترتیب متحرک های هر یک از دسته های ۵ تا ۸، ۹ تا ۱۲ و ۱۳ تا ۱۶ نیز به چهار نقطه ی متمایز دسته ی متناظر خواهند رفت. پس الگوریتم (ب) نیز مطلوب است.
- در الگوریتم (پ) متحرک های ۱۳ و ۱۶ هر دو در نقطه ی آغازین متحرک ۱۲ کار را تمام خواهند کرد. پس الگوریتم (پ) مطلوب نیست.

□

مهره ی رخ در بازی شطرنج، خانه های هم سطر و هم ستون خود را تهدید می کند. می خواهیم در برخی از خانه های یک صفحه شطرنج 8×8 مهره ی رخ قرار دهیم، طوری که هر مهره، حداکثر یک مهره ی دیگر را تهدید کند. حداکثر چند مهره می توانیم بگذاریم؟

(۵) ۸

(۴) ۹

(۳) ۱۵

(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

ابتدا ثابت می کنیم پاسخ نمی تواند از ۱۰ بیشتر باشد. به ازای هر رخ و هر سطر، به صورت زیر عددی به آن رخ نسبت می دهیم:

اگر در آن سطر، رخ دیگری موجود بود، به آن رخ عدد ۱ و در غیر این صورت عدد ۲ را نسبت می دهیم.

به ازای هر رخ و هر ستون نیز کار مشابهی را انجام می دهیم. به ازای هر سطر یا هر ستون، مجموعاً عدد ۲ به رخ ها نسبت داده شده است، پس مجموع اعداد تمام رخ ها (به ازای سطرها و ستونها) برابر ۳۲ است. از طرفی

مرحله ی یکم سی اُمین المپیاد کامپیوتر کشور

مجموع دو عدد نسبت داده شده به هر رخ حداقل ۳ است، زیرا نمی تواند هم در سطر و هم در ستونش رخ دیگری موجود باشد. پس حداکثر $10 = \lfloor \frac{32}{3} \rfloor$ مهره ی رخ خواهیم داشت.
برای ۱۰ رخ نیز جدول زیر وجود دارد:

							●
						●	
					●		
					●		
			●	●			
		●					
		●					
●	●						

□

مهره ی وزیر در بازی شطرنج، خانه های هم سطر، هم ستون و هم قطر خود را تهدید می کند. همان مسئله ی قبل را حل کنید، با این تفاوت که این بار به جای مهره های رخ می خواهیم از مهره های وزیر استفاده کنیم.

۱۲

۱۵ (۵)

۱۰ (۴)

۱۲ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

با استدلالی مشابه سوال قبل، ثابت می شود تعداد وزیرها نمی تواند از ۱۰ بیشتر باشد. برای ۱۰ وزیر نیز جدول زیر وجود دارد:

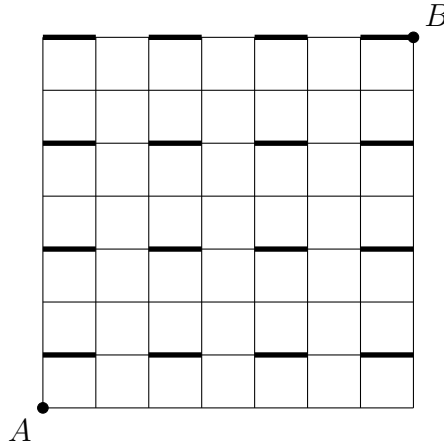
					●	●	
		●					
		●					
							●
							●
			●	●			
●	●						

□

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۳

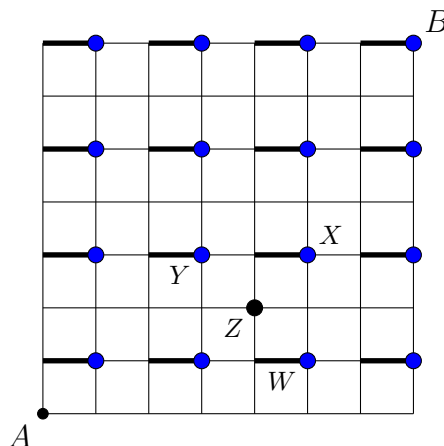
سلطان در ابتدا در نقطه ی A از شکل زیر قرار دارد و کلاهش روی سرش است. او هر مرحله می تواند با حرکت روی خطوط، یک واحد به راست یا یک واحد به بالا برود. سلطان به هنگام گذر از پاره خط های پررنگ، وضعیت کلاه روی سرش را تغییر می دهد؛ یعنی اگر کلاه روی سرش باشد آن را برمی دارد و در غیر این صورت آن را روی سرش می گذارد. سلطان به چند طریق می تواند با تعدادی گام به نقطه ی B برسد، طوری که در نقطه ی B کلاه روی سرش باشد؟



$$(1) \binom{12}{6} \quad (2) \binom{13}{6} \quad (3) \binom{10}{5} \times 4 \quad (4) \frac{\binom{14}{7}}{2} \quad (5) 2 \times \binom{12}{6}$$

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

تناظری یک به یک میان مسیرهای مطلوب از A به B و مسیرهای نامطلوب از A به B برقرار می کنیم و نتیجه خواهد شد پاسخ برابر نصف مسیرها یا $\frac{\binom{14}{7}}{2}$ است. شکل زیر را در نظر بگیرید:



یک مسیر دلخواه از A به B در نظر بگیرید. این مسیر دست کم یک نقطه ی آبی را می بیند، زیرا انتهای مسیر قطعاً آبی است. اولین باری که این مسیر، یک نقطه ی آبی را می بیند در نظر گرفته و آن نقطه را X بنامید. یک نمونه از X در شکل بالا نشان داده شده است. نقاط Z ، Y و W را به ترتیب نقاط دو واحد چپ، چپ-پایین و دو واحد پایین نسبت به X در نظر می گیریم. مسیر، دو مرحله قبل از رسیدن به X در یکی از نقاط Z ، Y و W بوده است. از آن جایی که X نخستین نقطه ی آبی مسیر می باشد، پس مسیر در دو مرحله قبل حتماً روی Z بوده

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

است. حال اگر دو گام از Z به X به ترتیب بالا و راست باشد، آن را به صورت راست و بالا طی کنید و بالعکس. به این ترتیب، مسیرهای مطلوب و نامطلوب به هم متناظر می شوند.

□

فرض کنید دنباله ای از اعداد طبیعی داریم. در هر مرحله می توانیم دو عدد متوالی از دنباله انتخاب کرده، یکی از آن ها را یک واحد افزایش و دیگری را یک واحد کاهش دهیم (پس از انجام مرحله، اعداد دنباله باید مثبت بمانند). به این عمل ارتودنسی می گوییم! برای مثال دنباله ی $\langle 1, 3, 5, 2, 4 \rangle$ با یک عمل ارتودنسی می تواند به $\langle 1, 3, 6, 1, 4 \rangle$ تبدیل شود. به یک دنباله صاف و صوف گوییم، اگر تمام اعضای آن ۳ باشند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید _____

کدام یک از دنباله های زیر، با تعداد کم تری عمل ارتودنسی می توانند صاف و صوف شوند؟

۱۴

$\langle 1 \rangle \langle 3, 1, 3, 5, 3 \rangle \langle 2 \rangle \langle 2, 5, 1, 4, 3 \rangle \langle 3 \rangle \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle \langle 4 \rangle \langle 3, 2, 2, 4, 4 \rangle \langle 5 \rangle \langle 2, 3, 3, 3, 4 \rangle$

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

دنباله ی $\langle 2, 5, 1, 4, 3 \rangle$ با سه گام به شکل زیر صاف و صوف می شود:

$\langle 2, 5, 1, 4, 3 \rangle \rightarrow \langle 3, 4, 1, 4, 3 \rangle \rightarrow \langle 3, 3, 2, 4, 3 \rangle \rightarrow \langle 3, 3, 3, 3, 3 \rangle$

برای سایر گزینه ها دست کم چهار گام لازم است:

- دنباله ی $\langle 2, 3, 3, 3, 4 \rangle$ را در نظر بگیرید. به ازای هر $1 \leq i \leq 4$ دست کم در یک مرحله باید عناصر i ام و $i+1$ ام را انتخاب کنیم، زیرا در غیر این صورت عناصر یکم تا i ام باید مستقل از بقیه ی دنباله صاف و صوف شوند، در حالی که مجموع اعدادشان مضرب ۳ نیست. پس دست کم چهار گام نیاز داریم.
- دنباله ی $\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$ را در نظر بگیرید. باید دست کم در دو مرحله عنصر یکم تغییر پیدا کند تا به ۳ برسد. با همین استدلال باید دست کم در دو مرحله عنصر پنجم دنباله را تغییر دهیم. عناصر یکم و پنجم به طور همزمان نمی توانند تغییر پیدا کنند. پس دست کم چهار گام نیاز داریم.
- دنباله ی $\langle 3, 1, 3, 5, 3 \rangle$ را در نظر بگیرید. باید دست کم در دو مرحله عنصر دوم تغییر پیدا کند تا به ۳ برسد. با همین استدلال باید دست کم در دو مرحله عنصر چهارم دنباله را تغییر دهیم. عناصر دوم و چهارم به طور همزمان نمی توانند تغییر پیدا کنند. پس دست کم چهار گام نیاز داریم.
- دنباله ی $\langle 3, 2, 2, 4, 4 \rangle$ را در نظر بگیرید. به ازای هر $2 \leq i \leq 4$ دست کم در یک مرحله باید عناصر i ام و $i+1$ ام را انتخاب کنیم، زیرا در غیر این صورت عناصر $i+1$ ام تا پنجم باید مستقل از بقیه ی دنباله صاف و صوف شوند، در حالی که مجموع اعدادشان مضرب ۳ نیست. از طرفی اگر فقط این سه تغییر را انجام دهیم، به دنباله ی صاف و صوف نمی رسیم. پس دست کم چهار گام نیاز داریم.

□

چند دنباله ی پنج عضوی از اعداد طبیعی وجود دارد که می توانند با تعدادی مرحله، صاف و صوف شوند؟

۱۵

$3125 (1) \quad 3060 (2) \quad 120 (3) \quad 243 (4) \quad 1001 (5)$

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

ابتدا ثابت می کنیم هر دنباله ی n عضوی با مجموع اعضای $3n$ می تواند با تعدادی مرحله صاف و صوف شود. فرض کنید زیردنباله ای متوالی با k عضو به شکل $\langle a, 3, 3, \dots, 3, b \rangle$ داریم که $a > 3 > b$ است. با $k - 1$ مرحله که در مرحله ی i اُم عناصر i اُم و $i + 1$ اُم انتخاب شده، یک واحد از عنصر i اُم کم و یک واحد به عنصر $i + 1$ اُم اضافه شود، زیردنباله به $\langle a - 1, 3, 3, \dots, 3, b + 1 \rangle$ تبدیل می شود و در تمام مراحل اعداد مثبت می مانند. برای زیردنباله های مشابه که $a < 3 < b$ نیز می توان به روش مشابه آن را به $\langle a + 1, 3, 3, \dots, 3, b - 1 \rangle$ تبدیل کرد. تا زمانی که دنباله صاف و صوف نشده، زیردنباله ای متوالی به اشکال گفته شده وجود دارد. کافی است یکی از آن ها را انتخاب کرده و به روش گفته شده تغییر دهیم. با این کار «مجموع اختلاف اعداد دنباله از ۳» کم می شود. از آنجایی که این مقدار از صفر نمی تواند کم تر باشد، فرآیند پایان پذیر است و دنباله صاف و صوف خواهد شد. پس پاسخ برابر تعداد جواب های معادله ی $x_1 + \dots + x_5 = 15$ در اعداد طبیعی است که برابر $\binom{14}{4} = 1001$ می باشد. $\square$

۱۶

فرض کنید تعدادی عمل ارتودنسی روی دنباله ای انجام شود. گوییم یک عدد در دنباله در حین مراحل زخمی شده است، اگر دست کم یک بار افزایش و دست کم یک بار کاهش یافته باشد. چند جایگشت از اعداد ۱ تا ۵ را می توان با تعدادی عمل ارتودنسی صاف و صوف کرد، طوری که هیچ عددی در حین مراحل زخمی نشود؟

۱۲ (۱) ۱۶ (۲) ۲۴ (۳) ۲۸ (۴) ۱۲۰ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

عدد ۵ باید مجاور ۱ باشد، زیرا باید دو بار کاهش یابد و در حالات دیگر این کار ممکن نیست. دو حالت داریم:

- اعداد ۲ و ۴ نیز مجاورند: در این صورت جایگشت قابل صاف و صوف شدن به نحو خواسته شده است، زیرا کافی است دو بار عدد ۵ را با عدد ۱ و یک بار عدد ۲ را با عدد ۴ انتخاب کنیم. ابتدا بلوک های $\langle 2, 4 \rangle$ و $\langle 1, 5 \rangle$ را تشکیل می دهیم (به 2×2 حالت) و سپس دو بلوک گفته شده و عدد ۳ را به $3!$ حالت جایگشت می دهیم.
- اعداد ۲ و ۴ مجاور نیستند: در این صورت عدد ۲ باید مجاور ۵ و عدد ۱ باید مجاور ۴ باشد. تشکیل بلوک $\langle 1, 5 \rangle$ دو حالت دارد. سپس بلوک شامل اعداد ۱، ۲، ۴ و ۵ به طور یکتا تشکیل خواهد شد. در انتها بلوک تشکیل شده را به همراه عدد ۳ به دو حالت جایگشت می دهیم.

پس پاسخ برابر است با:

$$2 \times 2 \times 3! + 2 \times 2 = 28$$

$\square$

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

منظور از بیت، رقم ۰ یا ۱ است. اعمال $\vee$ ، $\wedge$ و $\oplus$ روی بیت ها مطابق جدول زیر تعریف می شوند:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \oplus q$
۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۰

بوجی پلکانی به شکل زیر دارد:

a_1						
●	a_2					
	●	a_3				
●		●	a_4			
	●		●	a_5		
●		●		●	a_6	
	●		●		●	a_7

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

بوجی ابتدا به جای هر یک از a_1 تا a_7 یک بیت می گذارد. سپس مقدار هر خانه ی دیگر مانند C برابر حاصل عمل $\oplus$ روی خانه های بالا و راست C خواهد شد. بوجی به چند طریق می تواند کارش را انجام دهد، طوری که مقدار خانه ی پایین-چپ پلکان برابر ۱ شود؟ در این مسئله نقاط داخل خانه ها تأثیری ندارند.

۰ (۱) ۶۴ (۲) ۲ (۳) ۸ (۴) ۱۲۶ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

مقدار خانه ها بر حسب a_1 تا a_7 به شکل زیر مشخص می شود:

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

a_1						
$a_1 \oplus a_2$	a_2					
$a_1 \oplus a_3$	$a_2 \oplus a_3$	a_3				
$a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4$	$a_2 \oplus a_4$	$a_3 \oplus a_4$	a_4			
$a_1 \oplus a_5$	$a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5$	$a_3 \oplus a_5$	$a_4 \oplus a_5$	a_5		
$a_1 \oplus a_2 \oplus a_5 \oplus a_6$	$a_2 \oplus a_6$	$a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$	$a_4 \oplus a_6$	$a_5 \oplus a_6$	a_6	
$a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7$	$a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7$	$a_3 \oplus a_7$	$a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7$	$a_5 \oplus a_7$	$a_6 \oplus a_7$	a_7

پس در صورتی مقدار خانه ی پایین-چپ پلکان برابر ۱ خواهد شد که تعداد فردی از اعداد a_1, a_3, a_5 و a_7 برابر ۱ باشند. کافی است اعداد a_1 تا a_6 را به 2^6 حالت انتخاب کنیم؛ عدد a_7 به طور یکتا مشخص خواهد شد. پس پاسخ برابر ۶۴ است.

بوجی ابتدا به جای هر یک از a_1 تا a_7 یک بیت می گذارد. سپس مقدار هر خانه ی دیگر مانند C به صورت زیر مشخص می شود:

- اگر C نقطه داشته باشد، مقدار آن برابر حاصل عمل $\wedge$ روی خانه های بالا و راست C خواهد شد.
 - اگر C نقطه نداشته باشد، مقدار آن برابر حاصل عمل $\vee$ روی خانه های بالا و راست C خواهد شد.
- بوجی به چند طریق می تواند کارش را انجام دهد، طوری که مقدار خانه ی پایین-چپ پلکان برابر ۱ شود؟

۱ (۱) ۸۰ (۲) ۱۲۶ (۳) ۱۶ (۴) ۴۸ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

با مشخص کردن مقادیر خانه ها بر حسب a_1 تا a_7 ، مقدار خانه ی پایین-چپ پلکان برابر ۱ خواهد شد، اگر و تنها اگر a_4 و همچنین دست کم یکی از a_3 و a_5 برابر ۱ باشند. پس پاسخ برابر

$$2^4 \times (2^2 - 1) \times 1 = 48$$

است.

همان مسئله ی قبل را حل کنید، با این تفاوت که عملکرد خانه های نقطه دار و بدون نقطه جابه جا شود؛ یعنی مقدار هر خانه ی نقطه دار با عمل $\vee$ و مقدار هر خانه ی بدون نقطه با عمل $\wedge$ به دست آید.

۱۶ (۵) ۱ (۴) ۶۴ (۳) ۴۸ (۲) ۸۰ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

با مشخص کردن مقادیر خانه ها بر حسب a_1 تا a_7 ، مقدار خانه ی پایین-چپ پلکان برابر ۱ خواهد شد، اگر و تنها اگر a_4 برابر ۱ باشد یا هر دوی a_3 و a_5 برابر ۱ باشند. پس پاسخ برابر است با:

$$2^6 + 2^4 = 80$$

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

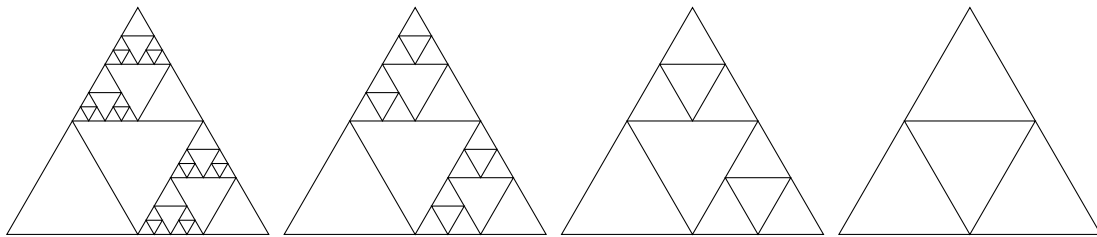
□

مثثال شکلی است که مرحله به مرحله تکمیل می شود. مثثال در مرحله ی صفرم از یک مثلث متساوی الاضلاع بزرگ تشکیل شده است که به چهار مثلث متساوی الاضلاع کوچک تر و هم اندازه تقسیم شده است. به یک مثلث کال گوئیم، اگر داخل آن کاملاً خالی باشد. مثثی را که دقیقاً شامل چهار مثلث کال باشد، **جوان** می گوئیم. در هر مرحله تمام مثلث های جوان را در نظر می گیریم و عملیات زیر را بر روی هر کدام از آنها انجام می دهیم:

چهار مثلث کال داخل را مثلث های بالا، وسط، پایین راست و پایین چپ می نامیم. دو تا از این چهار مثلث، به چهار مثلث کوچک تر تقسیم می شوند که انتخاب مثلث ها بستگی به باقی مانده ی شماره ی مرحله به سه دارد:

- اگر باقی مانده برابر یک باشد، مثلث پایین راست و مثلث بالا را تقسیم می کنیم.
- اگر باقی مانده برابر دو باشد، مثلث پایین چپ و مثلث بالا را تقسیم می کنیم.
- اگر باقی مانده برابر صفر باشد، مثلث پایین راست و مثلث پایین چپ را تقسیم می کنیم.

سه مرحله ی اول در شکل زیر نشان داده شده است:



_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید _____

پس از مرحله ی i ام، چند مثلث کال وجود دارد؟

۲۰

- (۱) 2^{i+2} (۲) $3 \times 2^{i+1} - 2$ (۳) $2^{i+1} + 2$ (۴) $3^{i+1} + 1$ (۵) $2 \times 3^{i+1} - 2$

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

به راحتی با استقرا می توانید ثابت کنید پس از مرحله ی i ام 2^i مثلث جوان در شکل وجود دارد؛ از این رو در مرحله ی i ام به تعداد مثلث های کال 3×2^i تا اضافه خواهد شد. پس پاسخ برابر است با:

$$4 + 3 \times (2^1 + 2^1 + \dots + 2^i) = 3 \times 2^{i+1} - 2$$

□

به یک نقطه در صفحه تیز گوئیم، اگر رأس دست کم یکی از مثلث های شکل باشد (نه لزوماً مثلث های کال). پس از مرحله ی i ام، تعداد نقاط تیز چند تاست؟

۲۱

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

$$(1) \quad 3 \times 2^{i+1} \quad (2) \quad 2 \times 3^{i+2} - 4 \quad (3) \quad 6^{i+1} \quad (4) \quad 2 \times 3^{i+1} \quad (5) \quad 2 + 3^{i+1}$$

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

هر مثلث کالی که به یک مثلث جوان تبدیل می شود، ۳ نقطه ی تیز جدید ایجاد می کند. پس در مرحله ی i ام به تعداد نقاط تیز 3×2^i تا اضافه خواهد شد. پس پاسخ برابر است با:

$$6 + 3 \times (2^1 + 2^1 + \dots + 2^i) = 3 \times 2^{i+1}$$

□

به یک خط افقی در صفحه مشغول گوییم، اگر شامل حداقل یک نقطه ی تیز باشد. لزومی ندارد این خط در مثلثال رسم شده باشد. پس از مرحله ی ۶ام، تعداد خط های افقی مشغول در صفحه چیست؟

$$(1) \quad 63 \quad (2) \quad 53 \quad (3) \quad 128 \quad (4) \quad 79 \quad (5) \quad 50$$

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

با استقرا می توانید ثابت کنید تعداد خطوط افقی مشغول در صفحه ی جدید در مراحل مطابق الگوی زیر پیش می رود:

$$2, 4, 4, 8, 16, 16, 32, 64, 64, \dots$$

پس پاسخ برابر است با:

$$3 + 2 + 4 + 4 + 8 + 16 + 16 = 53$$

□

پشته یکی از داده ساختارهای پرکاربرد در علوم کامپیوتر است که دنباله ای از عناصر را ذخیره می کند. تغییرات در عناصر پشته فقط از دو نوع می تواند باشد:

- یک عضو به انتهای پشته اضافه شود.
- یک عضو از انتهای پشته حذف شود.

برای مثال فرض کنید پشته ای به صورت $\langle 1, 5, 4, 3 \rangle$ باشد. با اضافه کردن عضوی با مقدار ۷ به انتها، پشته به صورت $\langle 1, 5, 4, 3, 7 \rangle$ خواهد شد. همچنین اگر از انتهای پشته ی $\langle 3, 10, 2 \rangle$ یک عنصر را حذف کنیم، پشته به صورت $\langle 2, 10 \rangle$ خواهد شد.

اکنون می خواهیم یکی از روش های ذخیره سازی پشته در کامپیوتر را شرح دهیم. در این روش، عمل های زیر را می توان انجام داد:

- **عمل ساختن پشته:** با دستور $create(S)$ پشته ای با نام S ساخته می شود و یک خانه در حافظه به آن اختصاص پیدا می کند که در ابتدا این خانه مقداری ندارد. اجرای این عمل یک واحد زمان مصرف می کند.

$$S \quad \square$$

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

- **عمل اضافه کردن به پشته:** با دستور $push(S, x)$ مقدار x به انتهای پشته ی S اضافه می شود. دو حالت داریم:

– حافظه ی مربوط به S دارای خانه ی خالی باشد؛ در این صورت عدد x در نخستین خانه ی خالی حافظه ی مربوط به پشته ی S قرار می گیرد. برای مثال اگر حافظه ی مربوط به S به شکل سمت چپ باشد و دستور $push(S, 6)$ اجرا شود، حافظه ی مربوط به S به شکل سمت راست در خواهد آمد:

S

۲	۳	۵	۱	۳			

 S

۲	۳	۵	۱	۳	۶		

اجرای عمل بالا یک واحد زمان مصرف می کند.

– حافظه ی مربوط به S دارای خانه ی خالی نباشد؛ در این صورت جایی جدید از حافظه با دو برابر تعداد خانه های حافظه ی فعلی به S اختصاص داده شده و سپس عمل اضافه کردن انجام می شود. برای مثال اگر حافظه ی مربوط به S به شکل سمت چپ باشد و دستور $push(S, ۱۰)$ اجرا شود، حافظه ی مربوط به S به شکل سمت راست خواهد آمد:

S

۱	۱	۵	۲

 S

۱	۱	۵	۲	۱۰			

اجرای چنین عملی به اندازه ی تعداد خانه های حافظه ی جدید اختصاص داده شده زمان مصرف می کند. برای نمونه، در مثال بالا ۸ واحد زمان مصرف می شود.

- **عمل حذف کردن از پشته:** با دستور $pop(S)$ یک عنصر از انتهای پشته ی S حذف می شود. برای مثال اگر حافظه ی مربوط به S به شکل سمت چپ باشد و دستور $pop(S)$ اجرا شود، حافظه ی مربوط به S به شکل سمت راست در خواهد آمد:

S

۲	۳	۵	۲	۱۰	۱۰		

 S

۲	۳	۵	۲	۱۰			

در حالتی که با خالی کردن آخرین خانه ی پر حافظه ی مربوط به S ، دست کم نیمی از خانه ها خالی شود، حافظه ای جدید به S اختصاص داده می شود که خانه های خالی آن حذف شده اند (مگر اینکه S تنها یک خانه داشته باشد که در این صورت آن خانه حذف نمی گردد). برای مثال اگر حافظه ی مربوط به S به شکل سمت چپ باشد و دستور $pop(S)$ اجرا شود، حافظه ی مربوط به S به شکل سمت راست در خواهد آمد:

S

۱	۱	۵	۲	۱۰			

 S

۱	۱	۵	۲

اجرای عمل حذف عنصر در حالاتی که تعداد خانه ی حافظه ی مربوط به S تغییر کند (نصف شود)، به اندازه ی تعداد خانه های حافظه ی جدید اختصاص داده شده زمان مصرف می کند. برای نمونه در مثال بالا ۴ واحد زمان مصرف می شود. در حالاتی نیز که تعداد خانه های حافظه ی مربوط به S تغییر نمی کند، یک واحد زمان مصرف خواهد شد.

- **عمل کپی:** با دستور $copy(A, B)$ حافظه ای به اندازه ی حافظه ی پشته ی A به پشته ی B اختصاص می یابد و مقادیر خانه های حافظه ی B نیز برابر مقادیر خانه های حافظه ی A خواهند شد. اجرای این عمل به اندازه ی تعداد خانه های حافظه ی مربوط به A زمان مصرف می کند.

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

توجه کنید قبل از عملیات روی پشته، باید آن پشته در خطوط قبلی برنامه با دستور *create* ساخته شده باشد.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید _____

برنامه ی زیر چند واحد زمان مصرف می کند؟

۲۳

```
create(X)
push(X, ۱)
push(X, ۱)
push(X, ۱)
push(X, ۱)
pop(X)
push(X, ۱)
push(X, ۱)
pop(X)
push(X, ۱)
```

۱۵ (۵)

۱۱ (۴)

۱۹ (۳)

۱۷ (۲)

۱۴ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

- در خط یکم برنامه، پشته ی X با یک خانه ی خالی ساخته می شود. اجرای این خط ۱ واحد زمان می برد.
- در خط دوم برنامه، در تنها خانه ی خالی پشته ی X عدد ۱ قرار می گیرد. اجرای این خط ۱ واحد زمان می برد.
- در خط سوم برنامه، تعداد خانه های پشته ی X دو برابر شده و سپس در تنها خانه ی خالی آن عدد ۱ قرار می گیرد. اجرای این خط ۲ واحد زمان می برد.
- در خط چهارم برنامه، عداد خانه های پشته ی X دو برابر شده (از دو به چهار خانه) و سپس در خانه ی سوم آن عدد ۱ قرار می گیرد. اجرای این خط ۴ واحد زمان می برد.
- در خط پنجم برنامه، عدد ۱ از خانه ی سوم پشته حذف و به دنبال آن تعداد خانه های پشته نیز نصف می شود (از چهار به دو خانه). اجرای این خط ۲ واحد زمان می برد.
- خط ششم مانند خط چهارم عمل کرده و اجرای آن ۴ واحد زمان می برد.
- در خط هفتم برنامه، عدد ۱ در تنها خانه ی خالی پشته ی X قرار می گیرد. اجرای این خط ۱ واحد زمان می برد.
- در خط هشتم برنامه، عدد ۱ از آخرین خانه ی پر پشته (خانه ی چهارم) حذف می شود. اجرای این خط ۱ واحد زمان می برد.
- خط نهم مانند خط هفتم عمل کرده و اجرای آن ۱ واحد زمان می برد.

پس اجرای کل برنامه

$$۱ + ۱ + ۲ + ۴ + ۲ + ۴ + ۱ + ۱ + ۱ = ۱۷$$

□

واحد زمان مصرف می کند.

مرحله ی یکم سی امین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۴ در برنامه ای ابتدا با دستور $create(S)$ پشته ی S ساخته می شود. در ادامه ی این برنامه ۱۳۹۸ دستور $push(S, ۱)$ وجود دارد. این برنامه چند واحد زمان مصرف می کند؟

- ۵۴۹۳ (۱) ۴۰۹۵ (۲) ۵۴۸۲ (۳) ۲۱۳۹۸ + ۱۳۹۷ (۴) ۲۱۳۹۹ + ۱۳۹۹ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

در مراحل $۱ + ۲^i$ آما اندازه ی پشته دو برابر شده و ۲^{i+1} واحد زمان مصرف می شود. در مراحل دیگر (از جمله مرحله ی ساختن پشته با دستور $create$) یک واحد زمان مصرف خواهد شد. پس پاسخ برابر است با:

$$۱ + (۲^۱ + ۲^۲ + \dots + ۲^{۱۱}) + (۱۳۹۸ - ۱۱) = ۵۴۸۲$$

□

۲۵ یک برنامه حداقل چند خط باید داشته باشد تا در انتهای آن دست کم ۱۰۰ واحد حافظه (در مجموع برای پشته ها) وجود داشته باشد؟

- ۲۷ (۱) ۳۵ (۲) ۵۱ (۳) ۲۲ (۴) ۲۳ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

می توانیم فرض کنیم برنامه ی بهینه دستور pop ندارد، زیرا با حذف دستورهای pop حافظه ی اشغال شده کم نمی شود.

هم چنین با بهینه سازی موضعی می توانید فرض کنید در برنامه ی بهینه، تمام عمل های $push$ برای یک پشته انجام شده و سپس تمام عمل های $copy$ انجام خواهند شد. با حالت بندی روی تعداد عمل های $push$ اولیه، حالت بهینه به دست خواهد آمد. در حالت بهینه ۹ عمل $push$ برای یک پشته انجام شده، سپس آن را در ۶ پشته ی دیگر کپی می کنیم. این برنامه ۲۲ خط (۷ خط برای ساختن پشته ها، ۹ خط برای اضافه کردن اعضا و ۶ خط برای کپی کردن) خواهد داشت.

□

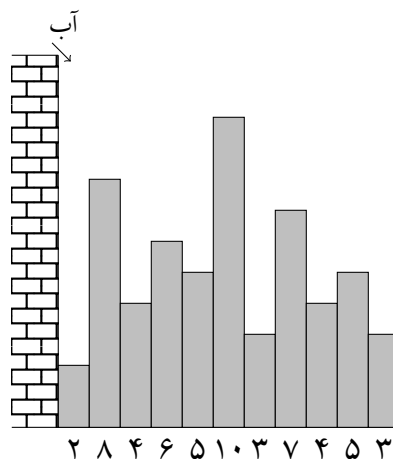
مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۱۵۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ نامه کنید.
- سوالات ۱۲ تا ۲۵ در دسته های چند سوالی آمده اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ شش برادر می خواهند از بین خودشان یکی را برای خرید نان انتخاب کنند. آن ها از برادر بزرگتر می خواهند که یک تاس بیندازد و شماره ی هر کسی آمد نان بخرد. اگر تاس، شماره ی مربوط به برادر بزرگتر را نشان داد، او بهانه می آورد و دوباره تاس را می اندازد. در صورت انداختن تاس برای بار دوم، هر نتیجه ای که آمد اجرا می شود. احتمال این که برادر کوچکتر نان بگیرد به کدام گزینه نزدیکتر است؟

۰/۱۵۰ (۱) ۰/۲۰۰ (۲) ۰/۱۳۸ (۳) ۰/۱۶۶ (۴) ۰/۱۹۴ (۵)

۲ شهر تورقوزآباد در ارتفاع زیر سطح دریا قرار دارد و یک سد جلوی غرق شدن شهر را گرفته است. این شهر دوی بعدی تعدادی ساختمان دارد که به دنبال هم و بدون فاصله هستند. از بالای سد در لحظه ی صفر، آب سرریز می شود و با سرعت یک مترمربع در دقیقه روی ساختمان اول (چپ ترین ساختمان) می ریزد. عرض همه ی ساختمان ها یک متر و ارتفاع آن ها (به متر) زیر هر ساختمان در شکل نوشته شده است. آخرین دقیقه ای که سقف ساختمان آخر خشک می ماند چیست؟



۱۸ (۵) ۳۰ (۴) ۴۶ (۳) ۳۸ (۲) ۱۴ (۱)

۳ ایلیا رمز موبایلش را فراموش کرده است. او به یاد دارد رمزش یک عدد چهار رقمی بوده که رقم های صفر و پنج ندارد. همچنین او یادش هست هر دو رقم مجاور رمزش یا یکسان هستند و یا روی صفحه ی کلید موبایلش که در شکل پایین نشان داده شده، مجاور هم هستند. دو کلید مجاورند، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. ایلیا قصد دارد رمزش را با آزمون و خطا پیدا کند و سوالاتش این است که رمزش چند حالت ممکن دارد؟

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹
*	۰	#

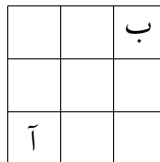
۸۱ (۵) ۱۰۸ (۴) ۲۴۳ (۳) ۱۸۹ (۲) ۲۱۶ (۱)

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۴ الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱. به ازای i از ۱ تا ۱۰ این کار را انجام بده:آ. به احتمال $\frac{1}{i}$ مقدار متغیر x را برابر i قرار بده.به چه احتمالی در انتهای الگوریتم x برابر با ۵ است؟ $\frac{1}{5}$ (۵) $\frac{1}{120}$ (۴) $\frac{1}{151200}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۱)

۵ در جدول نشان داده شده در شکل زیر، دو خانه مجاور هستند اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. مهدی می خواهد از خانه ی «آ» به خانه ی «ب» برود. او از هر خانه می تواند به هر کدام از خانه های مجاورش برود. ناصر می خواهد راه او را با گذاشتن مانع در بعضی خانه ها ببندد. اگر در خانه ای مانع قرار داشته باشد، مهدی دیگر نمی تواند به آن خانه برود. ناصر به چند روش می تواند راه مهدی را ببندد؟ توجه کنید در خانه ی «آ» و «ب» نمی توان مانع قرار داد.



۶۳ (۵)

۷۷ (۴)

۱۲۷ (۳)

۶۹ (۲)

۴۹ (۱)

۶ ۷ لامپ در یک ردیف به صورت سری به هم وصل شده اند. می دانیم دقیقاً دو تا از لامپ ها خراب هستند و به همین خاطر هیچ کدام روشن نمی شوند. برای پیدا کردن لامپ های خراب، در هر آزمون می توانیم دو سر سیم برق را به دو سر یک زیربازه از لامپ ها (شامل یک یا چند لامپ) وصل کنیم. اگر همه ی لامپ های درون این بازه سالم باشند همه روشن می شوند و اگر حداقل یکی از این لامپ ها خراب باشد، هیچ کدام روشن نمی شوند. با حداقل چند آزمون می توان هر دو لامپ خراب را پیدا کرد؟

۵ (۵)

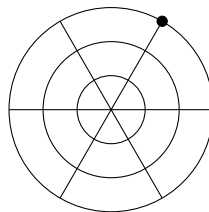
۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۷ (۱)

۷ سلسایدر (سلطان عنکبوت ها) لانه ای به شکل زیر دارد:



سستی یک نقطه از تار عنکبوت، فاصله ی هندسی آن از مرکز لانه تعریف می شود. سلسایدر ابتدا در نقطه ی مشخص شده (در شکل بالا) قرار دارد. او شروع به حرکت روی تارهای لانه می کند تا به مرکز لانه برسد. عنکبوت در طی مسیر هر نقطه ی لانه را حداکثر یک بار می بیند. هم چنین سستی نقاط در حین مسیر نباید در هیچ لحظه ای زیاد شود. چند مسیر مختلف برای سلسایدر تا رسیدن به مرکز لانه وجود دارد؟

۲۱۶ (۵)

۱۳۳۱ (۴)

۱۰۰۰ (۳)

۱۷۲۸ (۲)

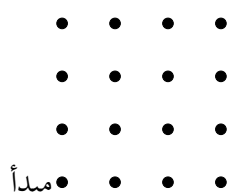
۱۵۸۴ (۱)

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۸ در شکل زیر هر کدام از نقطه ها، نشان دهنده ی یک شهر هستند. می خواهیم تعدادی جاده ی یک طرفه بین این شهرها احداث کنیم. جاده ها دو نوع هستند:

- جاده هایی که از یک شهر به اولین شهر سمت راستی آن کشیده می شوند.
- جاده هایی که از یک شهر به اولین شهر بالایی آن احداث می شوند.

به چند طریق می توانیم تعدادی جاده احداث کنیم، طوری که از شهر مبدأ به هر شهر دیگر دقیقاً یک مسیر وجود داشته باشد؟



۳۲۷۶۸ (۵)

۷۲۹ (۴)

۴۲ (۳)

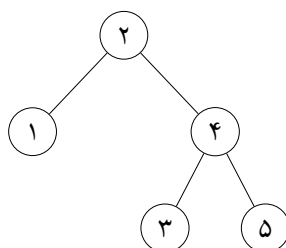
۵۱۲ (۲)

۷۰ (۱)

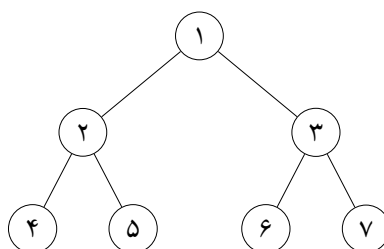
۹ **درخت جست و جوی دودویی** یک درخت ریشه دار n رأسی با ویژگی های زیر است:

- رأس ها با اعداد ۱ تا n شماره گذاری شده اند.
- هر رأس حداکثر دو فرزند دارد که یکی ریشه ی زیردرخت سمت چپ و دیگری، ریشه ی زیردرخت سمت راست است.
- به ازای هر رأس، شماره های تمام رأس های زیردرخت سمت چپ آن (در صورت وجود) از شماره ی خودش کوچک تر و شماره ی تمام رأس های زیردرخت سمت راست آن (در صورت وجود) از شماره ی خودش بزرگ تر است.

برای مثال، یک درخت جست و جوی دودویی در زیر کشیده ایم:



درخت زیر را در نظر بگیرید. در هر مرحله می توانیم یک یال در نظر گرفته و شماره ی دو رأس آن را جابه جا کنیم. کمینه ی تعداد مراحل لازم را بیابید، طوری که بتوانیم شکل را به یک درخت جست و جوی دودویی تبدیل کنیم.



۸ (۵)

۹ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۰ یک مکعب $3 \times 3 \times 3$ داریم. می خواهیم تعدادی آجر به ابعاد $2 \times 2 \times 1$ در آن بگذاریم، طوری که آجرها از مکعب بیرون نزنند. استفاده از حالات مختلف چرخش آجرها نیز مجاز است، به صورتی که اضلاع آجرها موازی اضلاع مکعب باشد. به عبارت دیگر می توانیم آجرها را در هر سه حالت $1 \times 2 \times 2$ ، $1 \times 2 \times 1$ و $2 \times 2 \times 1$ قرار دهیم. حداکثر چند آجر می توانیم درون مکعب جای دهیم؟

۴ (۵)

۳ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

۱۱ یک جدول 8×2 داریم. دو خانه را مجاور گوئیم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. می خواهیم تعدادی مهمان دعوت کنیم تا در خانه های جدول قرار گیرند. خبردار شده ایم ممکن است میان مهمان ها دزد یا دزدهایی موجود باشند؛ به همین دلیل می خواهیم در برخی از خانه ها به جای مهمان، نگهبان قرار دهیم. اگر دزدی مجاور دست کم یکی از نگهبانان باشد، شناسایی خواهد شد. حداقل چند خانه را باید با نگهبان پر کنیم تا در هر حالتی وجود یا عدم وجود دزد در جدول تشخیص داده شود؟

۶ (۵)

۸ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۵ (۱)

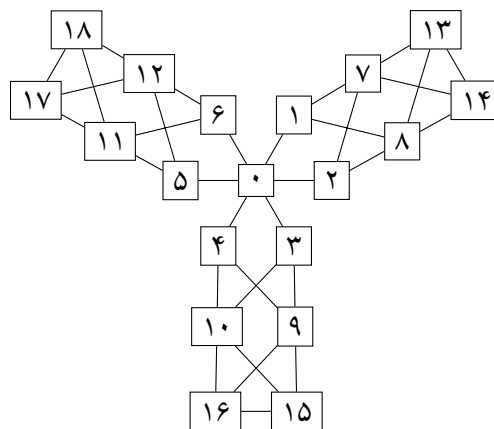
شما می خواهید از موزه ی لوور بازدید کنید. با توجه به پیچیدگی نقشه ی موزه، به این صورت عمل می کنیم: ابتدا در سالن ورودی که با شماره ی صفر نشان داده شده است، نقشه و راهنمای صوتی را دریافت می کنیم. در هر مرحله، اگر اشیاء سالنی که در آن هستیم را قبلاً ندیده باشیم، از آن ها بازدید می کنیم. سپس

- اگر از دست کم یکی از سالن های مجاور بازدید نکرده باشیم، به سالنی که کم ترین شماره را دارد و آن را بازدید نکرده ایم می رویم.
- اگر از همه ی سالن های مجاور بازدید کرده باشیم، به سالنی برمی گردیم که برای اولین بار از آن جا به این سالن آمده ایم.

حضور در سالنی که قبلاً در آن رفته ایم، بازدید محسوب نمی شود.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۱۲ اگر نقشه ی موزه به شکل زیر باشد، ۱۵ امین سالنی که بازدید می کنیم، کدام سالن است؟ توجه کنید سالن صفر چیزی برای بازدید کردن ندارد.



۱۵ (۵)

۶ (۴)

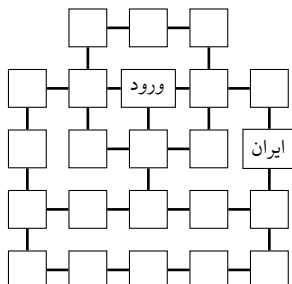
۵ (۳)

۱۱ (۲)

۱۲ (۱)

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۳ فرض کنید نقشه ی موزه به شکل زیر است و ژان-لوک رئیس موزه ی لوور می خواهد سالن ها را طوری شماره گذاری کند که شما در زمان دیرتری به سالن ایران برسید. اگر ژان-لوک نهایت تلاش خودش را انجام دهد، شما سالن ایران را به عنوان چندمین سالن بازدید می کنید؟ توجه کنید سالن ورود یا همان سالن صفر چیزی برای بازدید ندارد.



۲۰ (۵)

۱۷ (۴)

۲۱ (۳)

۳ (۲)

۲۲ (۱)

لپگلی دنباله ای دارد که به شکل زیر تعریف می شود:

$$L_1 = 1$$

• به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 1$ داریم $L_{2n} = 2L_n$

• به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 1$ داریم $L_{2n+1} = L_{2n} - 1$

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۱۴ مقدار L_{2047} را بیابید.

۱ (۵)

۳ (۴)

۲۰۴۷ (۳)

۱۰۲۴ (۲)

۱۰۲۳ (۱)

۱۵ مجموع مقادیر L_1 تا L_{255} را بیابید.

۱۱۰۵۰ (۵)

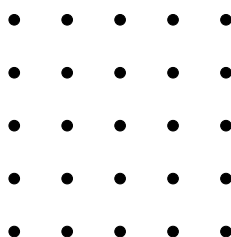
۳۲۷۶۸ (۴)

۵۰۲ (۳)

۲۲۱۰۰ (۲)

۲۱۸۴۵ (۱)

شبکه ی نقاط زیر را در نظر بگیرید:



یک مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین را **سلطانی** گوئیم، اگر رأس های آن منطبق بر نقاط بالا بوده و اضلاع قائمه ی آن افقی و عمودی باشند.

در ابتدا تعدادی از نقاط بالا سبز شده اند. **سوگلی** در هر مرحله یک مثلث قائم الزاویه ی سلطانی انتخاب می کند، طوری که دقیقاً دو رأس آن سبز باشند (لزومی ندارد این دو رأس، دو سر وتر باشند)؛ سپس رأس سوم را نیز سبز می کند. او آن قدر این کار را انجام می دهد تا دیگر نتوان نقطه ی جدیدی را سبز کرد.

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

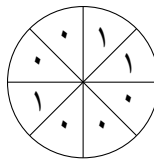
۱۶ حداقل چند خانه در ابتدا باید سبز باشند تا این امکان وجود داشته باشد که پس از انجام مراحل، تمام نقاط به رنگ سبز در آیند؟

۲ (۱) ۹ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۱۶ (۵)

۱۷ حداکثر چند خانه در ابتدا می توانند سبز باشند، طوری که در انتها دست کم یک نقطه ی غیر سبز باقی بماند؟

۲۰ (۱) ۴ (۲) ۹ (۳) ۵ (۴) ۲۴ (۵)

ملازمین (جمع مملی!) موجوداتی عجیب هستند. DNA هر مملی از هشت بیت (رقم ۰ یا ۱) تشکیل شده است که دور یک دایره قرار گرفته اند. برای مثال شکل زیر مثالی از DNA یک مملی است:



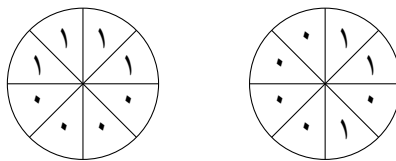
دو مملی را همسان گوئیم، اگر بتوان DNA یکی را چرخاند تا به دیگری تبدیل شود. عمل XOR روی دو بیت را با علامت $\oplus$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود:

$$0 \oplus 0 = 0 \quad 0 \oplus 1 = 1 \quad 1 \oplus 0 = 1 \quad 1 \oplus 1 = 0$$

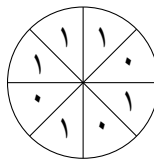
عمل تولید مثل توسط دو مملی مانند M_1 و M_2 به صورت زیر انجام می شود:

مملی M_1 دایره ی DNA اش را به مقداری دلخواه می چرخاند و روی دایره ی DNA مملی M_2 می اندازد. سپس بیت های هر دو خانه ی روی هم XOR گرفته شده و در خانه ی متناظر مملی فرزند نوشته می شوند.

برای مثال دو مملی زیر را در نظر بگیرید که می خواهند تولید مثل کنند:



فرض کنید مملی سمت راست یک واحد در جهت ساعت گرد بچرخد و سپس عمل XOR و تولید مثل انجام شود. در نتیجه یک مملی با DNA زیر به وجود می آید:



مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

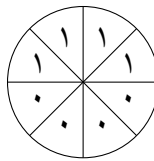
مملی هایی که تولید مثل می کنند، از بین نرفته و زنده می مانند. هم چنین برای عمل تولید مثل بین دو مملی هیچ محدودیتی نیست؛ به عبارت دیگر هر دو مملی (حتی همسان) می توانند تولید مثل کنند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید _____

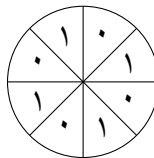
۱۸ کمینه ی تعداد مملی های اولیه را بیابید، طوری که با استفاده از آن ها بتوانیم تعدادی مملی بسازیم که تمام DNA های ممکن را داشته باشند.

- ۳ (۱) ۱۶ (۲) ۲ (۳) ۸ (۴) ۶ (۵)

۱۹ فرض کنید در ابتدا فقط دو مملی داریم که DNA هر دو به شکل زیر است:



حداقل چند عمل تولید مثل باید انجام شود تا یک مملی با DNA زیر ساخته شود؟

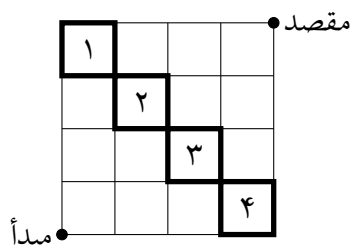


- ۵ (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵)

۲۰ دو خانه را مجاور گوئیم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. یک مملی را خوشگل گوئیم، اگر در DNA خود هیچ دو خانه ی مجاور شامل بیت ۱ نداشته باشد. چند مملی خوشگل دو به دو غیر همسان وجود دارد؟

- ۷ (۱) ۳۴ (۲) ۲۱ (۳) ۸ (۴) ۹ (۵)

در جدول 4×4 زیر، یک دزد می خواهد از نقطه ی مبدأ به نقطه ی مقصد برود. دزد فقط می تواند روی پاره خط ها و تنها در جهت های بالا و راست حرکت کند. سرعت حرکت دزد، ثابت و یک واحد بر ثانیه است. به غیر از دزد، روی محیط هر کدام از چهار خانه ای که با شماره های ۱ تا ۴ نشان داده شده اند، یک پلیس قرار دارد. پلیس هر خانه نیز با سرعت ثابت یک واحد بر ثانیه و در جهت پادساعت گرد روی محیط آن خانه حرکت می کند. اگر در یک لحظه دزد با یکی از پلیس ها روی یک نقطه باشد (چه در وسط پاره خط ها و چه در انتهای پاره خط ها) دست گیر می شود.



مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۲۱ اگر پلیس هر خانه ابتدا در رأس پایین راست آن باشد، دزد به چند طریق می تواند از مبدأ به مقصد برود؟

۰ (۱) ۱۵ (۲) ۳۵ (۳) ۱ (۴) ۸ (۵)

۲۲ اگر پلیس هر خانه ابتدا در رأس بالا چپ آن باشد، دزد به چند طریق می تواند از مبدأ به مقصد برود؟

۱ (۱) ۳۵ (۲) ۰ (۳) ۱۵ (۴) ۸ (۵)

۲۳ اگر پلیس هر خانه ابتدا در رأس پایین چپ آن باشد، دزد به چند طریق می تواند از مبدأ به مقصد برود؟

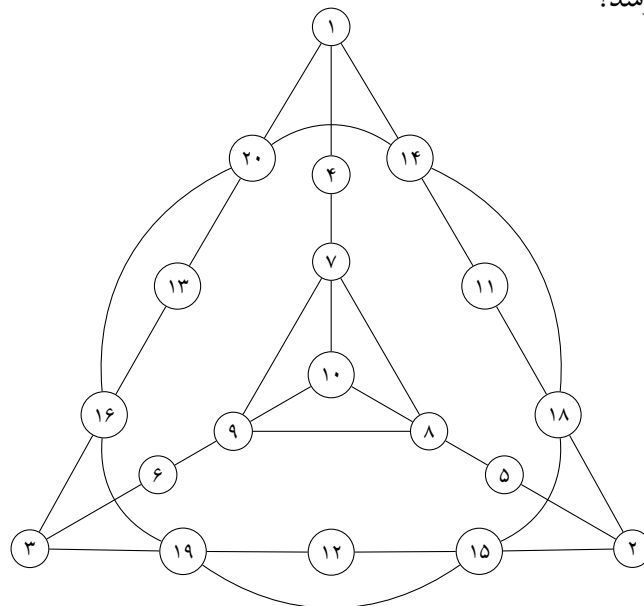
۳۵ (۱) ۰ (۲) ۸ (۳) ۱۵ (۴) ۱ (۵)

گروهی از افراد با هم قرار گذاشته اند که رأس هر ساعت هر کدام خبرهایی که در ساعت قبل دریافت کرده است برای همه ی دوستان خود بفرستد. در یک شبکه ی دوستی، هر فرد با یک دایره نشان داده می شوند و اگر دو نفر با هم دوست باشند، دایره های آن ها به هم وصل می شوند. شکل زیر یک شبکه ی دوستی با سه نفر را نشان می دهد. در این شبکه اگر ابتدا نفر ۱ خبر جدیدی را دریافت کند، نفر ۲ پس از یک ساعت و نفر ۳ پس از دو ساعت از آن خبر مطلع می شود؛ در حالی که اگر نفر ۲ اولین کسی باشد که خبر را دریافت می کند، پس از یک ساعت همه از خبر مطلع می شوند.



_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

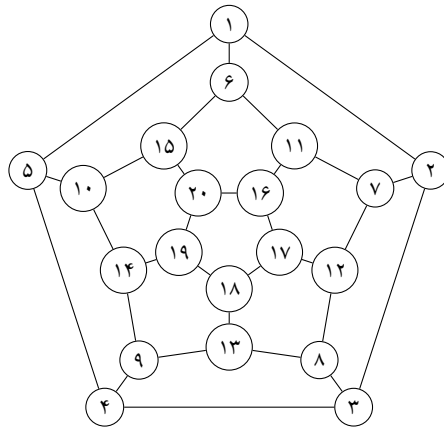
۲۴ یک شبکه ی دوستی در شکل زیر آمده است. در این شبکه، یک خبر جدید را ابتدا به چه کسی بدهیم تا در کمترین زمان ممکن خبر به همه برسد؟



۱۰ (۱) ۱۳ (۲) ۷ (۳) ۲ (۴) ۴ (۵)

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۵ در شبکه ی دوستی زیر، یک خبر جدید را به کدام دو نفر بدهیم تا در کمترین زمان ممکن خبر به همه برسد؟



۱۹ و ۷ (۵)

۵ و ۲ (۴)

۱۲ و ۵ (۳)

۱۹ و ۱۷ (۲)

۱۶ و ۴ (۱)

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۱۵۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ نامه کنید.
- سوالات ۱۲ تا ۲۵ در دسته های چند سوالی آمده اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

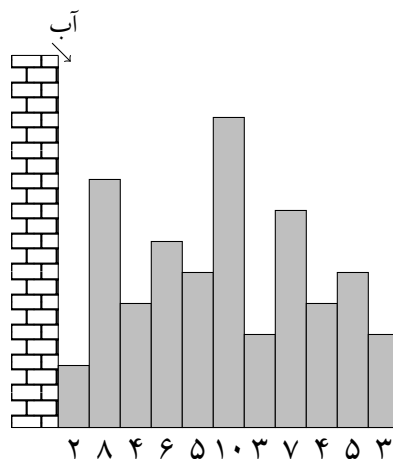
۱ شش برادر می خواهند از بین خودشان یکی را برای خرید نان انتخاب کنند. آن ها از برادر بزرگ تر می خواهند که یک تاس بیندازد و شماره ی هر کسی آمد نان بخرد. اگر تاس، شماره ی مربوط به برادر بزرگ تر را نشان داد، او بهانه می آورد و دوباره تاس را می اندازد. در صورت انداختن تاس برای بار دوم، هر نتیجه ای که آمد اجرا می شود. احتمال این که برادر کوچک تر نان بگیرد به کدام گزینه نزدیک تر است؟

۰/۱۹۴ (۵) ۰/۱۶۶ (۴) ۰/۱۳۸ (۳) ۰/۲۰۰ (۲) ۰/۱۵۰ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

- احتمال این که برادر کوچک تر نان بگیرد برابر با جمع احتمال دو حالت است:
- همان دفعه ی اول، برادر کوچک تر انتخاب شود که احتمال آن $\frac{1}{6}$ است.
 - دفعه ی اول برادر بزرگ تر انتخاب شود، دوباره تاس بیندازند و سپس برادر کوچک تر انتخاب شود؛ که احتمال آن برابر $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ است.
- جمع احتمال این دو حالت $0/194 \approx \frac{7}{36}$ است. □

۲ شهر تورقوزآباد در ارتفاع زیر سطح دریا قرار دارد و یک سد جلوی غرق شدن شهر را گرفته است. این شهر دو بعدی تعدادی ساختمان دارد که به دنبال هم و بدون فاصله هستند. از بالای سد در لحظه ی صفر، آب سرریز می شود و با سرعت یک مترمربع در دقیقه روی ساختمان اول (چپ ترین ساختمان) می ریزد. عرض همه ی ساختمان ها یک متر و ارتفاع آن ها (به متر) زیر هر ساختمان در شکل نوشته شده است. آخرین دقیقه ای که سقف ساختمان آخر خشک می ماند چیست؟



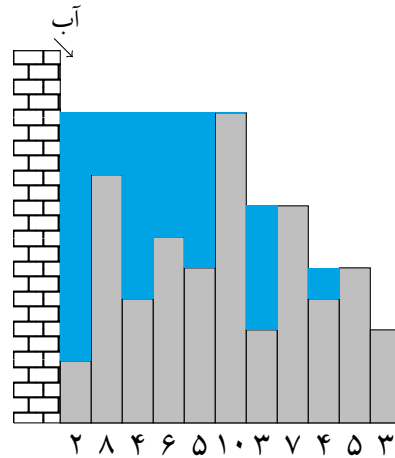
۱۸ (۵) ۳۰ (۴) ۴۶ (۳) ۳۸ (۲) ۱۴ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

برای آن که آب از بلندترین ساختمان (ساختمان با ارتفاع ۱۰) عبور کند، باید بالای تمام ساختمان های قبل از آن تا ارتفاع ۱۰ پر شود. پس ۲۵ واحد آب نیاز داریم تا آب از ساختمان با ارتفاع ۱۰ عبور کند. با همین استدلال

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

چهار واحد آب دیگر نیاز داریم تا آب از ساختمان با ارتفاع ۷ عبور کند. یک واحد آب دیگر نیز برای عبور از ساختمان با ارتفاع ۵ نیاز داریم. پس پاسخ برابر $30 = 1 + 4 + 25$ است.



□

ایلیا رمز موبایلش را فراموش کرده است. او به یاد دارد رمزش یک عدد چهار رقمی بوده که رقم های صفر و پنج ندارد. همچنین او یادش هست هر دو رقم مجاور رمزش یا یکسان هستند و یا روی صفحه ی کلید موبایلش که در شکل پایین نشان داده شده، مجاور هم هستند. دو کلید مجاورند، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. ایلیا قصد دارد رمزش را با آزمون و خطا پیدا کند و سوالش این است که رمزش چند حالت ممکن دارد؟

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹
*	۰	#

۸۱ (۵)

۱۰۸ (۴)

۲۴۳ (۳)

۱۸۹ (۲)

۲۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

هر رقم مجاز دقیقاً با دو رقم مجاز دیگر مجاور است. رقم اول هشت حالت و رقم های بعدی هر کدام سه حالت (رقم قبلی و مجاورهای آن) دارند. پس جواب برابر است با

$$8 \times 3 \times 3 \times 3 = 216$$

□

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱. به ازای i از ۱ تا ۱۰ این کار را انجام بده:

آ. به احتمال $\frac{1}{i}$ مقدار متغیر x را برابر i قرار بده.

به چه احتمالی در انتهای الگوریتم x برابر با ۵ است؟

 $\frac{1}{5}$ (۵)

 $\frac{1}{120}$ (۴)

 $\frac{1}{151200}$ (۳)

 $\frac{1}{4}$ (۲)

 $\frac{1}{1}$ (۱)

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

باید در مرحله ی پنجم x برابر با ۵ شود و در مرحله های بعدی تغییر نکند. احتمال این امر برابر است با:

$$\frac{1}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10}.$$

□

در جدول نشان داده شده در شکل زیر، دو خانه مجاور هستند اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. مهدی می خواهد از خانه ی «آ» به خانه ی «ب» برود. او از هر خانه می تواند به هر کدام از خانه های مجاورش برود. ناصر می خواهد راه او را با گذاشتن مانع در بعضی خانه ها ببندد. اگر در خانه ای مانع قرار داشته باشد، مهدی دیگر نمی تواند به آن خانه برود. ناصر به چند روش می تواند راه مهدی را ببندد؟ توجه کنید در خانه ی «آ» و «ب» نمی توان مانع قرار داد.

		ب
آ		

۶۳ (۵)

۷۷ (۴)

۱۲۷ (۳)

۶۹ (۲)

۴۹ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

دو حالت داریم:

- در خانه ی وسط مانع قرار داده شود؛ در این حالت دو مسیر مجزا از «آ» به «ب» موجود است. هر کدام از این مسیرها سه خانه ی خالی دارد و برای مسدود کردن مسیر باید در حداقل یکی از آن ها مانعی قرار داده شود. این کار به $49 = (2^3 - 1) \times (2^3 - 1)$ روش قابل انجام است.
- در خانه ی وسط مانع قرار داده نشود؛ در این صورت از چهار خانه ی مشخص شده در شکل زیر، یا باید دست کم در سه خانه مانع قرار داده شود $(5) = (4) + (1)$ (حالت ۴) یا هر دو خانه ی مجاور یکی از «آ» و «ب» شامل مانع باشند (۲ حالت). مانع گذاشتن در دو خانه ی بالا چپ و پایین راست اختیاری است. بنابراین تعداد راه ها در این حالت برابر است با $28 = 2^2 \times (2 + 5)$.

	*	ب
*		*
آ	*	

□

پس در مجموع تعداد روش ها برابر $49 + 28 = 77$ است.

۷ لامپ در یک ردیف به صورت سری به هم وصل شده اند. می دانیم دقیقاً دو تا از لامپ ها خراب هستند و به همین خاطر هیچ کدام روشن نمی شوند. برای پیدا کردن لامپ های خراب، در هر آزمون می توانیم دو سر سیم برق را به دو سر یک زیربازه از لامپ ها (شامل یک یا چند لامپ) وصل کنیم. اگر همه ی لامپ های درون این بازه سالم باشند همه روشن می شوند و اگر حداقل یکی از این لامپ ها خراب باشد، هیچ کدام روشن نمی شوند. با حداقل چند آزمون می توان هر دو لامپ خراب را پیدا کرد؟

۶

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۵ (۵)

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

ابتدا ثابت می کنیم دست کم پنج آزمون لازم است. تعداد حالات ممکن $2^5 = 32$ بوده و با کم تر از پنج آزمون حداکثر می توان $2^4 = 16$ حالت را از هم تمیز داد.

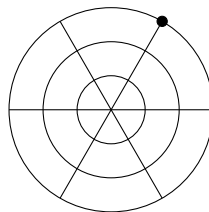
حال روشی با پنج آزمون ارائه می کنیم: در آزمون اول لامپ های ۱ و ۲ و در آزمون دوم لامپ های ۳ و ۴ را امتحان می کنیم. سه حالت داریم:

- در هر دو آزمون لامپ ها روشن شوند؛ در این حالت دو لامپ خراب در بین لامپ های ۵، ۶ و ۷ هستند که با آزمون لامپ ۵ و لامپ ۶ (هر کدام به تنهایی) لامپ های خراب پیدا می شود. در این حالت در مجموع چهار آزمون انجام می شود.
- در هر دو آزمون لامپ ها روشن نشوند؛ یک لامپ خراب در بین ۱ و ۲ و یک لامپ خراب در بین ۳ و ۴ وجود دارد. برای تعیین هر کدام از لامپ های خراب یک آزمون نیاز است. در این حالت نیز در مجموع چهار آزمون انجام می شود.
- دقیقاً در یکی از دو آزمون لامپ ها روشن شوند؛ بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می کنیم لامپ ۳ و ۴ روشن شوند و لامپ ۱ و ۲ روشن نشوند. در این حالت در آزمون سوم لامپ های ۵ و ۶ را امتحان می کنیم. حال اگر

- لامپ ۵ و ۶ روشن نشدند، یک لامپ خراب بین ۱ و ۲ و دیگری بین ۵ و ۶ است که هر کدام با یک آزمون پیدا می شوند. در این حالت با پنج آزمون لامپ های خراب پیدا می شوند.
- لامپ ۵ و ۶ روشن شدند، جواب بین ۱، ۲ و ۷ است. با دو آزمون (هر آزمون یک لامپ) وضعیت هر سه لامپ مشخص می شود. در این حالت نیز با پنج آزمون لامپ های خراب پیدا می شوند.

□

۷ سلسایدر (سلطان عنکبوت ها) لانه ای به شکل زیر دارد:



سستی یک نقطه از تار عنکبوت، فاصله ی هندسی آن از مرکز لانه تعریف می شود. سلسایدر ابتدا در نقطه ی مشخص شده (در شکل بالا) قرار دارد. او شروع به حرکت روی تارهای لانه می کند تا به مرکز لانه برسد. عنکبوت در طی مسیر هر نقطه ی لانه را حداکثر یک بار می بیند. هم چنین سستی نقاط در حین مسیر نباید در هیچ لحظه ای زیاد شود. چند مسیر مختلف برای سلسایدر تا رسیدن به مرکز لانه وجود دارد؟

۲۱۶ (۵)

۱۳۳۱ (۴)

۱۰۰۰ (۳)

۱۷۲۸ (۲)

۱۵۸۴ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

در هر یک از سه لایه ی موجود در تار عنکبوت، نقطه ای که سلسایدر از آن به لایه ی مرکزی تر می رود، شش حالت دارد. اگر این نقطه، خود نقطه ی شروع سلسایدر در لایه ی کنونی باشد، یک حالت برای رفتن به لایه ی بعدی

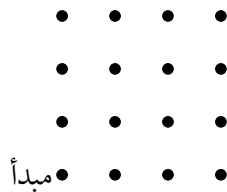
مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

داریم؛ در غیر این صورت دو حالت داریم (حرکت ساعت گرد یا پادساعت گرد تا آن نقطه). پس کل کار به $1331 = (5 \times 2 + 1)$ حالت قابل انجام است.

در شکل زیر هر کدام از نقطه ها، نشان دهنده ی یک شهر هستند. می خواهیم تعدادی جاده ی یک طرفه بین این شهرها احداث کنیم. جاده ها دو نوع هستند:

- جاده هایی که از یک شهر به اولین شهر سمت راستی آن کشیده می شوند.
- جاده هایی که از یک شهر به اولین شهر بالایی آن احداث می شوند.

به چند طریق می توانیم تعدادی جاده احداث کنیم، طوری که از شهر مبدأ به هر شهر دیگر دقیقاً یک مسیر وجود داشته باشد؟



۳۲۷۶۸ (۵)

۷۲۹ (۴)

۴۲ (۳)

۵۱۲ (۲)

۷۰ (۱)

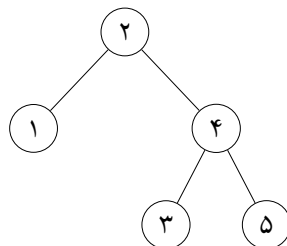
پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

جاده های ضلع سمت چپ و پایین باید تأسیس شوند. برای ۹ شهر دیگر تعداد راه های جاده زدن به آن ها (نه از آن ها) را می شماریم. برای هر کدام دقیقاً باید یک جاده ی ورودی تأسیس کنیم؛ زیرا اگر صفر جاده وجود داشته باشد، از شهر مبدأ نمی توان به آن شهر رسید و اگر هر دو جاده وجود داشته باشد، از دو راه می توان از شهر مبدأ به آن شهر رسید (زیرا قرار است به هر یک از دو شهر ورودی دقیقاً یک مسیر وجود داشته باشد). پس پاسخ برابر 2^9 است.

۹ **درخت جست و جوی دودویی** یک درخت ریشه دار n رأسی با ویژگی های زیر است:

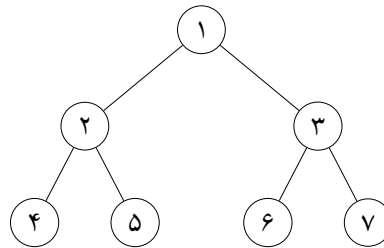
- رأس ها با اعداد ۱ تا n شماره گذاری شده اند.
- هر رأس حداکثر دو فرزند دارد که یکی ریشه ی زیردرخت سمت چپ و دیگری، ریشه ی زیردرخت سمت راست است.
- به ازای هر رأس، شماره های تمام رأس های زیردرخت سمت چپ آن (در صورت وجود) از شماره ی خودش کوچک تر و شماره ی تمام رأس های زیردرخت سمت راست آن (در صورت وجود) از شماره ی خودش بزرگ تر است.

برای مثال، یک درخت جست و جوی دودویی در زیر کشیده ایم:



مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

درخت زیر را در نظر بگیرید. در هر مرحله می توانیم یک یال در نظر گرفته و شماره ی دو رأس آن را جابه جا کنیم. کمینه ی تعداد مراحل لازم را بیابید، طوری که بتوانیم شکل را به یک درخت جست و جوی دودویی تبدیل کنیم.



۸ (۵)

۹ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

ابتدا مثالی با هفت مرحله ارائه می دهیم. کافی است به ترتیب جابه جایی های $5 \leftrightarrow 2$, $5 \leftrightarrow 1$, $4 \leftrightarrow 1$, $5 \leftrightarrow 6$ را انجام دهیم. حال ثابت می کنیم کار با کم تر از هفت مرحله قابل انجام نیست. مجموع فاصله ی اعداد از مکانی که باید در انتها باشند، ۱۲ یال است. پس دست کم $\frac{12}{2} = 6$ جابه جایی نیاز است. تنها در صورتی می توان کار را با شش مرحله انجام داد که در هر مرحله، هر دو رأس جابه جا شونده به مکان نهایی خود نزدیک شوند. هیچ جابه جایی در مرحله ی اول این خاصیت را ندارد. پس دست کم هفت مرحله نیاز داریم. □

یک مکعب $3 \times 3 \times 3$ داریم. می خواهیم تعدادی آجر به ابعاد $1 \times 2 \times 2$ در آن بگذاریم، طوری که آجرها از مکعب بیرون نزنند. استفاده از حالات مختلف چرخش آجرها نیز مجاز است، به صورتی که اضلاع آجرها موازی اضلاع مکعب باشد. به عبارت دیگر می توانیم آجرها را در هر سه حالت $1 \times 2 \times 2$, $1 \times 2 \times 1$ و $2 \times 2 \times 1$ قرار دهیم. حداکثر چند آجر می توانیم درون مکعب جای دهیم؟

۴ (۵)

۳ (۴)

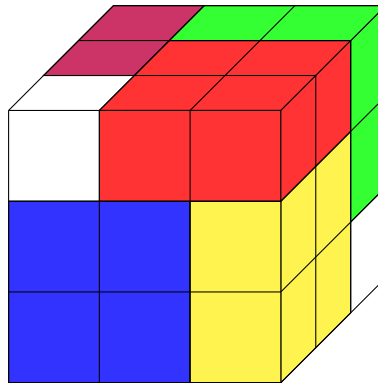
۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

هر آجر چهار خانه و مکعب ۲۷ خانه دارد. پس نمی توان بیش از $\lfloor \frac{27}{4} \rfloor = 6$ آجر گذاشت. حال مثالی با شش آجر ارائه می کنیم (آجر ششم که در شکل مشخص نیست، واقع در قرینه ی آجر قرمز نسبت به مرکز مکعب است):



□

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۱

یک جدول 8×2 داریم. دو خانه را مجاور گوئیم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. می خواهیم تعدادی مهمان دعوت کنیم تا در خانه های جدول قرار گیرند. خبردار شده ایم ممکن است میان مهمان ها دزد یا دزدهایی موجود باشند؛ به همین دلیل می خواهیم در برخی از خانه ها به جای مهمان، نگهبان قرار دهیم. اگر دزدی مجاور دست کم یکی از نگهبانان باشد، شناسایی خواهد شد. حداقل چند خانه را باید با نگهبان پر کنیم تا در هر حالتی وجود یا عدم وجود دزد در جدول تشخیص داده شود؟

۵ (۱)

۸ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

ابتدا مثالی با پنج نگهبان ارائه می کنیم:

		●				●	
●				●			●

حال ثابت می کنیم کار با کم تر از پنج نگهبان قابل انجام نیست. هر نگهبان حداکثر چهار خانه را (شامل خانه ی خودش) پوشش می دهد. پس دست کم به $\lceil \frac{16}{4} \rceil = 4$ نگهبان نیاز داریم. از طرفی اگر بخواهیم دقیقاً از چهار نگهبان استفاده کنیم، هیچ کدام نباید در خانه های گوشه قرار گیرند (زیرا سه خانه را پوشش خواهند داد). پس برای پوشش دو خانه ی گوشه ی سمت چپ، باید در هر دو خانه ی ستون دوم (از سمت چپ) نگهبان قرار داده شود. خانه های پوششی این دو نگهبان روی هم شش تاست. پس برای پوشش بقیه ی جدول دست کم $\lceil \frac{16-6}{4} \rceil = 3$ نگهبان نیاز است. پس در کل دست کم به پنج نگهبان نیاز داریم. □

شما می خواهید از موزه ی لوور بازدید کنید. با توجه به پیچیدگی نقشه ی موزه، به این صورت عمل می کنیم: ابتدا در سالن ورودی که با شماره ی صفر نشان داده شده است، نقشه و راهنمای صوتی را دریافت می کنیم. در هر مرحله، اگر اشیاء سالنی که در آن هستیم را قبلاً ندیده باشیم، از آن ها بازدید می کنیم. سپس

• اگر از دست کم یکی از سالن های مجاور بازدید نکرده باشیم، به سالنی که کم ترین شماره را دارد و آن را بازدید نکرده ایم می رویم.

• اگر از همه ی سالن های مجاور بازدید کرده باشیم، به سالنی برمی گردیم که برای اولین بار از آن جا به این سالن آمده ایم.

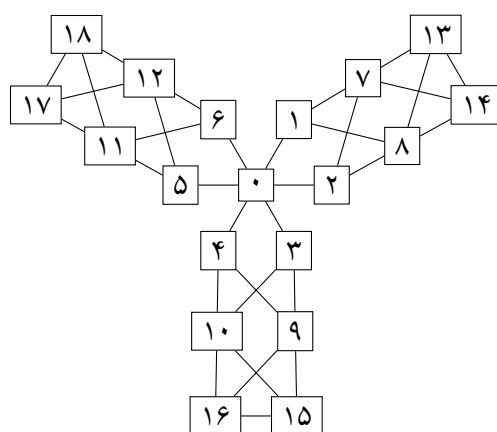
حضور در سالنی که قبلاً در آن رفته ایم، بازدید محسوب نمی شود.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۱۲

اگر نقشه ی موزه به شکل زیر باشد، ۱۵ امین سالنی که بازدید می کنیم، کدام سالن است؟ توجه کنید سالن صفر چیزی برای بازدید کردن ندارد.

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور



۱۵ (۵)

۶ (۴)

۵ (۳)

۱۱ (۲)

۱۲ (۱)

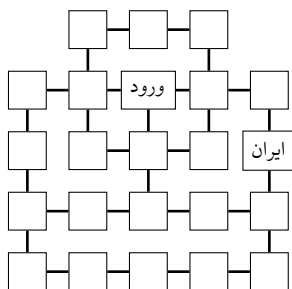
پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

با حذف سالن صفر، نقشه به سه مؤلفه ی همبندی افزای می شود که هر کدام ۶ سالن دارند. طبق روش گفته شده، بازدید هر مؤلفه که شروع شود، تمام سالن های آن بازدید می شود و سپس به سراغ مؤلفه ی بعدی می رویم. بنابراین ۱۵ امین سالن، سومین سالن مؤلفه ی سوم است. در مؤلفه ی سوم به ترتیب سالن های ۵ و ۱۱ و ۶ بازدید می شوند. بنابراین جواب سالن ۶ است.

□

فرض کنید نقشه ی موزه به شکل زیر است و ژان-لوک رئیس موزه ی لوور می خواهد سالن ها را طوری شماره گذاری کند که شما در زمان دیرتری به سالن ایران برسید. اگر ژان-لوک نهایت تلاش خودش را انجام دهد، شما سالن ایران را به عنوان چندمین سالن بازدید می کنید؟ توجه کنید سالن ورود یا همان سالن صفر چیزی برای بازدید ندارد.

۱۳



۲۰ (۵)

۱۷ (۴)

۲۱ (۳)

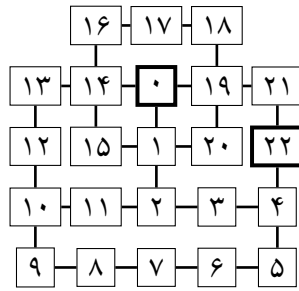
۳ (۲)

۲۲ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

اگر خانه ها را به صورت زیر شماره گذاری کنیم، ایران به عنوان آخرین سالن، یعنی ۲۲ امین سالن بازدید می شود. ترتیب بازدید از سالن ها هم در شکل زیر مشابه شماره هایی است که در خانه ها قرار داده شده است.

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور



□

لیکلی دنباله ای دارد که به شکل زیر تعریف می شود:

- $L_1 = 1$
- به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 1$ داریم $L_{2n} = 2L_n$
- به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 1$ داریم $L_{2n+1} = L_{2n} - 1$

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

مقدار L_{2047} را بیابید.

۱۴

- ۱ (۵) ۳ (۴) ۲۰۴۷ (۳) ۱۰۲۴ (۲) ۱۰۲۳ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

جملات ابتدای دنباله را می نویسیم:

$$1, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 16, \dots$$

به راحتی با استقرا می توانیم ثابت کنیم جملات L_{2^k} تا $L_{2^{k+1}-1}$ به ترتیب برابر 2^k تا ۱ (به ترتیب نزولی) هستند. پس $L_{2047} = 1$ است.

□

مجموع مقادیر L_1 تا L_{255} را بیابید.

۱۵

- ۱۱۰۵۰ (۵) ۳۲۷۶۸ (۴) ۵۰۲ (۳) ۲۲۱۰۰ (۲) ۲۱۸۴۵ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

با همان استدلال سوال قبل، باید مجموع زیر را حساب کنیم:

$$A = (1) + (1 + 2) + (1 + 2 + 3 + 4) + \dots + (1 + 2 + \dots + 2^7)$$

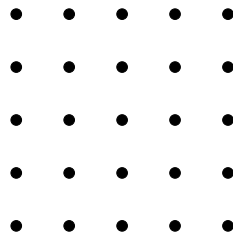
محاسبات:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^0 \times (2^0 + 1)}{2} + \frac{2^1 \times (2^1 + 1)}{2} + \dots + \frac{2^7 \times (2^7 + 1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left((2^0 + 2^2 + \dots + 2^{14}) + (2^0 + 2^1 + \dots + 2^7) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2^{16} - 1}{4 - 1} + \frac{2^8 - 1}{2 - 1} \right) \\ &= 11050 \end{aligned}$$

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

□

شبکه ی نقاط زیر را در نظر بگیرید:



یک مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین را **سلطانی** گوئیم، اگر رأس های آن منطبق بر نقاط بالا بوده و اضلاع قائمه ی آن افقی و عمودی باشند.

در ابتدا تعدادی از نقاط بالا سبز شده اند. **سوگلی** در هر مرحله یک مثلث قائم الزاویه ی سلطانی انتخاب می کند، طوری که دقیقاً دو رأس آن سبز باشند (لزومی ندارد این دو رأس، دو سر وتر باشند)؛ سپس رأس سوم را نیز سبز می کند. او آن قدر این کار را انجام می دهد تا دیگر نتوان نقطه ی جدیدی را سبز کرد.

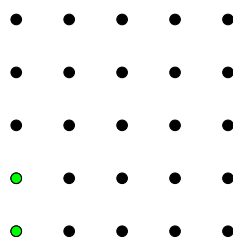
_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۱۶ حداقل چند خانه در ابتدا باید سبز باشند تا این امکان وجود داشته باشد که پس از انجام مراحل، تمام نقاط به رنگ سبز در آیند؟

۲ (۱) ۹ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۱۶ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

از طرفی دست کم دو نقطه لازم است؛ زیرا با فقط یک نقطه، نقطه ی جدیدی اضافه نمی شود. اگر هم دو نقطه ی زیر را سبز کنیم، تمام نقاط سبز خواهند شد.



□

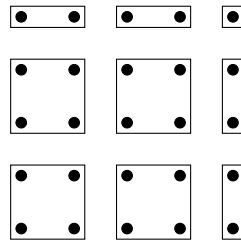
۱۷ حداکثر چند خانه در ابتدا می توانند سبز باشند، طوری که در انتها دست کم یک نقطه ی غیر سبز باقی بماند؟

۲۰ (۱) ۴ (۲) ۹ (۳) ۵ (۴) ۲۴ (۵)

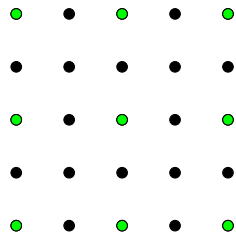
پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

ابتدا ثابت می کنیم حداکثر ۹ نقطه ی سبز در ابتدا می توان داشت. نقاط را به دسته های زیر افراز کنید:

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

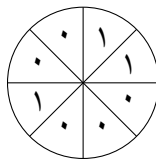


مشابه استدلال سوال قبل، اگر ابتدا از یک دسته بیش از یک نقطه ی سبز داشته باشیم، تمام نقاط سبز خواهند شد. پس حداکثر ۹ نقطه ی سبز در ابتدا می توان داشت. حال مثالی برای ۹ نقطه ارائه می کنیم. اگر نقاط سبز ابتدایی به شکل زیر باشند، هیچ نقطه ی سبز جدیدی اضافه نخواهد شد.



□

ملازمین (جمع مملی!) موجوداتی عجیب هستند. DNA هر مملی از هشت بیت (رقم ۰ یا ۱) تشکیل شده است که دور یک دایره قرار گرفته اند. برای مثال شکل زیر مثالی از DNA یک مملی است:



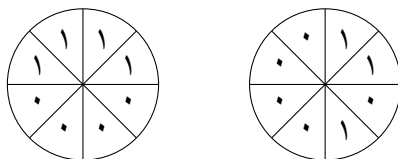
دو مملی را همسان گوئیم، اگر بتوان DNA یکی را چرخاند تا به دیگری تبدیل شود. عمل XOR روی دو بیت را با علامت $\oplus$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود:

$$0 \oplus 0 = 0 \quad 0 \oplus 1 = 1 \quad 1 \oplus 0 = 1 \quad 1 \oplus 1 = 0$$

عمل تولید مثل توسط دو مملی مانند M_1 و M_2 به صورت زیر انجام می شود:

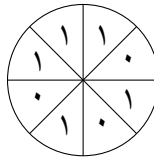
مملی M_1 دایره ی DNA اش را به مقداری دلخواه می چرخاند و روی دایره ی DNA مملی M_2 می اندازد. سپس بیت های هر دو خانه ی روی هم XOR گرفته شده و در خانه ی متناظر مملی فرزند نوشته می شوند.

برای مثال دو مملی زیر را در نظر بگیرید که می خواهند تولید مثل کنند:



مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

فرض کنید مملی سمت راست یک واحد در جهت ساعت گرد بچرخد و سپس عمل XOR و تولید مثل انجام شود. در نتیجه یک مملی با DNA زیر به وجود می آید:



مملی هایی که تولید مثل می کنند، از بین نرفته و زنده می مانند. هم چنین برای عمل تولید مثل بین دو مملی هیچ محدودیتی نیست؛ به عبارت دیگر هر دو مملی (حتی همسان) می توانند تولید مثل کنند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید _____

کمیته ی تعداد مملی های اولیه را بیابید، طوری که با استفاده از آن ها بتوانیم تعدادی مملی بسازیم که تمام DNA های ممکن را داشته باشند.

۱۸

۶ (۵)

۸ (۴)

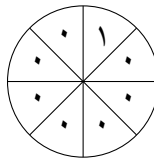
۲ (۳)

۱۶ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

از طرفی دست کم دو مملی نیاز است؛ زیرا با فقط یک مملی نمی توان مملی دیگری ساخت. دو مملی کافی نیز هست. کافی است یک مملی با DNA زیر و یک مملی دلخواه دیگر داشته باشیم:

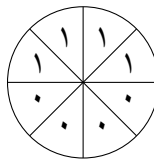


با مملی گفته شده می توان به دلخواه، هر بیت از مملی دیگر را تغییر داد. پس تمام مملی ها قابل تولید هستند.

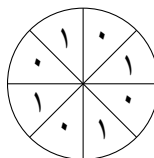
□

فرض کنید در ابتدا فقط دو مملی داریم که DNA هر دو به شکل زیر است:

۱۹



حداقل چند عمل تولید مثل باید انجام شود تا یک مملی با DNA زیر ساخته شود؟



۳ (۵)

۲ (۴)

۴ (۳)

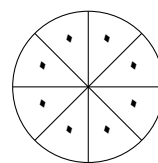
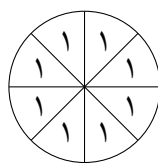
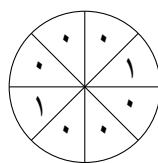
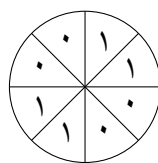
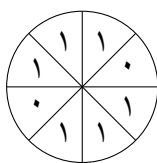
۱ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

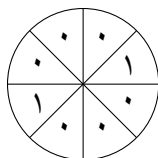
با یک عمل تولید مثل تنها می توان به مملی های زیر رسید (از مملی های همسان فقط یک نسخه کشیده ایم):

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

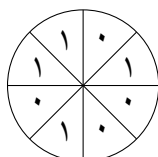


هر کدام از مملى هاى بالا را كه بسازيم، با فقط يك مرحله ي ديگر نمى توان مملى داده شده را ساخت. پس دست كم سه مرحله نياز داريم.

حال روشى با سه مرحله ارائه مى كنيم. ابتدا با يك گام مملى زير را مى سازيم:



سپس با استفاده از اين مملى و يکى از مملى هاى اوليه، مملى زير را مى سازيم:



در انتها با استفاده از اين مملى و يکى از مملى هاى اوليه، مملى خواسته شده را مى سازيم.

دو خانه را مجاور گوييم، اگر يك ضلع مشترک داشته باشند. يك مملى را خوشگل گوييم، اگر در DNA خود هيچ دو خانه ي مجاور شامل بيت ۱ نداشته باشد. چند مملى خوشگل دو به دو غير همسان وجود دارد؟

۹ (۵

۸ (۴

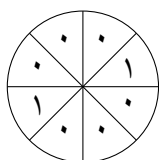
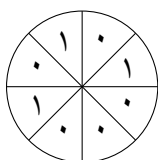
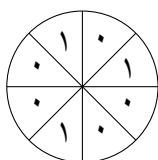
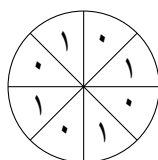
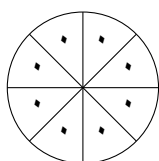
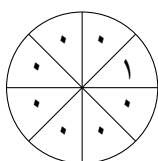
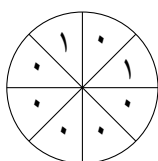
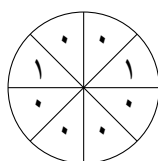
۲۱ (۳

۳۴ (۲

۷ (۱

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

با حالت بندى بر روى بيشينه ي تعداد بيت هاى ۰ متوالى مشاهده مى كنيم هشت حالت وجود دارد:

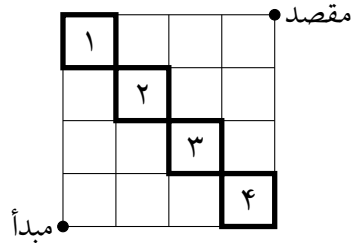


□

در جدول 4×4 زير، يك دزد مى خواهد از نقطه ي مبدأ به نقطه ي مقصد برود. دزد فقط مى تواند روى پاره خط ها و تنها در جهت هاى بالا و راست حرکت کند. سرعت حرکت دزد، ثابت و يك واحد بر ثانيه است. به غير از دزد، روى محيط هر کدام از چهار خانه اى كه با شماره هاى ۱ تا ۴ نشان داده شده اند، يك پليس قرار دارد. پليس

مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

هر خانه نیز با سرعت ثابت یک واحد بر ثانیه و در جهت پادساعتگرد روی محیط آن خانه حرکت می کند. اگر در یک لحظه دزد با یکی از پلیس ها روی یک نقطه باشد (چه در وسط پاره خطها و چه در انتهای پاره خطها) دستگیر می شود.



با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۱ اگر پلیس هر خانه ابتدا در رأس پایین راست آن باشد، دزد به چند طریق می تواند از مبدأ به مقصد برود؟

- ۰ (۱) ۱۵ (۲) ۳۵ (۳) ۱ (۴) ۸ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

پس از سه مرحله پلیس ها در نقطه های پایین چپ خانه های شان هستند و دزد نیز باید روی یکی از خانه ها باشد. پس دزد قطعاً دستگیر می شود و مسیری وجود ندارد.

□

۲۲ اگر پلیس هر خانه ابتدا در رأس بالا چپ آن باشد، دزد به چند طریق می تواند از مبدأ به مقصد برود؟

- ۱ (۱) ۳۵ (۲) ۰ (۳) ۱۵ (۴) ۸ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

پس از چهار مرحله پلیس ها و دزد روی نقاط قطر اصلی خواهند بود. پلیس ها نقاط قطر اصلی به جز نقطه ی پایین-راست را پوشش خواهند داد. پس دزد باید از همان نقطه ی پایین-راست در برود که تنها یک مسیر برای این کار وجود دارد.

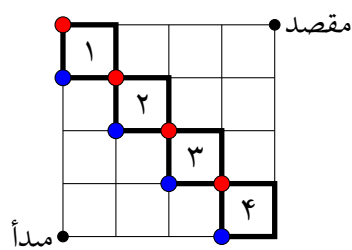
□

۲۳ اگر پلیس هر خانه ابتدا در رأس پایین چپ آن باشد، دزد به چند طریق می تواند از مبدأ به مقصد برود؟

- ۳۵ (۱) ۰ (۲) ۸ (۳) ۱۵ (۴) ۱ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

پس از سه مرحله پلیس ها در نقاط قرمز شکل زیر و دزد در یکی از نقطه های آبی خواهد بود:



مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

با در نظر گرفتن نقاط آبی، چهار حالت داریم:

- دزد از بین نقاط آبی، به نقطه ی سمت آبی چپ برود؛ خود رفتن تا آن نقطه یک حالت دارد. در ادامه ی مسیر دزد برای این که گیر نیفتد، باید یک گام به راست برود. ادامه ی مسیر محدودیتی نداشته و $(1) = 4$ حالت دارد.
- دزد از بین نقاط آبی، به نقطه ی سمت آبی دوم (از سمت چپ) برود؛ خود رفتن تا آن نقطه $(2) = 3$ حالت دارد. سپس دزد برای فرار از پلیس ها باید یک گام به راست برود. ادامه ی مسیر محدودیتی نداشته $(4) = 6$ حالت دارد. پس در این قسمت $18 = 6 \times 3$ مسیر داریم.
- دزد از بین نقاط آبی، به نقطه ی سمت آبی سوم (از سمت چپ) برود؛ خود رفتن تا آن نقطه $(3) = 3$ حالت دارد و ادامه ی مسیر نیز مشابه حالت اول است. پس در این قسمت $12 = 4 \times 3$ مسیر داریم.
- دزد از بین نقاط آبی، به نقطه ی سمت آبی چهارم (از سمت چپ) برود؛ خود رفتن تا آن نقطه یک حالت و ادامه ی مسیر نیز یک حالت دارد. پس در این قسمت یک مسیر داریم.

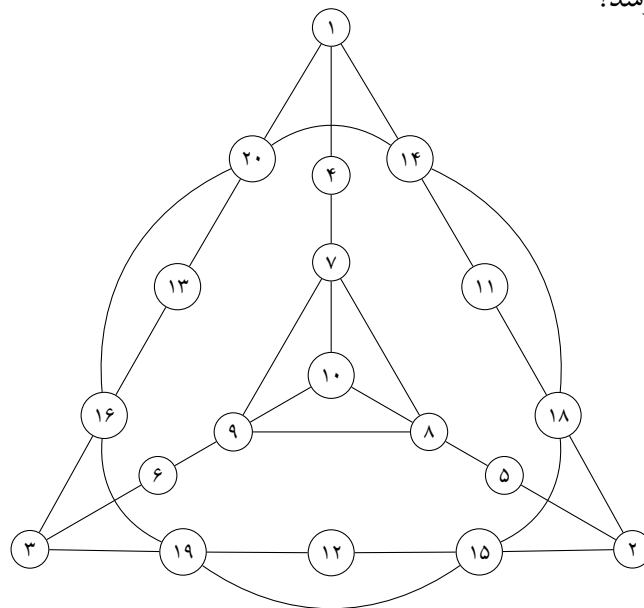
پس پاسخ برابر با $35 = 1 + 12 + 18 + 4$ است. $\square$

گروهی از افراد با هم قرار گذاشته اند که رأس هر ساعت هر کدام خبرهایی که در ساعت قبل دریافت کرده است برای همه ی دوستان خود بفرستد. در یک شبکه ی دوستی، هر فرد با یک دایره نشان داده می شوند و اگر دو نفر با هم دوست باشند، دایره های آن ها به هم وصل می شوند. شکل زیر یک شبکه ی دوستی با سه نفر را نشان می دهد. در این شبکه اگر ابتدا نفر ۱ خبر جدیدی را دریافت کند، نفر ۲ پس از یک ساعت و نفر ۳ پس از دو ساعت از آن خبر مطلع می شود؛ در حالی که اگر نفر ۲ اولین کسی باشد که خبر را دریافت می کند، پس از یک ساعت همه از خبر مطلع می شوند.



_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

یک شبکه ی دوستی در شکل زیر آمده است. در این شبکه، یک خبر جدید را ابتدا به چه کسی بدهیم تا در کمترین زمان ممکن خبر به همه برسد؟



مرحله ی یکم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۴ (۵)

۲ (۴)

۷ (۳)

۱۳ (۲)

۱۰ (۱)

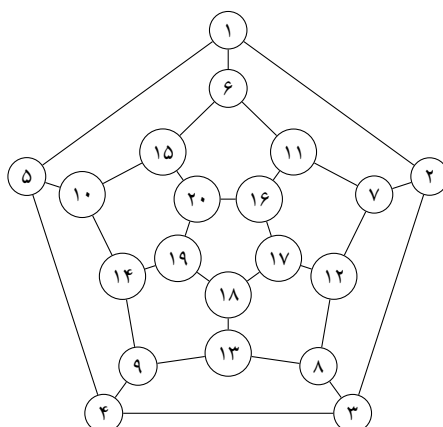
پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

اگر به یکی از افراد گوشه خبر داده شود، در ۴ ساعت خبر منتشر می شود. اگر یکی از افراد ۴، ۵ و یا ۶ خبر را دریافت کند، در ۶ ساعت خبر منتشر می شود. اگر خبر برای اولین بار به افراد دیگر برسد، در ۵ ساعت پخش می شود. پس جواب می تواند هر کدام از افراد گوشه ای (۱، ۲ و یا ۳) باشد.

□

در شبکه ی دوستی زیر، یک خبر جدید را به کدام دو نفر بدهیم تا در کم ترین زمان ممکن خبر به همه برسد؟

۲۵



۱۹ و ۷ (۵)

۵ و ۲ (۴)

۱۲ و ۵ (۳)

۱۹ و ۱۷ (۲)

۱۶ و ۴ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

این شبکه مربوط به یک دوازده وجهی است و کاملاً متقارن است. اگر دو رأسی که از هم دور هستند و فاصله ی ۵ دارند را انتخاب کنیم، در ۲ ساعت خبر پخش می شود و اگر دو رأس فاصله ی کمتری داشته باشند جواب بیش تر از ۲ است. در بین گزینه ها فقط ۴ و ۱۶ این خاصیت را دارند.

□

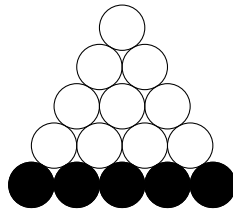
مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۱۸۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ نامه کنید.
- سوالات ۲۳ تا ۳۰ در دسته های چند سوالی آمده اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ سلطان، ایلچ و دو مسافر دیگر می خواهند سوار یک تاکسی شوند. سلطان با ایلچ قهر کرده و نمی خواهد کنار او بنشیند. این چهار مسافر به چند طریق می توانند در صندلی های تاکسی (یک نفر در جلو و سه نفر عقب) بنشینند، طوری که سلطان کنار ایلچ نباشد؟

۶ (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۱۶ (۵)

۲ دایره های زیر را در نظر بگیرید:



ابتدا پنج دایره ی ردیف پایین سیاه و بقیه ی دایره ها سفید هستند. در هر مرحله می توان یک دایره ی سفید را که هر دو دایره ی زیرین آن سیاه هستند، سیاه کرد. شکل نهایی پس از پنج مرحله چند حالت دارد؟ توجه کنید فقط شکل نهایی مهم بوده و ترتیب انجام مراحل مهم نیست.

۵ (۱) ۸ (۲) ۱۳ (۳) ۷ (۴) ۱۱ (۵)

۳ مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ را در نظر بگیرید. تابع f از A به A را ضربی گوئیم، اگر به ازای هر $x, y \in A$ دست کم یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

$$x \times y > 5$$

$$f(x \times y) = f(x) \times f(y)$$

چند تابع ضربی f از A به A وجود دارد؟

۲۵ (۱) ۱ (۲) ۵۰ (۳) ۶۰ (۴) ۲ (۵)

۴ ۱۰ عدد متمایز در اختیار داریم. یک بار این اعداد را به صورت صعودی مرتب می کنیم تا دنباله ی $\langle a_1, \dots, a_{10} \rangle$ به دست آید. بار دیگر اعداد را به صورت نزولی مرتب می کنیم تا دنباله ی $\langle b_1, \dots, b_{10} \rangle$ ساخته شود. برای هر $1 \leq i \leq 10$ فرض کنید $A_i = \{a_1, \dots, a_i\}$ و $B_i = \{b_1, \dots, b_i\}$ باشد. در بین ۱۰۰ مجموعه به فرم $A_i \cup B_j$ که $1 \leq i, j \leq 10$ چند مجموعه ی متمایز وجود دارد؟

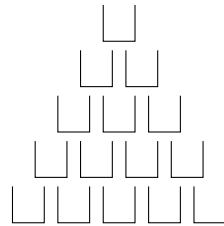
۴۶ (۱) ۳۶ (۲) ۳۷ (۳) ۴۵ (۴) ۵۵ (۵)

۵ پنج نفر دور یک دایره هستند. در یک لحظه به طور هم زمان هر کس دستش را به سمت یکی از دو نفر مجاور دراز می کند. دو نفر که دستشان را به سمت هم دراز کرده اند با هم دست می دهند. به طور میانگین در میان حالات مختلف چند عمل دست دادن انجام می شود؟

۳ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۱ (۵)

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۶ شکل زیر، نمایی از تعدادی لیوان است:



ظرفیت هر لیوان یک لیتر است. با شروع از لحظه ی صفر، پارسا به طور پیوسته به میزان یک لیتر بر ثانیه در لیوان بالایی آب می ریزد. اگر یک لیوان پر شود، آب از دو طرف آن به طور مساوی سرریز می کند. جاذبه را بسیار زیاد در نظر بگیرید و فرض کنید اگر آب سرریز شود، به سرعت به لیوان پایینی منتقل می شود. فرض کنید t ، نخستین لحظه ای بر حسب ثانیه باشد که به یکی از لیوان های ردیف پایین قطره ای از آب برسد. نزدیک ترین عدد صحیح به t چیست؟

۷ (۵)

۸ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۹ (۱)

۷ به هر رقم در مبنای دو (۰ یا ۱) یک بیت گفته می شود. عمل $\otimes$ بین دو بیت به صورت زیر انجام می شود:

$$0 \otimes 0 = 0 \quad 0 \otimes 1 = 0 \quad 1 \otimes 0 = 0 \quad 1 \otimes 1 = 1$$

برای انجام عمل $\otimes$ بین دو عدد، ابتدا آن دو عدد را در مبنای دو می نویسیم. اگر تعداد ارقام دو عدد برابر نبود، آن قدر سمت چپ عدد کوچک تر رقم ۰ می گذاریم تا تعداد ارقام شان برابر شود. در انتها بیت به بیت عمل $\otimes$ را انجام می دهیم. برای مثال:

$$14 \otimes 5 = 4$$

زیرا:

$$1110 \otimes 0101 = 0100$$

تعداد زوج های مرتب (a, b) را از اعداد صحیح بیابید که $a, b < 64$ و $a \otimes b = a$ باشد.

۷۲۹ (۵)

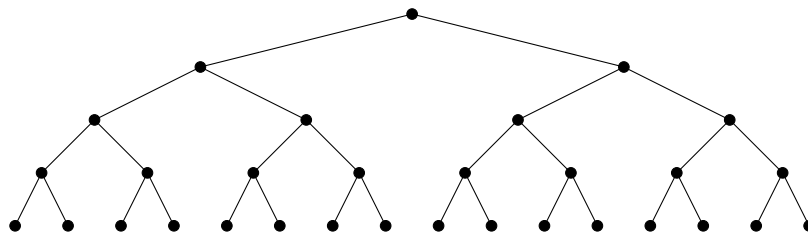
۲۴۳ (۴)

۵۱۱ (۳)

۲۵۶ (۲)

۵۱۲ (۱)

۸ نقشه ی یک موزه به شکل زیر است:



هر یک از نقاط پایینی یک در ورودی هستند و یک گنج در رأس بالا قرار دارد. دو نقطه که با پاره خط به هم وصل هستند، به هم راه مستقیم دارند. ایلیچ می تواند از یک در ورودی وارد شده و با حرکت در موزه به گنج برسد. برای سرعت دادن به کار، ایلیچ از هر نقطه حداکثر یک بار عبور می کند. به چند طریق می توان در نقاط شکل دوربین قرار داد، طوری که ایلیچ از هر مسیری که به گنج برسد، توسط دقیقاً یک دوربین دیده شود؟

۶۴ (۵)

۱۰۲۴ (۴)

۶۷۷ (۳)

۲۶ (۲)

۶۲۶ (۱)

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۹ در ابتدا دو جعبه ی خالی به نام های A و B و چهار توپ با شماره های ۱ تا ۴ داریم. برای هر i به ترتیب از ۱ تا ۴ در مرحله ی i ام توپ شماره i را به احتمال $\frac{a+1}{i+1}$ در جعبه ی A و به احتمال $\frac{b+1}{i+1}$ در جعبه ی B می اندازیم که a و b به ترتیب تعداد توپ های جعبه های A و B قبل از انجام مرحله ی i ام هستند. احتمال این را بیابید که در انتها در هر جعبه دست کم یک توپ باشد.

$$\frac{3}{5} (1) \quad \frac{2}{5} (2) \quad \frac{5}{6} (3) \quad \frac{4}{5} (4) \quad \frac{59}{60} (5)$$

۱۰ گرافی ۱۰۰۰ رأسی با رأس های ۱ تا ۱۰۰۰ در نظر بگیرید. برای هر $1 \leq i < j \leq 1000$ ، بین دو رأس i و j یال قرار می دهیم، اگر و تنها اگر i امین رقم نمایش دودویی عدد j (از سمت راست) برابر ۱ باشد. کوچک ترین k را بیابید که بتوان با k رنگ رأس های این گراف را رنگ آمیزی کرد، طوری که هر دو رأس مجاور ناهم رنگ باشند.

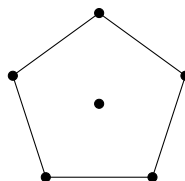
$$6 (1) \quad 2 (2) \quad 3 (3) \quad 5 (4) \quad 4 (5)$$

۱۱ در خانه ی پایین-چپ جدول زیر، یک لاک پشت قرار دارد و می خواهد به خانه ی بالا-راست برسد. روی هر خانه، ارتفاع آن نوشته شده است. لاک پشت در هر مرحله می تواند یک واحد به راست یا بالا برود و در هر گام، به اندازه ی اختلاف ارتفاع دو خانه خسته می شود (حتی اگر ارتفاع کم شود). کمینه ی مجموع میزان خستگی در مسیر چیست؟

۷۰۰	۱۴۰	۳۰۰	۱۳۰	۲۰۰
۹۰۰	۱۱۰	۵۰۰	۸۰۰	۵۰۰
۱۰۰	۴۰۰	۱۶۰	۶۰۰	۸۰۰
۸۰۰	۳۰۰	۱۲۰	۱۰۰	۲۰۰
۰	۷۰۰	۲۰۰	۷۰۰	۹۰۰

$$3200 (5) \quad 1920 (4) \quad 2310 (3) \quad 3800 (2) \quad 2000 (1)$$

۱۲ شکل زیر یک پنج ضلعی منتظم به همراه یک نقطه در مرکز آن است:



می خواهیم بین برخی از شش نقطه ی شکل، پاره خط هایی بکشیم، طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- هیچ دو پاره خطی هم دیگر را قطع نکنند (مگر در خود نقاط شکل).
- سطح داخل شکل به تعدادی مثلث افراز شود، طوری که هر کدام از نقاط شکل، رأس حداقل یکی از مثلث ها باشند.

شکل نهایی چند حالت دارد؟

$$5 (5) \quad 1 (4) \quad 12 (3) \quad 11 (2) \quad 10 (1)$$

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۳ به یک مجموعه از اعداد شککنده گوییم، اگر بتوان اعداد آن را به دو مجموعه افراز کرد، طوری که مجموع اعداد آن‌ها برابر باشد. چند تا از مجموعه‌های زیر شککنده هستند؟

$$A = \{1, 2, \dots, 100\} \quad B = \{2, 4, \dots, 100\} \quad C = \{1, 3, \dots, 99\} \quad D = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{100}\}$$

۳ (۵)

۰ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۴ یک صفحه شطرنج نامتناهی داریم. برخی از خانه‌های این صفحه امن هستند. در هر خانه از صفحه یک عدد می‌نویسیم که برابر با حداقل تعداد حرکاتی است که یک مهره‌ی اسب باید انجام دهد تا از آن خانه به یک خانه‌ی امن برسد. برای مثال روی خانه‌های امن، عدد صفر نوشته شده است. برای کسانی که با شطرنج آشنا نیستند، اگر مهره‌ی اسب در خانه‌ی مشخص شده‌ی شکل زیر باشد، در یک گام می‌تواند به یکی از هشت خانه‌ی مشخص شده برود:

فرض کنید A و B دو خانه‌ی مجاور (دارای یک ضلع مشترک) باشند که عدد خانه‌ی A برابر ۵۷ است. کدام یک نمی‌تواند عدد خانه‌ی B باشد؟

۵۳ (۵)

۶۰ (۴)

۵۶ (۳)

۵۵ (۲)

۵۷ (۱)

۱۵ یک مکعب $a \times b \times c$ موازی محورها ی مختصات داریم و می‌خواهیم آن را به طور کامل با آجرهای $1 \times 1 \times 3$ پر کنیم. آجرها نمی‌توانند از مکعب بیرون بزنند. به آجرهای موازی محور x ، آجر نوع X می‌گوییم. به همین ترتیب آجرهای نوع Y و نوع Z را تعریف می‌کنیم. به ازای چند تا از حالات زیر برای ابعاد مکعب می‌توان این کار را انجام داد، طوری که تعداد آجرهای هر سه نوع برابر باشد؟

$$6 \times 7 \times 7$$

$$6 \times 6 \times 7$$

$$5 \times 6 \times 7$$

$$5 \times 7 \times 8$$

۰ (۵)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۴ (۱)

۱۶ تعدادی کیسه دور یک دایره هستند که در مجموع ۱۰۰ سنگ‌ریزه دارند. در هر دقیقه به طور هم‌زمان، از هر کیسه که دست کم دو سنگ‌ریزه دارد، یک سنگ‌ریزه به هر یک از دو کیسه‌ی مجاور منتقل می‌شود. اگر پس از یک مرحله تعداد سنگ‌ریزه‌های هیچ کیسه‌ای تغییر نکند، کار متوقف می‌شود. حداقل چند دقیقه باید صبر کنیم تا مطمئن باشیم کار متوقف شده است؟

۵ (ممکن است عملیات هیچ گاه متوقف نشود)

۱۰۰ (۴)

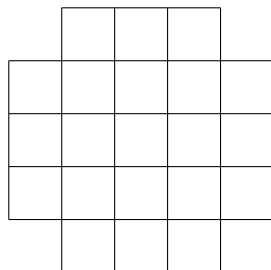
۳۳ (۳)

۵۰ (۲)

۶۶ (۱)

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۷ شکل زیر، یک جدول 5×5 با حذف چهار گوشه ی آن است. می خواهیم این شکل را به طور کامل با کاشی های 1×1 ، 2×2 و 3×3 بپوشانیم، طوری که کاشی ها روی هم قرار نگرفته و از جدول بیرون نزنند. نیازی نیست از هر سه نوع کاشی استفاده کنیم. حداقل تعداد کاشی ها برای انجام این کار چیست؟



۱۲ (۵)

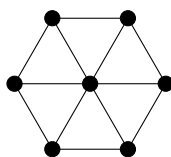
۱۳ (۴)

۱۰ (۳)

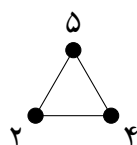
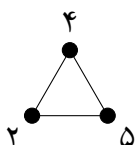
۹ (۲)

۱۱ (۱)

۱۸ می خواهیم روی هفت نقطه ی شکل زیر، اعداد ۱ تا ۷ را بنویسیم (هر کدام از اعداد دقیقاً روی یک نقطه و هر نقطه شامل دقیقاً یک عدد باشد):



به یک مثلث ایده آل گوییم، اگر با خواندن اعداد مثلث به ترتیب ساعت گرد از کوچک ترین عدد، دنباله ای صعودی به دست آید. برای مثال در شکل زیر مثلث سمت چپ ایده آل است، اما مثلث سمت راست ایده آل نیست:



پس از عذرگذاری شکل گفته شده، حداکثر چند مثلث از شش مثلث موجود ایده آل خواهند بود؟

۲ (۵)

۴ (۴)

۶ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

۱۹ جدول زیر را در نظر بگیرید:

●				

در خانه ی پایین-چپ جدول یک مهره قرار دارد. دو خانه از جدول را همسایه گوییم، اگر یک ضلع یا یک رأس مشترک داشته باشند. به چند طریق می توان از وضعیت مشخص شده در شکل آغاز کرده، در هر مرحله مهره را به یک خانه ی همسایه ببریم، از هر خانه دقیقاً یک بار عبور کنیم و به خانه ی آغازین برگردیم؟

۱۸ (۵)

۳۲ (۴)

۲۴ (۳)

۱۶ (۲)

۷۲ (۱)

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۰ در سوال قبل، به چند طریق می توانیم مهره را از خانه ی پایین-چپ به خانه ی بالا-راست برسانیم، طوری که از هر خانه حداکثر یک بار عبور کنیم؟

۱۱۶ (۱) ۱۰۰ (۲) ۴۶۴ (۳) ۵۶۰ (۴) ۴۸۰ (۵)

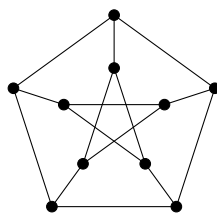
۲۱ حافظه ی سلطان ۲۰ خانه با شماره های ۱ تا ۲۰ دارد. خانه ی i ام حافظه را با $A[i]$ نشان می دهیم. در ابتدا در تمام خانه های حافظه، عدد ۱ نوشته شده است. الگوریتم زیر را اجرا می کنیم:

۱. مقدار ans را برابر ۰ قرار بده.
۲. اگر مقدار تمام خانه های حافظه ی سلطان برابر ۰ بود به خط ۱۵ برو.
۳. مقدار ans را یک واحد زیاد کن.
۴. مقدار $index$ را برابر ۱ قرار بده.
۵. اگر $index > ۲۰$ بود به خط ۲ برو.
۶. اگر $A[index] = ۰$ بود به خط ۱۰ برو.
۷. مقدار $A[index]$ را برابر ۰ کن.
۸. مقدار $index$ را دو واحد زیاد کن.
۹. به خط ۵ برو.
۱۰. مقدار tmp را برابر ۰ قرار بده.
۱۱. اگر $index < ۲۰$ بود، مقدار tmp را برابر $A[index + ۱]$ قرار بده.
۱۲. مقدار $A[index]$ را برابر tmp قرار بده.
۱۳. مقدار $index$ را یک واحد زیاد کن.
۱۴. به خط ۵ برو.
۱۵. پایان

پس از پایان الگوریتم، مقدار ans چیست؟

۲۰ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۵ (۵) الگوریتم هیچ گاه تمام نخواهد شد

۲۲ گراف زیر را در نظر بگیرید:



یک گنج در یکی از رأس های گراف مخفی شده است. روزبه یک دستگاه گنج یاب دارد. او در هر مرحله می تواند یک دور به طول پنج از گراف را به دستگاه بدهد و بفهمد گنج در رأس های این دور هست یا خیر. روزبه دست کم به چند مرحله استفاده از دستگاه نیاز دارد تا مطمئن باشد می تواند جای گنج را بفهمد؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۶ (۴) ۹ (۵)

n دستگاه پخش کننده ی موسیقی یکسان و n هندزفری یکسان داریم. به هر کدام از دستگاه ها یک هندزفری وصل کرده ایم. هر هندزفری نیز دو گوشی دارد که یکی مخصوص گوش راست و یکی مخصوص گوش چپ است.

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

n نفر در یک گروه هستند و می خواهند از طریق این دستگاه ها و هندزفری ها موسیقی گوش کنند. هر کس می تواند یک گوشی چپ و یک گوشی راست برداشته و آهنگ گوش کند. دو گوشی ای که یک فرد برمی دارد می تواند از یک هندزفری نباشند، اما باید آهنگ یکسانی را پخش کنند.

در انتها تأکید می کنیم دستگاه های پخش کننده و هندزفری ها را یکسان در نظر بگیرید.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

فرض کنید $n = 4$ است. دو تا از دستگاه ها در حال پخش موسیقی M_1 و دو تای دیگر در حال پخش موسیقی M_2 هستند. افراد به چند طریق می توانند هندزفری ها را استفاده کرده و موسیقی ها را گوش کنند؟

- ۴۸ (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴ (۵)

دو نفر با نام های A و B را دوست گوییم، اگر هندزفری ای وجود داشته باشد که یک گوشی آن در اختیار A و گوشی دیگر در اختیار B باشد. دو نفر با نام های A و B را آشنا گوییم، اگر دنباله ی $\langle C_1, C_2, \dots, C_k \rangle$ از افراد وجود داشته باشد که $k \geq 2$ و C_1 خود A باشد، C_2 با C_1 دوست باشد، C_3 با C_2 دوست باشد و ... و C_{k-1} با C_k دوست باشد و C_k خود B باشد. واضح هست که دو دوست، آشنا نیز هستند.

فرض کنید $n = 10$ است. پنج تا از دستگاه ها در حال پخش موسیقی M_1 و پنج تای دیگر در حال پخش موسیقی M_2 هستند. به حالتی از گوش کردن موسیقی ها **سلطانی** گوییم، اگر هیچ دو نفر غیر آشنایی، موسیقی یکسانی گوش نکنند. افراد به چند حالت سلطانی می توانند هندزفری ها را استفاده کرده و موسیقی ها را گوش کنند؟

- ۹! (۱) $2^8 \times 5! \times 5! \times 2$ (۲) $\frac{10!}{2^5}$ (۳) $10!$ (۴) 2^9 (۵)

دنباله ای از اعداد طبیعی و متمایز را در نظر بگیرید که از عدد ۱ شروع شده و به عدد n ختم می شود. به چنین دنباله ای **عول** گوییم، اگر هر عدد دنباله، مضرب عدد قبلی باشد. برای مثال دنباله ی $\langle 1, 3, 6, 30, 60 \rangle$ یک دنباله ی عول است.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

تعداد عناصر بلندترین دنباله ی عول به ازای $n = 810000$ چیست؟

- ۱۰ (۱) ۱۳ (۲) ۱۱ (۳) ۹ (۴) ۱۲ (۵)

تعداد عناصر بلندترین دنباله ی عول به ازای $n = 10800$ را k در نظر بگیرید. تعداد دنباله های عول k عنصره به ازای $n = 10800$ چیست؟

- ۵۱۲۰ (۱) ۲۸۸ (۲) $9!$ (۳) ۱۲۶۰ (۴) $6!$ (۵)

چند دنباله ی عول به ازای $n = 5120$ وجود دارد؟

- ۱۲۲۸۸ (۱) ۶۱۴۴ (۲) ۵۶۳۲ (۳) ۴۰۹۶ (۴) ۳۰۷۲ (۵)

باکتری **فلا جلا** به هنگام تولید مثل به سه باکتری تقسیم شده و خودش از بین می رود. به باکتری ای که تولید مثل می کند، **والد** و به سه باکتری به وجود آمده، **فرزندان** او می گوییم. ممکن است یک باکتری قبل از تولید مثل بمیرد که در این صورت به سرعت تجزیه شده و اثری از او باقی نمی ماند.

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

مدت ها پیش، سلطان یک باکتری فلاجلا به نام آر.بی.جی خرید و آن را در قفس نگه داری می کرد! پس از مدتی این باکتری از بین رفته است، اما قفس تعدادی باکتری دارد که طبیعتاً از نولگان آر.بی.جی هستند. سلطان دلش برای آر.بی.جی تنگ شده و می خواهد ژن آر.بی.جی را بازیابی کند. زیست شناسان به تکنولوژی ای دست پیدا کرده اند که با استفاده از ژن دو تا از فرزندان یک باکتری والد، می توانند ژن او را بازیابی کنند. فرض کنید تعداد باکتری های درون قفس n باشد. به یک وضعیت بحرانی گوییم، اگر بتوانیم ژن آر.بی.جی را بازیابی کنیم، اما در این بازیابی به همه ی n باکتری نیاز داشته باشیم.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید _____

در این سوال فرض کنید نتایج تحقیقات این باشد که هیچ کدام از فرزندان آر.بی.جی و فرزندان فرزندان او در قفس نیستند. در بین تمام حالات ممکن که امکان بازیابی ژن آر.بی.جی وجود دارد، کمینه ی تعداد باکتری های درون قفس چیست؟

۲۸

۷ (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۴ (۵)

به ازای چند n از ۲ تا ۱۰ می توان وضعیتی بحرانی با n باکتری درون قفس داشت؟

۲۹

۲ (۱) ۹ (۲) ۵ (۳) ۱ (۴) ۷ (۵)

کدام گزاره یا گزاره های زیر درست هستند؟

۳۰

(آ) وضعیتی با شش باکتری درون قفس وجود دارد که با استفاده از هر پنج باکتری می توانیم ژن آر.بی.جی را بازیابی کنیم، اما چهار باکتری وجود دارند که نمی توان فقط با استفاده از آن ها ژن آر.بی.جی را بازیابی کرد.

(ب) وضعیتی با چهار باکتری درون قفس وجود دارد که به ازای هر دو باکتری، با استفاده از فقط همان دو باکتری می توان ژن آر.بی.جی را بازیابی کرد.

(ج) وضعیتی بحرانی با پنج باکتری وجود دارد که هر باکتری فرزند یا فرزند فرزند آر.بی.جی باشد.

(۱) ب و ج (۲) ب (۳) آ (۴) آ و ج (۵) آ و ب

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۱۸۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ نامه کنید.
- سوالات ۲۳ تا ۳۰ در دسته های چند سوالی آمده اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ سلطان، ایلچ و دو مسافر دیگر می خواهند سوار یک تاکسی شوند. سلطان با ایلچ قهر کرده و نمی خواهد کنار او بنشینند. این چهار مسافر به چند طریق می توانند در صندلی های تاکسی (یک نفر در جلو و سه نفر عقب) بنشینند، طوری که سلطان کنار ایلچ نباشد؟

۶ (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۱۶ (۵)

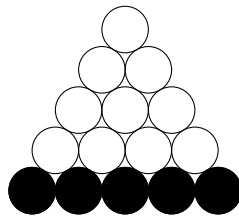
پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

تعداد کل حالات نشستن $24 = 4!$ است. حال تعداد حالات نامطوب را شمرده و از تعداد کل حالات کم می کنیم. در حالات نامطلوب دو حالت برای انتخاب صندلی های سلطان و ایلچ (در صندلی های عقب) و دو حالت برای جایگشت این دو نفر داریم. دو نفر دیگر نیز به دو حالت در دو صندلی باقی مانده می نشینند. پس پاسخ برابر است با:

$$4! - 2 \times 2 \times 2 = 16$$

□

۲ دایره های زیر را در نظر بگیرید:



ابتدا پنج دایره ی ردیف پایین سیاه و بقیه ی دایره ها سفید هستند. در هر مرحله می توان یک دایره ی سفید را که هر دو دایره ی زیرین آن سیاه هستند، سیاه کرد. شکل نهایی پس از پنج مرحله چند حالت دارد؟ توجه کنید فقط شکل نهایی مهم بوده و ترتیب انجام مراحل مهم نیست.

۵ (۱) ۸ (۲) ۱۳ (۳) ۷ (۴) ۱۱ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

دو حالت داریم:

- هر چهار دایره ی ردیف دوم (از پایین) سیاه باشند. در این صورت برای تنها دایره ی سیاه باقی مانده سه حالت داریم.
- دست کم یک دایره از ردیف دوم سفید باشد. در این صورت باید سه دایره ی متوالی از ردیف دوم سیاه باشند (در غیر این صورت نمی توان ۱۰ دایره ی سیاه ساخت). انتخاب این سه دایره دو حالت دارد و دو دایره ی سیاه باقی مانده به طور یکتا انتخاب می شوند.

□

پس در کل $3 + 2 = 5$ حالت داریم.

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۳ مجموعه ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ را در نظر بگیرید. تابع f از A به A را ضربی گوئیم، اگر به ازای هر $x, y \in A$ دست کم یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

$$x \times y > 5 \bullet$$

$$f(x \times y) = f(x) \times f(y) \bullet$$

چند تابع ضربی f از A به A وجود دارد؟

۲ (۵)

۶۰ (۴)

۵۰ (۳)

۱ (۲)

۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

با جاگذاری $x = 1$ و $y = 2$ داریم $f(1 \times 2) = f(1) \times f(2)$ که نتیجه می دهد $f(1) = 1$. حال با جاگذاری $x = 2$ و $y = 2$ داریم $f(2 \times 2) = f(2) \times f(2)$ که نتیجه می دهد $f(2) = 1$ یا $f(2) = 4$. پس برای انتخاب $f(2)$ و $f(4)$ دو حالت داریم. $f(3)$ و $f(5)$ نیز شرط خاصی ندارند و هر چیزی می توانند باشند. پس پاسخ برابر با $1 \times 2 \times 5 \times 5 = 50$ است. $\square$

۴ ۱۰ عدد متمایز در اختیار داریم. یک بار این اعداد را به صورت صعودی مرتب می کنیم تا دنباله ی $\langle a_1, \dots, a_{10} \rangle$ به دست آید. بار دیگر اعداد را به صورت نزولی مرتب می کنیم تا دنباله ی $\langle b_1, \dots, b_{10} \rangle$ ساخته شود. برای هر $1 \leq i \leq 10$ فرض کنید $A_i = \{a_1, \dots, a_i\}$ و $B_i = \{b_1, \dots, b_i\}$ باشد. در بین ۱۰۰ مجموعه به فرم $A_i \cup B_j$ که $1 \leq i, j \leq 10$ چند مجموعه ی متمایز وجود دارد؟

۵۵ (۵)

۴۵ (۴)

۳۷ (۳)

۳۶ (۲)

۴۶ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

در حالاتی که $i \geq j - 1$ است، $A_i \cup B_j$ شامل تمام اعداد می شود. در بقیه ی حالات مجموعه های متمایز ساخته می شود که $9 - \binom{10}{j}$ حالت (برای انتخاب i و j) دارند. پس پاسخ برابر $37 = 9 - \binom{10}{2} + 1$ است. $\square$

۵ پنج نفر دور یک دایره هستند. در یک لحظه به طور هم زمان هر کس دستش را به سمت یکی از دو نفر مجاور دراز می کند. دو نفر که دستشان را به سمت هم دراز کرده اند با هم دست می دهند. به طور میانگین در میان حالات مختلف چند عمل دست دادن انجام می شود؟

 $\frac{1}{4}$ (۵) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳)

۱ (۲)

 $\frac{3}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

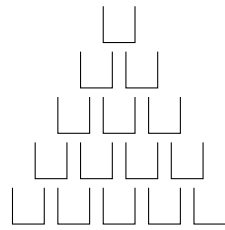
بدون داشتن هیچ گونه سواد از امید ریاضی نیز می توان با بررسی حالات مختلف مسئله را حل کرد، اما راه حل بهتر تعریف متغیرهای تصادفی I_1 تا I_5 است. در یک وضعیت تعریف می کنیم $I_k = 1$ اگر افراد k و $k+1$ به هم دست بدهند و در غیر این صورت تعریف می کنیم $I_k = 0$. توجه کنید I_5 را برای دست دادن افراد شماره ۱ و ۵ تعریف می کنیم. به وضوح داریم $E(I_k) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. پس با توجه به خواص امید ریاضی داریم:

$$E(\text{تعداد دست دادن ها}) = \sum_{k=1}^5 E(I_k) = 5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

 $\square$

۶ شکل زیر، نمایی از تعدادی لیوان است:

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور



ظرفیت هر لیوان یک لیتر است. با شروع از لحظه ی صفر، پارسا به طور پیوسته به میزان یک لیتر بر ثانیه در لیوان بالایی آب می ریزد. اگر یک لیوان پر شود، آب از دو طرف آن به طور مساوی سرریز می کند. جاذبه را بسیار زیاد در نظر بگیرید و فرض کنید اگر آب سرریز شود، به سرعت به لیوان پایینی منتقل می شود. فرض کنید t ، نخستین لحظه ای بر حسب ثانیه باشد که به یکی از لیوان های ردیف پایین قطره ای از آب برسد. نزدیک ترین عدد صحیح به t چیست؟

۷ (۵)

۸ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

با نوشتن میزان لحظه ی شروع سرریز و سرعت سرریز آب از هر لیوان (با به دست آوردن اعداد با الگوریتم پویا از بالا به پایین) مشاهده می کنیم $t = 8\frac{1}{3}$ است. پس پاسخ برابر ۸ است. □

به هر رقم در مبنای دو (۰ یا ۱) یک بیت گفته می شود. عمل $\otimes$ بین دو بیت به صورت زیر انجام می شود:

$$0 \otimes 0 = 0 \quad 0 \otimes 1 = 0 \quad 1 \otimes 0 = 0 \quad 1 \otimes 1 = 1$$

برای انجام عمل $\otimes$ بین دو عدد، ابتدا آن دو عدد را در مبنای دو می نویسیم. اگر تعداد ارقام دو عدد برابر نبود، آن قدر سمت چپ عدد کوچک تر رقم ۰ می گذاریم تا تعداد ارقامشان برابر شود. در انتها بیت به بیت عمل $\otimes$ را انجام می دهیم. برای مثال:

$$14 \otimes 5 = 4$$

زیرا:

$$1110 \otimes 0101 = 0100$$

تعداد زوج های مرتب (a, b) را از اعداد صحیح بیابید که $0 \leq a, b < 64$ و $a \otimes b = a$ باشد.

۷۲۹ (۵)

۲۴۳ (۴)

۵۱۱ (۳)

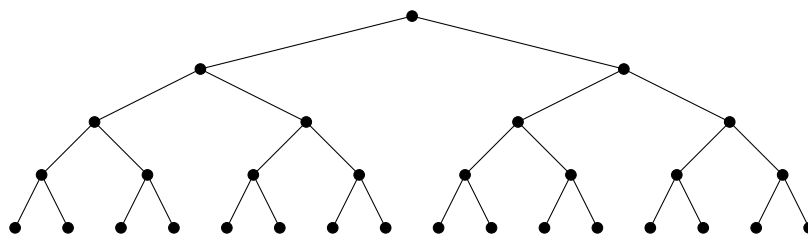
۲۵۶ (۲)

۵۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

اعداد a, b را به صورت اعداد شش رقمی در مبنای دو در نظر بگیرید. رقم i ام دو عدد در صورتی مشکل ایجاد می کند که برای a و b به ترتیب ۱ و ۰ باشد. پس برای رقم i ام دو عدد، سه حالت داریم. پس پاسخ برابر ۷۲۹ است. □

نقشه ی یک موزه به شکل زیر است:



مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

هر یک از نقاط پایینی یک در ورودی هستند و یک گنج در رأس بالا قرار دارد. دو نقطه که با پاره خط به هم وصل هستند، به هم راه مستقیم دارند. ایلچ می تواند از یک در ورودی وارد شده و با حرکت در موزه به گنج برسد. برای سرعت دادن به کار، ایلچ از هر نقطه حداکثر یک بار عبور می کند. به چند طریق می توان در نقاط شکل دورین قرار داد، طوری که ایلچ از هر مسیری که به گنج برسد، توسط دقیقاً یک دورین دیده شود؟

۶۲۶ (۱) ۲۶ (۲) ۶۷۷ (۳) ۱۰۲۴ (۴) ۶۴ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

اگر f_n پاسخ برای درختی به ارتفاع n رأس باشد، با حالت بندی بر روی این که ریشه دورین دارد یا نه، داریم:

$$f_n = 1 + f_{n-1} \times f_{n-1}$$

از آن جایی که $f_1 = 1$ ، پاسخ مسئله برابر $f_5 = 677$ است. □

در ابتدا دو جعبه ی خالی به نام های A و B و چهار توپ با شماره های ۱ تا ۴ داریم. برای هر i به ترتیب از ۱ تا ۴ در مرحله ی i ام توپ شماره i را به احتمال $\frac{a+1}{i+1}$ در جعبه ی A و به احتمال $\frac{b+1}{i+1}$ در جعبه ی B می اندازیم که a و b به ترتیب تعداد توپ های جعبه های A و B قبل از انجام مرحله ی i ام هستند. احتمال این را بیابید که در انتها در هر جعبه دست کم یک توپ باشد.

$\frac{3}{5}$ (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{59}{60}$ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

احتمال این که تمام توپ ها در جعبه ی A بروند برابر $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5}$ است. پس احتمال حالات نامطلوب برابر $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ بوده و بنابراین پاسخ برابر $\frac{4}{5}$ است. □

گرافی ۱۰۰۰ رأسی با رأس های ۱ تا ۱۰۰۰ در نظر بگیرید. برای هر $1 \leq i < j \leq 1000$ ، بین دو رأس i و j یال قرار می دهیم، اگر و تنها اگر i امین رقم نمایش دودویی عدد j (از سمت راست) برابر ۱ باشد. کوچک ترین k را بیابید که بتوان با k رنگ رأس های این گراف را رنگ آمیزی کرد، طوری که هر دو رأس مجاور ناهم رنگ باشند.

۶ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۴ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

ابتدا ثابت می کنیم رنگ آمیزی با کم تر از چهار رنگ امکان ندارد. رأس های شماره ۱، ۳، ۵ و ۲۱ دوه دو به هم وصل هستند. پس دست کم به ۴ رنگ نیاز داریم. حال نشان می دهیم چهار رنگ برای رنگ آمیزی کافی است. رأس های ۱ و ۲ را با رنگ A ، رأس ۳ را با رنگ B ، رأس های ۴ تا ۱۵ را با رنگ C و رأس های ۱۶ تا ۱۰۰۰ را با رنگ D رنگ کنید. □

در خانه ی پایین-چپ جدول زیر، یک لاک پشت قرار دارد و می خواهد به خانه ی بالا-راست برسد. روی هر خانه، ارتفاع آن نوشته شده است. لاک پشت در هر مرحله می تواند یک واحد به راست یا بالا برود و در هر گام، به اندازه ی اختلاف ارتفاع دو خانه خسته می شود (حتی اگر ارتفاع کم شود). کمینه ی مجموع میزان خستگی در مسیر چیست؟

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۷۰۰	۱۴۰	۳۰۰	۱۳۰	۲۰۰
۹۰۰	۱۱۰	۵۰۰	۸۰۰	۵۰۰
۱۰۰	۴۰۰	۱۶۰	۶۰۰	۸۰۰
۸۰۰	۳۰۰	۱۲۰	۱۰۰	۲۰۰
۰	۷۰۰	۲۰۰	۷۰۰	۹۰۰

۳۲۰۰ (۵)

۱۹۲۰ (۴)

۲۳۱۰ (۳)

۳۸۰۰ (۲)

۲۰۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

اگر $b[i][j]$ برابر ارتفاع خانه ی واقع در سطر i و ستون j و همچنین $a[i][j]$ برابر کمترین میزان خستگی لاک پشت برای رسیدن از مبدأ به این خانه باشد، داریم:

$$a[i][j] = \min(|b[i][j] - b[i-1][j]| + a[i-1][j], |b[i][j] - b[i][j-1]| + a[i][j-1])$$

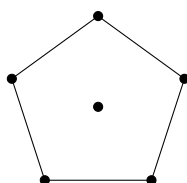
این رابطه با بررسی دو حالت ورود به خانه ی مذکور گفته شده است (از چپ یا پایین). حال با به دست آوردن مقادیر $a[i][j]$ به صورت پویا، مقادیر زیر به دست می آید:

۲۵۰۰	۱۵۲۰	۱۶۸۰	۱۸۵۰	۱۹۲۰
۲۳۰۰	۱۴۹۰	۱۶۶۰	۱۹۶۰	۲۲۶۰
۱۵۰۰	۱۲۰۰	۱۳۲۰	۱۷۶۰	۱۹۶۰
۸۰۰	۱۱۰۰	۱۲۸۰	۱۳۰۰	۱۴۰۰
۰	۷۰۰	۱۲۰۰	۱۷۰۰	۹۰۰

□

پس پاسخ برابر ۱۹۲۰ است.

۱۲ شکل زیر یک پنج ضلعی منتظم به همراه یک نقطه در مرکز آن است:



می خواهیم بین برخی از شش نقطه ی شکل، پاره خط هایی بکشیم، طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- هیچ دو پاره خطی هم دیگر را قطع نکنند (مگر در خود نقاط شکل).
- سطح داخل شکل به تعدادی مثلث افراز شود، طوری که هر کدام از نقاط شکل، رأس حداقل یکی از مثلث ها باشند.

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

شکل نهایی چند حالت دارد؟

۵ (۵)

۱ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

به قطری از پنج ضلعی که دو رأس نامجاور را به هم وصل کند، قطرک می‌گوییم. با حالت‌بندی بر روی تعداد قطرک‌ها داریم:

- اگر قطرک نداشته باشیم، تمام رأس‌ها باید به رأس وسط وصل شوند که یک حالت دارد.
 - اگر یک قطرک داشته باشیم، رأس وسط درون یک چهارضلعی قرار می‌گیرد و باید به تمام چهار رأس آن وصل شود. انتخاب قطرک گفته شده پنج حالت دارد.
 - اگر دو قطرک داشته باشیم، باید این دو قطرک در یک رأس مشترک باشند که پنج حالت برای انتخاب‌شان وجود دارد. در ادامه رأس وسط درون یک مثلث قرار می‌گیرد و باید به سه رأس آن وصل شود.
- پس در کل $۱۱ = ۵ + ۵ + ۱$ حالت داریم. □

به یک مجموعه از اعداد شکننده گوییم، اگر بتوان اعداد آن را به دو مجموعه افراز کرد، طوری که مجموع اعداد آن‌ها برابر باشد. چند تا از مجموعه‌های زیر شکننده هستند؟

$$A = \{1, 2, \dots, 100\} \quad B = \{2, 4, \dots, 100\} \quad C = \{1, 3, \dots, 99\} \quad D = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{100}\}$$

۳ (۵)

۰ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

- مجموعه ی A شکننده است. اعداد به صورت $4k$ و $4k+1$ را در یک دسته و بقیه ی اعداد را در دسته ی دیگر می‌گذاریم.
- مجموعه ی B شکننده نیست. فرض کنید مجموعه ی B به دو دسته ی X و Y تقسیم شود. در این صورت اگر تمام اعداد X و Y را تقسیم بر دو کنیم، باز هم مجموع X و Y یکسان می‌ماند. در نتیجه باید مجموعه ی $\{1, 2, \dots, 50\}$ هم شکننده باشد، در حالی که مجموع اعداد آن فرد است و این امر ممکن نیست.
- مجموعه ی C شکننده است. می‌توانیم آن را به دو دسته ی

$$X = \{1, 3, 5, 9\} \cup \{13, 19, 21, 27, \dots, 93, 99\}$$

و

$$Y = \{7, 11\} \cup \{15, 17, 23, 25, \dots, 95, 97\}$$

افراز کنیم.

- مجموعه ی D شکننده نیست. فرض کنید مجموعه ی D به دو دسته ی X و Y تقسیم شود. ک.م.م اعداد ۱ تا ۱۰۰ را L در نظر بگیرید. همه ی اعداد X و Y را در L ضرب کنید. تمام اعداد به جز $\frac{1}{4}$ پس از این عمل زوج می‌شوند و تنها یک عدد فرد ($\frac{L}{4}$) به وجود می‌آید. پس مجموع یکی از X و Y زوج و دیگری فرد می‌شود که تناقض است.

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

□

۱۴

یک صفحه شطرنج نامتناهی داریم. برخی از خانه های این صفحه امن هستند. در هر خانه از صفحه یک عدد می نویسیم که برابر با حداقل تعداد حرکاتی است که یک مهره ی اسب باید انجام دهد تا از آن خانه به یک خانه ی امن برسد. برای مثال روی خانه های امن، عدد صفر نوشته شده است. برای کسانی که با شطرنج آشنا نیستند، اگر مهره ی اسب در خانه ی مشخص شده ی شکل زیر باشد، در یک گام می تواند به یکی از هشت خانه ی مشخص شده برود:

فرض کنید A و B دو خانه ی مجاور (دارای یک ضلع مشترک) باشند که عدد خانه ی A برابر ۵۷ است. کدام یک نمی تواند عدد خانه ی B باشد؟

۵۷ (۱) ۵۵ (۲) ۵۶ (۳) ۶۰ (۴) ۵۳ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

فاصله ی دو خانه ی مجاور برابر سه است. پس امکان ندارد اختلاف اعداد دو خانه ی مجاور بیش از سه باشد. پس پاسخ برابر ۵۳ است. برای گزینه های دیگر نیز به راحتی می توان مثال ارائه کرد.

□

۱۵

یک مکعب $a \times b \times c$ موازی محورهای مختصات داریم و می خواهیم آن را به طور کامل با آجرهای $۱ \times ۱ \times ۳$ پر کنیم. آجرها نمی توانند از مکعب بیرون بزنند. به آجرهای موازی محور x ، آجر نوع X می گوییم. به همین ترتیب آجرهای نوع Y و نوع Z را تعریف می کنیم. به ازای چند تا از حالات زیر برای ابعاد مکعب می توان این کار را انجام داد، طوری که تعداد آجرهای هر سه نوع برابر باشد؟

$۶ \times ۷ \times ۷$ $۶ \times ۶ \times ۷$ $۵ \times ۶ \times ۷$ $۵ \times ۷ \times ۸$

۰ (۵) ۳ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) ۴ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

اگر تعداد آجرهای در یک راستا را n در نظر بگیریم، تعداد کل خانه های مکعب برابر $۳ \times ۳ \times n$ خواهد بود (زیرا سه راستا داریم و هر آجر نیز سه خانه دارد). پس تعداد خانه ها باید بر ۹ بخش پذیر باشد که فقط مکعب $۶ \times ۶ \times ۷$ این خاصیت را دارد. برای این مکعب نیز فرض کنید ۷ ارتفاع باشد. لایه های ۱، ۴ و ۷ مکعب را رنگ کنید. هر آجر عمودی دقیقی یکی از خانه های این لایه ها را می پوشاند. تعداد مکعب های عمودی ۲۸ تاست. پس از خانه های این لایه ها $۳۶ \times ۳ - ۲۸$ خانه برای دو راستای دیگر می ماند که باید بر ۳ بخش پذیر باشد. تناقض حاصل حکم را ثابت می کند.

□

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۶

تعدادی کیسه دور یک دایره هستند که در مجموع ۱۰۰ سنگریزه دارند. در هر دقیقه به طور همزمان، از هر کیسه که دست کم دو سنگریزه دارد، یک سنگریزه به هر یک از دو کیسه ی مجاور منتقل می شود. اگر پس از یک مرحله تعداد سنگریزه های هیچ کیسه ای تغییر نکند، کار متوقف می شود. حداقل چند دقیقه باید صبر کنیم تا مطمئن باشیم کار متوقف شده است؟

(۱) ۶۶ (۲) ۵۰ (۳) ۳۳ (۴) ۱۰۰ (۵) ممکن است عملیات هیچ گاه متوقف نشود

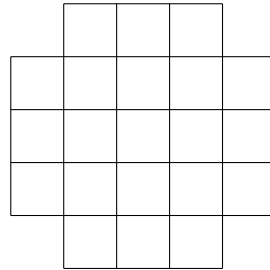
پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

اگر چهار کیسه داشته باشیم که به ترتیب ۰، ۵۰، ۰ و ۵۰ سنگریزه داشته باشند، پس از یک مرحله کیسه ها به ترتیب ۵۰، ۰، ۵۰ و ۰ سنگریزه خواهند داشت و کار هیچ گاه متوقف نخواهد شد.

□

۱۷

شکل زیر، یک جدول 5×5 با حذف چهار گوشه ی آن است. می خواهیم این شکل را به طور کامل با کاشی های 1×1 ، 2×2 و 3×3 بپوشانیم، طوری که کاشی ها روی هم قرار نگرفته و از جدول بیرون نزنند. نیازی نیست از هر سه نوع کاشی استفاده کنیم. حداقل تعداد کاشی ها برای انجام این کار چیست؟



۱۲ (۵)

۱۳ (۴)

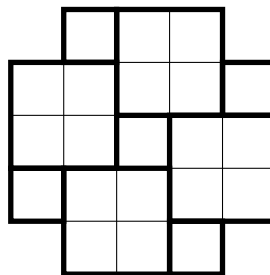
۱۰ (۳)

۹ (۲)

۱۱ (۱)

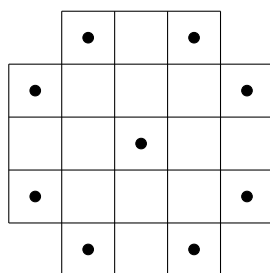
پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

روش پرکردن با ۹ کاشی:



حال ثابت می کنیم با کم تر از ۹ کاشی امکان پر کردن جدول وجود ندارد. حداکثر یک کاشی 3×3 می توانیم داشته باشیم. اگر کاشی 3×3 نداشته باشیم، هر کاشی حداکثر یک خانه ی مشخص شده در شکل زیر را می پوشاند و دست کم به ۹ کاشی نیاز داریم:

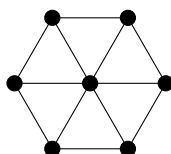
مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور



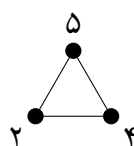
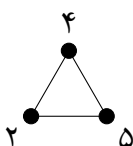
اگر کاشی 3×3 داشته باشیم و این کاشی در وسط جدول باشد، بقیه ی جدول باید با کاشی های 1×1 پر شوند که دست کم به ۱۳ کاشی نیاز داریم. اگر هم کاشی 3×3 داشته باشیم ولی در وسط جدول نباشد، شش خانه به طور یکتا با 1×1 پر می شوند و یک جدول 2×3 می ماند که خودش دست کم به سه کاشی نیاز دارد. پس این حالت نیز دست کم $10 = 1 + 6 + 3$ می خواهد.

□

می خواهیم روی هفت نقطه ی شکل زیر، اعداد ۱ تا ۷ را بنویسیم (هر کدام از اعداد دقیقاً روی یک نقطه و هر نقطه شامل دقیقاً یک عدد باشد):



به یک مثلث ایده آل گوئیم، اگر با خواندن اعداد مثلث به ترتیب ساعت گرد از کوچک ترین عدد، دنباله ای صعودی به دست آید. برای مثال در شکل زیر مثلث سمت چپ ایده آل است، اما مثلث سمت راست ایده آل نیست:



پس از عدد گذاری شکل گفته شده، حداکثر چند مثلث از شش مثلث موجود ایده آل خواهند بود؟

۲ (۵)

۴ (۴)

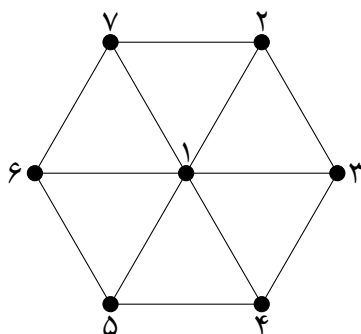
۶ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

روش برای پنج مثلث ایده آل:



مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

حال ثابت می‌کنیم بیش از پنج مثلث ایده‌آل امکان ندارد. برای اثبات این امر کافی است فرض کنیم تمام مثلث‌ها ایده‌آل هستند و با گذاشتن متغیرهای a_1 تا a_7 روی رئوس و نوشتن نابرابری‌ها به تناقض برسیم.

□

جدول زیر را در نظر بگیرید:

۱۹

●				

در خانه‌ی پایین-چپ جدول یک مهره قرار دارد. دو خانه از جدول را همسایه گوئیم، اگر یک ضلع یا یک رأس مشترک داشته باشند. به چند طریق می‌توان از وضعیت مشخص شده در شکل آغاز کرده، در هر مرحله مهره را به یک خانه‌ی همسایه ببریم، از هر خانه دقیقاً یک بار عبور کنیم و به خانه‌ی آغازین برگردیم؟

۱۸ (۵)

۳۲ (۴)

۲۴ (۳)

۱۶ (۲)

۷۲ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

به ازای هر ستون از ستون دوم به بعد، برای دو خانه‌ی آن دو حالت داریم (یکی باید در مسیر رفت و دیگری در مسیر برگشت باشد). خانه‌ی بالای ستون یکم نیز دو حالت دارد (یا در همان ابتدا به آن می‌رویم و یا در گام آخر از آن می‌گذریم). پس $32 = 2^5$ حالت داریم.

□

در سوال قبل، به چند طریق می‌توانیم مهره را از خانه‌ی پایین-چپ به خانه‌ی بالا-راست برسانیم، طوری که از هر خانه حداکثر یک بار عبور کنیم؟

۲۰

۴۸۰ (۵)

۵۶۰ (۴)

۴۶۴ (۳)

۱۰۰ (۲)

۱۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

تعداد روش‌های رسیدن از خانه‌ی پایین-چپ به خانه‌ی بالا-راست در یک جدول $2 \times n$ را a_n و تعداد روش‌های رسیدن از خانه‌ی بالا-چپ به خانه‌ی بالا-راست در همین جدول را b_n در نظر می‌گیریم. با حالت‌بندی روی گام نخست، روابط بازگشتی زیر را داریم:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2a_{n-2} + 2b_{n-2}$$

$$b_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2a_{n-2} + 2b_{n-2}$$

از آنجایی که

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 5 \quad b_1 = 1 \quad b_2 = 5$$

□

مقدار $a_5 = 560$ به دست می‌آید.

حافظه‌ی سلطان ۲۰ خانه با شماره‌های ۱ تا ۲۰ دارد. خانه‌ی i ام حافظه را با $A[i]$ نشان می‌دهیم. در ابتدا در تمام خانه‌های حافظه، عدد ۱ نوشته شده است. الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم:

۲۱

۱. مقدار ans را برابر ۰ قرار بده.
۲. اگر مقدار تمام خانه‌های حافظه‌ی سلطان برابر ۰ بود به خط ۱۵ برو.

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

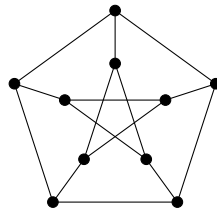
۳. مقدار ans را یک واحد زیاد کن.
 ۴. مقدار $index$ را برابر ۱ قرار بده.
 ۵. اگر $index > 20$ بود به خط ۲ برو.
 ۶. اگر $A[index] = 0$ بود به خط ۱۰ برو.
 ۷. مقدار $A[index]$ را برابر ۰ کن.
 ۸. مقدار $index$ را دو واحد زیاد کن.
 ۹. به خط ۵ برو.
 ۱۰. مقدار tmp را برابر ۰ قرار بده.
 ۱۱. اگر $index < 20$ بود، مقدار tmp را برابر $A[index + 1]$ قرار بده.
 ۱۲. مقدار $A[index]$ را برابر tmp قرار بده.
 ۱۳. مقدار $index$ را یک واحد زیاد کن.
 ۱۴. به خط ۵ برو.
 ۱۵. پایان
- پس از پایان الگوریتم، مقدار ans چیست؟

(۱) ۲۰ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۱۰ (۵) الگوریتم هیچ گاه تمام نخواهد شد

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

در سری یکم مقادیر خانه های با شماره ی فرد برابر ۰ می شود. در سری دوم مقدار $A[1]$ برابر ۱ شده و بقیه ی خانه ها ۰ می شوند. در سری سوم مقدار $A[1]$ نیز ۰ شده و کار تمام می شود. □

گراف زیر را در نظر بگیرید:



یک گنج در یکی از رأس های گراف مخفی شده است. روزبه یک دستگاه گنج یاب دارد. او در هر مرحله می تواند یک دور به طول پنج از گراف را به دستگاه بدهد و بفهمد گنج در رأس های این دور هست یا خیر. روزبه دست کم به چند مرحله استفاده از دستگاه نیاز دارد تا مطمئن باشد می تواند جای گنج را بفهمد؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۶ (۵) ۹

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

ابتدا روشی با چهار مرحله ارائه می دهیم. روزبه در ابتدا یک دور به طول پنج انتخاب می کند. چه پاسخ خیر باشد و چه بله، رأس های کاندید برای گنج در یک دور به طول پنج هستند. حال روزبه یک دور به طول پنج انتخاب می کند که شامل دو رأس مجاور از پنج رأس کاندید باشد.

- اگر جواب خیر باشد، سه رأس کاندید برای گنج می ماند. حال یک دور به طول پنج انتخاب می کنیم که شامل دو رأس مجاور از این سه رأس باشد. اگر جواب خیر باشد با یک پرسش دیگر (دوری که شامل یکی از دو رأس کاندید باشد) مسئله حل می شود و اگر هم جواب بله باشد که گنج پیدا شده است.

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

• اگر جواب بله باشد با یک پرسش دیگر (دوری که شامل یکی از دو رأس کاندید باشد) مسئله حل می شود. حال ثابت می کنیم روشی با بهتر از چهار مرحله وجود ندارد. در ابتدا ۱۰ رأس کاندید برای گنج داریم. در هر مرحله رأس های کاندید به دو دسته ی X (درون دور انتخاب شده) و Y (خارج دور انتخاب شده) تقسیم می شوند. ممکن است در هر مرحله پاسخ طوری باشد که تعداد خانه های کاندید بیش تری باقی بماند. پس دست کم $\lceil \log_2 10 \rceil = 4$ مرحله نیاز است. □

n دستگاه پخش کننده ی موسیقی یکسان و n هندزفری یکسان داریم. به هر کدام از دستگاه ها یک هندزفری وصل کرده ایم. هر هندزفری نیز دو گوشی دارد که یکی مخصوص گوش راست و یکی مخصوص گوش چپ است. n نفر در یک گروه هستند و می خواهند از طریق این دستگاه ها و هندزفری ها موسیقی گوش کنند. هر کس می تواند یک گوشی چپ و یک گوشی راست برداشته و آهنگ گوش کند. دو گوشی ای که یک فرد برمی دارد می تواند از یک هندزفری نباشند، اما باید آهنگ یکسانی را پخش کنند. در انتها تأکید می کنیم دستگاه های پخش کننده و هندزفری ها را یکسان در نظر بگیرید.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

فرض کنید $n = 4$ است. دو تا از دستگاه ها در حال پخش موسیقی M_1 و دو تای دیگر در حال پخش موسیقی M_2 هستند. افراد به چند طریق می توانند هندزفری ها را استفاده کرده و موسیقی ها را گوش کنند؟

۴۸ (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

انتخاب دو نفری که در حال گوش کردن به موسیقی M_1 هستند (۴) حالت دارد. دو نفر دیگر باید موسیقی M_2 را گوش کنند. حال برای دو نفر هر موسیقی دو حالت برای گوش کردن با هندزفری ها داریم (یا هر کدام به طور کامل هندزفری یک دستگاه را برمی دارند و یا از هر دستگاه یک گوشی هندزفری را برمی دارند). پس پاسخ برابر $24 = 2 \times 2 \times (4)$ است. □

دو نفر با نام های A و B را دوست گوئیم، اگر هندزفری ای وجود داشته باشد که یک گوشی آن در اختیار A و گوشی دیگر در اختیار B باشد. دو نفر با نام های A و B را آشنا گوئیم، اگر دنباله ی $\langle C_1, C_2, \dots, C_k \rangle$ از افراد وجود داشته باشد که $k \geq 2$ و C_1 خود A باشد، C_2 با C_1 دوست باشد، C_3 با C_2 دوست باشد و ... و C_{k-1} با C_k دوست باشد و C_k خود B باشد. واضح هست که دو دوست، آشنا نیز هستند.

فرض کنید $n = 10$ است. پنج تا از دستگاه ها در حال پخش موسیقی M_1 و پنج تای دیگر در حال پخش موسیقی M_2 هستند. به حالتی از گوش کردن موسیقی ها سلطانی گوئیم، اگر هیچ دو نفر غیر آشنایی، موسیقی یکسانی گوش نکنند. افراد به چند حالت سلطانی می توانند هندزفری ها را استفاده کرده و موسیقی ها را گوش کنند؟

۹! (۱) $2^8 \times 5! \times 5!$ (۲) $\frac{10!}{2^5}$ (۳) $10!$ (۴) 2^9 (۵)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

(۱۰) حالت برای انتخاب پنج نفر موسیقی M_1 داریم. بقیه باید موسیقی M_2 را گوش کنند. پنج نفر هر موسیقی یک جایگشت دوری با هندزفری ها می سازند که ۴! حالت دارد. پس پاسخ برابر

$$\binom{10}{5} \times 4! \times 4! = \frac{10!}{2^5}$$

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

□

است.

دنباله ای از اعداد طبیعی و متمایز را در نظر بگیرید که از عدد ۱ شروع شده و به عدد n ختم می شود. به چنین دنباله ای **عول** گوئیم، اگر هر عدد دنباله، مضرب عدد قبلی باشد. برای مثال دنباله ی $\langle 1, 3, 6, 30, 60 \rangle$ یک دنباله ی عول است.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید _____

تعداد عناصر بلندترین دنباله ی عول به ازای $n = 810000$ چیست؟

۲۵

۱۲ (۵) ۹ (۴) ۱۱ (۳) ۱۳ (۲) ۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

با تجزیه ی n داریم:

$$810000 = 2^4 \times 3^4 \times 5^4$$

□ در هر مرحله دست کم یک عامل در عدد ضرب می شود. پس طول بلندترین دنباله ی عول ۱۳ خواهد بود.

تعداد عناصر بلندترین دنباله ی عول به ازای $n = 10800$ را k در نظر بگیرید. تعداد دنباله های عول k عنصره به ازای $n = 10800$ چیست؟

۲۶

۶! (۵) ۱۲۶۰ (۴) ۹! (۳) ۲۸۸ (۲) ۵۱۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

با تجزیه ی عدد داریم: $10800 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$ مانند استدلال سوال قبل، طول بلندترین دنباله ی عول برابر $k = 10$ خواهد شد. حال برای آن که طول دنباله ۱۰ شود باید در هر مرحله دقیقن یک عامل در عدد ضرب شود. این تعداد معادل یک جایگشت از ۴ عدد ۲، ۳، ۳ و ۵ عدد ۵ است. پس پاسخ برابر است با:

$$\frac{10!}{4!3!2!} = 1260$$

□

چند دنباله ی عول به ازای $n = 5120$ وجود دارد؟

۲۷

۳۰۷۲ (۵) ۴۰۹۶ (۴) ۵۶۳۲ (۳) ۶۱۴۴ (۲) ۱۲۲۸۸ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

با تجزیه ی عدد داریم: $n = 2^{10} \times 5$ دو حالت داریم:

- عامل پنج در یک مرحله ی مستقل ضرب شود. در این صورت اگر عامل های ۲ در k مرحله ضرب شوند، تعداد حالات برابر تعداد جواب های معادله ی $x_1 + \dots + x_k = 10$ در مجموعه ی اعداد طبیعی است که برابر $\binom{9}{k-1}$ می باشد. انتخاب مرحله ی عدد پنج نیز $k+1$ حالت دارد.
- مانند استدلال حالت قبل $\binom{9}{k-1}$ حالت برای پخش عوامل دو در یک دنباله ی به طول k داریم، اما این بار انتخاب مرحله ی عدد پنج k حالت دارد.

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

با استفاده از اتحادهای ترکیباتی پاسخ برابر است با:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{10} (k+1) \binom{k-1}{9} + \sum_{k=1}^{10} k \binom{k-1}{9} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{10} (k-1) \binom{k-1}{9} + 3 \sum_{k=1}^{10} \binom{k-1}{9} \\ &= 2 \times 9 \times 2^{9-1} + 3 \times 2^9 \\ &= 6144 \end{aligned}$$

□

باکتری **فلاجلا** به هنگام تولید مثل به سه باکتری تقسیم شده و خودش از بین می رود. به باکتری ای که تولید مثل می کند، **والد** و به سه باکتری به وجود آمده، **فرزندان** او می گوئیم. ممکن است یک باکتری قبل از تولید مثل بمیرد که در این صورت به سرعت تجزیه شده و اثری از او باقی نمی ماند. مدت ها پیش، **سلطان** یک باکتری فلاجلا به نام **آر.بی.جی** خرید و آن را در قفس نگهداری می کرد! پس از مدتی این باکتری از بین رفته است، اما قفس تعدادی باکتری دارد که طبیعتاً از نوادگان آر.بی.جی هستند. سلطان دلش برای آر.بی.جی تنگ شده و می خواهد ژن آر.بی.جی را بازیابی کند. زیست شناسان به تکنولوژی ای دست پیدا کرده اند که با استفاده از ژن دو تا از فرزندان یک باکتری والد، می توانند ژن او را بازیابی کنند. فرض کنید تعداد باکتری های درون قفس n باشد. به یک وضعیت **بحرانی** گوئیم، اگر بتوانیم ژن آر.بی.جی را بازیابی کنیم، اما در این بازیابی به همه ی n باکتری نیاز داشته باشیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

در این سوال فرض کنید نتایج تحقیقات این باشد که هیچ کدام از فرزندان آر.بی.جی و فرزندان فرزندان او در قفس نیستند. در بین تمام حالات ممکن که امکان بازیابی ژن آر.بی.جی وجود دارد، کمینه ی تعداد باکتری های درون قفس چیست؟

۲۸

- ۷ (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۴ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

دست کم به ژن دو فرزند آر.بی.جی نیاز داریم. هر فرزند نیز دست کم به ژن دو فرزندش نیاز دارد. هر کدام از آنها نیز دست کم ژن دو فرزندشان را می خواهند. پس دست کم $2 \times 2 \times 2 = 8$ باکتری نیاز است. روش ممکن با ۸ باکتری نیز مشابه استدلال گفته شده به دست می آید.

□

به ازای چند n از ۲ تا ۱۰ می توان وضعیتی بحرانی با n باکتری درون قفس داشت؟

۲۹

- ۲ (۱) ۹ (۲) ۵ (۳) ۱ (۴) ۷ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

برای تمام n ها ممکن است. برای ۲ باکتری که وضعیت واضح است (تنها ژن دو فرزند آر.بی.جی موجود باشد). فرض کنید برای n باکتری ممکن باشد. برای $n + 1$ باکتری کافی است یک باکتری بدون فرزند (برای مثال

مرحله ی یکم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

جوان ترین باکتری! را در نظر گرفته و به جای او، دو فرزند از او در قفس بگذاریم. پس با استقرا ثابت می شود تمام n ها ممکن است.

□

کدام گزاره یا گزاره های زیر درست هستند؟

۳۰

آ) وضعیتی با شش باکتری درون قفس وجود دارد که با استفاده از هر پنج باکتری می توانیم ژن آر.بی. جی را بازیابی کنیم، اما چهار باکتری وجود دارند که نمی توان فقط با استفاده از آن ها ژن آر.بی. جی را بازیابی کرد.

ب) وضعیتی با چهار باکتری درون قفس وجود دارد که به ازای هر دو باکتری، با استفاده از فقط همان دو باکتری می توان ژن آر.بی. جی را بازیابی کرد.

ج) وضعیتی بحرانی با پنج باکتری وجود دارد که هر باکتری فرزند یا فرزند فرزند آر.بی. جی باشد.

۱) ب و ج ۲) ب ۳) آ ۴) آ و ج ۵) آ و ب پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

• گزاره ی (آ) صحیح است. فرض کنید از هر فرزند آر.بی. جی دو فرزند در قفس باشند و باکتری دیگری نیز نباشد.

• گزاره ی (ب) صحیح نیست. اگر با استفاده از فقط دو باکتری بتوان ژن آر.بی. جی را شناسایی کرد باید آن دو، فرزندان آر.بی. جی باشند. پس گزاره ممکن نیست.

• گزاره ی (ج) صحیح نیست. اثبات با بررسی حالات انجام می شود.

□

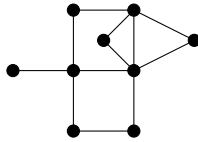
مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

- سؤال‌های ۲۹ تا ۳۰ در دسته‌ی چندسؤالی آمده‌اند و توضیح دسته پیش از آن آمده است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ رقم i ام (از سمت راست) عدد X را با $f(X, i)$ نشان می‌دهیم. تمام اعداد ۷ رقمی با ارقام ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. به ازای هر عدد، مقدار $\sum_{i=1}^7 i \times f(X, i)$ را حساب کرده و این مقادیر را جمع می‌زنیم. حاصل چیست؟

۱۰۷۵۲ (۱) ۱۹۲ (۲) ۴۰۳۲ (۳) ۳۸۴ (۴) ۵۳۷۶ (۵)

۲ می‌خواهیم رئوس گراف زیر را با قرمز و آبی رنگ کنیم. باید طوری این کار انجام شود که هر رأس (چه قرمز و چه آبی) دست‌کم یک رأس قرمز مجاور داشته باشد. توجه کنید در یک گراف دو رأس را مجاور گوئیم، اگر با یک یال به هم وصل باشند. کمینه‌ی تعداد رأس‌های قرمز چیست؟



۲ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵)

۳ دو عدد را هفتول گوئیم، اگر مجموع‌شان ۷ باشد. چند تاس با وجوه ۱, ۲, ..., ۶ داریم، طوری که وجه‌های هر دو عدد هفتول، مجاور باشند؟ توجه کنید دو تاس را که با چرخش و دوران در فضا به هم تبدیل می‌شوند، یک‌سان در نظر می‌گیریم.

۲۴ (۱) ۳۲ (۲) ۸ (۳) ۳۰ (۴) ۱۶ (۵)

۴ جدول زیر را در نظر بگیرید.

								B
A								

دو خانه را مجاور گوئیم، اگر دارای یک ضلع مشترک باشند. ایلچ در خانه‌ی A قرار دارد و می‌خواهد به خانه‌ی B برود. او در هر مرحله می‌تواند به یک خانه‌ی مجاور برود. حمید می‌خواهد تعدادی از خانه‌های جدول را با خاشاک پر کند تا ایلچ نتواند از آن خانه‌ها برای عبور استفاده کند. حمید باید طوری این کار را انجام دهد که دست کم یک مسیر از A به B برای ایلچ وجود داشته باشد. حمید دوست دارد تعداد خانه‌های کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای ایلچ، بیشینه شود. این مقدار بیشینه چیست؟ توجه کنید خود A و B هم جزء مسیر حساب می‌شوند.

۱۶ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۸ (۵)

۵ دور یک دایره، ۳۴ توپ چیده شده است که برخی از آن‌ها قرمز و بقیه آبی هستند. از هر پنج توپ متوالی، دست کم سه توپ رنگ قرمز دارند. بیشینه‌ی ممکن تعداد توپ‌های آبی چیست؟

۱۴ (۱) ۱۶ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴) ۱۲ (۵)

مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۶ ۳۴ توپ متفاوت با شماره های ۱، ۲، ... و ۳۴ دور یک دایره قرار دارند. به چند طریق می توان ۱۷ تا از آن ها را قرمز و بقیه را آبی کرد، طوری که از هر ۱۲ توپ متوالی، دقیقاً ۶ توپ رنگ قرمز داشته باشند؟

۲ (۱) ۴۰۹۶ (۲) ۱۰۲۴ (۳) ۱۶ (۴) ۶۴ (۵)

۷ یک جدول 3×2 داریم. دو خانه را مجاور گوئیم، هر گاه یک ضلع مشترک داشته باشند. به چند طریق می توان اعداد ۱ تا ۶ را در خانه های این جدول نوشت، طوری که به ازای هر خانه یکی از دو حالت زیر رخ بدهد؟

- عدد آن خانه از اعداد تمام خانه های مجاورش کوچک تر باشد.
- عدد آن خانه از اعداد تمام خانه های مجاورش بزرگ تر باشد.

۸۸ (۱) ۲۴ (۲) ۴۰ (۳) ۸۰ (۴) ۹۶ (۵)

۸ خط یک مترو اصفهان دارای ۱۱ ایستگاه با شماره های ۰، ۱، ... و ۱۰ است. مترو از ایستگاه ۰ شروع کرده و در ایستگاه ۱۰ کار خود را تمام می کند. در یک روز خلوت زمستانی، مترو بدون مسافر شروع به حرکت کرده است. در هر یک از ایستگاه های ۰، ۱، ... و ۹ دقیقاً یک مسافر جدید وارد مترو می شود. پس از رسیدن به هر ایستگاه (به جز ایستگاه پایانی)، هر نفر مستقل از بقیه به احتمال $\frac{1}{2}$ پیاده می شود. توجه کنید هیچ کس در همان ایستگاهی که سوار شده، پیاده نمی شود! امید ریاضی تعداد کسانی که به ایستگاه پایانی (۱۰) می رسند، چیست؟

۵۱۱ (۱) ۲۵۶ (۲) ۹ (۳) $\frac{1023}{512}$ (۴) ۴ (۵)

۹ در دنیای سلطان افراد به سه دسته ی نوع ۰، نوع ۱ و نوع ۲ تقسیم می شوند! در این دنیا هر گاه فردی از دسته ی X بخواهد در جملاتش عددی مانند Y را بگوید، باقی مانده ی $X + Y$ را در تقسیم بر ۳ بیان می کند. برای مثال یک فرد از دسته ی ۱، جمله ی «۱۳۹۵» به علاوه ی ۵ می شود «۱۴۰۰» را به صورت «۱» به علاوه ی ۰ می شود «۰» بیان می کند! چهار نفر از این دنیا با نام های A, B, C, D جملات زیر را گفته اند:

- $A: C$ از دسته ی ۲ است.
- B : جمع شماره ی دسته ی C با شماره ی دسته ی من برابر ۲ است.
- C : جمع شماره ی دسته ی B با شماره ی دسته ی من برابر ۱ است.
- D : ضرب شماره ی دسته ی A با شماره ی دسته ی من برابر ۱ است.

دسته ی A چه چیزهایی می تواند باشد؟

۰ (۱) ۰ و ۲ (۲) ۰ و ۳ (۳) ۴ (۴) در هیچ دسته ای نمی تواند باشد (۵) ۰ و ۱ و ۲

۱۰ یک جایگشت از اعداد ۱، ۲، ... و ۹ داریم. در هر مرحله می توان جایگشت را به دو تکه از عناصر متوالی تقسیم کرد و ترتیب عناصر هر تکه را وارون کرد. برای مثال، جایگشت $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ می تواند به جایگشت $(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 2, 1)$ تبدیل شود. توجه کنید تکه ها می توانند تهی باشند. یک جایگشت را مطلوب گوئیم، اگر بتوان با شروع از آن و انجام چند مرحله، به جایگشت مرتب شده (از کوچک به بزرگ) رسید. چند جایگشت مطلوب داریم؟

۷۲ (۱) ۹ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴۰ (۴) ۱۲۰ (۵)

۱۱ در سوال قبل به ازای هر جایگشت مطلوب، کمینه ی تعداد مراحل لازم برای رسیدن به جایگشت مرتب شده (از کوچک به بزرگ) را در نظر بگیرید. در میان این مقادیر، بیشینه چیست؟

۱ (۱) ۳ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۲ (۵)

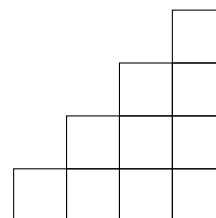
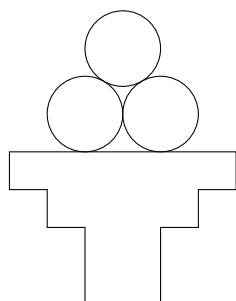
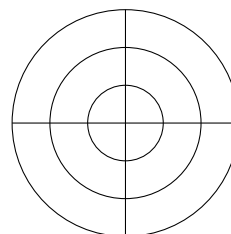
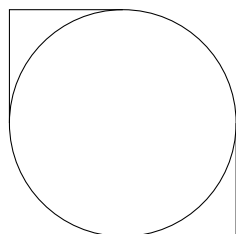
مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۲

یک مربع با اضلاع موازی محورهای مختصات را **تفرقک** می نامیم. سلطان یک تفرقک در صفحه کشیده است. او در هر مرحله می تواند یکی از کارهای زیر را انجام دهد:

- یک تفرقک با خطوط کشیده شده انتخاب کند و دایره ای درون آن، مماس بر اضلاع تفرقک بکشد.
- یک دایره با خطوط کشیده شده انتخاب کند و تفرقکی درون آن بکشد، طوری که هر چهار رأسش روی محیط دایره باشند.
- یک دایره با خطوط کشیده شده انتخاب کند و تفرقکی دور آن بکشد، طوری که اضلاعش مماس بر دایره باشند.
- یک تفرقک با خطوط کشیده شده انتخاب کند و آن را پاک کند.
- یک دایره با خطوط کشیده شده انتخاب کند و آن را پاک کند.
- یک تفرقک با خطوط کشیده شده انتخاب کند و با کشیدن دو پاره خط عمودی و افقی، آن را به چهار تفرقک برابر تقسیم کند.

توجه کنید ممکن است با پاک کردن یک تفرقک، قسمتی از یک یا چند تفرقک دیگر نیز از بین برود. سلطان یک شکل را **ریسمانی** می گوید، هر گاه قابل ساختن از شکل اولیه (یک تفرقک) با تعدادی مرحله باشد. چند تا از چهار شکل زیر، ریسمانی هستند؟



۴ (۵)

۰ (۴)

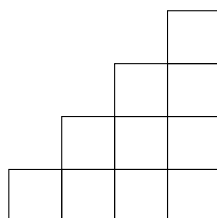
۲ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

شکل زیر را در نظر بگیرید:

۱۳



به چند طریق می توان سه خانه را قرمز، سه خانه را سبز، سه خانه را زرد و یک خانه را آبی کرد، طوری که هیچ دو خانه ی هم رنگی هم سطر یا هم ستون نباشند؟

۱۶ (۵)

۶ (۴)

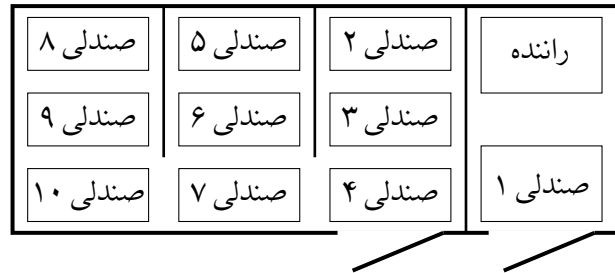
۳۰ (۳)

۲۴ (۲)

۱۲ (۱)

مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۴ «ون»، یک خودرو به شکل زیر با یک صندلی راننده و ۱۰ صندلی مسافر است که دو در دارد:



با توجه به محدودیت درها، هنگام پیاده شدن هر کس، باید صندلی های موجود در مسیر تا رسیدن به در خودرو، خالی باشد. برای مثال هنگام پیاده شدن مسافر صندلی ۵، اگر روی صندلی های ۴، ۶ و ۷ مسافری باشد، باید ابتدا این مسافرین پیاده شوند تا مسافر صندلی ۵ بتواند از خودرو خارج شود. توجه کنید خطوط سیاه پررنگ شکل، مانع هستند و مسافران نمی توانند از آن ها رد شوند. قرار است این ون در طول یک جاده ی مستقیم حرکت کند. ۱۰ مسافر می خواهند در ۱۰ جای مختلف از این جاده پیاده شوند. به چند طریق این ۱۰ نفر در ابتدای مسیر می توانند روی صندلی ها بنشینند، طوری که هنگام پیاده شدن هیچ کسی، فرد دیگری مجبور به پیاده شدن نباشد؟

۳۶۰۰ (۱) ۲۸۰۰ (۲) ۵۶۰۰ (۳) ۵۱۴۰ (۴) ۵۶۰ (۵)

۱۵ جدولی 3×3 داریم که ۹ شیء مختلف در خانه های آن قرار گرفته اند. در هر مرحله می توان یکی از دو کار زیر را انجام داد:

- یک خانه ی گوشه را در نظر بگیریم و شیء آن را با شیء یکی از دو خانه ی مجاورش جابه جا کنیم.
- سطر وسط یا ستون وسط را در نظر بگیریم و ترتیب اشیاء در آن را وارون کنیم.

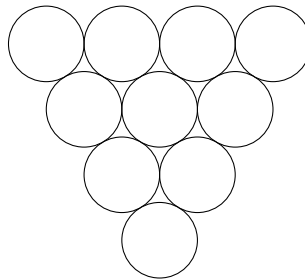
یک جدول را **سلطانی** گوئیم، اگر بتوان آن را با دقتن ۱۳۹۵ مرحله ساخت. چند جدول سلطانی مختلف داریم؟

۴!۴!۲!۲! (۱) ۸! (۲) $\frac{۸!}{۲}$ (۳) $\frac{۸!}{۳!}$ (۴) ۹! (۵)

۱۶ جایگشتی تصادفی از اعداد ۱، ۲، ... و ۱۰۰ داریم. به چه احتمالی تعداد اعداد بین ۱ و ۲ زوج است؟

$\frac{۵۰}{۹۹}$ (۱) $\frac{۴۹}{۹۹}$ (۲) $\frac{۴۹}{۱۰۰}$ (۳) $\frac{۱}{۲}$ (۴) $\frac{۵۱}{۱۰۰}$ (۵)

۱۷ در چهار دایره ی بالای شکل زیر، چهار عدد طبیعی متمایز کم تر از ۱۱ می نویسیم. عدد هر دایره ی دیگر برابر با قدر مطلق تفاضل دو دایره ی بالایی خود است. بیشینه ی عدد پایین ترین دایره چیست؟



۷ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۸ (۵)

مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۸

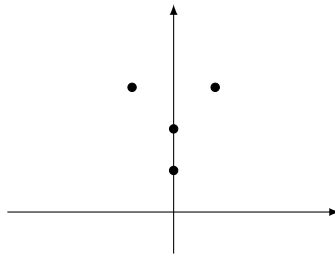
در ابتدا یک مهره روی نقطه ی $(0, 0)$ صفحه ی مختصات قرار داده شده است. در هر مرحله می توان یک مهره با مختصات (x, y) به همراه یک عدد طبیعی n انتخاب کرده و پس از برداشتن مهره ی مذکور، در هر یک از نقطه های

$$(x, y + 1), (x, y + 2), \dots, (x, y + n - 1)$$

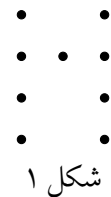
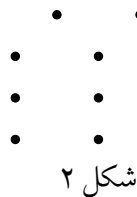
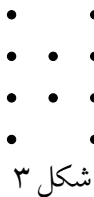
و همچنین نقطه های

$$(x - 1, y + n), (x + 1, y + n)$$

یک مهره قرار داد. گام ها باید طوری انجام شود که در هر لحظه در هر نقطه حداکثر یک مهره باشد. برای مثال در گام نخست با انتخاب تنها مهره ی موجود و $n = 3$ ، صفحه به شکل زیر در می آید:



با انجام تعدادی مرحله، به کدام اشکال زیر می توان رسید؟ (محورهای مختصات کشیده نشده است. شکل در هر جایی از صفحه ایجاد شود، قابل قبول است).



(۱) شکل ۲ (۲) هر سه شکل (۳) شکل ۱ (۴) شکل های ۱ و ۳ (۵) هیچ یک از شکل ها

۱۹

هفت مهره ی سیاه و سفید به ترتیب زیر در یک ردیف قرار دارند:



مرتضی و ابوالفضل با هم بازی می کنند. هر کس در نوبت ش یکی از مهره های کناری ردیف را برای خود برمی دارد. هر دو نفر دوست دارند مهره های سیاه بیشتری در انتها داشته باشند. ابوالفضل بازی را آغاز می کند. پس از هفت مرحله بازی تمام می شود و ابوالفضل چهار مهره و مرتضی سه مهره خواهد داشت. اگر هر دو نفر به به ترین شکل ممکن بازی کنند، در انتها ابوالفضل چند مهره ی سفید خواهد داشت؟

(۱) ۴ (۲) ۰ (۳) ۳ (۴) ۱ (۵) ۲

۲۰

یک جدول 3×3 داریم. دو خانه را مجاور گوئیم، هر گاه یک ضلع مشترک داشته باشند. می خواهیم در هر یک از خانه های جدول، یکی از اعداد ۱، ۲ و ۳ را بنویسیم، طوری که عدد هر خانه برابر با تعداد اعداد ۱ در خانه های مجاورش باشد. خانه ی مرکزی چه اعدادی می تواند داشته باشد؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) هر سه عدد (۴) ۲ و ۳ (۵) هیچ یک از سه عدد نمی توانند در خانه ی وسط باشند

مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۱ یک جدول 5×4 داریم در هر یک از خانه های آن عدد ۰ نوشته شده است. ایلچ الگوریتم زیر را انجام می دهد:

۱. به ازای هر سطر از بالا به پایین انجام بده:

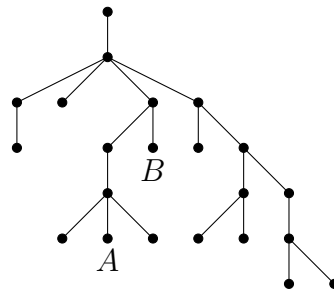
۱-۱. به ازای هر ستون از چپ به راست انجام بده:

۱-۱-۱. خانه ی واقع در سطر و ستون گفته شده را در نظر بگیر. سطر یا ستون آن را انتخاب کن و تمام خانه های سطر یا ستون انتخاب شده را برعکس کن (از ۰ به ۱ و از ۱ به ۰).

از میان تمام 2^{20} حالت برای انتخاب سطرها و ستونها توسط ایلچ، در چند حالت پس از اجرای الگوریتم به جدولی می رسیم که تمام خانه های آن عدد ۱ دارند؟

۴۰۹۶ (۱) ۵۱۲ (۲) ۰ (۳) ۸۱۹۲ (۴) ۲۵۶ (۵)

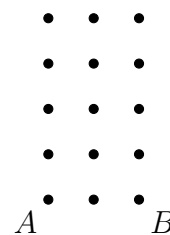
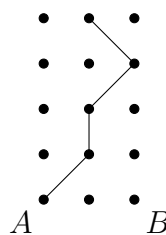
۲۲ درخت زیر را در نظر بگیرید. یک یال را زرد می نامیم، اگر به یک رأس درجه ی ۱ وصل باشد. یک رأس را شل می نامیم، اگر دست کم دو یال زرد به رؤس مسیر آن به ریشه (رأس بالا) وصل باشند (به جز یال خود رأس و یال متصل به ریشه). برای مثال A در ابتدا شل است، زیرا ۴ یال زرد به رؤس مسیر آن تا ریشه وصل هستند؛ اما رأس B در ابتدا شل نیست.



در هر مرحله می توان یک رأس شل در نظر گرفته و از درخت حذف کرد. توجه کنید ممکن است رأسی در ابتدا شل نباشد، اما پس از تعدادی مرحله شل شود. حداکثر چند رأس می توان از درخت حذف کرد؟

۱۳ (۱) ۷ (۲) ۱۶ (۳) ۹ (۴) ۱۰ (۵)

۲۳ شکل سمت راست را در نظر بگیرید:



سلطان از نقطه ی A شروع به کشیدن یک خط شکسته می کند. او در هر مرحله نقطه ی کنونی را در نظر گرفته و با کشیدن یک پاره خط، به یکی از نقاط بالا، بالا-راست یا بالا-چپ (در صورت وجود) می رود. پس از چهار مرحله، او به یکی از نقاط بالایی شکل می رسد. برای مثال سلطان می تواند مسیرش را مانند شکل سمت چپ بکشد. سپس ایلچ مسیری دیگر با شروع از نقطه ی B رسم می کند. به چند طریق این کار ممکن است، طوری که دو مسیر کشیده شده در هیچ جایی (چه روی نقاط شکل و چه جای دیگر) یکدیگر را قطع نکنند؟

۲۷ (۱) ۸۱ (۲) ۵۵ (۳) ۹۶ (۴) ۱۳ (۵)

مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۴ پس از اجرای الگوریتم زیر، مقدار S چه خواهد بود؟

۱ S را برابر ۰ قرار بده.

۲ به ازای i از ۰ تا ۳۱ انجام بده:

۱-۲. به ازای j از ۰ تا ۳۱ انجام بده:

۱-۲-۱. اگر $(i \text{ XOR } j)$ از i بزرگ‌تر شد، S را یک واحد زیاد کن.

۳۴۱ (۵)

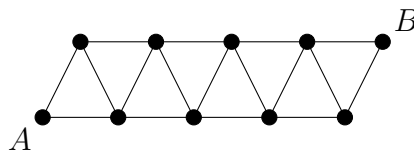
۴۹۶ (۴)

۹۹۲ (۳)

۴۵۱ (۲)

۸۳ (۱)

۲۵ گراف زیر چند مسیر از A به B دارد؟ توجه کنید یک مسیر نمی‌تواند رأس یا یال تکراری داشته باشد.



۲۷۴ (۵)

۴۴ (۴)

۱۴۹ (۳)

۸۱ (۲)

۶۸ (۱)

۲۶ کیوان و پیمان به نوبت با هم بازی می‌کنند. آن‌ها در ابتدا یک کیسه شامل n سنگ‌ریزه دارند. بازی را کیوان شروع می‌کند. کیوان در هر نوبت‌ش می‌تواند ۰، ۱ یا ۲ سنگ‌ریزه از کیسه خارج کند، در حالی که پیمان در هر نوبت‌ش می‌تواند ۱، ۲ یا ۳ سنگ‌ریزه بردارد. برنده‌ی بازی کسی است که آخرین سنگ‌ریزه را از کیسه خارج کند. اگر هر دو نفر به صورت بهینه بازی کنند، به ازای $n = ۱۰$ ، $n = ۱۳۹۵$ و $n = ۲۰۱۶$ به ترتیب چه کسی بازی را می‌برد؟

(۱) کیوان، کیوان، کیوان (۲) پیمان، کیوان، پیمان (۳) پیمان، پیمان، پیمان (۴) پیمان، پیمان، کیوان (۵) کیوان، پیمان، کیوان

۲۷ یک گراف کامل ۱۱ رأسی با رأس‌های ۰، ۱، ... و ۱۰ داریم. روی یال بین رأس‌های i و j مقدار باقی‌مانده‌ی $i + j$ در تقسیم بر ۱۱ را نوشته‌ایم. می‌خواهیم یک زیردرخت فراگیر از این گراف انتخاب کنیم، طوری که مجموع اعداد یال‌های آن کمینه باشد. این مقدار کمینه چیست؟

۶ (۵)

۱۱ (۴)

۱۶ (۳)

۵ (۲)

۱۰ (۱)

۲۸ مرتضی یک جدول ۸×۸ را با دومینو (کاشی‌های ۱×۲) پوشانده و از هر دومینو یک خانه را سیاه و یک خانه را سفید کرده است. گویم دو خانه‌ی سیاه A و B دوست هستند، هر گاه بتوان از A شروع کرده، در هر مرحله به یک خانه‌ی مجاور (مشترک در ضلع) سیاه رفته و پس از تعدادی مرحله به B رسید. مجموعه‌ای از خانه‌های سیاه را دیدنی گویم، هر گاه هر دو خانه‌ی مجموعه، دوست باشند. بیشینه‌ی ممکن تعداد خانه‌های یک مجموعه‌ی دیدنی چیست؟

۸ (۵)

۲۴ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲ (۲)

۳۲ (۱)

در منطقه‌ای در نزدیکی شهر لندن، قتلی توسط سه نفر اتفاق افتاده است. سلطان به سرعت وارد عمل شد و پنج متهم (A, B, C, D, E) را دست‌گیر کرد. هر یک از آن‌ها ادعا کرد که قاتل نیست، ولی نام دو نفر از چهار نفر دیگر را به عنوان کسانی که به احتمال زیاد قاتل هستند، به زبان آورد. سلطان متوجه شد که هر یک از قاتل‌ها

مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

برای رد گم کردن، نام دقیقن یک قاتل دیگر را بر زبان آورده است و هر یک از بی گناهان نیز نام دو قاتل را گفته است. در هر یک از حالت های زیر مشخص کنید سلطان چند نفر را به طور قطع می تواند قاتل معرفی کند؟

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۲۹ اظهارات:

- $A : B$ و C قاتل هستند.
- $B : A$ و C قاتل هستند.
- $C : B$ و E قاتل هستند.
- $D : E$ و C قاتل هستند.
- $E : B$ و D قاتل هستند.

۱ (۱) ۲ (چنین چیزی ممکن نیست) ۳ (۲) ۴ (۰) ۵ (۳)

۳۰ اظهارات:

- $A : B$ و C قاتل هستند.
- $B : A$ و C قاتل هستند.
- $C : A$ و B قاتل هستند.
- $D : E$ و B قاتل هستند.
- $E : C$ و D قاتل هستند.

۱ (۳) ۲ (چنین چیزی ممکن نیست) ۳ (۰) ۴ (۱) ۵ (۲)

مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

- سؤال‌های ۲۹ تا ۳۰ در دسته‌ی چندسؤالی آمده‌اند و توضیح دسته پیش از آن آمده است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ رقم i ام (از سمت راست) عدد X را با $f(X, i)$ نشان می‌دهیم. تمام اعداد ۷ رقمی با ارقام ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. به ازای هر عدد، مقدار $\sum_{i=1}^7 i \times f(X, i)$ را حساب کرده و این مقادیر را جمع می‌زنیم. حاصل چیست؟

۱۹۲ (۱) ۵۳۷۶ (۲) ۱۰۷۵۲ (۳) ۴۰۳۲ (۴) ۳۸۴ (۵)

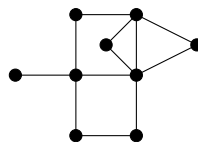
پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

تعداد کل اعداد برابر ۲^۷ و به ازای هر i ، رقم i ام در ۲^۶ عدد برابر ۱ است. پس با در نظر گرفتن ارقام به طور جداگانه، مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\sum_{i=1}^7 (i \times 1 \times 2^6 + i \times 2 \times 2^6) = 3 \times 2^6 \times \sum_{i=1}^7 i = 3 \times 2^6 \times 28 = 5376$$

□

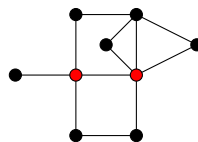
۲ می‌خواهیم رئوس گراف زیر را با قرمز و آبی رنگ کنیم. باید طوری این کار انجام شود که هر رأس (چه قرمز و چه آبی) دست‌کم یک رأس قرمز مجاور داشته باشد. توجه کنید در یک گراف دو رأس را مجاور گوئیم، اگر با یک یال به هم وصل باشند. کمینه‌ی تعداد رأس‌های قرمز چیست؟



۱ (۳) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

با قرمز کردن تنها یک رأس نمی‌توان به هدف رسید، زیرا خود آن رأس، مجاور قرمز نخواهد داشت. با قرمز کردن دو رأس به شکل زیر نیز کار انجام می‌شود.



□

پس پاسخ برابر ۲ است.

۳ دو عدد را هفتول گوئیم، اگر مجموع‌شان ۷ باشد. چند تاس با وجوه ۱، ۲، ...، ۶ داریم، طوری که وجه‌های هر دو عدد هفتول، مجاور باشند؟ توجه کنید دو تاس را که با چرخش و دوران در فضا به هم تبدیل می‌شوند، یک‌سان در نظر می‌گیریم.

مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۳۲ (۵)

۲۴ (۴)

۱۶ (۳)

۸ (۲)

۳۰ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

عدد ۱ را به یک حالت روی یکی از وجه ها نوشته و تاس را روی زمین می گذاریم، طوری که وجه ۱ چسبیده به زمین باشد. حال عدد ۶ را به یک حالت روی یکی از وجه های مجاور عدد ۱ نوشته و تاس را طوری می چرخانیم که عدد ۶ روبه روی ما قرار گیرد. عدد روبه روی ۱ به چهار حالت انتخاب می شود. انتخاب وجه برای هفتول متناظر آن نیز دو حالت دارد. دو عدد باقی مانده نیز به دو حالت در دو وجه باقی مانده قرار می گیرند. پس پاسخ برابر $16 = 2 \times 2 \times 4$ است.

□

جدول زیر را در نظر بگیرید.

۴

								B
A								

دو خانه را مجاور گوئیم، اگر دارای یک ضلع مشترک باشند. ایلچ در خانه ی A قرار دارد و می خواهد به خانه ی B برود. او در هر مرحله می تواند به یک خانه ی مجاور برود. حمید می خواهد تعدادی از خانه های جدول را با خاشاک پر کند تا ایلچ نتواند از آن خانه ها برای عبور استفاده کند. حمید باید طوری این کار را انجام دهد که دست کم یک مسیر از A به B برای ایلچ وجود داشته باشد. حمید دوست دارد تعداد خانه های کوتاه ترین مسیر ممکن برای ایلچ، بیشینه شود. این مقدار بیشینه چیست؟ توجه کنید خود A و B هم جزء مسیر حساب می شوند.

۱۲ (۵)

۱۴ (۴)

۱۸ (۳)

۱۰ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

ابتدا روشی ارائه می دهیم که حمید بتواند طول کوتاه ترین مسیر را به ۱۴ برساند. اگر حمید به شکل زیر خانه ها را پر کند، مسیر ایلچ یکتا و طول آن ۱۴ است:

حال ثابت می کنیم هر گونه که حمید خانه ها را پر کند، مسیری به طول حداکثر ۱۴ برای ایلچ وجود دارد. اگر طول کوتاه ترین مسیر از ۱۴ بیشتر شود، در زیرمستطیل 8×2 سمت چپ، تعداد خانه های درون مسیر از ۱۲ بیشتر است. پس با افراز این زیرمستطیل به چهار مستطیل 2×2 طبق اصل لانه ی کبوتری، زیرمستطیلی 2×2 وجود دارد که تمام خانه های آن در مسیر هستند. به وضوح می توان طول این قسمت از مسیر را دو واحد کاهش داد که با فرض کوتاه ترین بودن تناقض دارد.

□

دور یک دایره، ۳۴ توپ چیده شده است که برخی از آن ها قرمز و بقیه آبی هستند. از هر پنج توپ متوالی، دست کم سه توپ رنگ قرمز دارند. بیشینه ی ممکن تعداد توپ های آبی چیست؟

۵

۱۵ (۵)

۱۳ (۴)

۱۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

مرحله اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

ابتدا ثابت می‌کنیم پاسخ از ۱۳ بیش‌تر نیست. اگر توپ آبی نداشته باشیم که حکم برقرار است. پس یک توپ آبی در نظر بگیرید و با شروع از آن، توپ‌ها را به دسته‌های پنج‌تایی متوالی تقسیم کنید. چهار توپ نیز در انتها باقی می‌ماند که در دسته‌ای قرار نمی‌گیرند. در هر کدام از دسته‌ها حداکثر دو توپ آبی وجود دارد. حال چهار توپ باقی‌مانده را به همراه توپ آبی آغازین در یک دسته‌ی پنج‌تایی بگذارید. نتیجه می‌شود که چهار توپ گفته شده حداکثر یک توپ آبی دارند. پس در کل حداکثر $1 + 2 \times 6$ توپ آبی داریم. حال روشی برای ۱۳ توپ ارائه می‌دهیم. توپ‌ها را به شکل زیر به ترتیب دور دایره بگذارید (b نماد آبی و r نماد قرمز است):

bbrrrrbrrrrbrrrrbrrrrbrrrrbrrrrbrrrr

□

۳۴ توپ متفاوت با شماره‌های ۱، ۲، ... و ۳۴ دور یک دایره قرار دارند. به چند طریق می‌توان ۱۷ تا از آن‌ها را قرمز و بقیه را آبی کرد، طوری که از هر ۱۲ توپ متوالی، دقیقاً ۶ توپ رنگ قرمز داشته باشند؟

۱۶ (۱) ۶۴ (۲) ۲ (۳) ۴۰۹۶ (۴) ۱۰۲۴ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

ابتدا ثابت می‌کنیم در میان هر ۱۰ توپ متوالی دقیقاً پنج توپ قرمز داریم. ۱۰ توپ متوالی در نظر گرفته و بقیه‌ی توپ‌ها را به دو دسته‌ی ۱۲ تایی متوالی تقسیم کنید. پس در میان ۲۴ توپ باقی‌مانده دقیقاً ۱۲ توپ قرمز داریم و در نتیجه در میان ده توپ در نظر گرفته شده $12 - 17 = 5$ توپ قرمز داریم. به استدلال مشابه ثابت می‌کنیم در هر چهار توپ متوالی دقیقاً دو توپ قرمز داریم (با در نظر گرفتن چهار توپ متوالی و تقسیم بقیه‌ی توپ‌ها به سه دسته‌ی ۱۰ تایی). در انتها به استدلال مشابه ثابت می‌کنیم در هر دو توپ متوالی دقیقاً یک توپ قرمز داریم. پس توپ‌ها باید به صورت یک در میان، قرمز و آبی باشند که تنها دو حالت دارد.

□

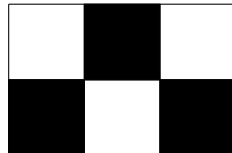
یک جدول 2×3 داریم. دو خانه را مجاور گوئیم، هر گاه یک ضلع مشترک داشته باشند. به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۶ را در خانه‌های این جدول نوشت، طوری که به ازای هر خانه یکی از دو حالت زیر رخ بدهد؟

- عدد آن خانه از اعداد تمام خانه‌های مجاورش کوچک‌تر باشد.
- عدد آن خانه از اعداد تمام خانه‌های مجاورش بزرگ‌تر باشد.

۴۰ (۱) ۸۸ (۲) ۸۰ (۳) ۲۴ (۴) ۹۶ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

خانه‌ها را به شکل زیر رنگ‌آمیزی می‌کنیم:



یک عدد را قلدر گوئیم، اگر از مجاورهایش بزرگ‌تر باشد؛ در غیر این صورت آن را نوچه گوئیم. اعداد مجاور یک عدد قلدر، نوچه‌اند و بالعکس. پس اعداد قلدر در خانه‌های یک رنگ و اعداد نوچه در خانه‌های رنگ دیگر قرار می‌گیرند. انتخاب رنگ قلدرها دو حالت دارد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید قلدرها در خانه‌های سیاه باشند.

از آنجایی که هر خانه، حداقل دو مجاور دارد، اعداد ۱ و ۲ نمی‌توانند قلدر باشند. حال دو حالت داریم:

مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

- عدد ۳ قلدر نباشد. در این صورت اعداد ۴، ۵ و ۶ قلدر هستند. این اعداد به ۳! حالت در خانه های سیاه قرار گرفته و اعداد دیگر نیز به ۳! حالت در خانه های سفید قرار می گیرند.
- عدد ۳ قلدر باشد. در این صورت عدد ۳ نمی تواند در ستون وسط باشد، زیرا باید از سه عدد بزرگ تر باشد که امکان ندارد. پس جای عدد ۳ دو حالت دارد. اعداد ۱ و ۲ باید مجاور عدد ۳ باشند که به دو حالت، در دو خانه ی مجاور ۳ قرار می گیرند. حال عدد ۴ به طور یک تا در تنها خانه ی سفید باقی مانده قرار می گیرد (زیرا باید دست کم با یکی از اعداد ۵ و ۶ مجاور باشد و قلدر نیست). اعداد ۵ و ۶ به دو حالت در دو خانه ی باقی مانده قرار می گیرند.

پس در کل $88 = 2 \times (6 \times 6 + 2 \times 2 \times 2)$ حالت داریم. □

خط یک مترو اصفهان دارای ۱۱ ایستگاه با شماره های ۰، ۱، ... و ۱۰ است. مترو از ایستگاه ۰ شروع کرده و در ایستگاه ۱۰ کار خود را تمام می کند. در یک روز خلوت زمستانی، مترو بدون مسافر شروع به حرکت کرده است. در هر یک از ایستگاه های ۰، ۱، ... و ۹ دقیقن یک مسافر جدید وارد مترو می شود. پس از رسیدن به هر ایستگاه (به جز ایستگاه پایانی)، هر نفر مستقل از بقیه به احتمال $\frac{1}{4}$ پیاده می شود. توجه کنید هیچ کس در همان ایستگاهی که سوار شده، پیاده نمی شود! امید ریاضی تعداد کسانی که به ایستگاه پایانی (۱۰) می رسند، چیست؟

$$4(1) \quad 2(2) \quad 3(3) \quad 4(4) \quad 5(5)$$

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

این مسئله نیاز به اطلاعاتی در مورد متغیرهای تصادفی و امید ریاضی دارد. در صورتی که با این مفاهیم آشنا نیستید، قبل از خواندن راه حل، آن ها را مطالعه کنید (البته مسئله راه حل بدون استفاده از اطلاعات خاص هم دارد، اما طولانی تر است).

به ازای هر فرد i (فردی که از ایستگاه i ام وارد می شود)، متغیر تصادفی I_i را تعریف می کنیم که برابر ۱ است، اگر فرد i به ایستگاه پایانی برسد و در غیر این صورت برابر ۰ است. امید ریاضی I_i برابر احتمال رسیدن فرد i به ایستگاه پایانی یا همان $\frac{1}{4^{9-i}}$ می باشد. امید ریاضی جمع چند متغیر تصادفی برابر با جمع امید ریاضی تک تک آن هاست؛ پس امید ریاضی خواسته شده برابر است با:

$$E(X) = E\left(\sum I_i\right) = \sum E(I_i) = \sum_{i=0}^9 \frac{1}{4^{9-i}} = 2 - \frac{1}{4^9} = \frac{1023}{512}$$

□

در دنیای سلطان افراد به سه دسته ی نوع ۰، نوع ۱ و نوع ۲ تقسیم می شوند! در این دنیا هر گاه فردی از دسته ی X بخواهد در جملاتش عددی مانند Y را بگوید، باقی مانده ی $X + Y$ را در تقسیم بر ۳ بیان می کند. برای مثال یک فرد از دسته ی ۱، جمله ی «۱۳۹۵» به علاوه ی ۵ می شود «۱۴۰۰» را به صورت «۱» به علاوه ی ۰ می شود «۰» بیان می کند! چهار نفر از این دنیا با نام های A, B, C, D جملات زیر را گفته اند:

- $A: C$ از دسته ی ۲ است.
- B : جمع شماره ی دسته ی C با شماره ی دسته ی من برابر ۲ است.
- C : جمع شماره ی دسته ی B با شماره ی دسته ی من برابر ۱ است.
- D : ضرب شماره ی دسته ی A با شماره ی دسته ی من برابر ۱ است.

دسته ی A چه چیزهایی می تواند باشد؟

$$0(1) \quad 1(2) \quad 2(3) \quad 3(4) \quad 4(5) \quad 5(6)$$

مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

برای ۰ و ۱ مثال های زیر را در نظر بگیرید:

$$A = 0 \quad B = 0 \quad C = 2 \quad D = 1$$

$$A = 1 \quad B = 2 \quad C = 1 \quad D = 2$$

حال ثابت می کنیم نوع A نمی تواند برابر ۲ باشد. فرض کنید نوع A برابر ۲ است. اگر نوع D برابر k باشد، طبق گفته ی D باید $x + 2x$ طدر پیمانه ی ۳ برابر ۱ باشد که امکان ندارد. □

یک جایگشت از اعداد ۱، ۲، ... و ۹ داریم. در هر مرحله می توان جایگشت را به دو تکه از عناصر متوالی تقسیم کرد و ترتیب عناصر هر تکه را وارون کرد. برای مثال، جایگشت $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$ می تواند به جایگشت $\langle 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 2, 1 \rangle$ تبدیل شود. توجه کنید تکه ها می توانند تهی باشند. یک جایگشت را مطلوب گوئیم، اگر بتوان با شروع از آن و انجام چند مرحله، به جایگشت مرتب شده (از کوچک به بزرگ) رسید. چند جایگشت مطلوب داریم؟

۷۲ (۱) ۲۴۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۸ (۴) ۹ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

اگر اعداد را دور دایره ببینیم، ترتیب شان تنها وارون می شود. پس ترتیب دوری عناصر باید مرتب شده از کوچک به بزرگ یا بزرگ به کوچک باشد. انتخاب نقطه ی شروع جایگشت از روی دایره نیز ۹ حالت دارد. پس $9 \times 2 = 18$ حالت داریم. دقت کنید تمام این جایگشت های ذکر شده قابل ساختن نیز هستند. □

در سوال قبل به ازای هر جایگشت مطلوب، کمینه ی تعداد مراحل لازم برای رسیدن به جایگشت مرتب شده (از کوچک به بزرگ) را در نظر بگیرید. در میان این مقادیر، بیشینه چیست؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۸ (۳) ۱ (۴) ۴ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

ترتیب دوری هر جایگشت مطلوب، مرتب شده یا وارون آن است (طبق سوال قبل). اگر جایگشت مرتب شده بود، ابتدا با یک حرکت ترتیب آن را وارون می کنیم. حال با یک حرکت می توانیم نقطه ی شروع جایگشت را برابر ۱ کنیم و جایگشت مرتب می شود. □

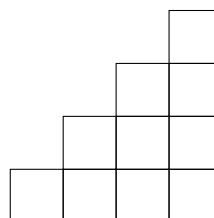
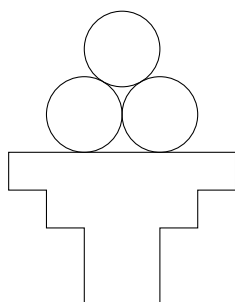
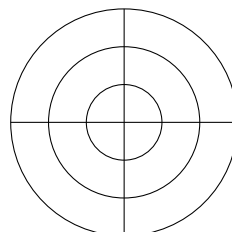
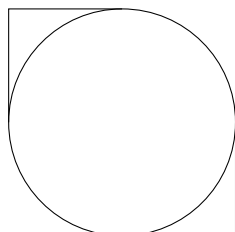
یک مربع با اضلاع موازی محورهای مختصات را تفرق می نامیم. سلطان یک تفرق در صفحه کشیده است. او در هر مرحله می تواند یکی از کارهای زیر را انجام دهد:

- یک تفرق با خطوط کشیده شده انتخاب کند و دایره ای درون آن، مماس بر اضلاع تفرق بکشد.
- یک دایره با خطوط کشیده شده انتخاب کند و تفرقی درون آن بکشد، طوری که هر چهار رأسش روی محیط دایره باشند.
- یک دایره با خطوط کشیده شده انتخاب کند و تفرقی دور آن بکشد، طوری که اضلاعش مماس بر دایره باشند.
- یک تفرق با خطوط کشیده شده انتخاب کند و آن را پاک کند.
- یک دایره با خطوط کشیده شده انتخاب کند و آن را پاک کند.

مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

- یک تفرقک با خطوط کشیده شده انتخاب کند و با کشیدن دو پاره خط عمودی و افقی، آن را به چهار تفرقک برابر تقسیم کند.

توجه کنید ممکن است با پاک کردن یک تفرقک، قسمتی از یک یا چند تفرقک دیگر نیز از بین برود. سلطان یک شکل را **ریسمانی** می گوید، هر گاه قابل ساختن از شکل اولیه (یک تفرقک) با تعدادی مرحله باشد. چند تا از چهار شکل زیر، ریسمانی هستند؟



(۵) ۲

(۴) ۴

(۳) ۱

(۲) ۰

(۱) ۳

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

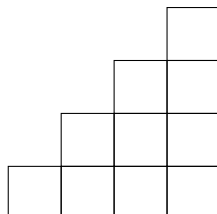
- روش ساختن شکل بالا-چپ: ابتدا یک دایره درون تفرقک آغازین می کشیم. سپس تفرقک آغازین را به چهار تفرقک برابر تقسیم می کنیم. در انتها دو تفرقک بالا-راست و پایین-چپ را پاک می کنیم.
- روش ساختن شکل بالا-راست: ابتدا تفرقک آغازین را به چهار تفرقک برابر تقسیم می کنیم. سپس دایره ای درون آن کشیده و درون دایره ی کشیده شده یک تفرقک می کشیم. دوباره درون تفرقک کشیده شده یک دایره کشیده و درون آن یک تفرقک می کشیم. باز هم درون تفرقک کشیده شده یک دایره می کشیم. حال با پاک کردن سه تفرقک تودرتو، شکل به وجود می آید.
- روش ساختن شکل پایین-راست: ابتدا تفرقک آغازین را به چهار تفرقک برابر تقسیم می کنیم. سپس هر کدام از چهار تفرقک ساخته شده را به چهار تفرقک کوچک تر تبدیل می کنیم. حال درون هر یک از ۱۶ تفرقک کوچک، یک دایره می کشیم. شش تفرقک کوچکی را که در شکل نیستند، پاک می کنیم (اگر قبل از پاک کردن، قسمتی از آن ها از بین رفته بود، دور دایره ی متناظرشان یک تفرقک می کشیم تا دوباره تفرقک کامل شود، سپس تفرقک را پاک می کنیم). ممکن است پس از انجام این کار، برخی از تفرقک های کوچک مطلوب نیز ناقص شوند. دایره ی این تفرقک های مطلوب ناقص را در نظر گرفته و با کشیدن یک تفرقک دور آن ها، تفرقک را کامل می کنیم. در انتها تمام دایره ها را پاک می کنیم.
- اثبات ریسمانی نبودن شکل پایین-چپ: بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید اندازه ی ضلع تفرقک آغازین برابر ۱ و مختصات رأس پایین-چپ آن برابر $(0, 0)$ باشد. در این صورت مختص y پایین ترین نقطه ی هر دایره یا تفرقک جدیدی که به وجود می آید، به صورت $a + b\sqrt{2}$ است که a و b اعدادی گویا هستند. هم چنین شعاع هر دایره ی جدید و ضلع هر تفرقک جدید نیز به همین صورت است. در شکل داده شده، سه دایره ی کشیده شده را در نظر بگیرید. اگر مختص y پایین ترین نقطه ی دو دایره ی

مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

پایین $a + b\sqrt{2}$ و شعاع دایره برابر $a' + b'\sqrt{2}$ باشد، مختص y پایین ترین نقطه ی دایره ی بالا برابر $a + b\sqrt{2} + (a' + b'\sqrt{2})\sqrt{3}$ است. تناقض حاصل حکم را ثابت می کند.

□

۱۳ شکل زیر را در نظر بگیرید:



به چند طریق می توان سه خانه را قرمز، سه خانه را سبز، سه خانه را زرد و یک خانه را آبی کرد، طوری که هیچ دو خانه ی هم رنگی هم سطر یا هم ستون نباشند؟

۲۴ (۵)

۳۰ (۴)

۶ (۳)

۱۲ (۲)

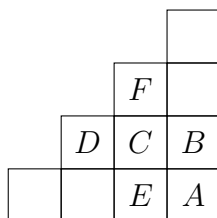
۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

در سطر پایین و ستون راست، دقیقن یک خانه از هر کدام از رنگ ها داریم. با توجه به این که دقیقن یک خانه ی آبی وجود دارد، پس خانه ی A باید آبی باشد (در غیر این صورت دست کم دو خانه ی آبی جداگانه در سطر پایین و ستون راست خواهیم داشت). رنگ سه خانه ی C ، B و D باید متفاوت باشد، پس $3! = 6$ حالت دارد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید رنگ این سه خانه به ترتیب قرمز، سبز و زرد باشد. خانه ی E نمی تواند سبز باشد (زیرا یک خانه ی سبز هم ستون دارد). هم چنین اگر خانه ی E قرمز باشد، هیچ خانه ی دیگری نمی تواند قرمز باشد. پس این حالت هم منتفی است، زیرا سه خانه ی قرمز باید داشته باشیم. پس E حتمن زرد است. به استدلال مشابه F باید قرمز باشد. دو قسمت 2×1 در جدول باقی می ماند که هر کدام دو حالت برای رنگ آمیزی دارند، زیرا هر کدام یک خانه ی سبز دارند و با نشان دادن خانه های سبز، رنگ بقیه ی خانه ها به طور یک تا تعیین می شود. پس در کل

$$3! \times 2 \times 2 = 24$$

حالت داریم.



□

۱۴ «ون»، یک خودرو به شکل زیر با یک صندلی راننده و ۱۰ صندلی مسافر است که دو در دارد:

مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

صندلی ۸	صندلی ۵	صندلی ۲	راننده
صندلی ۹	صندلی ۶	صندلی ۳	
صندلی ۱۰	صندلی ۷	صندلی ۴	صندلی ۱

با توجه به محدودیت درها، هنگام پیاده شدن هر کس، باید صندلی های موجود در مسیر تا رسیدن به در خودرو، خالی باشد. برای مثال هنگام پیاده شدن مسافر صندلی ۵، اگر روی صندلی های ۴، ۶ و ۷ مسافری باشد، باید ابتدا این مسافری پیاده شوند تا مسافر صندلی ۵ بتواند از خودرو خارج شود. توجه کنید خطوط سیاه پررنگ شکل، مانع هستند و مسافران نمی توانند از آن ها رد شوند. قرار است این ون در طول یک جاده ی مستقیم حرکت کند. ۱۰ مسافر می خواهند در ۱۰ جای مختلف از این جاده پیاده شوند. به چند طریق این ۱۰ نفر در ابتدای مسیر می توانند روی صندلی ها بنشینند، طوری که هنگام پیاده شدن هیچ کسی، فرد دیگری مجبور به پیاده شدن نباشد؟

(۱) ۵۶۰۰ (۲) ۵۶۰ (۳) ۲۸۰۰ (۴) ۳۶۰۰ (۵) ۵۱۴۰

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

فرد روی صندلی ۱ مستقل از بقیه به ۱۰ حالت انتخاب می شود. در میان بقیه ی افراد، فردی که زودتر از همه پیاده می شود، باید روی صندلی شماره ۴ بنشیند. به $\binom{8}{2}$ حالت برای صندلی های ۲ و ۳، دو نفر از هشت نفر باقی مانده را انتخاب می کنیم و به طور یک تا در این دو صندلی می نشانیم (آن که زودتر پیاده می شود، روی صندلی سه می نشیند). در میان افراد باقی مانده، فردی که زودتر از همه پیاده می شود، باید روی صندلی ۷ بنشیند. مانند استدلال قبل $\binom{5}{2}$ حالت برای صندلی های ۵ و ۶ داریم و سه نفر باقی مانده به طور یک تا روی صندلی های ۸ و ۹ و ۱۰ می نشینند. پس تعداد روش ها برابر

$$10 \times \binom{8}{2} \times \binom{5}{2} = 2800$$

□

است.

جدولی 3×3 داریم که ۹ شیء مختلف در خانه های آن قرار گرفته اند. در هر مرحله می توان یکی از دو کار زیر را انجام داد:

- یک خانه ی گوشه را در نظر بگیریم و شیء آن را با شیء یکی از دو خانه ی مجاورش جابه جا کنیم.
- سطر وسط یا ستون وسط را در نظر بگیریم و ترتیب اشیاء در آن را وارون کنیم.

یک جدول را سلطانی گوئیم، اگر بتوان آن را با دقیق ۱۳۹۵ مرحله ساخت. چند جدول سلطانی مختلف داریم؟

(۱) ۹! (۲) $\frac{9!}{3}$ (۳) $4!4!2!2!$ (۴) $\frac{9!}{3!}$ (۵) ۸!

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

در یک جایگشت از اعداد، هر گاه عدد A قبل از عدد B آمده باشد، اما $A > B$ باشد، گوئیم یک وارونگی رخ داده است.

بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید اشیاء برابر اعداد ۱، ۲، ... و ۹ بوده و در ابتدا به ترتیب زیر در جدول قرار گرفته باشند:

مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹

عدد ۵ همواره سر جای خود باقی می ماند. همچنین اگر با گذاشتن سطرهاى جدول به دنبال هم، عناصر جدول را به شکل یک جایگشت ببینیم (که در ابتدا برابر جایگشت مرتب شده است)، زوجیت تعداد وارونگی ها تغییر می کند (بررسی گام ها و تغییرات تعداد وارونگی ها به خواننده واگذار می شود). از آنجایی که تعداد وارونگی ها در ابتدا زوج و تعداد مراحل فرد است، در انتها باید تعداد وارونگی ها فرد باشد. پس به حداکثر $\frac{n!}{4}$ جدول مختلف می توانیم برسیم.

حال ثابت می کنیم به هر جدولی که تعداد وارونگی های ش فرد باشد، می توان رسید. هر دو عنصر در جدول (به جز ۵) را می توان با حداکثر پنج گام جابه جا کرد، طوری که ترتیب بقیه ی عناصر با هم نریزد. پس می توان با حداکثر هشت جابه جایی عنصر (یعنی حداکثر 8×5 مرحله) از جایگشت ابتدایی به هر جایگشت دل خواه رسید. با توجه به فرد بودن تعداد وارونگی های جایگشت مقصد، تعداد مراحل طی شده تا رسیدن به آن جایگشت با الگوریتم گفته شده، فرد است. پس از رسیدن به جایگشت دل خواه، دو عنصر قابل جابه جایی با گام نوع ۱ در نظر گرفته و مرتب آن ها را جابه جا می کنیم تا ۱۳۹۵ مرحله انجام شود. تعداد مراحل انجام این قسمت زوج است، پس عملن پس از پایان کار، مراحل این قسمت تغییری در جایگشت ایجاد نمی کند. پس در انتها به جایگشت مورد نظر می رسیم.

پس پاسخ برابر $\frac{n!}{4}$ است. □

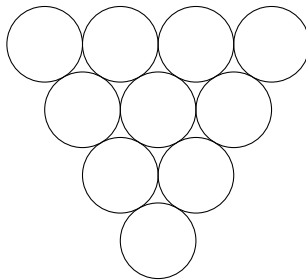
جایگشتی تصادفی از اعداد ۱، ۲، ... و ۱۰۰ داریم. به چه احتمالی تعداد اعداد بین ۱ و ۲ زوج است؟

- (۱) $\frac{50}{99}$ (۲) $\frac{49}{99}$ (۳) $\frac{51}{100}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۵) $\frac{49}{100}$

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

عدد ۱ در هر کجای جایگشت باشد، برای جایگاه عدد ۲، از ۹۹ انتخاب ممکن ۵۰ انتخاب مطلوب داریم. پس پاسخ برابر $\frac{50}{99}$ است. □

در چهار دایره ی بالای شکل زیر، چهار عدد طبیعی متمایز کم تر از ۱۱ می نویسیم. عدد هر دایره ی دیگر برابر با قدر مطلق تفاضل دو دایره ی بالایی خود است. بیشینه ی عدد پایین ترین دایره چیست؟

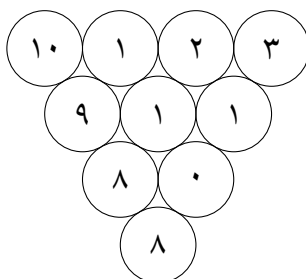


- (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۶ (۴) ۸ (۵) ۵

مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

در ردیف دوم، اعداد از مجموعه ی $\{1, 2, \dots, 9\}$ هستند. پس در ردیف سوم، اعداد از مجموعه ی $\{0, \dots, 8\}$ هستند. بنابراین عدد پایین ترین دایره نمی تواند از ۸ بیش تر باشد. حال مثالی برای ۸ ارائه می دهیم:



□

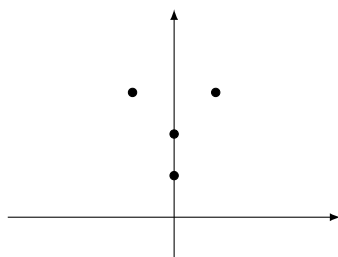
در ابتدا یک مهره روی نقطه ی $(0, 0)$ صفحه ی مختصات قرار داده شده است. در هر مرحله می توان یک مهره با مختصات (x, y) به همراه یک عدد طبیعی n انتخاب کرده و پس از برداشتن مهره ی مذکور، در هر یک از نقطه های

$$(x, y + 1), (x, y + 2), \dots, (x, y + n - 1)$$

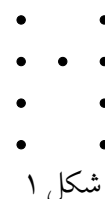
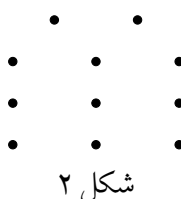
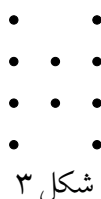
و همچنین نقطه های

$$(x - 1, y + n), (x + 1, y + n)$$

یک مهره قرار داد. گام ها باید طوری انجام شود که در هر لحظه در هر نقطه حداکثر یک مهره باشد. برای مثال در گام نخست با انتخاب تنها مهره ی موجود و $n = 3$ ، صفحه به شکل زیر در می آید:



با انجام تعدادی مرحله، به کدام اشکال زیر می توان رسید؟ (محورهای مختصات کشیده نشده است. شکل در هر جایی از صفحه ایجاد شود، قابل قبول است).



(۵) شکل ۱

(۴) شکل های ۱ و ۳

(۳) هر سه شکل

(۲) هیچ یک از شکل ها

(۱) شکل ۲

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

مرحله اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

به هر نقطه از صفحه با مختصات (x, y) عدد 2^y را نسبت می دهیم. با انجام هر گام، مجموع اعداد نقاط مهره دار تغییری نمی کند. در ابتدا این مقدار برابر ۱ است، پس در انتها نیز باید برابر ۱ باشد. در شکل های ۲ و ۳ مقدار گفته شده نمی تواند به صورت 2^t باشد، پس رسیدن به این دو شکل امکان ندارد. با اعمال زیر می توان شکل ۱ را ساخت:

۱. انتخاب مهره ی روی نقطه ی $(0, 0)$ با $n = 2$

۲. انتخاب مهره ی روی نقطه ی $(0, 1)$ با $n = 2$

۳. انتخاب مهره ی روی نقطه ی $(0, 2)$ با $n = 2$

۴. انتخاب مهره ی روی نقطه ی $(0, 3)$ با $n = 2$

□

هفت مهره ی سیاه و سفید به ترتیب زیر در یک ردیف قرار دارند:

۱۹

مرتضی و ابوالفضل با هم بازی می کنند. هر کس در نوبت ش یکی از مهره های کناری ردیف را برای خود برمی دارد. هر دو نفر دوست دارند مهره های سیاه بیش تری در انتها داشته باشند. ابوالفضل بازی را آغاز می کند. پس از هفت مرحله بازی تمام می شود و ابوالفضل چهار مهره و مرتضی سه مهره خواهد داشت. اگر هر دو نفر به به ترین شکل ممکن بازی کنند، در انتها ابوالفضل چند مهره ی سفید خواهد داشت؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

ابتدا ثابت می کنیم ابوالفضل می تواند دست کم یک توپ سیاه در انتها داشته باشد. او توپ سمت چپ را برمی دارد. حال مرتضی هر توپی بردارد، یک توپ سیاه قابل برداشتن برای ابوالفضل می شود. حال ثابت می کنیم مرتضی می تواند دست کم دو توپ سیاه در انتها داشته باشد. پس از برداشتن نخستین توپ توسط ابوالفضل، مرتضی توپ ها را در ذهن خود به طور یک در میان در دو دسته ی A و B می گذارد. یکی از دو دسته شامل دو توپ سیاه است. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید A چنین باشد. مرتضی همواره می تواند یک توپ از دسته ی A بردارد و ابوالفضل مجبور است از دسته ی B بردارد. پس در انتها تمام توپ های دسته ی A برای مرتضی خواهد شد و او دو توپ سیاه خواهد داشت. با توجه به دو حکم بالا، اگر هر دو نفر بهینه بازی کنند، در انتها دو توپ سیاه در اختیار مرتضی و یک توپ سیاه در اختیار ابوالفضل خواهد بود. پس ابوالفضل سه توپ سفید خواهد داشت. □

یک جدول 3×3 داریم. دو خانه را مجاور گوئیم، هر گاه یک ضلع مشترک داشته باشند. می خواهیم در هر یک از خانه های جدول، یکی از اعداد ۱، ۲ و ۳ را بنویسیم، طوری که عدد هر خانه برابر با تعداد اعداد ۱ در خانه های مجاورش باشد. خانه ی مرکزی چه اعدادی می تواند داشته باشد؟

۲۰

۱ (۳) ۲ (هر سه عدد) ۳ (۲) ۴ (۲ و ۳) ۵ (هیچ یک از سه عدد نمی توانند در خانه ی وسط باشند)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

خانه های گوشه تنها می توانند شامل اعداد ۱ و ۲ باشند. ادعا می کنیم حداکثر یکی از گوشه ها می تواند شامل عدد ۲ باشد. فرض کنید در دست کم دو گوشه، عدد ۲ نوشته باشیم. دو حالت داریم:

- دو گوشه ی واقع در یک ضلع با عدد ۲ داریم. تمام خانه های مجاور این دو عدد، باید شامل عدد ۱ باشند. پس چنین شکلی داریم:

مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۲	۱	
۱		
۲	۱	

- اکنون خانه‌ی وسط جدول بزرگ‌تر از ۱ است. در این صورت عدد ۱ مشخص شده با رنگ قرمز، عدد ۱ مجاور ندارد. تناقض حاصل ثابت می‌کند این حالت امکان ندارد.
- دو گوشه‌ی واقع در یک قطر با عدد ۲ داریم. در این صورت نیز چنین شکلی داریم:

	۱	۲
۱		۱
۲	۱	

اکنون عدد وسط جدول باید ۴ باشد که امکان ندارد.

□

پس جدولی با خواص گفته شده وجود ندارد.

یک جدول 5×4 داریم در هر یک از خانه‌های آن عدد ۰ نوشته شده است. ایلچ الگوریتم زیر را انجام می‌دهد:

۲۱

۱. به ازای هر سطر از بالا به پایین انجام بده:

۱-۱. به ازای هر ستون از چپ به راست انجام بده:

۱-۱-۱. خانه‌ی واقع در سطر و ستون گفته شده را در نظر بگیر. سطر یا ستون آن را انتخاب کن و تمام خانه‌های سطر یا ستون انتخاب شده را برعکس کن (از ۰ به ۱ و از ۱ به ۰).

از میان تمام 2^{20} حالت برای انتخاب سطرها و ستون‌ها توسط ایلچ، در چند حالت پس از اجرای الگوریتم به جدولی می‌رسیم که تمام خانه‌های آن عدد ۱ دارند؟

۴۰۹۶ (۱) ۲۵۶ (۲) ۵۱۲ (۳) ۸۱۹۲ (۴) ۰ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

یک خانه که ستون‌ش را تغییر داده سفید و در غیر این صورت آن را سیاه می‌کنیم. اگر ستونی داشته باشیم که تعداد زوجی خانه‌ی سفید داشته باشد، باید تمام سطرها شامل تعداد فردی خانه‌ی سیاه باشند (تا خانه‌های آن ستون برابر ۱ شود). به همین ترتیب برای ستون با تعداد فردی خانه‌ی سفید می‌توان حکم مشابهی گفت. با در نظر گرفتن حکمی مشابه (با در نظر گرفتن یک سطر) نیز، نتیجه می‌گیریم تنها یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

- تمام ستون‌ها شامل فرد خانه‌ی سفید و تمام سطرها شامل زوج خانه‌ی سیاه هستند. امکان رخ دادن این حالت وجود ندارد، زیرا

مجموع تعداد خانه‌های سفید ستون‌ها + مجموع تعداد خانه‌های سیاه سطرها = تعداد کل خانه‌های جدول

و در این حالت تعداد کل خانه‌های جدول فرد خواهد شد.

مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

• تمام ستون ها شامل زوج خانه ی سفید و تمام سطرها شامل فرد خانه ی سیاه هستند. برای شمردن حالات مطلوب این قسمت، ابتدا تمام خانه های جدول جز ستون و سطر آخر را به 2^{12} حالت رنگ می کنیم. حال رنگ سه خانه ی نخست ستون آخر و چهار خانه ی نخست سطر آخر به طور یکتا مشخص می شود. اکنون تمام خانه ها به جز خانه ی واقع در سطر و ستون آخر رنگ شده اند. دو حالت داریم:

– در ۱۲ خانه ی ابتدایی رنگ شده تعداد فردی خانه ی سیاه و تعداد فردی خانه ی سفید داشته باشیم. در این صورت باید سه خانه ی نخست ستون آخر شامل تعداد زوجی خانه ی سیاه (و در نتیجه تعداد فردی خانه ی سفید) باشند. به همین ترتیب، چهار خانه ی نخست سطر آخر شامل تعداد فردی خانه ی سفید (و در نتیجه تعداد فردی خانه ی سیاه) هستند. پس تنها خانه ی رنگ نشده به طور یکتا باید سفید شود.

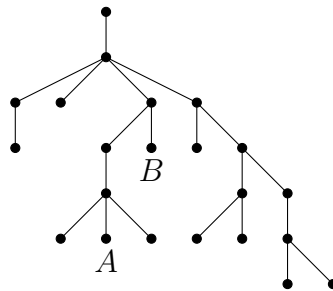
– در ۱۲ خانه ی ابتدایی رنگ شده تعداد زوجی خانه ی سیاه و تعداد زوجی خانه ی سفید داشته باشیم. در این صورت باید سه خانه ی نخست ستون آخر شامل تعداد فردی خانه ی سیاه (و در نتیجه تعداد زوجی خانه ی سفید) باشند. به همین ترتیب، چهار خانه ی نخست سطر آخر شامل تعداد زوجی خانه ی سفید (و در نتیجه تعداد زوجی خانه ی سیاه) هستند. پس تنها خانه ی رنگ نشده به طور یکتا باید سیاه شود.

پس در هر صورت تنها خانه ی رنگ نشده از جدول به طور یکتا رنگ می شود.

□

پس پاسخ برابر $4096 = 2^{12}$ است.

درخت زیر را در نظر بگیرید. یک یال را زرد می نامیم، اگر به یک رأس درجه ی ۱ وصل باشد. یک رأس را شل می نامیم، اگر دست کم دو یال زرد به رؤس مسیر آن به ریشه (رأس بالا) وصل باشند (به جز یال خود رأس و یال متصل به ریشه). برای مثال A در ابتدا شل است، زیرا ۴ یال زرد به رؤس مسیر آن تا ریشه وصل هستند؛ اما رأس B در ابتدا شل نیست.



در هر مرحله می توان یک رأس شل در نظر گرفته و از درخت حذف کرد. توجه کنید ممکن است رأسی در ابتدا شل نباشد، اما پس از تعدادی مرحله شل شود. حداکثر چند رأس می توان از درخت حذف کرد؟

۱۳ (۵)

۱۰ (۴)

۷ (۳)

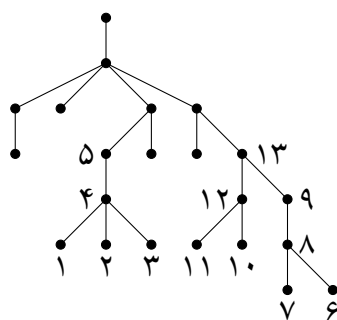
۱۶ (۲)

۹ (۱)

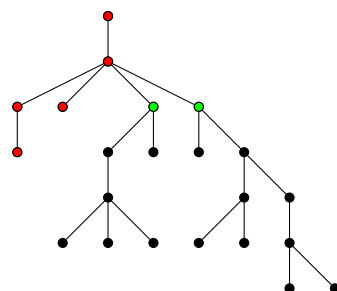
پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

اگر به ترتیب شماره های زیر، رؤس را حذف کنیم، ۱۳ رأس حذف می شوند:

مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور



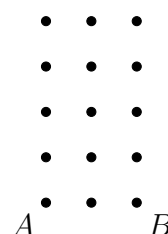
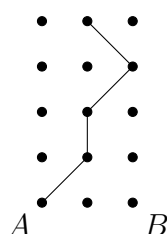
حال ثابت می کنیم هیچ گاه نمی توان بیش از ۱۳ رأس حذف کرد. شکل زیر را در نظر بگیرید:



رئوس قرمز و سبز و هم چنین دست کم یکی از دو فرزند هر کدام از رئوس سبز هیچ گاه حذف نمی شوند. این یک ناورداست (اگر در یک مرحله این حکم برقرار باشد، در مرحله ی بعد نیز برقرار است). پس حداکثر ۱۳ رأس برای حذف شدن باقی می ماند.

□

شکل سمت راست را در نظر بگیرید: ۲۳



سلطان از نقطه ی A شروع به کشیدن یک خط شکسته می کند. او در هر مرحله نقطه ی کنونی را در نظر گرفته و با کشیدن یک پاره خط، به یکی از نقاط بالا، بالا-راست یا بالا-چپ (در صورت وجود) می رود. پس از چهار مرحله، او به یکی از نقاط بالایی شکل می رسد. برای مثال سلطان می تواند مسیرش را مانند شکل سمت چپ بکشد. سپس ایلچ مسیری دیگر با شروع از نقطه ی B رسم می کند. به چند طریق این کار ممکن است، طوری که دو مسیر کشیده شده در هیچ جایی (چه روی نقاط شکل و چه جای دیگر) یکدیگر را قطع نکنند؟

۸۱ (۵)

۲۷ (۴)

۵۵ (۳)

۹۶ (۲)

۱۳ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

دو مسیر را با هم جلو می بریم. برای بالا بردن دو مسیر در یک مرحله، در هر صورت سه حالت داریم (بررسی حالات به خواننده واگذار می شود). با توجه به این که تعداد مراحل چهار تاست، پس در کل $۳^۴ = ۸۱$ حالت داریم.

□

۲۴ پس از اجرای الگوریتم زیر، مقدار S چه خواهد بود؟

مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱. S را برابر ۰ قرار بده.

۲. به ازای i از ۰ تا ۳۱ انجام بده:

۱-۲. به ازای j از ۰ تا ۳۱ انجام بده:

۱-۱-۲. اگر $(i \text{ XOR } j)$ از i بزرگ‌تر شد، S را یک واحد زیاد کن.

۴۵۱ (۵)

۴۹۶ (۴)

۸۳ (۳)

۹۹۲ (۲)

۳۴۱ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

تمام اعداد را به صورت اعداد پنج رقمی در نمایش مبنای ۲ می‌بینیم. فرض کنید $a = (i \text{ XOR } j)$ و بیت k ام (از سمت چپ) نخستین بیتی باشد که در عدد i برابر ۰ و در j برابر ۱ است (باید چنین بیتی موجود باشد، در غیر این صورت $a > i$ نمی‌شود). برای آن که $a > i$ باشد، باید تا قبل از بیت k ام، این حالت رخ ندهد که بیت متناظر در هر دو عدد i و j برابر ۱ باشد. پس $2^{k-1} \times 4^{5-k} = 2^{9-k}$ حالت داریم. با در نظر گرفتن k های مختلف، پاسخ برابر

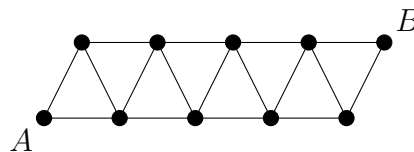
$$2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 = 496$$

□

است.

گراف زیر چند مسیر از A به B دارد؟ توجه کنید یک مسیر نمی‌تواند رأس یا یال تکراری داشته باشد.

۲۵



۱۴۹ (۵)

۶۸ (۴)

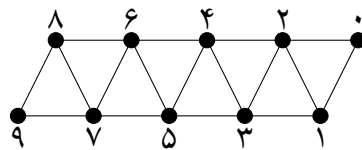
۴۴ (۳)

۸۱ (۲)

۲۷۴ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

رئوس را به شکل زیر شماره‌گذاری می‌کنیم:



g_n را تعداد مسیرهای از رأس n به B تعریف می‌کنیم، طوری که از گام به صورت $\leftarrow$ استفاده نشود. پاسخ در انتها برابر g_9 خواهد بود. با کمی بررسی متوجه می‌شویم:

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + g_{n-3}$$

حال از آنجایی که $g_0 = 1$ ، $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$ داریم:

$$g_3 = 4 \Rightarrow g_4 = 7 \Rightarrow g_5 = 13 \Rightarrow g_6 = 24 \Rightarrow g_7 = 44 \Rightarrow g_8 = 81 \Rightarrow g_9 = 149$$

□

پس پاسخ برابر ۱۴۹ است.

مرحله ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۶

کیوان و پیمان به نوبت با هم بازی می کنند. آن ها در ابتدا یک کیسه شامل n سنگ ریزه دارند. بازی را کیوان شروع می کند. کیوان در هر نوبت ش می تواند ۰، ۱ یا ۲ سنگ ریزه از کیسه خارج کند، در حالی که پیمان در هر نوبت ش می تواند ۱، ۲ یا ۳ سنگ ریزه بردارد. برنده ی بازی کسی است که آخرین سنگ ریزه را از کیسه خارج کند. اگر هر دو نفر به صورت بهینه بازی کنند، به ازای $n = 10$ ، $n = 1395$ و $n = 2016$ به ترتیب چه کسی بازی را می برد؟

(۱) کیوان، پیمان، کیوان (۲) پیمان، کیوان، پیمان (۳) پیمان، پیمان، پیمان (۴) کیوان، کیوان، کیوان (۵) پیمان، پیمان، کیوان

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

به استقرا روی n ثابت می کنیم به ازای هر $n \geq 3$ پیمان بازی را می برد. برای پایه ی استقرا به ازای $n = 3, 4, 5$ پیمان بازی را می برد (بررسی حالات به خواننده واگذار می شود). حال به ازای هر $n \geq 6$ اگر کیوان k سنگ ریزه برداشت، پیمان $3 - k$ سنگ ریزه برمی دارد. گویی بازی به ازای $n - 3$ سنگ ریزه از ابتدا آغاز شده است که پیمان طبق فرض استقرا استراتژی برد دارد. $\square$

۲۷

یک گراف کامل ۱۱ رأسی با رأس های ۰، ۱، ... و ۱۰ داریم. روی یال بین رأس های i و j مقدار باقی مانده ی $i + j$ در تقسیم بر ۱۱ را نوشته ایم. می خواهیم یک زیردرخت فراگیر از این گراف انتخاب کنیم، طوری که مجموع اعداد یال های آن کمینه باشد. این مقدار کمینه چیست؟

(۱) ۱۶ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۶ (۵) ۵

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

تعداد یال های درخت برابر ۱۰ است. گراف پنج یال با عدد ۰ دارد. پس پاسخ نمی تواند از $10 - 5 = 5$ کمتر باشد. حال اگر یال های زیر را به عنوان یال های درخت در نظر بگیریم، مجموع اعداد یال های درخت برابر ۵ خواهد شد:

$$1 \leftrightarrow 10 \quad 2 \leftrightarrow 9 \quad 3 \leftrightarrow 8 \quad 4 \leftrightarrow 7 \quad 5 \leftrightarrow 6$$

$$0 \leftrightarrow 1 \quad 2 \leftrightarrow 10 \quad 3 \leftrightarrow 9 \quad 4 \leftrightarrow 8 \quad 5 \leftrightarrow 7$$

$\square$

پس پاسخ برابر ۵ است.

۲۸

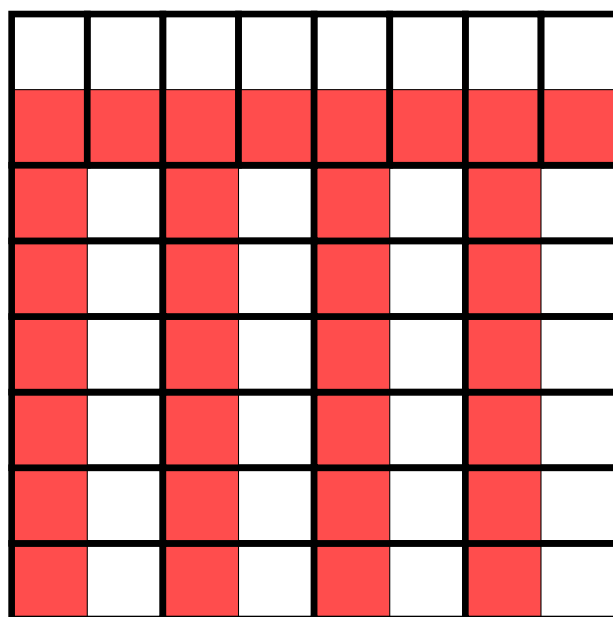
مرتضی یک جدول 8×8 را با دومینو (کاشی های 1×2) پوشانده و از هر دومینو یک خانه را سیاه و یک خانه را سفید کرده است. گوییم دو خانه ی سیاه A و B دوست هستند، هر گاه بتوان از A شروع کرده، در هر مرحله به یک خانه ی مجاور (مشترک در ضلع) سیاه رفته و پس از تعدادی مرحله به B رسید. مجموعه ای از خانه های سیاه را دیدنی گوییم، هر گاه هر دو خانه ی مجموعه، دوست باشند. بیشینه ی ممکن تعداد خانه های یک مجموعه ی دیدنی چیست؟

(۱) ۳۲ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶ (۵) ۲۴

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

واضح است که جواب از ۳۲ بیش تر نیست، زیرا ۳۲ دومینو داریم. جدول زیر نیز مثالی برای یک مجموعه ی دیدنی با ۳۲ خانه است (جهت وضوح، به جای سیاه از قرمز استفاده کرده ایم):

مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور



□

در منطقه‌ای در نزدیکی شهر لندن، قتلی توسط سه نفر اتفاق افتاده است. سلطان به سرعت وارد عمل شد و پنج متهم (A, B, C, D, E) را دستگیر کرد. هر یک از آن‌ها ادعا کرد که قاتل نیست، ولی نام دو نفر از چهار نفر دیگر را به عنوان کسانی که به احتمال زیاد قاتل هستند، به زبان آورد. سلطان متوجه شد که هر یک از قاتل‌ها برای رد گم کردن، نام دقیق یک قاتل دیگر را بر زبان آورده است و هر یک از بی‌گناهان نیز نام دو قاتل را گفته است. در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید سلطان چند نفر را به طور قطع می‌تواند قاتل معرفی کند؟

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۲۹ اظهارات:

- $A: B$ و C قاتل هستند.
- $B: A$ و C قاتل هستند.
- $C: B$ و E قاتل هستند.
- $D: E$ و C قاتل هستند.
- $E: B$ و D قاتل هستند.

(۵) ۳

(۴) ۱

(۳) ۲

(۲) چنین چیزی ممکن نیست

(۱) ۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

حتمن C قاتل است. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت A, B و D قاتل هستند، زیرا ادعا کرده‌اند C قاتل است. E نیز باید قاتل باشد، زیرا C چنین ادعایی دارد. پس چهار قاتل داریم که تناقض است. تناقض حاصل ثابت می‌کند که C باید قاتل باشد. حال ثابت می‌کنیم B نیز حتمن قاتل است. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت A, C و E باید قاتل باشند، زیرا ادعا کرده‌اند B قاتل است. پس D نباید قاتل باشد، زیرا سه قاتل دیگر تا کنون مشخص شده است. حال در ادعای E هیچ قاتلی وجود ندارد که امکان ندارد. تناقض حاصل ثابت می‌کند که B باید قاتل باشد.

مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

با توجه به اظهارات درست A ، می‌فهمیم که او قاتل نیست. با توجه به اظهارات C می‌فهمیم E قاتل نیست. پس قاتل سوم (D) نیز مشخص می‌شود.

□

پس وضعیت همه مشخص شد و پاسخ برابر ۳ است.

۳۰ اظهارات:

- A : B و C قاتل هستند.
- B : A و C قاتل هستند.
- C : A و B قاتل هستند.
- D : E و B قاتل هستند.
- E : C و D قاتل هستند.

(۵) ۱

(۴) چنین چیزی ممکن نیست

(۳) ۰

(۲) ۳

(۱) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

حتمن C قاتل است. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت A ، B و E قاتل هستند، زیرا ادعا کرده‌اند C قاتل است. D قاتل نیست، زیرا تا کنون سه قاتل دیگر پیدا کرده‌ایم. در اظهارات E هیچ قاتلی نیست که امکان ندارد. تناقض حاصل ثابت می‌کند که C باید قاتل باشد.

به استدلال مشابه B نیز قاتل است. با توجه به اظهارات درست A او قاتل نیست. حال هر کدام از D و E می‌توانند قاتل سوم باشند. پس پاسخ برابر ۲ است.

□

مرحله ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

- سؤال های ۲۵ تا ۳۰ در دسته های چندسؤالی آمده اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره ی مثبت و جواب نادرست یک نمره ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ مجموعه ی اعداد $\{۱۷, ۵۱, ۶۹, ۲۴, ۳۱, ۸۵\}$ به ما داده شده است. حداقل چند عدد از این مجموعه را باید حذف کنیم تا میانگین اعداد باقی مانده برابر با ۴۲ شود؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) ۳

۲ برای ساخت مدارهای الکترونیکی از گیت ها استفاده می شود. هر گیت تعدادی ورودی و تنها یک خروجی دارد. تمامی ورودی ها و خروجی یک گیت می توانند تنها یکی از دو مقدار صفر و یک را داشته باشند. گیت NAND که در شکل مقابل نشان داده شده است، یک گیت با دو ورودی و یک خروجی است. خروجی این گیت تنها موقعی صفر است که هر دو ورودی آن یک باشند، در غیر این صورت خروجی آن برابر یک می شود. با استفاده از گیت NAND مداری به شکل زیر طراحی کرده ایم. به ازای چند حالت از ورودی های x, y و z مقدار خروجی r برابر صفر می شود؟ دقت کنید که در این مدار، خروجی گیت A ورودی گیت های B و C است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) ۴

۳ استان دور (زادگاه فامیل دور) از ۶ شهر تشکیل شده است که همانند شکل مقابل با جاده های خاکی به هم متصل اند. هزینه ی آسفالت کردن هر جاده به صورت یک عدد صحیح کنار جاده نشان داده شده است. نامزد نمایندگی این استان وعده داده است که در صورت پیروزی در انتخابات، با آسفالت کردن تعدادی از این جاده ها کاری کند که بین هر دو شهر از این استان یک مسیر آسفالت (نه لزوماً مستقیم) به وجود آید. کمترین هزینه ای که این نامزد در صورت پیروزی در انتخابات برای تحقق وعده اش باید بپردازد چقدر است؟

۱ (۱) ۱۷ (۲) ۲۱ (۳) ۲۸ (۴) ۲۶ (۵) ۳۶

۴ یک خرابه به شکل مقابل شش جایگاه دارد. یک دزد در یکی از این جایگاه ها است. تیم امنیتی سلطان شامل تعدادی پلیس ماهر است. پلیس ها نمی دانند دزد کجا است و می خواهند او را دست گیر کنند. در ابتدای هر مرحله هر پلیس در یکی از جایگاه ها قرار می گیرد. اگر دزد در یکی از جایگاه هایی بود که پلیسی در آن قرار دارد، دست گیر می شود. در غیر این صورت پلیس ها از جایگاه ها خارج می شوند و دزد یکی از حرکات زیر را انجام می دهد:

- به جایگاه سمت راست خود می رود.
- به جایگاه سمت چپ خود می رود.
- به جایگاه روبه روی خود (با سه واحد فاصله) می رود.

مرحله ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

سپس مجدداً پلیس ها در جایگاه ها (نه لزوماً جایگاه های مرحله ی قبل) قرار می گیرند و این مراحل تا یافتن دزد ادامه می یابد. با توجه به این نوع حرکات، تیم سلطان باید حداقل چند پلیس داشته باشد تا بتواند به طور تضمینی در تعداد محدودی مرحله دزد را دست گیر کند؟

۴ (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۲ (۵)

۵ همان سوال قبل را در نظر بگیرید، با این تفاوت که دزد در هر مرحله یکی از حرکات زیر را انجام می دهد:

- یک واحد به سمت راست خود حرکت می کند.
- دو واحد به سمت چپ خود حرکت می کند.

در این صورت حداقل چند پلیس لازم است؟

۵ (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۴ (۵)

۶ مورچه ای به کندوی زنبورها راه پیدا کرده است. او تنها می تواند روی مرز لانه ها حرکت کند. زنبورها از لانه هایی چرخان استفاده می کنند تا عسل آن ها شکرک نزنند! این لانه ها در هر ثانیه یک واحد در جهت مشخص شده می چرخند. مورچه یک ضلع را می تواند در یک ثانیه طی کند و همواره در ابتدای هر ثانیه تصمیم می گیرد که یا سر جای خود بایستد، یا به سمت تقاطع بالا یا راست خودش حرکت کند و تا رسیدن به تقاطع تصمیم خود را تغییر نمی دهد (حتی اگر به علت چرخش جهت حرکتش تغییر کند). اگر مورچه در تقاطع A باشد، کمترین زمان لازم برای آن که به تقاطع B برسد چقدر است؟

۱۰ (۱) ۸ (۲) ۱۱ (۳) ۶ (۴) ۷ (۵)

۷ ده نفر دور یک میز نشسته اند. هر نفر مقداری پول دارد که به ما اطلاع نمی دهد. اما در عوض هر نفر از میزان پول دو نفر مجاور خود باخبر است و مجموع پول کناردستان خود را بلند اعلام می کند. در تصویر مقابل عددی که هر فرد اعلام کرده آمده است. در این صورت میزان پول نفری که بالای میز با رنگ خاکستری مشخص شده چقدر می تواند باشد؟

۲۵ (۱) ۱۷ (۲) ۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۴ (۵)

۸ هفت کشور از جمله ایران برای میزبانی مسابقات جهانی المپیاد کامپیوتر در سال ۲۰۱۷ نامزد شده اند. برای انتخاب کشور میزبان، هیئت داوران در هر مرحله دو کشور از میان کشورهای باقی مانده را به طور تصادفی انتخاب می کند و بر اساس نظر داوران، کشور بازنده را از دور خارج می کند. این کار تا زمانی ادامه پیدا می کند که تنها یک کشور باقی بماند. تنها کشور باقی مانده میزبان مسابقات خواهد شد. فرض کنید از قبل نظر هیئت داوران را به ازای هر دو کشور انتخاب شده می دانیم. نظر هیئت داوران در جدول مقابل آمده است. به ازای $1 \leq i \neq j \leq 7$ اگر عددی که در ردیف i ام و ستون j ام آمده است برابر ۱ باشد، کشور i برنده خواهد شد (یعنی نظر هیئت داوران با کشور i است). در غیر این صورت، کشور j برنده خواهد شد. با توجه به این جدول چند کشور شانس میزبانی را خواهند داشت؟

۵ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۱ (۵)

مرحله ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

۹ فرض کنید a یک بیت دلخواه (۰ یا ۱) باشد. منظور از $\bar{a}$ برابر با $1 - a$ است. حال فرض کنید یک رشته ای دودویی داریم. در هر مرحله می توان یکی از دو عمل زیر را انجام داد:

- یک بیت مانند b در رشته را در نظر بگیریم و در دو طرف آن $\bar{b}$ بنویسیم. برای مثال از رشته ی $\langle 0, 1, 1 \rangle$ و با انتخاب بیت وسط می توان به رشته ی $\langle 0, 0, 1, 0, 1 \rangle$ رسید.
- دو بیت متوالی مانند ab را در نظر بگیریم و به جای آن ها $\bar{a}\bar{b}$ بنویسیم. برای مثال از رشته ی $\langle 0, 1, 1 \rangle$ و با انتخاب دو بیت سمت راست می توان به رشته ی $\langle 0, 0, 0 \rangle$ رسید.

اگر ابتدا رشته ی دودویی $\langle 0 \rangle$ را داشته باشیم، با استفاده از دو عمل فوق نمایش دودویی چند عدد صحیح از ۲۱ تا ۲۶ را می توانیم بسازیم؟ توجه کنید که قرار گرفتن رقم های ۰ در ابتدای نمایش اشکال ندارد. برای مثال اگر به رشته ی $\langle 0, 0, 1, 1, 0, 1 \rangle$ برسیم، در واقع عدد ۱۳ را ساخته ایم.

۱ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۰ (۴) ۲ (۵)

۱۰ در شبکه ی 12×12 مقابل ۲۰ ماشین در نقاط پرنرنگ قرار گرفته اند و می خواهند به نقاط توخالی روبه روی خود بروند. ماشین های سمت راست جدول تنها به سمت چپ حرکت می کنند و ماشین های پایین جدول تنها به سمت بالا حرکت می کنند. سرعت هر ماشین یک متر بر ثانیه است و فاصله ی هر دو نقطه ی مجاور در جدول یک متر است. می خواهیم به هر ماشین عددی طبیعی از ۱ تا k نسبت دهیم طوری که اگر هر ماشین در زمانی که به آن نسبت داده شده شروع به حرکت کند، بدون برخورد با ماشین دیگری به مقصد خود برسد. کوچک ترین عدد k که بتواند شرایط فوق را برآورده کند چقدر است؟

۱۱ (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲ (۵)

۱۱ مرتضی ۲ بسته ی پنج کیلویی، ۲ بسته ی چهار کیلویی و ۲ بسته ی سه کیلویی دارد (بسته ها متمایزند). او هم چنین سه کیسه ی یکسان دارد که گنجایش هر کدام ۱۰ کیلوگرم است. مرتضی به چند طریق می تواند بسته هایش را در این کیسه ها قرار دهد و به خانه ببرد؟

۱۲ (۱) ۱۵ (۲) ۲۱ (۳) ۴۸ (۴) ۶ (۵) ۳۲

۱۲ یک ماشین در اختیار داریم که هر رشته ی k تایی از صفر و یک مثل $x_1, x_2, \dots, x_k$ را به یک رشته ی $(k-1)$ تایی به صورت $(x_1 \oplus x_2), (x_2 \oplus x_3), \dots, (x_{k-1} \oplus x_k)$ تبدیل می کند. (منظور از $x \oplus y$ عمل XOR دو عدد x و y است و مقدار آن تنها وقتی یک است که دقیقاً یکی از دو عدد x و y یک باشد). تعداد n های از ۱ تا ۱۳۹۲ را بیابید که برای هر رشته n تایی دلخواه مثل $x_1, x_2, \dots, x_n$ اگر این رشته را به ماشین بدهیم و خروجی را باز به ماشین بدهیم و این کار را آن قدر تکرار کنیم تا در نهایت یک عدد مثل t به دست آید، آن گاه داشته باشیم:

$$t = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \dots \oplus x_n$$

۱۳ (۱) ۱۰۲۴ (۲) ۱ (۳) ۱۰ (۴) ۱۰۲۵ (۵) ۱۱

۱۳ در کلاسی ۲۰۰ دانش آموز وجود دارد. هر دانش آموز از این کلاس با دقیقاً یکی دیگر از دانش آموزان کلاس دوست است. رابطه ی دوستی دوطرفه است، یعنی اگر فرد a دوست فرد b باشد، آنگاه فرد b نیز دوست فرد a است. معلم این کلاس برای آشنا شدن با دانش آموزان خود هر بار دو نفر از دانش آموزان را انتخاب می کند و از آن ها می پرسد که آیا با یکدیگر دوست هستند یا خیر. معلم کلاس با حداقل چند سوال می تواند رابطه های دوستی در کلاس را به طور کامل کشف کند؟

(۱) ۵۰۵۰ (۲) ۱۰۰۰۰ (۳) ۱۹۹۰۰ (۴) ۴۹۵۰ (۵) ۹۹۰۰

مرحله ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۴

یک جدول 4×4 داریم که ابتدا تمام خانه های آن سفید است. دو خانه را مجاور می گوئیم، اگر در یک ضلع مشترک باشند. قلمرو هر خانه عبارت است از خود آن خانه و تمامی خانه های مجاورش. بنابراین قلمرو هر خانه شامل حداکثر ۵ خانه است. در هر مرحله می توان تعدادی از خانه های قلمرو یک خانه را انتخاب کرد و رنگ آن ها را تغییر داد (از سفید به سیاه و برعکس). در حداقل چند مرحله می توان تمام خانه های جدول را سیاه کرد؟

۵ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷ (۵)

۱۵

سوال قبل را در نظر بگیرید، با این تفاوت که این بار در هر مرحله می توان یک خانه انتخاب کرد و رنگ دقیقاً سه خانه از قلمرو آن را تغییر داد. در این صورت کمترین تعداد مراحل لازم برای سیاه کردن تمام خانه های جدول چقدر است؟

۴ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۵ (۵)

۱۶

در بازی فوتبال اگر دو تیم به تساوی برسند، بازی به ضربات پنالتی کشیده می شود. هر تیم ۲ پنالتی می زند و تیمی که تعداد پنالتی بیشتری را گل کند، بازی را می برد. اگر در ضربات پنالتی نیز مساوی شدند، بازی به تک پنالتی کشیده می شود. یعنی هر تیم یک پنالتی می زند و اگر برنده مشخص شد که بازی تمام است و اگر نه دوباره تک پنالتی می زنند تا برنده مشخص شود. تیم های ایران و آرژانتین مسابقه ی فوتبال برگزار کرده اند و بازی به ضربات پنالتی کشیده شده است. اگر بدانیم هر پنالتی تیم ایران به احتمال $\frac{1}{3}$ و هر پنالتی تیم آرژانتین به احتمال $\frac{2}{3}$ گل می شود، به چه احتمالی تیم ایران برنده ی بازی خواهد بود؟

$\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{23}{135}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{25}{81}$ (۵)

۱۷

ببعی و گابی و دیوی و جیگر و گدا به شکل مقابل دور یک میز نشسته اند. صندلی های خاکستری، صندلی های «ویژه» هستند. در ابتدا گدا یک ریال دارد و بقیه هیچ پولی ندارند. در هر مرحله آقای مجری یکی از دو کار زیر را انجام می دهد:

- هر کس را دو صندلی به سمت راست می برد. (توجه کنید که صندلی ها جابه جا نمی شوند و فقط خود افراد جابه جا می شوند).
- به هر کس که روی یک صندلی ویژه نشسته است، یک ریال می دهد.

آقای مجری قصد دارد کاری کند که پول همه ی افراد برابر k ریال شود. به ازای چند مقدار $5 \leq k \leq 2$ آقای مجری می تواند با تعدادی گام به این هدف برسد؟

۲ (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۰ (۵)

۱۸

در شکل مقابل می خواهیم از نقطه ی A به نقطه ی B برویم، طوری که از نقطه ی M بگذریم. در هر مرحله می توان یک واحد در یکی از چهار جهت (چپ، راست، بالا و پایین) حرکت کرد. هم چنین از هر نقطه اجازه داریم حداکثر یک بار عبور کنیم. به چند طریق این کار ممکن است، طوری که دقیقاً ۱۰ گام برداریم؟

۱۰ (۱) ۲۰ (۲) ۱۸ (۳) ۱۶ (۴) ۸ (۵)

۱۹

محیا در حال طراحی یک بازی است. این بازی شامل تعدادی کارت است که روی هر یک از آن ها سه عدد متمایز از مجموعه ی اعداد ۱ تا ۷ درج شده است. محیا می خواهد کارت ها را به نحوی بسازد که هر دو کارت متمایز دقیقاً یک عدد مشترک داشته باشند. در این صورت، او حداکثر چند کارت متفاوت می تواند بسازد؟

۳ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۲ (۴) ۹ (۵)

مرحله ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۰

یک جدول 4×4 را در نظر بگیرید. دو خانه از این جدول را مجاور گوئیم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. فرض کنید از یک خانه ی این جدول شروع کنیم و در هر مرحله به یک خانه ی مجاور برویم، طوری که از هر خانه ی جدول دقیقاً یک بار عبور کنیم و در انتها به خانه ی آغازین بازگردیم. به چنین حرکتی، دور همیلتنی می گوئیم. به چند طریق می توان دو خانه از جدول را حذف کرد، طوری که خانه های باقی مانده ی جدول دور همیلتنی داشته باشند؟

۳۲ (۵)

۲۰ (۴)

۱۲ (۳)

۲۴ (۲)

۱۶ (۱)

۲۱

هرمی که اعداد ۱ تا ۴ روی وجوه آن نوشته شده است روی یک خانه از جدول مثلثی همانند شکل مقابل قرار گرفته است (روی وجه زیرین عدد ۱ نوشته شده است). این هرم در هر حرکت می تواند به یکی از خانه هایی که با خانه ی فعلی هرم ضلع مشترک دارد برود. حرکت هرم به این صورت است که یال روی ضلع مشترک از زمین بلند نمی شود و هرم حول این ضلع مشترک دوران می کند و در خانه ی جدید می نشیند (روی وجه دیگر مجاور آن یال). این هرم در هر خانه ای از جدول که قرار می گیرد شماره ی وجه زیرین خود را در آن حک می کند (برای مثال در خانه ی اول عدد ۱ حک می شود). می خواهیم این هرم را طوری روی جدول حرکت دهیم که در هر خانه ای دقیقاً یک عدد حک شود. حداکثر مقدار مجموع اعداد حک شده چند می تواند باشد؟

۶۰ (۵)

۵۶ (۴)

۶۴ (۳)

۶۶ (۲)

۵۳ (۱)

۲۲

شکل مقابل از تعدادی دایره و میله در صفحه ساخته شده است. می خواهیم هر یک از دایره های این شکل را با یکی از سه رنگ قرمز، آبی و سبز رنگ کنیم، طوری که هر دو دایره ای که با میله به هم وصل هستند، ناهم رنگ باشند. به چند طریق این کار ممکن است؟ دو روش رنگ آمیزی را که با دوران شکل در صفحه به هم تبدیل می شوند، یکسان در نظر می گیریم.

۱۲ (۵)

۱۲۰ (۴)

۲۴ (۳)

۶ (۲)

۶۰ (۱)

۲۳

یک ساعت دیجیتال داریم که زمان را به صورت یک عدد دودویی با طول ثابت ۱۱ بیت نمایش می دهد که ۵ بیت سمت چپ آن نشان دهنده ی ساعت (بین ۰ تا ۲۳) و ۶ بیت سمت راست آن نشان دهنده ی دقیقه (بین ۰ تا ۵۹) است. به طور مثال این ساعت دیجیتال ساعت ۱۰ و ۲۱ دقیقه را به شکل ۱۰۱۰۰۱۰۱۰۱۰ نمایش می دهد. در طول یک شبانه روز، چند بار عددی که این ساعت نشان می دهد، آینه ای می شود؟ به یک رشته آینه ای می گوئیم اگر با وارون خود برابر باشد. به طور مثال رشته ی ۱۰۱۰ آینه ای است، ولی رشته ی ۱۰۰۱۱ آینه ای نیست.

۵۷ (۵)

۴۳ (۴)

۴۸ (۳)

۴۵ (۲)

۶۰ (۱)

۲۴

یک جدول 3×3 را در نظر بگیرید. می خواهیم چهار خانه ی a_1, a_2, a_3 و a_4 از خانه های این جدول را انتخاب کنیم، طوری که اگر از مرکز a_1 به مرکز a_2 ، سپس به مرکز a_3 و در انتها به مرکز a_4 برویم، مسیری که ایجاد می شود خودش را قطع نکند و همچنین مرکز هیچ سه تا از چهار خانه ی انتخاب شده هم خط نباشند. به چند طریق این کار ممکن است؟

۲۲۴۰ (۵)

۱۳۱۲ (۴)

۱۲۸۰ (۳)

۲۰۱۶ (۲)

۱۱۲۰ (۱)

مرحله ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

بر روی صندلی های یک مترو افراد A_1, A_2, A_3 در یک ردیف و B_1, B_2, B_3 در ردیف مقابل نشسته اند. طبق عادت همیشگی، هر کس به دلخواه به یکی از افراد روبه روی خود زیریرکی نگاه می کند!

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۲۵ یک حالت را پایدار گوئیم، اگر هیچ دو نفری نباشند که به یکدیگر نگاه کنند (چشم تو چشم شوند!). چند حالت پایدار وجود دارد؟

۱۰۸ (۱) ۱۵۶ (۲) ۱۸ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸ (۵)

۲۶ زوج مرتب (i, j) را بی ربط گوئیم، اگر A_i و B_j هیچ کدام دیگری را نگاه نکنند. به ترتیب حداقل و حداکثر چند زوج بی ربط داریم؟

۳ و ۰ (۱) ۳ و ۳ (۲) ۶ و ۳ (۳) ۶ و ۰ (۴) ۳ و ۱ (۵)

۲۷ می گوئیم فرد X غیر مستقیم فرد Y را می بیند، اگر فردی مانند Z وجود داشته باشد که X, Z را نگاه کند و Z, Y را نگاه کند. حداکثر چند زوج (X, Y) داریم که X به طور غیرمستقیم Y را نگاه کند؟

۱۲ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۵ (۴) ۴ (۵)

دستگاه عددساز در ابتدا عدد x را که برابر با صفر است نمایش می دهد. این دستگاه از ما یک دنباله از اعداد 0 و 1 می گیرد و طی مراحل زیر عدد x را تغییر می دهد:

با شروع از اولین عدد، به ازای هر عدد در دنباله:

- اگر عدد برابر با 0 بود، x را 4 برابر می کنیم.
- اگر عدد برابر با 1 بود، x را برابر با $x + 3$ قرار می دهیم.

یک دنباله از 0 و 1 را «معتبر» می نامیم اگر در آن هیچ سه عدد متوالی برابر با 1 نباشند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۲۸ با استفاده از دستگاه عددساز و دنباله های معتبر به طول 5 چند عدد مختلف می توان ساخت؟

۱۳ (۱) ۲۴ (۲) ۳۱ (۳) ۱۶ (۴) ۲۸ (۵)

۲۹ با استفاده از دستگاه عددساز و دنباله های معتبر به طول 10 چند عدد مختلف می توان ساخت؟

۲۷۴ (۱) ۱۷۸ (۲) ۹۲۷ (۳) ۵۰۴ (۴) ۲۸۸ (۵)

۳۰ فرض کنید بتوانیم دنباله های معتبر به هر طول دلخواهی را به دستگاه عددساز بدهیم. حداکثر چند عدد کوچکتر از 2048 می توانیم بسازیم؟

۲۲۴ (۱) ۲۴۳ (۲) ۸۱ (۳) ۲۰۴۷ (۴) ۲۴۹ (۵)

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

- سؤال‌های ۲۵ تا ۳۰ در دسته‌های چندسؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ مجموعه‌ی اعداد $\{۱۷, ۵۱, ۶۹, ۲۴, ۳۱, ۸۵\}$ به ما داده شده است. حداقل چند عدد از این مجموعه را باید حذف کنیم تا میانگین اعداد باقی‌مانده برابر با ۴۲ شود؟

۴ (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۲ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

اگر بخواهیم دقیقاً یک عدد را حذف کنیم، مجموع اعداد باقی‌مانده باید برابر با ۵×۴۲ باشد. بنابراین عدد حذف‌شده باید برابر

$$۶۷ = ۴۲ \times ۵ - (۱۷ + ۵۱ + ۶۹ + ۲۴ + ۳۱ + ۸۵)$$

باشد که این مقدار در بین اعداد نیست. اگر بخواهیم دو عدد را حذف کنیم مجموع دو عدد حذف‌شده باید برابر

$$۱۰۹ = ۴۲ \times ۴ - (۱۷ + ۵۱ + ۶۹ + ۲۴ + ۳۱ + ۸۵)$$

باشد که این مقدار با حذف کردن دو عدد ۸۵ و ۲۴ حاصل می‌شود. بنابراین پاسخ برابر ۲ است. □

۲ برای ساخت مدارهای الکترونیکی از گیت‌ها استفاده می‌شود. هر گیت تعدادی ورودی و تنها یک خروجی دارد. تمامی ورودی‌ها و خروجی یک گیت می‌توانند تنها یکی از دو مقدار صفر و یک را داشته باشند. گیت NAND که در شکل مقابل نشان داده شده است، یک گیت با دو ورودی و یک خروجی است. خروجی این گیت تنها موقعی صفر است که هر دو ورودی آن یک باشند، در غیر این صورت خروجی آن برابر یک می‌شود. با استفاده از گیت NAND مداری به شکل زیر طراحی کرده‌ایم. به ازای چند حالت از ورودی‌های x, y و z مقدار خروجی r برابر صفر می‌شود؟ دقت کنید که در این مدار، خروجی گیت A ورودی گیت‌های B و C است.

۱ (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

برای این که مقدار r برابر صفر شود، لازم است که هر دو ورودی گیت C برابر ۱ باشند. بنابراین خروجی گیت‌های A و B برابر با ۱ هستند. برای این که خروجی گیت A برابر ۱ شود، حداقل یکی از ورودی‌های x یا y باید برابر صفر باشند. با توجه به این که خروجی گیت A یک است، بنابراین برای این که خروجی گیت B برابر ۱ شود، ورودی z باید مقدار صفر بگیرد. بنابراین به ازای سه حالت $x = ۱, y = ۰, z = ۰$ ، $x = ۰, y = ۱, z = ۰$ و $x = ۰, y = ۰, z = ۰$ خروجی r برابر صفر می‌شود. □

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

۳

استان دور (زادگاه فامیل دور) از ۶ شهر تشکیل شده است که همانند شکل مقابل با جاده‌های خاکی به هم متصل‌اند. هزینه‌ی آسفالت کردن هر جاده به صورت یک عدد صحیح کنار جاده نشان داده شده است. نامزد نمایندگی این استان وعده داده است که در صورت پیروزی در انتخابات، با آسفالت کردن تعدادی از این جاده‌ها کاری کند که بین هر دو شهر از این استان یک مسیر آسفالت (نه لزوماً مستقیم) به وجود آید. کم‌ترین هزینه‌ای که این نامزد در صورت پیروزی در انتخابات برای تحقق وعده‌اش باید بپردازد چقدر است؟

۲۶ (۱) ۳۶ (۲) ۲۱ (۳) ۱۷ (۴) ۲۸ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

با انتخاب جاده‌های نشان‌داده‌شده در شکل زیر می‌توان با مجموع هزینه‌ی ۱۷ تمام شهرها را با مسیر آسفالت به هم متصل کرد.

□

۴

یک خرابه به شکل مقابل شش جایگاه دارد. یک دزد در یکی از این جایگاه‌ها است. تیم امنیتی سلطان شامل تعدادی پلیس ماهر است. پلیس‌ها نمی‌دانند دزد کجا است و می‌خواهند او را دست‌گیر کنند. در ابتدای هر مرحله هر پلیس در یکی از جایگاه‌ها قرار می‌گیرد. اگر دزد در یکی از جایگاه‌هایی بود که پلیسی در آن قرار دارد، دست‌گیر می‌شود. در غیر این صورت پلیس‌ها از جایگاه‌ها خارج می‌شوند و دزد یکی از حرکات زیر را انجام می‌دهد:

- به جایگاه سمت راست خود می‌رود.
- به جایگاه سمت چپ خود می‌رود.
- به جایگاه روبه‌روی خود (با سه واحد فاصله) می‌رود.

سپس مجدداً پلیس‌ها در جایگاه‌ها (نه لزوماً جایگاه‌های مرحله‌ی قبل) قرار می‌گیرند و این مراحل تا یافتن دزد ادامه می‌یابد. با توجه به این نوع حرکات، تیم سلطان باید حداقل چند پلیس داشته باشد تا بتواند به طور تضمینی در تعداد محدودی مرحله دزد را دست‌گیر کند؟

۴ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۵ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

از آنجایی که دزد در هر مرحله به سه جای مختلف می‌تواند برود، پس اگر تعداد پلیس‌ها کم‌تر از سه تا باشد، ممکن است دزد در هر مرحله به جایی برود که پلیسی آن را پوشش نخواهد داد. پس پاسخ از ۳ کم‌تر نیست. حال در جایگاه‌ها یک در میان پلیس بگذارید. فرض کنید دزد در مرحله‌ی اول دست‌گیر نشود، یعنی در یکی از سه خانه‌ی دیگر است. در مرحله‌ی دوم دوباره پلیس‌ها را همان‌جای قبل بگذارید. در هر صورت دزد به یکی از جایگاه‌های پلیس‌دار آمده است و دست‌گیر می‌شود. پس پاسخ برابر ۳ است.

□

۵

همان سوال قبل را در نظر بگیرید، با این تفاوت که دزد در هر مرحله یکی از حرکات زیر را انجام می‌دهد:

مرحله ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

• یک واحد به سمت راست خود حرکت می کند.

• دو واحد به سمت چپ خود حرکت می کند.

در این صورت حداقل چند پلیس لازم است؟

۱ (۵)

۴ (۴)

۲ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

مانند استدلال قسمت قبل ثابت می شود حداقل دو پلیس لازم است. حال روشی ارائه می دهیم که سلطان بتواند با دو پلیس، دزد را دست گیر کند. جایگاه ها را به شکل مقابل با شماره های ۱, ۲, ..., ۶ شماره گذاری کنید:

• اگر دزد در جایگاه ۱ یا ۴ باشد، به جایگاه ۲ یا ۵ می رود.

• اگر دزد در جایگاه ۲ یا ۵ باشد، به جایگاه ۳ یا ۶ می رود.

• اگر دزد در جایگاه ۳ یا ۶ باشد، به جایگاه ۱ یا ۴ می رود.

حال همواره در هر مرحله پلیس ها را در جایگاه های ۱ و ۴ بگذارید. حداکثر در مرحله ی سوم دزد به این خانه ها خواهد آمد و دست گیر می شود. پس پاسخ برابر ۲ است.

□

۶

مورچه ای به کندوی زنبورها راه پیدا کرده است. او تنها می تواند روی مرز لانه ها حرکت کند. زنبورها از لانه هایی چرخان استفاده می کنند تا عسل آن ها شکوک نزنند! این لانه ها در هر ثانیه یک واحد در جهت مشخص شده می چرخند. مورچه یک ضلع را می تواند در یک ثانیه طی کند و همواره در ابتدای هر ثانیه تصمیم می گیرد که یا سر جای خود بایستد، یا به سمت یکی از تقاطع های مجاور خودش حرکت کند و تا رسیدن به تقاطع تصمیم خود را تغییر نمی دهد (حتی اگر به علت چرخش جهت حرکتش تغییر کند). اگر مورچه در تقاطع A باشد، کم ترین زمان لازم برای آن که به تقاطع B برسد چقدر است؟

۸ (۵)

۱۰ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۱۱ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

کافی است به صورت داینامیک مساله را حل کنیم. از پایین سمت چپ شروع کرده و کم ترین زمانی که می توانیم به هر کدام از تقاطع ها برسیم را محاسبه می کنیم. واضح است که اگر مورچه در یک تقاطع روی یک لانه ی چرخان باشد، پس از یک ثانیه در یکی از سه تقاطع زیر قرار دارد:

۱. همان تقاطع (اگر خود مورچه در خلاف جهت چرخش بتواند حرکت کند و حرکت بکند).

۲. یک تقاطع جلوتر در جهت چرخش (اگر حرکت نکند).

۳. دو تقاطع جلوتر در جهت چرخش (اگر در جهت چرخش بتواند حرکت کند و حرکت بکند).

□

در شکل بالا کوتاه ترین مسیر تا مقصد مشخص شده است.

مرحله ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

۷

ده نفر دور یک میز نشسته اند. هر نفر مقداری پول دارد که به ما اطلاع نمی دهد. اما در عوض هر نفر از میزان پول دو نفر مجاور خود باخبر است و مجموع پول کناردستان خود را بلند اعلام می کند. در تصویر مقابل عددی که هر فرد اعلام کرده آمده است. در این صورت میزان پول نفری که بالای میز با رنگ خاکستری مشخص شده چقدر می تواند باشد؟

۱۷ (۱) ۱۵ (۲) ۲۵ (۳) ۰ (۴) ۲۴ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

افراد را با شروع از فرد خاکستری در جهت ساعتگرد به ترتیب از ۱ تا ۱۰ شماره گذاری کنید. فرض کنید a_i مقدار عدد اعلامی توسط نفر i ام باشد. آن گاه جواب برابر است با:

$$\frac{a_2 - a_4 + a_6 - a_8 + a_{10}}{2} = \frac{39 - 93 + 79 - 15 + 24}{2} = 17$$

مقدار پول هر نفر در شکل مقابل نشان داده شده است. □

۸

هفت کشور از جمله ایران برای میزبانی مسابقات جهانی المپیاد کامپیوتر در سال ۲۰۱۷ نامزد شده اند. برای انتخاب کشور میزبان، هیئت داوران در هر مرحله دو کشور از میان کشورهای باقی مانده را به طور تصادفی انتخاب می کند و بر اساس نظر داوران، کشور بازنده را از دور خارج می کند. این کار تا زمانی ادامه پیدا می کند که تنها یک کشور باقی بماند. تنها کشور باقی مانده میزبان مسابقات خواهد شد. فرض کنید از قبل نظر هیئت داوران را به ازای هر دو کشور انتخاب شده می دانیم. نظر هیئت داوران در جدول مقابل آمده است. به ازای $1 \leq i \neq j \leq 7$ اگر عددی که در ردیف i ام و ستون j ام آمده است برابر ۱ باشد، کشور i برنده خواهد شد (یعنی نظر هیئت داوران با کشور i است). در غیر این صورت، کشور j برنده خواهد شد. با توجه به این جدول چند کشور شانس میزبانی را خواهند داشت؟

۶ (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۷ (۴) ۵ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

یک گراف کامل ۷ راسی با شماره راس های ۱ تا ۷ را در نظر بگیرید. اگر بین دو کشور i و j ، نظر هیئت داوران با کشور i بود، یال بین این دو راس را از j به i جهت دار می کنیم. به سلاگی می توان ثابت کرد کشور i شانس میزبانی دارد اگر و فقط اگر از همه ی راس های گراف فوق به راس i مسیر وجود داشته باشد. مولفه های قویا همبند گراف فوق را پیدا می کنیم. کشورهایی که رئوس متناظرشان در مولفه ی قویا همبندی قرار دارند که یال خروجی ندارد، شانس میزبانی خواهند داشت. □

۹

فرض کنید a یک بیت دل خواه (۰ یا ۱) باشد. منظور از $\bar{a}$ برابر با $1 - a$ است. حال فرض کنید یک رشته ای دودویی داریم. در هر مرحله می توان یکی از دو عمل زیر را انجام داد:

- یک بیت مانند b در رشته را در نظر بگیریم و در دو طرف آن $\bar{b}$ بنویسیم. برای مثال از رشته ی $\langle 0, 1, 1 \rangle$ و با انتخاب بیت وسط می توان به رشته ی $\langle 0, 0, 1, 0, 1 \rangle$ رسید.
- دو بیت متوالی مانند ab را در نظر بگیریم و به جای آن ها $\bar{a}\bar{b}$ بنویسیم. برای مثال از رشته ی $\langle 0, 1, 1 \rangle$ و با انتخاب دو بیت سمت راست می توان به رشته ی $\langle 0, 0, 0 \rangle$ رسید.

مرحله ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

اگر ابتدا رشته ی دودویی $\langle 0 \rangle$ را داشته باشیم، با استفاده از دو عمل فوق نمایش دودویی چند عدد صحیح از ۲۱ تا ۲۶ را می توانیم بسازیم؟ توجه کنید که قرار گرفتن رقم های ۰ در ابتدای نمایش اشکال ندارد. برای مثال اگر به رشته ی $\langle 0, 1, 1, 0, 1 \rangle$ برسیم، در واقع عدد ۱۳ را ساخته ایم.

(۱) ۱ (۲) ۰ (۳) ۲ (۴) ۴ (۵) ۳

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

ثابت می کنیم یک عدد قابل ساختن است، اگر و تنها اگر در نمایش دودویی آن زوج رقم ۱ وجود داشته باشد. با انجام این دو نوع عمل، زوجیت تعداد ارقام ۱ تغییری نمی کند. کافی است ثابت کنیم هر عدد که نمایش دودویی آن زوج رقم ۱ دارد، قابل ساختن است. فرض کنید عدد n چنین باشد و $2p$ رقم ۱ و q رقم ۰ در نمایش دودویی آن موجود باشد. با تبدیل ۰ به ۱۱ به شکل زیر می توان به رشته ی $011 \dots 1$ که $2p$ رقم ۱ دارد، رسید:

$$0 \rightarrow 101 \rightarrow 011 \rightarrow 10111 \rightarrow 01111 \rightarrow \dots$$

حال با تبدیل ۰ به ۰۰۰ به شکل زیر می توان به رشته ی $000 \dots 011 \dots 1$ رسید که $2p$ رقم ۱ و بیش تر از q رقم ۰ دارد:

$$011 \dots 1 \rightarrow 10111 \dots 1 \rightarrow 11011 \dots 1 \rightarrow 00011 \dots 1 \rightarrow \dots$$

حال با تبدیل ۰۱ به ۱۰ می توان هر ۰ را آن قدر به سمت راست انتقال داد تا به جای مورد نظر برسد و به این ترتیب عدد n ساخته می شود.

در نمایش دودویی اعداد ۲۶، ۲۷، ۲۸، ...، ۲۱ تنها دو عدد هستند که زوج رقم ۱ دارند. پس پاسخ برابر ۲ است. □

در شبکه ی 12×12 مقابل ۲۰ ماشین در نقاط پررنگ قرار گرفته اند و می خواهند به نقاط توخالی روبه روی خود بروند. ماشین های سمت راست جدول تنها به سمت چپ حرکت می کنند و ماشین های پایین جدول تنها به سمت بالا حرکت می کنند. سرعت هر ماشین یک متر بر ثانیه است و فاصله ی هر دو نقطه ی مجاور در جدول یک متر است. می خواهیم به هر ماشین عددی طبیعی از ۱ تا k نسبت دهیم طوری که اگر هر ماشین در زمانی که به آن نسبت داده شده شروع به حرکت کند، بدون برخورد با ماشین دیگری به مقصد خود برسد. کوچک ترین عدد k که بتواند شرایط فوق را برآورده کند چقدر است؟

(۱) ۱۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۶ (۵) ۴

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

می توانیم طوری به ماشین ها عدد نسبت دهیم که در هر لحظه ماشین های یک سمت در خانه های یک رنگ و ماشین های سمت دیگر در رنگ دیگر باشند. □

مرتضی ۲ بسته ی پنج کیلویی، ۲ بسته ی چهار کیلویی و ۲ بسته ی سه کیلویی دارد (بسته ها متمایزند). او هم چنین سه کیسه ی یکسان دارد که گنجایش هر کدام ۱۰ کیلوگرم است. مرتضی به چند طریق می تواند بسته هایش را در این کیسه ها قرار دهد و به خانه برود؟

(۱) ۶ (۲) ۲۱ (۳) ۴۸ (۴) ۳۲ (۵) ۱۵

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

حالت بندی می کنیم:

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

- اگر دو بسته‌ی ۵- کیلویی در یک کیسه قرار گیرند، یا در هر کیسه‌ی دیگر ۲ بسته قرار می‌گیرد که ۳ حالت دارد و یا در یک کیسه یک بسته‌ی ۴- کیلویی و بسته‌های دیگر در کیسه‌ی دیگر قرار می‌گیرند که ۲ حالت دارد.
- اگر دو بسته‌ی ۵- کیلویی در کیسه‌های جدا قرار گیرند، یا در کیسه‌ی خالی دو بسته قرار گرفته و کنار هر یک از ۵- کیلویی‌ها یک بسته‌ی دیگر می‌آید که $2 \times \binom{4}{2}$ حالت دارد و یا در کیسه‌ی خالی دو بسته‌ی ۳- کیلویی و یک ۴- کیلویی می‌آید و بسته‌ی باقی‌مانده به کنار یکی از ۵- کیلویی‌ها می‌رود که $2 \times 2 = 4$ حالت دارد.

□

پس در کل ۲۱ حالت داریم.

۱۲ یک ماشین در اختیار داریم که هر رشته‌ی k تایی از صفر و یک مثل $x_1, x_2, \dots, x_k$ را به یک رشته‌ی $(k-1)$ تایی به صورت $(x_1 \oplus x_2), (x_2 \oplus x_3), \dots, (x_{k-1} \oplus x_k)$ تبدیل می‌کند. (منظور از $x \oplus y$ عمل XOR دو عدد x و y است و مقدار آن تنها وقتی یک است که دقیقاً یکی از دو عدد x و y یک باشد). تعداد n های از ۱ تا ۱۳۹۲ را بیابید که برای هر رشته n تایی دل‌خواه مثل $x_1, x_2, \dots, x_n$ اگر این رشته را به ماشین بدهیم و خروجی را باز به ماشین بدهیم و این کار را آن قدر تکرار کنیم تا در نهایت یک عدد مثل t به دست آید، آن گاه داشته باشیم:

$$t = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \dots \oplus x_n$$

۱۰۲۵ (۵)

۱ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰۲۴ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

□

عدد n خاصیت فوق را دارد اگر و تنها اگر $n = 2^k$.

۱۳ در کلاسی ۲۰۰ دانش‌آموز وجود دارد. هر دانش‌آموز از این کلاس با دقیقاً یکی دیگر از دانش‌آموزان کلاس دوست است. رابطه‌ی دوستی دوطرفه است، یعنی اگر فرد a دوست فرد b باشد، آنگاه فرد b نیز دوست فرد a است. معلم این کلاس برای آشنا شدن با دانش‌آموزان خود هر بار دو نفر از دانش‌آموزان را انتخاب می‌کند و از آن‌ها می‌پرسد که آیا با یکدیگر دوست هستند یا خیر. معلم کلاس با حداقل چند سوال می‌تواند رابطه‌های دوستی در کلاس را به طور کامل کشف کند؟

۵۰۵۰ (۵)

۱۹۹۰۰ (۴)

۴۹۵۰ (۳)

۹۹۰۰ (۲)

۱۰۰۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

اگر $2n$ دانش‌آموز داشته باشیم (n زوج رابطه‌ی دوستی)، آن‌گاه جواب $n(n-1)$ می‌شود. برای به دست آوردن رابطه‌ها بعد از این تعداد حرکت معلم باید با پرسیدن یک فرد با $2n-2$ دوست او را بیابد (یا یکی از آن $2n-2$ فرد دوست اوست یا فرد باقی‌مانده) و بقیه‌ی $n-1$ جفت را بصورت بلزگشتی بیابد. برای اثبات بهینگی هم فرض کنید جواب‌ها تا زمانی که ممکن است منفی باشد. آن‌گاه هرگاه معلم جواب را بیابد، به ازای هر دو جفت دوستی باید دو سوال پرسیده باشد و گرنه راه دیگری برای جفت کردن دانش‌آموزان وجود دارد از تعداد جفت‌ها در n تا و تعداد حالت‌های انتخاب ۲ تا از آن‌ها $n(n-1)/2$ است که با توجه به ضربدر نهایی حداقل $n(n-1)$ پرسش لازم است.

□

۱۴ یک جدول 4×4 داریم که ابتدا تمام خانه‌های آن سفید است. دو خانه را مجاور می‌گوییم، اگر در یک ضلع مشترک باشند. قلمرو هر خانه عبارت است از خود آن خانه و تمامی خانه‌های مجاورش. بنابراین قلمرو هر خانه شامل حداکثر ۵ خانه است. در هر مرحله می‌توان تعدادی از خانه‌های قلمرو یک خانه را انتخاب کرد و رنگ آن‌ها را تغییر داد (از سفید به سیاه و برعکس). در حداقل چند مرحله می‌توان تمام خانه‌های جدول را سیاه کرد؟

۳ (۵)

۷ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

مرحله ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

در هر مرحله می توان رنگ حداکثر ۵ خانه را تغییر داد. از آن جایی که رنگ ۱۶ خانه باید تغییر کند، دست کم به $\lceil \frac{16}{5} \rceil = 4$ مرحله نیاز است. شکل زیر نیز روشی با ۴ مرحله ارائه می دهد (در مرحله ی i خانه های با شماره ی i را تغییر رنگ می دهیم):

پس پاسخ برابر ۴ است. □

سوال قبل را در نظر بگیرید، با این تفاوت که این بار در هر مرحله می توان یک خانه انتخاب کرد و رنگ دقیقا سه خانه از قلمرو آن را تغییر داد. در این صورت کمترین تعداد مراحل لازم برای سیاه کردن تمام خانه های جدول چقدر است؟

۱۵

(۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷ (۵) ۴

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

به مانند استدلال قسمت قبل دست کم $\lceil \frac{16}{3} \rceil = 6$ مرحله لازم است. در زیر نیز روشی با ۶ مرحله ارائه شده است (در مرحله ی i خانه های با شماره ی i را تغییر رنگ می دهیم):

پس پاسخ برابر ۶ است. □

در بازی فوتبالی اگر دو تیم به تساوی برسند، بازی به ضربات پنالتی کشیده می شود. هر تیم ۲ پنالتی می زند و تیمی که تعداد پنالتی بیشتری را گل کند، بازی را می برد. اگر در ضربات پنالتی نیز مساوی شدند، بازی به تک پنالتی کشیده می شود. یعنی هر تیم یک پنالتی می زند و اگر برنده مشخص شد که بازی تمام است و اگر نه دوباره تک پنالتی می زنند تا برنده مشخص شود. تیم های ایران و آرژانتین مسابقه ی فوتبالی برگزار کرده اند و بازی به ضربات پنالتی کشیده شده است. اگر بدانیم هر پنالتی تیم ایران به احتمال $\frac{1}{3}$ و هر پنالتی تیم آرژانتین به احتمال $\frac{2}{3}$ گل می شود، به چه احتمالی تیم ایران برنده ی بازی خواهد بود؟

۱۶

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{23}{135}$ (۳) $\frac{25}{81}$ (۴) $\frac{1}{5}$ (۵) $\frac{4}{9}$

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

مرحله ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

قرار دهید $p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}$. ابتدا فرض کنید بازی به ضربات تک پناستی کشیده شده است. در این صورت اگر احتمال برد ایران را x بگیریم، داریم:

$$x = p(1 - q) + (pq + (1 - p)(1 - q))x$$

از رابطه ی بالا مقدار $x = \frac{1}{5}$ به دست می آید. برای محاسبه ی جواب اصلی مسئله، می توانید تمام حالات را محاسبه کنید؛ اما می توان با کمی دقت دریافت که می توان فرض کرد تمام پناستی ها را تیم آرژانتین می زند! به احتمال $\frac{2}{3}$ هر پناستی برای آرژانتین و به احتمال $\frac{1}{3}$ برای ایران است. در واقع تا قبل از ضربات تک پناستی می توان فرض کرد چهار پناستی توسط آرژانتین زده می شود. به این ترتیب احتمال برد ایران برابر است با:

$$\binom{4}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} + \binom{4}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times x = \frac{23}{135}$$

□

۱۷

ببعی و گابی و دیوی و جیگر و گدا به شکل مقابل دور یک میز نشسته اند. صندلی های خاکستری، صندلی های «ویژه» هستند. در ابتدا گدا یک ریال دارد و بقیه هیچ پولی ندارند. در هر مرحله آقای مجری یکی از دو کار زیر را انجام می دهد:

- هر کس را دو صندلی به سمت راست می برد. (توجه کنید که صندلی ها جابه جا نمی شوند و فقط خود افراد جابه جا می شوند.)
- به هر کس که روی یک صندلی ویژه نشسته است، یک ریال می دهد.

آقای مجری قصد دارد کاری کند که پول همه ی افراد برابر k ریال شود. به ازای چند مقدار $5 \leq k \leq 2$ آقای مجری می تواند با تعدادی گام به این هدف برسد؟

۲ (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۳ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

مجموع پول افراد در پیمانه ی ۳ ثابت می ماند. پس در انتها باید $5k$ به صورت $3a + 1$ باشد که تنها به ازای k هایی امکان پذیر است که باقی مانده ی ۲ در پیمانه ی ۳ دارند. پس در این سوال تنها به ازای $k = 2, 5$ امکان انجام کار وجود دارد.

به ازای $k = 2, 5$ نیز می توان به هدف رسید؛ برای مثال برای $k = 2$ به ترتیب با انجام اعمال ۲، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۲ می توانیم به هدف مان برسیم. □

۱۸

در شکل مقابل می خواهیم از نقطه ی A به نقطه ی B برویم، طوری که از نقطه ی M بگذریم. در هر مرحله می توان یک واحد در یکی از چهار جهت (چپ، راست، بالا و پایین) حرکت کرد. هم چنین از هر نقطه اجازه داریم حداکثر یک بار عبور کنیم. به چند طریق این کار ممکن است، طوری که دقیقاً ۱۰ گام برداریم؟

۱۰ (۱) ۱۸ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

حرکت به دو قسمت تقسیم می شود:

- حرکت از A به M (بخش یکم حرکت)
- حرکت از M به B (بخش دوم حرکت)

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

تعداد حرکات هر یک از دو بخش باید زوج باشد، پس تنها دو حالت زیر را داریم:

- بخش یکم شامل ۸ حرکت و بخش دوم شامل ۲ حرکت باشد؛ در این صورت بخش دوم حرکت (با بررسی مسیر از انتها) ۲ حالت دارد. با مشخص شدن بخش دوم حرکت، دو گام آخر بخش یکم نیز به صورت یکتا مشخص می‌شود. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید ۴ گام آخر به شکل زیر سمت راست باشد. با حالت‌بندی نیز می‌توان دید ۶ گام ابتدای مسیر ۵ حالت دارد.
- بخش یکم شامل ۶ حرکت و بخش دوم شامل ۴ حرکت باشد؛ در این صورت بخش دوم حرکت (با بررسی مسیر از انتها) ۲ حالت دارد. با مشخص شدن بخش دوم حرکت، دو گام آخر بخش یکم نیز به صورت یکتا مشخص می‌شود. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید ۶ گام آخر به شکل زیر سمت چپ باشد. در این صورت ۴ گام ابتدای مسیر (۴) حالت دارد.

□ پس کل کار به $18 = 2 \times 5 + 2 \times 4$ حالت قابل انجام است.

محیا در حال طراحی یک بازی است. این بازی شامل تعدادی کارت است که روی هر یک از آن‌ها سه عدد متمایز از مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۷ درج شده است. محیا می‌خواهد کارت‌ها را به نحوی بسازد که هر دو کارت متمایز دقیقاً یک عدد مشترک داشته باشند. در این صورت، او حداکثر چند کارت متفاوت می‌تواند بسازد؟

۹ (۱) ۲ (۲) ۷ (۳) ۳ (۴) ۵ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

واضح است که هر عدد در حداکثر ۳ کارت قابل درج است، زیرا اگر عددی مانند x در چهار کارت درج شود، تمام هشت عدد دیگر در این چهار کارت باید متمایز باشند که به دلیل وجود تنها ۷ عدد متمایز امکان‌پذیر نیست. در نتیجه تعداد کل کارت‌های قابل ساخت حداکثر $\frac{3 \times 7}{2} = 10.5$ است. این ۷ کارت را می‌توان به شکل زیر ساخت:

$(1, 2, 3), (1, 4, 5), (1, 6, 7), (2, 4, 6), (2, 5, 7), (3, 4, 7), (3, 5, 6)$

□

یک جدول 4×4 را در نظر بگیرید. دو خانه از این جدول را مجاور گوئیم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. فرض کنید از یک خانه‌ی این جدول شروع کنیم و در هر مرحله به یک خانه‌ی مجاور برویم، طوری که از هر خانه‌ی جدول دقیقاً یک بار عبور کنیم و در انتها به خانه‌ی آغازین بازگردیم. به چنین حرکتی، دور همیلتنی می‌گوئیم. به چند طریق می‌توان دو خانه از جدول را حذف کرد، طوری که خانه‌های باقی‌مانده‌ی جدول دور همیلتنی داشته باشند؟

۱۶ (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۲۰ (۴) ۳۲ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

خانه‌های سیاه شکل زیر سمت راست را در نظر بگیرید. اگر هر کدام از این خانه‌ها حذف شوند، خانه‌ی گوشه‌ی مجاور آن‌ها باید حذف شود؛ زیرا در غیر این صورت درجه‌ی خانه‌ی گوشه‌ی مجاور آن در گراف متناظر، کمتر از دو خواهد بود و نمی‌تواند در دور باشد. همچنین اگر یکی از این خانه‌ها به همراه گوشه‌ی مجاور حذف شوند (به 2×4 حالت)، به شکل زیر دور همیلتنی خواهیم داشت:

پس تنها بررسی حالاتی باقی می‌ماند که دو خانه‌ی حذف شده از گوشه‌ها یا خانه‌های وسط باشند. اگر دو خانه‌ی حذف شده یکی از حالات زیر باشند:

- در دو گوشه‌ی مقابل
 - در یک گوشه و یک خانه‌ی وسط که به همراه آن گوشه روی یک قطر اصلی هستند
 - در دو خانه‌ی وسط غیر مجاور
- آن گاه یا رأس درجه‌ی ۱ وجود دارد، یا با کشیدن یال‌هایی از مسیر که به طور یکتا تعیین می‌شوند (برای مثال یال‌های رئوس با درجه‌ی دو)، مشاهده می‌شود که امکان وجود دور همیلتنی نیست.

اگر دو خانه‌ی حذف شده در حالاتی جز حالات بالا باشند به شکل زیر دور همیلتنی وجود دارد:

تعداد حالات انتخاب دو خانه به شکل بالا (به ترتیب از راست به چپ) برابر ۴، ۸ و ۴ است. پس پاسخ نهایی برابر $4 + 8 + 8 + 4 = 24$ است.

□

۲۱

هرمی که اعداد ۱ تا ۴ روی وجوه آن نوشته شده است روی یک خانه از جدول مثلثی همانند شکل مقابل قرار گرفته است (روی وجه زیرین عدد ۱ نوشته شده است). این هرم در هر حرکت می‌تواند به یکی از خانه‌هایی که با خانه‌ی فعلی هرم ضلع مشترک دارد برود. حرکت هرم به این صورت است که یال روی ضلع مشترک از زمین بلند نمی‌شود و هرم حول این ضلع مشترک دوران می‌کند و در خانه‌ی جدید می‌نشیند (روی وجه دیگر مجاور آن یال). این هرم در هر خانه‌ای از جدول که قرار می‌گیرد شماره‌ی وجه زیرین خود را در آن حک می‌کند (برای مثال

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

در خانه‌ی اول عدد ۱ حک می‌شود. می‌خواهیم این هرم را طوری روی جدول حرکت دهیم که در هر خانه‌ای دقیقا یک عدد حک شود. حداکثر مقدار مجموع اعداد حک شده چند می‌تواند باشد؟

۵۳ (۱) ۶۴ (۲) ۶۰ (۳) ۵۶ (۴) ۶۶ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

تنها به یک روش می‌توان اعداد را روی جدول حک کرد که آن هم الگوی منظم رنگ‌آمیزی شبکه‌ی مثلثی با چهار رنگ است. دو خانه جدول که برداشته شده‌اند، اعداد ۳ و ۴ را در خود جای می‌دادند، پس مجموع ۶۰ منهای ۷ یا همان ۵۳ است. □

شکل مقابل از تعدادی دایره و میله در صفحه ساخته شده است. می‌خواهیم هر یک از دایره‌های این شکل را با یکی از سه رنگ قرمز، آبی و سبز رنگ کنیم، طوری که هر دو دایره‌ای که با میله به هم وصل هستند، ناهم‌رنگ باشند. به چند طریق این کار ممکن است؟ دو روش رنگ‌آمیزی را که با دوران شکل در صفحه به هم تبدیل می‌شوند، یکسان در نظر می‌گیریم.

۱۲ (۱) ۲۴ (۲) ۶ (۳) ۶۰ (۴) ۱۲۰ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

دور پنج‌تایی وسط را در نظر بگیرید. اگر از یکی از رنگ‌ها سه توپ در این دور داشته باشیم، طبق اصل لانه کبوتری دو تا از آن‌ها مجاور خواهند شد که امکان ندارد. پس تنها حالت برای دور پنج‌تایی وسط این است که از دو رنگ، هر کدام دو توپ و از رنگ دیگر یک توپ داشته باشیم. بدون از دست دادن کلیت مسئله (به ۳ حالت) فرض کنید از رنگ قرمز یک توپ در دور پنج‌تایی وسط داشته باشیم. یکی از توپ‌های این دور را به ۱ حالت قرمز کرده و شیء را طوری می‌چرخانیم که توپ قرمز بالا قرار بگیرد. چهار توپ دیگر این دور باید یک در میان با آبی و سبز رنگ شوند که ۲ حالت دارد. پس از رنگ کردن این دور، شیء به شکلی مانند شکل مقابل در می‌آید.

رنگ توپ بالایی ۲ حالت دارد. فرض کنید آبی باشد. در این صورت با حرکت در جهت ساعت‌گرد از این توپ، رنگ دو توپ بعدی به طور یکتا تعیین می‌شود و شیء به شکل مقابل در می‌آید. دو توپ باقی‌مانده تنها با توپ‌های آبی مجاور هستند. یکی این دو توپ باید قرمز و دیگری سبز باشد که ۲ حالت دارد.

پس کل کار به $24 = 2 \times 2 \times 3$ حالت قابل انجام است. □

یک ساعت دیجیتال داریم که زمان را به صورت یک عدد دودویی با طول ثابت ۱۱ بیت

نمایش می‌دهد که ۵ بیت سمت چپ آن نشان‌دهنده‌ی ساعت (بین ۰ تا ۲۳) و ۶ بیت سمت راست آن نشان‌دهنده‌ی دقیقه (بین ۰ تا ۵۹) است. به طور مثال این ساعت دیجیتال ساعت ۱۰ و ۲۱ دقیقه را به شکل ۰۱۰۱۰۰۱۰۱۰۱۰۱۰ نمایش می‌دهد. در طول یک شبانه‌روز، چند بار عددی که این ساعت نشان می‌دهد، آینه‌ای می‌شود؟ به یک رشته آینه‌ای می‌گوییم اگر با وارون خود برابر باشد. به طور مثال رشته‌ی ۰۱۰۱۰ آینه‌ای است، ولی رشته‌ی ۱۰۰۱۱ آینه‌ای نیست.

۴۳ (۱) ۵۷ (۲) ۴۸ (۳) ۴۵ (۴) ۶۰ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

۵ بیت متناظر با ساعت ۲۴ حالت دارند، به ازای هر کدام از آن‌ها برای آینه‌ای شدن ۵ بیت سمت راست به صورت یکتا معلوم میشوند (وارون ۵ بیت سمت چپ)، بیت وسط هم ۲ حالت دارد، پس حد اکثر ۴۸ جواب ممکن برای مساله وجود دارد. حالت‌هایی که اشتباه شمرده ایم عبارتند از حالت‌هایی که ۶ بیت متناظر با دقیقه عددی بیش از ۵۹ را نشان دهند، یعنی ۶۰، ۶۱، ۶۲ و ۶۳ را ممکن است اضافه شمرده باشیم. برای چک کردن کافیت ۵ بیت سمت راست این اعداد را وارون کنیم و اگر عدد به دست آمده از ۲۴ کمتر بود، این رشته را نباید جزو جواب حساب کنیم. با وارون کردن ۵ بیت راسته اعداد ذکر شده، به ترتیب اعداد ۷، ۲۳، ۱۵، ۳۱ به دست می‌آیند، پس به ازای ساعت‌های ۷، ۲۳ و ۱۵ و قرار دادن ۶ بیت چپ برابر ۶۰، ۶۱ و ۶۲، یک رشته‌ی آینه‌ای ساختیم که هیچ وقت در ساعت نشان داده نمی‌شوند، پس جواب برابر $45 = 48 - 3$ است. □

یک جدول 3×3 را در نظر بگیرید. می‌خواهیم چهار خانه‌ی a_1, a_2, a_3 و a_4 از خانه‌های این جدول را انتخاب کنیم، طوری که اگر از مرکز a_1 به مرکز a_2 ، سپس به مرکز a_3 و در انتها به مرکز a_4 برویم، مسیری که ایجاد می‌شود خودش را قطع نکند و همچنین مرکز هیچ سه تا از چهار خانه‌ی انتخاب شده هم خط نباشند. به چند طریق این کار ممکن است؟

(۱) ۱۲۸۰ (۲) ۲۲۴۰ (۳) ۲۰۱۶ (۴) ۱۳۱۲ (۵) ۱۱۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

دو حالت داریم:

- مراکز چهار خانه‌ی مذکور یک چهارضلعی مقعر بسازند؛ انتخاب ۴ خانه به این شکل (بدون در نظر گرفتن ترتیب) $4 + 4$ حالت دارد (محاسبه‌ی آن بسیار ساده است؛ برای مثال حتما خانه‌ی وسط باید در این خانه‌ها باشد). هر ترتیبی که نیز برای این نقاط در مسیر در نظر بگیریم، یک مسیر مطلوب ساخته می‌شود. پس این حالت شامل 8×4 مسیر مطلوب است.
- مراکز چهار خانه‌ی مذکور یک چهارضلعی محدب بسازند؛ انتخاب ۴ خانه به این شکل (بدون در نظر گرفتن ترتیب) $70 = 6 \times 8 - 8 - 8$ (۹) حالت دارد. حال فرض کنید نقاط انتخاب کردیم. a_1 به ۴ طریق می‌توان از این ۴ خانه انتخاب شود. a_2 باید در چهارضلعی متناظر، مجاور آن باشد؛ پس ۲ حالت دارد و در ادامه a_3 نیز دو حالت دارد. پس این حالت شامل $70 \times 4 \times 2 \times 2 = 1120$ مسیر مطلوب است.

□

پس پاسخ برابر ۱۳۱۲ است.

بر روی صندلی‌های یک مترو افراد A_1, A_2, A_3 در یک ردیف و B_1, B_2, B_3 در ردیف مقابل نشسته‌اند. طبق عادت همیشگی، هر کس به دل‌خواه به یکی از افراد روبه‌روی خود زیریرکی نگاه می‌کند!

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید _____

یک حالت را پایدار گوئیم، اگر هیچ دو نفری نباشند که به یک‌دیگر نگاه کنند (چشم‌توچشم شوند!). چند حالت پایدار وجود دارد؟

(۱) ۳۶ (۲) ۱۵۶ (۳) ۴۸ (۴) ۱۸ (۵) ۱۰۸

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

مجموعه‌ی افرادی که A_i ها به آن‌ها نگاه می‌کنند را در نظر بگیرید. چند حالت داریم:

مرحله ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

- اگر این مجموعه تک عضوی باشد (یعنی همه ی A_i ها به یک نفر خاص نگاه کنند، آن نفر خاص به هیچ A_i نمی تواند نگاه کند. پس این حالت معتبر نیست.
- اگر این مجموعه دو عضوی باشد، دو نفر از A_i ها به یک نفر خاص و دیگری به نفری دیگر نگاه می کند. این امر $108 = 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 3$ حالت دارد
- اگر این مجموعه سه عضوی باشد، $48 = 3! \times 2^3$ حالت داریم.

□

پس پاسخ برابر ۱۵۶ است.

زوج مرتب (i, j) را بی ربط گوئیم، اگر A_i و B_j هیچ کدام دیگری را نگاه نکنند. به ترتیب حداقل و حداکثر چند زوج بی ربط داریم؟

۲۶

(۱) ۰ و ۶ (۲) ۳ و ۳ (۳) ۳ و ۶ (۴) ۱ و ۳ (۵) ۰ و ۳

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

یک A_i دل خواه را در نظر بگیرید که به B_j نگاه می کند. از دیگر افراد دسته ی B حداقل یک و حداکثر دو نفر به A_i نگاه نمی کنند. پس A_i در حداقل یک و حداکثر دو زوج بی ربط حضور دارد. پس حداقل ۳ و حداکثر ۶ زوج بی ربط داریم. از طرفی مثال برای ۳ و ۶ زوج بی ربط وجود دارد. برای مثال ۳ زوج بی ربط فرض کنید به ازای هر A_i, B_i, i به یک دیگر نگاه کنند. برای مثال ۶ زوج بی ربط فرض کنید هر A_i به B_i و هر B_i به A_{i+1} نگاه کند (و B_3 به A_1 نگاه کند).

□

می گوئیم فرد X غیر مستقیم فرد Y را می بیند، اگر فردی مانند Z وجود داشته باشد که X, Z را نگاه کند و Z, Y را نگاه کند. حداکثر چند زوج (X, Y) داریم که X به طور غیرمستقیم Y را نگاه کند؟

۲۷

(۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۱۲ (۴) ۸ (۵) ۵

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

هر فرد به طور غیر مستقیم حداکثر یک نفر را می بیند. پس پاسخ حداکثر برابر ۶ است. از طرفی اگر هر A_i به B_i و هر B_i به A_{i+1} نگاه کند (و B_3 به A_1 نگاه کند)، آن گاه مثال ۶ نیز ساخته می شود.

□

دستگاه عددساز در ابتدا عدد x را که برابر با صفر است نمایش می دهد. این دستگاه از ما یک دنباله از اعداد ۰ و ۱ می گیرد و طی مراحل زیر عدد x را تغییر می دهد:

با شروع از اولین عدد، به ازای هر عدد در دنباله:

- اگر عدد برابر با ۰ بود، x را ۴ برابر می کنیم.
- اگر عدد برابر با ۱ بود، x را برابر با $x + 3$ قرار می دهیم.

یک دنباله از ۰ و ۱ را «معتبر» می نامیم اگر در آن هیچ سه عدد متوالی برابر با ۱ نباشند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید _____

با استفاده از دستگاه عددساز و دنباله های معتبر به طول ۵ چند عدد مختلف می توان ساخت؟

۲۸

(۱) ۱۳ (۲) ۳۱ (۳) ۱۶ (۴) ۲۸ (۵) ۲۴

مرحله ی اول بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

□

راه حل در سوال بعدی توضیح داده شده است.

با استفاده از دستگاه عددها و دنباله های معتبر به طول ۱۰ چند عدد مختلف می توان ساخت؟

۲۹

(۱) ۵۰۴ (۲) ۱۷۸ (۳) ۹۲۷ (۴) ۲۷۴ (۵) ۲۸۸

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

نشان می دهیم اگر عدد حاصل از دو دنباله ی a و b با طول برابر یکسان باشد، $a = b$. آخرین $\circ$ دنباله را در نظر می گیریم. اگر بعد از آن ۱ ای نیامده باشد رقم آخر x در مبنای چهار برابر $\circ$ است. در غیر این صورت یا یکبار عدد ۱ بعد از آن آمده که در نتیجه رقم آخر x در مبنای چهار، ۳ است و یا دوبار عدد ۱ آمده که رقم آخر x در مبنای چهار برابر با ۲ است. در هر صورت آخرین رقم x هرچه باشد یک یا دو یا سه عضو انتهای دنباله ی سازنده ی آن یکتا تعیین می شود. با حذف این عناصر از انتهای a و b و محاسبه ی مقدار x قبل از آن ها دنباله ها کوچکتر می شوند و طبق فرض همچنان اعداد برابری تولید می کنند. با ادامه ی این روند پایان پذیر برابری $a = b$ ثابت می شود. پس مسئله به مسئله ی شمردن تعداد رشته های معتبر به طول n تبدیل می شود.

$F(n)$ را برابر با تعداد رشته های معتبر به طول n در نظر می گیریم. می توان نشان داد:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) + F(n-3)$$

□

$$F(1) = 2, F(2) = 4, F(3) = 7, F(4) = 13, F(5) = 24, \dots, F(10) = 504$$

فرض کنید بتوانیم دنباله های معتبر به هر طول دلخواهی را به دستگاه عددها بسازیم. حداکثر چند عدد کوچکتر از ۲۰۴۸ می توانیم بسازیم؟

۳۰

(۱) ۲۴۳ (۲) ۲۰۴۷ (۳) ۸۱ (۴) ۲۴۹ (۵) ۲۲۴

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

با کنار گذاشتن حالت $x = \circ$ ، می توانیم از $\circ$ های اول دنباله صرف نظر کنیم (چون x را تغییر نمی دهند). پس دنباله با ۱ شروع می شود و حداکثر چهار $\circ$ بعد از آن داریم. زیرا در غیر این صورت عدد x دست کم برابر با $3 \times 4^5 = 3072$ می شود. با این حساب بیشترین عدد x با دنباله ی $[1, 1, \circ, 1, 1, \circ, 1, 1, \circ, 1, 1, \circ, 1]$ تولید می شود که برابر با ۲۰۴۶ است. تعداد ۱ های موجود بعد از هر $\circ$ در دنباله می تواند عددی بین صفر تا دو باشد و دنباله با یک یا دو عدد ۱ آغاز خواهد شد. پس اگر i تا $\circ$ در دنباله داشته باشیم 2×3^i حالت مختلف خواهیم داشت. تعداد $\circ$ ها در دنباله پنج حالت دارد ($0 \leq i \leq 4$) در نتیجه پاسخ سوال برابر است با:

□

$$1 + \sum_{i=0}^4 2 \times 3^i = 1 + 2 \times (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) = 243$$

مرحله ی اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

- سؤال های ۲۴ تا ۳۰ در دسته های چندسؤالی آمده اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- امتیاز همه ی سؤال ها یکسان است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره ی مثبت و جواب نادرست یک نمره ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ به چند طریق می توان در یک جدول 3×3 دو مهره ی شاه با رنگ های سیاه و سفید گذاشت طوری که همدیگر را تهدید نکنند؟ هر مهره ی شاه تمام مهره های ۸ خانه ی مجاورش را تهدید می کند.

۹ (۱) ۱۲ (۲) ۴۸ (۳) ۳۲ (۴) ۱۶ (۵)

۲ در شکل مقابل می خواهیم با حذف تعدادی از پاره خط ها به حالتی برسیم که دیگر مسیری از نقطه ی A به نقطه ی B وجود نداشته باشد. حداقل چند پاره خط باید حذف شوند؟

۱ (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵)

۳ در جدول مقابل می خواهیم اعداد ۱ تا ۸ را به گونه ای قرار دهیم که اعداد در هر سطر از چپ به راست صعودی و در هر ستون نیز از بالا به پایین صعودی باشند. اگر مکان قرار گرفتن اعداد ۱ و ۲ در جدول مطابق شکل مقابل باشد، بقیه ی اعداد را به چند طریق می توان در جدول چید؟ دقت کنید که دو خانه ی پایینی جدول در یک سطر قرار دارند.

۲۴ (۱) ۱۲ (۲) ۳۲ (۳) ۳۶ (۴) ۱۸ (۵)

۴ شش درس با نام های A تا F داریم که روابط پیش نیازی آن ها در شکل مقابل نشان داده شده است. اگر درس x پیش نیاز درس y باشد، آن گاه پیکانی از x به y در این شکل رسم شده است. می خواهیم این شش درس را در شش ترم متوالی و در هر ترم یک درس بگیریم طوری که تمامی روابط پیش نیازی رعایت شده باشند، یعنی اگر درس x پیش نیاز درس y است، آن گاه درس x باید پیش از درس y گرفته شود. به چند ترتیب مختلف می توان درس ها را با رعایت روابط پیش نیازی گرفت؟ به طور مثال، ترتیب $\langle A, B, D, E, C, F \rangle$ یک ترتیب مجاز است.

۱۸ (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۴ (۴) ۲۴ (۵)

۵ در ایستگاه تاکسی موصّل به صلاح الدین، مردم برای استفاده از تاکسی در صف می ایستند. به محض آمدن یک تاکسی، اگر تعداد افراد صف حداقل چهار نفر بود، ۴ نفر جلوی صف و در غیر این صورت تمام افراد صف در تاکسی می نشینند و تاکسی بلافاصله حرکت می کند. سه تروریست می خواهند از موصّل به صلاح الدین بروند. آن ها یک تفنگ دارند و می توانند با هر تیر آن، یک نفر از افراد دیگر صف را بکشند. این سه تروریست همزمان به انتهای صف رسیده و می خواهند حتما با هم در یک تاکسی بنشینند. قبل از آن که آن ها به ایستگاه تاکسی بروند، می خواهند تعدادی تیر با خود بردارند که بتوانند به طور تضمینی، به هدفشان (نشستن با هم در تاکسی) برسند. آن ها حداقل چند تیر باید با خود بیاورند؟

۲ (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۰ (۵)

مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

۶ دو تاس در اختیار داریم. پس از پرتاب آن‌ها به اندازه‌ی ضرب دو عددی که روی تاس‌ها آمده امتیاز می‌گیریم. اگر هر تاس با احتمال یکسان عددی بین ۱ تا ۶ بیاورد، به صورت میانگین چه امتیازی می‌توانیم کسب کنیم؟

(۱) ۱۰/۲۵ (۲) ۹ (۳) ۱۲/۲۵ (۴) ۱۳/۵ (۵) ۱۲/۵

۷ به چند طریق می‌توان خانه‌های خالی (سفید رنگ) جدول 4×4 پایین سمت راست را با قطعاتی که در شکل پایین سمت چپ می‌بینید پر کرد، طوری که هر خانه توسط دقیقاً یک قطعه پوشیده شود و قطعه‌های استفاده‌شده به طور کامل درون خانه‌های سفید جدول قرار بگیرند؟ از هر قطعه به تعداد دل‌خواه وجود دارد و قطعات را می‌توان چرخاند یا دوران داد.

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۱ (۵) ۴

۸ امروز بانک شهر فسقلی‌ها ۵۰ مشتری دارد. مشتری‌ها در یک صف ایستاده‌اند و هرکدام کارتی دارد که نوبت او را مشخص می‌کند (عدد بین ۱ تا ۵۰). این بانک سه باجه برای پاسخ‌گویی دارد و هر مشتری اگر نوبت به او برسد می‌تواند به یکی از این سه باجه مراجعه کند. ساعت ۱۲ ظهر است و هم‌اکنون به ترتیب در سه باجه نوبت مشتری‌های ۴۴، ۴۸ و ۵۰ است. این ۵۰ مشتری به چند طریق از سه باجه می‌توانند استفاده کرده باشند؟

(۱) $3^{42} \times 2^3$ (۲) 3^{42} (۳) $3^{44} \times 2^4$ (۴) $3^{42} \times 2^4$ (۵) $3^{44} \times 2^3$

۹ یک جدول 10×21 را با کاشی‌هایی به شکل مستطیل‌های 1×2 فرش کرده‌ایم. حداکثر چند خط می‌توان روی خطوط داخل این جدول رسم کرد که هیچ یک از کاشی‌ها را قطع نکند؟ به طور مثال در جدول 3×4 روبه‌رو تنها دو خط قابل رسم است، ولی اگر همه‌ی کاشی‌ها را افقی قرار دهیم، تعداد خطوط قابل رسم ۳ خواهد بود که بیش‌ترین مقدار ممکن است.

(۱) ۲۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۲ (۴) ۲۷ (۵) ۲۴

۱۰ در یک دنیا ۱۶ کشور با شماره‌های ۱ تا ۱۶ وجود دارد. هر کشور با شماره‌ی x ، با کشورهای $x-1$ ، $x+1$ ، $x-4$ و $x+4$ (در صورت وجود) رابطه‌ی اقتصادی دارد. برای نمونه، کشور ۷ با کشورهای ۳، ۶، ۸ و ۱۱، و کشور ۲ با کشورهای ۱، ۳ و ۶ رابطه دارد. ۳ تا از کشورها یک اتحادیه تشکیل داده‌اند. هر سال هر کشوری که با دست کم دو تا از کشورهای اتحادیه رابطه‌ی اقتصادی داشته باشد، به اتحادیه اضافه می‌شود. با در نظر گرفتن حالت‌های مختلف برای ۳ کشور اولیه‌ی اتحادیه، این اتحادیه پس از ۲۰ سال حداکثر چند کشور خواهد داشت؟

(۱) ۱۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۴ (۵) ۱۲

۱۱ هُزْبر یک دستگاه «سیب‌شناس» خریده است. این دستگاه ۳ سیب می‌گیرد و اگر حداقل k سیب خراب در بین این ۳ سیب وجود داشته باشد، بوق می‌زند! حال هُزْبر ۱۴ سیب خریده است و می‌داند k تا از این سیب‌ها خراب است. در حالات زیر حداکثر چند بار باید از دستگاه استفاده کند تا یکی از سیب‌های خراب را بیابد: حالت اول $k=1$ و حالت دوم $k=3$ (جواب این دو حالت به ترتیب از راست به چپ آمده‌اند).

(۱) ۵ و ۳۶۳ (۲) ۶ و ۳۶۳ (۳) ۷ و ۳۶۳ (۴) ۷ و ۳۶۴ (۵) ۶ و ۳۶۴

مرحله ی اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۲ تعداد ۱۳۹۳ ماشین داریم. هر ماشین در یک لحظه از زمان روی یک نقطه از محور مختصات ظاهر شده و تا ابد با سرعتی ثابت در یک جهت مشخص (سمت چپ یا راست) شروع به حرکت می کند. در هر لحظه، ماشینی که در سمت راست همه ی ماشین های دیگر قرار بگیرد، ماشین برنده می نامیم. در طول زمان ماشین برنده حداکثر چند بار تغییر می کند؟

۱۳۹۲ (۱) ۲۰۹۰ (۲) ۲۷۸۴ (۳) ۱۳۹۳ (۴) بی نهایت (۵)

۱۳ فاطمه جایگشت ها را خیلی دوست دارد. او همیشه درایه های جایگشت ها را از صفر شماره گذاری می کند و برای یک جایگشت عدد زیبایی آن را این گونه تعریف می کند: به ازای هر درایه، XOR شماره ی آن درایه و عددی که در آن قرار دارد را حساب می کند، و سپس اعداد حاصل را با هم جمع می کند. به نظر او هر چه عدد زیبایی یک جایگشت بیش تر باشد، جایگشت زیباتر است! حال به او بگویید بین جایگشت های مختلف اعداد ۰ تا ۶، بیش ترین میزان زیبایی چقدر است.

۴۲ (۱) ۳۶ (۲) ۳۲ (۳) ۴۰ (۴) ۴۸ (۵)

۱۴ تعدادی سیب و انار و پرتقال و دو گلدان جادویی داریم که محصولا نشان پس از یک ماه می رسند. ابتدای هر ماه می توانیم به یکی از شیوه های زیر در آن ها میوه بکاریم و در انتهای ماه محصول را جمع آوری کنیم. (هر حالت به تنهایی در یک گلدان انجام می شود و پس از جمع آوری هیچ اثری از درخت و میوه ی کاشته شده باقی نمی ماند):

- یک سیب بکاریم و سه سیب برداشت کنیم.
- یک انار بکاریم و پنج انار برداشت کنیم.
- یک پرتقال بکاریم و دو پرتقال برداشت کنیم.
- دو سیب و دو انار بکاریم و چهار پرتقال برداشت کنیم.

فرض کنید در ابتدا از هر میوه یکی داریم. به چه تعداد از حالات زیر می توان رسید؟ (۱، ۲، ۳) یعنی یک سیب و دو انار و سه پرتقال.

- (۱۳۹۳، ۲۰۱۵، ۱۴۳۶)
- (۱۳۹۳، ۱۴۳۶، ۲۰۱۵)
- (۱۳، ۷، ۴)
- (۱۰۰، ۱۰۰، ۱۰۰)

۳ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۰ (۵)

۱۵ ۱۰۲۴ لامپ خاموش با شماره های ۱ تا ۱۰۲۴ در یک ردیف قرار دارند. کیان در ۱۰ مرحله کلید تعدادی از لامپ ها را می زند که منجر به تغییر وضعیت آن لامپ ها می شود (از خاموش به روشن و برعکس). اگر کیان در مرحله i ام کلید همه ی لامپ هایی را که باقی مانده ی شماره آن ها بر 2^i صفر نیست بزند، در پایان چند لامپ روشن وجود خواهد داشت؟

۳۴۱ (۱) ۶۸۳ (۲) ۶۸۲ (۳) ۳۴۲ (۴) ۱۰۲۳ (۵)

۱۶ یک گراف را «زیبا» می نامیم اگر رأسی در آن وجود داشته باشد که در تمام دورهای به طول فرد آمده باشد. بین تمام گراف های ساده ی ۱۰۱ رأسی زیبا، گرافی را در نظر بگیرید که بیش ترین تعداد یال را دارد. این گراف چند یال دارد؟

۴۷۰ (۱) ۲۵۰۰ (۲) ۲۶۰۰ (۳) ۱۰۱ (۴) ۵۰۵۰ (۵)

مرحله ی اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۷ یک جدول 4×4 داده شده است. می خواهیم شش مهره ی یکسان را در شش خانه ی متفاوت از جدول قرار دهیم طوری که در هر سطر و در هر ستون تعداد زوجی مهره قرار گرفته باشد. به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

۶۴ (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۱۲۸ (۴) ۹۶ (۵)

۱۸ دنباله ی $\langle 1, 6, 10, 1, 5, 9, 11, 7 \rangle$ را در نظر بگیرید. به چند طریق می توان بین اعداد این دنباله عملگرهای AND و OR قرار داد طوری که حاصل عبارت برابر صفر شود؟ دقت کنید که باید هفت عملگر گذاشته شود و عملگرها از چپ به راست محاسبه می شوند.

۳۶ (۱) ۴۸ (۲) ۲۴ (۳) ۴۲ (۴) ۶۴ (۵)

۱۹ جدولی با ۱۰۰ سطر همانند شکل روبرو در نظر بگیرید که ۵۰ سطر آن دو خانه و ۵۰ سطر آن سه خانه دارند. می خواهیم از گوشه ی پایین چپ به گوشه ی بالا راست برویم به صورتی که از روی خطها حرکت کرده و همواره به سمت بالا و یا راست حرکت کنیم. به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

۴۳۵ (۱) ۳۸۰ (۲) ۴۲۰ (۳) ۳۹۹ (۴) ۴۱۸ (۵)

۲۰ سه نفر داریم که پول هر یک از آنها (به دلار) یک عدد صحیح بزرگتر از صفر است و مجموع پول آنها ۱۰۱ دلار است. هر گاه پول یکی از این افراد از مجموع پول دو نفر دیگر بیش تر باشد، می گوئیم بین این سه نفر «تضاد طبقاتی» وجود دارد. به چند حالت ممکن است بین این سه نفر تضاد طبقاتی وجود داشته باشد؟

۳۸۲۵ (۱) ۳۶۷۵ (۲) ۱۲۷۵ (۳) ۱۲۲۵ (۴) ۷۳۵۰ (۵)

۲۱ یارا یک قطعه چوب به طول ۲۰ به یاور داده و از او خواسته که آن را به ۲۰ قطعه به طول ۱ تبدیل کند. هر بار که یاور یک قطعه چوب به طول $x + y$ را به دو قطعه با طولهای x و y تقسیم کند، یارا $x \times y$ تومان به او و $x + y$ تومان به شاگردش می دهد. حداکثر پولی که یاور و شاگردش می توانند به دست بیاورند به ترتیب چند است؟

۲۱۰ و ۱۱۶ (۱) ۱۹۰ و ۲۰۹ (۲) ۱۷۰ و ۲۰۹ (۳) ۱۹۰ و ۸۸ (۴) ۱۷۰ و ۸۸ (۵)

۲۲ سلطان در نقطه ی ۰ از محور اعداد صحیح قرار گرفته است و گرفتار ۹ غول خطرناک با شماره های ۱ تا ۹ شده است. غولها دو نوع هستند: دسته ی نخست، غولهای راست گرا که دستور می دهند سلطان ۲ واحد به راست برود، و دسته ی دوم غولهای چپ گرا که دستور می دهند سلطان ۱ واحد به چپ برود.

کار در ۹ مرحله انجام می شود. در مرحله ی i ام، غول شماره ی i ، دستور موردنظر را (بر اساس راست گرا یا چپ گرا بودنش) به سلطان می دهد. سلطان می تواند به دستور غول عمل کند یا این که غول را بکشد و جابه جا نشود. اگر سلطان یکی از غولها را بکشد، خسته می شود و ۲ غول بعدی را نمی تواند بکشد. در صورتی که در انتها، سلطان در خانه ی ۰ مختصات باشد، آزاد می شود و در غیر این صورت، زندانی می ماند. سلطان تنها می داند که k تا از غولها راست گرا هستند و $k - 9$ غول دیگر، چپ گرا هستند، اما شماره ی غولها را نمی داند و طبیعتاً از ابتدا نمی داند که در مرحله ی i ام چه غولی دستور خواهد داد. به ازای چند عدد صحیح k با شرط $0 \leq k \leq 9$ ، سلطان الگوریتمی دارد که بتواند به طور تضمینی آزاد شود؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۰ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵)

مرحله ی اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

دنباله ی $(3, 5, 7, 4, 3, 5, 7, 4, 5, 6, 5)$ را در نظر بگیرید. دستگاهی داریم که می تواند جمع هر بازه از این اعداد را حساب کند. یعنی اگر دو عدد i و j را به آن بدهیم $(i \leq j)$ ، جمع اعداد i ام تا j ام (شامل خود این دو عدد) را محاسبه می کند. اما این دستگاه یک مشکل دارد و آن این که در هنگام حساب کردن جمع اعداد (در مبنای دو) سرریز اعداد (دو بر یک آن ها) را حساب نمی کند. یعنی برای ورودی های ۶ و ۷ که باید جمع ۵ و ۳ را محاسبه کند، خروجی اش عدد ۶ است $(110 = 11 + 101)$. برای این که ثابت کنیم دستگاه اشتباه کار می کند می خواهیم یک بازه را نشان دهیم که جمع اعداد آن با این دستگاه صفر شود. در این دنباله چند بازه داریم که جمع شان با این دستگاه صفر شود؟ به عبارت دیگر چند زوج i و j داریم که به ازای آن ها ماشین جواب صفر می دهد؟

۸ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۱۰ (۴) ۵ (۵)

یک جدول 4×4 را «خال خالی» می گوئیم، اگر خانه های آن به صورت شطرنجی (یک در میان) با رنگ های سیاه و سفید رنگ شده باشند. دو خانه از یک جدول را مجاور می گوئیم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. منظور از یک قطر در یک جدول، هر قطری اعم از اصلی و فرعی است. به این ترتیب، هر یک از خانه های گوشه به تنهایی یک قطر هستند و یک جدول 4×4 ، ۱۴ قطر دارد. باب اسفنجی، آقای خرچنگ و اختاپوس هر کدام یک جدول 4×4 خال خالی دارند. باب اسفنجی در هر مرحله می تواند دو خانه ی مجاور از جدول خودش را در نظر بگیرد و رنگ آن دو خانه را جابه جا کند. آقای خرچنگ در هر مرحله می تواند دو خانه ی مجاور از جدول خودش را در نظر بگیرد و رنگ هر دو خانه را عوض کند (از سیاه به سفید و برعکس). اختاپوس نیز در هر مرحله می تواند یک قطر از جدول خودش را در نظر بگیرد و رنگ تمام خانه های آن قطر را عوض کند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید _____

چند جدول 4×4 متفاوت وجود دارد که باب اسفنجی با تعدادی مرحله می تواند به آن ها برسد؟

۲۸ (۱) ۲۱۵ (۲) ۲ (۱۶) ۴ (۱۶) ۵ (۱۶) $\frac{1}{4}$

چند جدول 4×4 متفاوت وجود دارد که آقای خرچنگ با تعدادی مرحله می تواند به آن ها برسد؟

۲ (۱۶) (۱) ۲۱۶ (۲) ۳۸ (۳) ۴ (۱۶) ۵ (۲۱۵)

چند جدول 4×4 متفاوت وجود دارد که اختاپوس با تعدادی مرحله می تواند به آن ها برسد؟

۲۴ (۱) ۹ $\times$ ۲۱۲ (۲) ۳۱۲ (۳) ۴۱۴ (۴) ۲۱۶ (۵)

گراف G را به این شکل می سازیم: ابتدا به ازای هر یک از اعداد ۰ تا ۶۳ یک رأس در نظر می گیریم. سپس بین هر دو رأس که نمایش دودویی آن ها دقیقاً در یک بیت اختلاف دارد یک یال رسم می کنیم.

به هر زیرمجموعه ی ۷ تایی از رأس های G که دقیقاً شکل روبه رو را بسازند یک «آدمک» می گوئیم. دقت کنید که بین رأس های یک آدمک نباید هیچ یالی غیر از یال های نشان داده شده در شکل مقابل در گراف G وجود داشته باشد.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

مرحله ی اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۷ در گراف G چند آدمک می توان پیدا کرد؟

۹۶۰۰ (۱) ۳۸۴۰ (۲) ۵۷۶۰ (۳) ۴۶۰۸۰ (۴) ۶۰۰ (۵)

۲۸ عدد یک آدمک را برابر با XOR مقدار راس های آن در نظر می گیریم. مجموع اعداد تمام آدمک ها در گراف G چند است؟

۱۹۳۵۳۶۰ (۱) ۱۸۱۴۴۰ (۲) ۱۴۵۱۵۲۰ (۳) ۲۰۱۶ (۴) ۱۲۰۹۶۰ (۵)

باستان شناسان به تازگی روی سنگ های یک غار اشکالی از شجره نامه های یک قبیله ی باستانی یافته اند که نشان می دهد این قبیله در بچه دار شدن رسومات عجیبی داشته اند. در این قبیله اگر یک پدر k پسر داشته باشد، پسر بزرگ تر خانواده $k - 1$ پسر به دنیا می آورد، پسر دوم خانواده $k - 2$ پسر و همین طور تا پسر کوچک خانواده که هیچ پسری به دنیا نمی آورد و نباید پسر دار شود. در شکل روبه رو شجره نامه ی یک خاندان از این قبیله را می بینید که جد بزرگ آن ها دارای سه پسر بوده است. در این شکل پسران به ترتیب سن از چپ به راست قرار دارند (از بزرگ به کوچک). توجه داشته باشید که در این شجره نامه ها تنها اطلاعات مردان فامیل می آمده است.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۲۹ در یکی از شجره نامه ها که روی سنگ ها یافت شده است، مشخص است که جد بزرگ خاندان ۱۰ پسر داشته است، اما اطلاعات مربوط به پسر سوم جد بزرگ بر اثر مرور زمان مخدوش شده است. با استفاده از اطلاعات فوق دانشمندان می خواهند بدانند تعداد مردان در خاندانی که جد بزرگش این پسر بوده، چند است؟

۵۰۴۰ (۱) ۸۴ (۲) ۴۰۳۲۰ (۳) ۱۲۸ (۴) ۲۵۶ (۵)

۳۰ فاصله ی فامیلی دو فرد در یک شجره نامه را طول مسیری که باید روی شجره نامه طی کرد تا از یک فرد به فرد دیگر رسید تعریف می کنیم. به عنوان مثال فاصله ی فامیلی یک فرد با پدرش یک، با پدر بزرگش دو و با عمویش سه است. حال در یک خاندان که جد بزرگش ۱۰۰ پسر دارد، فاصله ی فامیلی چند جفت از افراد در این خاندان برابر با ۱۹۸ می باشد؟ (جفت های (a, b) و (b, a) در شمارش تفاوتی ندارند و یک بار شمرده می شوند).

۱۹۷ (۱) ۱۹۸ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۱۰۰ (۵)

مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

- سؤال‌های ۲۴ تا ۳۰ در دسته‌های چندسؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ به چند طریق می‌توان در یک جدول 3×3 دو مهره‌ی شاه با رنگ‌های سیاه و سفید گذاشت طوری که همدیگر را تهدید نکنند؟ هر مهره‌ی شاه تمام مهره‌های ۸ خانه‌ی مجاورش را تهدید می‌کند.

۹ (۱) ۱۲ (۲) ۴۸ (۳) ۳۲ (۴) ۱۶ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

با حالت‌بندی بر روی مکان‌های مختلف مهره‌ی سفید تعداد حالات را می‌شماریم.

A	B	A
B	C	B
A	B	A

اگر مهره‌ی سفید در مکان A باشد مهره‌ی سیاه در ۵ خانه‌ی دیگر می‌تواند باشد. اگر مهره‌ی سفید در مکان B باشد مهره‌ی سیاه در ۳ خانه‌ی دیگر می‌تواند باشد. اگر مهره‌ی سفید در مکان C باشد مهره‌ی سیاه در هیچ خانه‌ای نمی‌تواند باشد.

جمع این حالات مختلف برابر با $32 = 4 \times (5 + 3)$ می‌باشد که جواب مسئله است. □

۲ در شکل مقابل می‌خواهیم با حذف تعدادی از پاره‌خط‌ها به حالتی برسیم که دیگر مسیری از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B وجود نداشته باشد. حداقل چند پاره‌خط باید حذف شوند؟

۱ (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

با حذف خطوطی که در شکل مشاهده می‌کنید می‌توان با حذف سه خط به هدف رسید. همچنین جوابی با کمتر از سه خط وجود ندارد چون به سادگی می‌توان سه مسیر در شکل از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B یافت که خط مشترکی نداشته باشند. در این صورت از هر مسیر حداقل باید یک خط حذف شود. پس پاسخ سه خط است. □

۳ در جدول مقابل می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۸ را به گونه‌ای قرار دهیم که اعداد در هر سطر از چپ به راست صعودی و در هر ستون نیز از بالا به پایین صعودی باشند. اگر مکان قرار گرفتن اعداد ۱ و ۲ در جدول مطابق شکل مقابل باشد، بقیه‌ی اعداد را به چند طریق می‌توان در جدول چید؟ دقت کنید که دو خانه‌ی پایینی جدول در یک سطر قرار دارند.

۲۴ (۱) ۱۲ (۲) ۳۲ (۳) ۳۶ (۴) ۱۸ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

مرحله‌ی اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

اگر جدول را به شکل یک اسب ببینیم، هر یک از اعداد ۳ تا ۸ را می‌توان در سر اسب قرار داد. از پنج عدد باقی‌مانده، بیش‌ترین در پای جلویی اسب و کم‌ترین در کنار ۱ قرار می‌گیرد. هر یک از سه عدد باقی‌مانده می‌تواند در پای پشتی اسب قرار بگیرد و سپس محل دو عدد دیگر به طور یکتا مشخص می‌شود. پس در کل $3 \times 6 = 18$ حالت برای قرار دادن اعداد وجود دارد.

□

شش درس با نام‌های A تا F داریم که روابط پیش‌نیازی آن‌ها در شکل مقابل نشان داده شده است. اگر درس x پیش‌نیاز درس y باشد، آن‌گاه پیکانی از x به y در این شکل رسم شده است. می‌خواهیم این شش درس را در شش ترم متوالی و در هر ترم یک درس بگیریم طوری که تمامی روابط پیش‌نیازی رعایت شده باشند، یعنی اگر درس x پیش‌نیاز درس y است، آن‌گاه درس x باید پیش از درس y گرفته شود. به چند ترتیب مختلف می‌توان درس‌ها را با رعایت روابط پیش‌نیازی گرفت؟ به طور مثال، ترتیب $\langle A, B, D, E, C, F \rangle$ یک ترتیب مجاز است.

۲۴ (۵)

۱۴ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

درس F باید همیشه به عنوان آخرین درس گرفته شود، پس می‌توان آن را حذف کرد. سه درس میانی C, D, E به هر ۶ ترتیب ممکن می‌توانند ظاهر شوند. در هر صورت A باید پیش از این سه درس و B باید پیش از D باشد. اگر دروس C و E را با $-$ نشان دهیم، به ازای ترتیب $- AD -$ درس B دو انتخاب، به ازای $A - D -$ درس B سه انتخاب، و به ازای $A - - D$ درس B چهار انتخاب دارد. پس تعداد ترتیب‌های ممکن $2 \times (2 + 3 + 4) = 18$ است.

□

در ایستگاه تاکسی موصل به صلاح‌الدین، مردم برای استفاده از تاکسی در صف می‌ایستند. به محض آمدن یک تاکسی، اگر تعداد افراد صف حداقل چهار نفر بود، ۴ نفر جلوی صف و در غیر این صورت تمام افراد صف در تاکسی می‌نشینند و تاکسی بلافاصله حرکت می‌کند. سه تروریست می‌خواهند از موصل به صلاح‌الدین بروند. آن‌ها یک تفنگ دارند و می‌توانند با هر تیر آن، یک نفر از افراد دیگر صف را بکشند. این سه تروریست همزمان به انتهای صف رسیده و می‌خواهند حتماً با هم در یک تاکسی بنشینند. قبل از آن‌که آن‌ها به ایستگاه تاکسی بروند، می‌خواهند تعدادی تیر با خود بردارند که بتوانند به طور تضمینی، به هدفشان (نشستن با هم در تاکسی) برسند. آن‌ها حداقل چند تیر باید با خود بیاورند؟

۰ (۵)

۳ (۴)

۱ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

آن‌ها کافی است تعدادی از افراد صف را بکشند، تا نفر اول خودشان مکان $4k + 1$ یا $4k + 2$ از صف را داشته باشد که این کار با ۲ تیر قابل انجام است.

□

دو تاس در اختیار داریم. پس از پرتاب آن‌ها به اندازه‌ی ضرب دو عددی که روی تاس‌ها آمده امتیاز می‌گیریم. اگر هر تاس با احتمال یکسان عددی بین ۱ تا ۶ بیاورد، به صورت میانگین چه امتیازی می‌توانیم کسب کنیم؟

۱۲/۵ (۵)

۱۳/۵ (۴)

۱۲/۲۵ (۳)

۹ (۲)

۱۰/۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

با توجه به اینکه احتمال هر ۳۶ حالت ممکن یکسان است، کفایت مجموع امتیاز همه ی حالات را محاسبه و بر ۳۶ تقسیم کنیم. ضرب هر دو عدد بین ۱ تا ۶ باید یکبار ظاهر شود که همانند یک جدول ضرب ۶ در ۶ است که مجموع خانه های آن می شود: $21^2 = (1 + 2 + \dots + 6)^2$ در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با:

$$\frac{21^2}{36} = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$$

به چند طریق می توان خانه های خالی (سفید رنگ) جدول 4×4 پایین سمت راست را با قطعاتی که در شکل پایین سمت چپ می بینید پر کرد، طوری که هر خانه توسط دقیقاً یک قطعه پوشیده شود و قطعه های استفاده شده به طور کامل درون خانه های سفید جدول قرار بگیرند؟ از هر قطعه به تعداد دلخواه وجود دارد و قطعات را می توان چرخاند یا دوران داد.

۳ (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۱ (۴) ۴ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

همانطور که مشاهده می شود تعداد خانه های خالی جدول فرد است. در نتیجه از قطعه ی ۵ خانه ای نیز باید فرد بار استفاده شود. اما براحتی مشاهده می شود که حداکثر یک بار می توان از این قطعه استفاده کرد. اگر جای قطعه ی ۵ خانه ای را مشخص کنیم، نحوه ی قرار گیری بقیه ی قطعات بصورت یکتا مشخص می شود. با توجه به اینکه قطعه ی ۵ خانه ای می تواند در دو جای جدول قرار گیرد جواب این مسئله نیز برابر ۲ خواهد بود.

امروز بانک شهر فسقلی ها ۵۰ مشتری دارد. مشتری ها در یک صف ایستاده اند و هرکدام کارتی دارد که نوبت او را مشخص می کند (عددی بین ۱ تا ۵۰). این بانک سه باجه برای پاسخ گویی دارد و هر مشتری اگر نوبت به او برسد می تواند به یکی از این سه باجه مراجعه کند. ساعت ۱۲ ظهر است و هم اکنون به ترتیب در سه باجه نوبت مشتری های ۴۴، ۴۸ و ۵۰ است. این ۵۰ مشتری به چند طریق از سه باجه می توانند استفاده کرده باشند؟

۳۴۳ × ۲۳ (۱) ۳۴۷ (۲) ۳۴۴ × ۲۴ (۳) ۳۴۳ × ۲۴ (۴) ۳۴۴ × ۲۳ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

هر مشتری که نوبت او بین ۱ تا ۴۷ باشد کارش تمام شده است و می تواند از هرکدام از سه باجه استفاده کرده باشد. مشتری ۴۴ در باجه اول است و مشتری ها ۴۵ تا ۴۷ می توانند در یکی از باجه های دوم یا سوم باشند (چون در باجه ی اول هنوز کار نفر ۴۴ تمام نشده است). به همین ترتیب مشتری ۴۸ در باجه دوم است و نفر ۴۹ و ۵۰ نیز حتماً از باجه ی سوم استفاده کرده اند. در نتیجه پاسخ برابر است با: 343×23

یک جدول 21×10 را با کاشی هایی به شکل مستطیل های 1×2 فرش کرده ایم. حداکثر چند خط می توان روی خطوط داخل این جدول رسم کرد که هیچ یک از کاشی ها را قطع نکند؟ به طور مثال در جدول 4×3 روبه رو تنها دو خط قابل رسم است، ولی اگر همه ی کاشی ها را افقی قرار دهیم، تعداد خطوط قابل رسم ۳ خواهد بود که بیش ترین مقدار ممکن است.

۲۰ (۱) ۱۵ (۲) ۲۲ (۳) ۲۷ (۴) ۲۴ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

اگر همه ی کاشی ها افقی باشند، $24 = 4 + 20$ خط با این خاصیت خواهیم داشت. از طرفی هیچ دو خط عمودی مجاور نمی توانند دارای این خاصیت باشند، زیرا بین آن ها ۲۱ خانه است. پس حداکثر ۴ خط عمودی و حداکثر ۲۰ خط افقی خواهیم داشت. □

در یک دنیا ۱۶ کشور با شماره های ۱ تا ۱۶ وجود دارد. هر کشور با شماره ی x ، با کشورهای $x-1$ ، $x+1$ ، $x-4$ و $x+4$ (در صورت وجود) رابطه ی اقتصادی دارد. برای نمونه، کشور ۷ با کشورهای ۳، ۶، ۸ و ۱۱، و کشور ۲ با کشورهای ۱، ۳ و ۶ رابطه دارد. ۳ تا از کشورها یک اتحادیه تشکیل داده اند. هر سال هر کشوری که با دست کم دو تا از کشورهای اتحادیه رابطه ی اقتصادی داشته باشد، به اتحادیه اضافه می شود. با در نظر گرفتن حالت های مختلف برای ۳ کشور اولیه ی اتحادیه، این اتحادیه پس از ۲۰ سال حداکثر چند کشور خواهد داشت؟

۱۶ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۴ (۴) ۱۲ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

اگر در ابتدا، کشورهای ۱ و ۳ و ۵ عضو اتحادیه باشند، تمام کشورها عضو اتحادیه خواهند شد. پس پاسخ برابر ۱۶ است. □

هژبر یک دستگاه «سیب شناس» خریده است. این دستگاه ۳ سیب می گیرد و اگر حداقل k سیب خراب در بین این ۳ سیب وجود داشته باشد، بوق می زند! حال هژبر ۱۴ سیب خریده است و می داند k تا از این سیب ها خراب است. در حالات زیر حداکثر چند بار باید از دستگاه استفاده کند تا یکی از سیب های خراب را بیابد: حالت اول $k=1$ و حالت دوم $k=3$ (جواب این دو حالت به ترتیب از راست به چپ آمده اند).

۵ (۱) و ۳۶۳ ۶ (۲) و ۳۶۳ ۷ (۳) و ۳۶۳ ۷ (۴) و ۳۶۴ ۶ (۵) و ۳۶۴

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

برای قسمت $k=1$ اگر تعداد کل سیب ها ۵ تا باشد می توان سیب خراب را با ۳ حرکت پیدا کرد: ابتدا ۳ سیب را انتخاب می کنیم و به دستگاه می دهیم، اگر همگی سالم باشند در حرکت بعدی یک سیب انتخاب نشده و دو سیب سالم را به دستگاه می دهیم و وضعیت همه سیب ها مشخص می شود اما اگر دستگاه بوق بزند می فهمیم که ۲ سیب انتخاب نشده سالم اند و با استفاده از آن ها وضعیت ۳ سیب اولی را مشخص می کنیم.

به طور کلی اگر پس از یک آزمایش دستگاه بوق بزند با دو آزمایش بعدی می توان سیب گنبدیده را تعیین کرد. اگر $f(x)$ را برابر با تعداد آزمایش های مورد نیاز برای تعیین کردن سیب خراب در بین x سیب در نظر بگیریم ($5 \leq x$) می توان رابطه ی بازگشتی $f(x) = f(x-3) + 1$ را اثبات کرد: اگر سه سیب را به دستگاه دهیم و دستگاه بوق بزند، قطعاً سیب خراب داخل این دسته است و سیب های خارج این دسته سالم اند و به راحتی می توان سیب خراب را با ۲ حرکت پیدا کرد. در غیر این صورت می توان این ۳ سیب را در نظر نگرفت و ادامه داد. جواب نهایی برابر است با: $f(14) = f(5) + 3 = 6$. برای قسمت $k=3$ اگر دو دسته ۳ تایی متفاوت از سیب ها وجود داشته باشد که هیچکدام را به دستگاه نداده باشیم و دستگاه نیز تاکنون بوق نزده باشد نمی توان تشخیص داد که کدام یک از این دو دسته تمامی سیب های گنبدیده است. بنابراین تنها می توانیم یک دسته ۳ تایی داشته باشیم که به دستگاه داده نشده و نتیجه آن با توجه به نتیجه بقیه دسته ها به صورت یکتا مشخص خواهد شد.

در این صورت باید تمامی راه های انتخاب ۳ سیب از ۱۴ سیب به جز یک حالت را امتحان کرد تا به جواب برسیم. بنابراین تعداد دفعات استفاده از دستگاه برابر است با: $f(14) - 1 = 363$. □

تعداد ۱۳۹۳ ماشین داریم. هر ماشین در یک لحظه از زمان روی یک نقطه از محور مختصات ظاهر شده و تا ابد با سرعتی ثابت در یک جهت مشخص (سمت چپ یا راست) شروع به حرکت می کند. در هر لحظه، ماشینی

مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

که در سمت راست همه‌ی ماشین‌های دیگر قرار بگیرد، ماشین برنده می‌نامیم. در طول زمان ماشین برنده حداکثر چند بار تغییر می‌کند؟

۱۳۹۲ (۱) ۲۰۹۰ (۲) ۲۷۸۴ (۳) ۱۳۹۳ (۴) ۵ بی‌نهایت (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

ماشین برنده به دو علت می‌تواند تغییر کند: (۱) به علت ظاهر شدن یک ماشین در سمت راست ماشین برنده‌ی فعلی (۲) به علت سبقت گرفتن یک ماشین از ماشین برنده‌ی فعلی. بدیهی است که تغییرات از نوع (۱) حداکثر به تعداد ماشین‌ها منتهای یک یعنی ۱۳۹۲ است. در مورد تعداد تغییرات از نوع (۲) نیز می‌توان از این شهود استفاده کرد که هر ماشین برنده‌ای که از ماشین دیگری عقب بیافتد دیگر نمی‌تواند ماشین برنده لقب بگیرد. بنابراین تعداد تغییرات از نوع (۲) برابر $1392 - 1 = 1391$ خواهد شد. در ضمن می‌توان مثالی زد که ماشین برنده ۲۷۸۴ بار تغییر کند. تصور کنید که ماشین i ام در در زمان i در نقطه i از محور مختصات ظاهر شود. فرض کنید همه‌ی ماشین‌ها به غیر از ماشین اول با سرعت نزدیک به صفر به سمت راست حرکت کنند و ماشین اول با سرعت ثابت کمی کمتر از ۱ به سمت راست حرکت کند. به سادگی می‌توان دید در این مثال ماشین برنده ۲۷۸۴ بار تغییر می‌کند. □

فاطمه جایگشت‌ها را خیلی دوست دارد. او همیشه درایه‌های جایگشت‌ها را از صفر شماره‌گذاری می‌کند و برای یک جایگشت عدد زیبایی آن را این گونه تعریف می‌کند: به ازای هر درایه، XOR شماره‌ی آن درایه و عددی که در آن قرار دارد را حساب می‌کند، و سپس اعداد حاصل را با هم جمع می‌کند. به نظر او هر چه عدد زیبایی یک جایگشت بیش‌تر باشد، جایگشت زیباتر است! حال به او بگویید بین جایگشت‌های مختلف اعداد ۰ تا ۶، بیش‌ترین میزان زیبایی چقدر است.

۴۲ (۱) ۳۶ (۲) ۳۲ (۳) ۴۰ (۴) ۴۸ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

یکی از حالاتی که جواب ۴۲ می‌شود این است که جایگشت $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 0)$ باشد. اثبات می‌کنیم جواب هیچ گاه از ۴۲ بیش‌تر نخواهد شد. برای راحتی کار فرض کنید که اعداد ۰ تا ۶ را با سه رقم باینری نمایش دهیم. در عملیات XOR تعداد ارقام باینری افزایش پیدا نخواهد کرد، پس نتیجه XOR زمانی بیشینه خواهد شد که هر رقم در دقیقاً یکی از دو عدد یک باشد و می‌دانیم در این حالت XOR مشابه جمع عمل خواهد کرد. بنابراین حداکثر مجموع کل زمانی رخ خواهد داد که XOR هر جایگاه برابر با جمع شماره آن جایگاه و عدد درونش باشد. پس تمامی اعداد ۰ تا ۶ دو بار در مجموع کل می‌آیند و جواب کل برابر با $42 = 2 \times \frac{6 \times 7}{2}$ خواهد بود. □

تعدادی سیب و انار و پرتقال و دو گلدان جادویی داریم که محصولاتشان پس از یک ماه می‌رسند. ابتدای هر ماه می‌توانیم به یکی از شیوه‌های زیر در آن‌ها میوه بکاریم و در انتهای ماه محصول را جمع‌آوری کنیم. (هر حالت به تنهایی در یک گلدان انجام می‌شود و پس از جمع‌آوری هیچ اثری از درخت و میوه‌ی کاشته‌شده باقی نمی‌ماند):

- یک سیب بکاریم و سه سیب برداشت کنیم.
- یک انار بکاریم و پنج انار برداشت کنیم.
- یک پرتقال بکاریم و دو پرتقال برداشت کنیم.
- دو سیب و دو انار بکاریم و چهار پرتقال برداشت کنیم.

فرض کنید در ابتدا از هر میوه یکی داریم. به چه تعداد از حالات زیر می‌توان رسید؟ (۱، ۲، ۳) یعنی یک سیب و دو انار و سه پرتقال.

مرحله ی اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

- (۱۳۹۳, ۲۰۱۵, ۱۴۳۶)
- (۱۳۹۳, ۱۴۳۶, ۲۰۱۵)
- (۱۳, ۷, ۴)
- (۱۰۰, ۱۰۰, ۱۰۰)

۳ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

اولین شرط برای حالت نهایی، فرد بودن تعداد سیب ها و انارها است. چون در هر ماه زوجیت تعداد سیب ها و انارها ثابت است). چون در ابتدا یک سیب و یک انار داریم پس همواره تعداد آن ها فرد است. در حالتی که تعداد انارها $4k + 1$ باشد، می توان با سه حرکت اول تمام حالاتی که شرط بالا را دارند تولید کرد. ولی اگر تعداد انارها $4k + 3$ باشد حداقل یکبار از روش چهارم باید استفاده کنیم و در نتیجه حداقل ۵ پرتقال خواهیم داشت. هر حالتی که دو شرط بالا را داشته باشد را به سادگی می توان تولید کرد. در نتیجه تنها حالت (۱۳۹۳, ۲۰۱۵, ۱۴۳۶) قابل دستیابی است. □

۱۵ ۱۰۲۴ لامپ خاموش با شماره های ۱ تا ۱۰۲۴ در یک ردیف قرار دارند. کیان در ۱۰ مرحله کلید تعدادی از لامپ ها را می زند که منجر به تغییر وضعیت آن لامپ ها می شود (از خاموش به روشن و برعکس). اگر کیان در مرحله i ام کلید همه ی لامپ هایی را که باقی مانده ی شماره آن ها بر 2^i صفر نیست بزند، در پایان چند لامپ روشن وجود خواهد داشت؟

۳۴۱ (۱) ۶۸۳ (۲) ۶۸۲ (۳) ۳۴۲ (۴) ۱۰۲۳ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

کافی است اعداد را به صورت دودویی در نظر بگیریم و روی اولین جایی که رقم ۱ ظاهر شده است حالت بندی کنیم. در جدول زیر تعداد خوردن کلید برای هر دسته از لامپ ها و تعداد لامپ های موجود در هر دسته نوشته شده است. واضح است که در هر دسته، تعداد زده شدن کلید به تعداد رقم های بعد از اولین رقم ۱ می باشد. در نمایش اعداد x به منظور ۱ یا ۰ می باشد و لامپ های دسته هایی در پایان روشن خواهد بود که «فرد» بار کلید آن ها خورده شده باشد.

تعداد خوردن کلید	تعداد اعداد هر دسته	حالت اعداد
۱۰	2^9	$0xxxxxxxxx1$
۹	2^8	$0xxxxxxxx10$
۸	2^7	$0xxxxxxxx100$
۷	2^6	$0xxxxxxx1000$
۶	2^5	$0xxxxxx10000$
۵	2^4	$0xxxxx100000$
۴	2^3	$0xxx1000000$
۳	2^2	$0xx10000000$
۲	2^1	$0x100000000$
۱	۱	01000000000
۰	۱	10000000000

مرحله ی اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

پس پاسخ سوال برابر با $2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = 341$ است. □

یک گراف را «زیبا» می نامیم اگر رأسی در آن وجود داشته باشد که در تمام دورهای به طول فرد آمده باشد. بین تمام گراف های ساده ی ۱۰۱ رأسی زیبا، گرافی را در نظر بگیرید که بیشترین تعداد یال را دارد. این گراف چند یال دارد؟

(۱) ۴۷۰ (۲) ۲۵۰۰ (۳) ۲۶۰۰ (۴) ۱۰۱ (۵) ۵۰۵۰

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

اگر راسی که در همه ی دورهای فرد وجود دارد را حذف کنیم، در این صورت گراف به دست آمده دور فرد ندارد و در نتیجه دوبخشی است. گراف دوبخشی ۱۰۰ راسی هم زمانی بیشترین تعداد یال را دارد که اندازه دو بخش برابر بوده و گراف دوبخشی کامل باشد. این گراف دوبخشی ۲۵۰۰ یال دارد و راس حذف شده هم حداکثر درجه اش ۱۰۰ است. پس تعداد یال های گراف حداکثر ۲۶۰۰ است. در ضمن اگر به گراف دوبخشی کامل که اندازه ی هر بخش ۵۰ است، یک راس اضافه شود که به همه ی رئوس دیگر متصل باشد، گراف به دست آمده زیبا است و ۲۶۰۰ یال خواهد داشت. □

یک جدول 4×4 داده شده است. می خواهیم شش مهره ی یکسان را در شش خانه ی متفاوت از جدول قرار دهیم طوری که در هر سطر و در هر ستون تعداد زوجی مهره قرار گرفته باشد. به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

(۱) ۶۴ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۱۲۸ (۵) ۹۶

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

واضح است که در یک سطر نمی توان ۴ مهره قرار داد، زیرا با دو مهره ی باقی مانده نمی توان زوج بودن تمام ستون ها را حفظ کرد. بنابراین در هر سطر (و در هر ستون) صفر یا دو مهره قرار دارد. با توجه به وجود ۶ مهره، دقیقاً یک سطر و یک ستون خالی خواهیم داشت. برای انتخاب این سطر و ستون خالی 4×4 انتخاب وجود دارد. به ازای هر انتخاب، در جدول 3×3 باقی مانده به ۶ طریق می توان مهره ها را قرار داد. بنابراین پاسخ برابر $96 = 4 \times 4 \times 6$ است. □

دنباله ی (۱، ۶، ۱۰، ۱، ۵، ۹، ۱۱، ۷) را در نظر بگیرید. به چند طریق می توان بین اعداد این دنباله عملگرهای AND و OR قرار داد طوری که حاصل عبارت برابر صفر شود؟ دقت کنید که باید هفت عملگر گذاشته شود و عملگرها از چپ به راست محاسبه می شوند.

(۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۲۴ (۴) ۴۲ (۵) ۶۴

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

برای صفر شدن حاصل عبارت، باید تمامی رقم های آن صفر شوند. آخرین عدد عبارت را در نظر بگیرید، در صورتی که تمامی رقم های آن صفر باشند بر حسب آخرین عملگر مسئله را حل می کنیم. برای سادگی عملگرهای AND و OR را به ترتیب با ۸ و ۷ نشان می دهیم. اگر عملگر آخر ۸ باشد، عبارت مستقل از سایر عملگرها صفر خواهد شد که در این صورت 2^{k-1} حالت داریم (k تعداد عملگرهاست) و در صورتی که ۷ باشد، پاسخ برابر است با تعداد راه هایی که می توان بقیه ی دنباله را صفر کرد. اما اگر آخرین عدد صفر نباشد، قطعاً آخرین عملگر ۸ است، زیرا در غیر این صورت حاصل عبارت صفر نخواهد شد. حال در صورتی که ۸ بگذاریم، این استدلال را برای سایر اعداد دنباله تکرار می کنیم. □

مرحله ی اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۹

جدولی با ۱۰۰ سطر همانند شکل روبرو در نظر بگیرید که ۵۰ سطر آن دو خانه و ۵۰ سطر آن سه خانه دارند. می خواهیم از گوشه ی پایین چپ به گوشه ی بالا راست برویم به صورتی که از روی خطها حرکت کرده و همواره به سمت بالا و یا راست حرکت کنیم. به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

۴۳۵ (۱) ۳۸۰ (۲) ۴۲۰ (۳) ۳۹۹ (۴) ۴۱۸ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

از اولین باری که به سمت راست حرکت کنیم همواره در هر سطر، یک بار به سمت راست حرکت می کنیم. در نتیجه پس از حداکثر سه سطر به ستون سمت راست می رسیم. پس کافی است اولین حرکت به سمت راست را در نظر بگیریم (با توجه به این که در سطر شماره ی فرد هست یا زوج) و تعداد حالات ممکن را محاسبه کنیم:
 سطرهای فرد: $۴۹ \times ۵ + ۴ + ۱ = ۲۵۰$
 سطرهای زوج: $۴۹ \times ۳ + ۲ = ۱۴۹$
 در نتیجه در مجموع ۳۹۹ حالت وجود دارد.

□

۲۰

سه نفر داریم که پول هر یک از آنها (به دلار) یک عدد صحیح بزرگتر از صفر است و مجموع پول آنها ۱۰۱ دلار است. هر گاه پول یکی از این افراد از مجموع پول دو نفر دیگر بیش تر باشد، می گوییم بین این سه نفر «تضاد طبقاتی» وجود دارد. به چند حالت ممکن است بین این سه نفر تضاد طبقاتی وجود داشته باشد؟

۳۸۲۵ (۱) ۳۶۷۵ (۲) ۱۲۷۵ (۳) ۱۲۲۵ (۴) ۷۳۵۰ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

افراد را با شماره های ۱ تا ۳ شماره گذاری می کنیم و فرض می کنیم پول نفر شماره i ، برابر x_i دلار باشد. ابتدا به ۳ حالت، فردی که پولش از بقیه بیش تر است را انتخاب می کنیم. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید این فرد، نفر شماره ۱ باشد. پول این نفر حداقل ۵۱ دلار است و پول هر یک از دو نفر دیگر حداقل ۱ دلار است. پس جواب، برابر تعداد جواب های معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 = ۱۰۱$ ، $x_1 \geq ۵۱$ ، $x_2 \geq ۱$ ، $x_3 \geq ۱$ در مجموعه اعداد صحیح است که برابر

$$\binom{(۱۰۱ - (۵۱ + ۱ + ۱)) + ۲}{۲}$$

است. پس پاسخ نهایی برابر است با:

$$3 \binom{۵۰}{۲} = 3 \times \frac{۵۰ \times ۴۹}{۲} = ۳۶۷۵$$

□

۲۱

یارا یک قطعه چوب به طول ۲۰ به یاور داده و از او خواسته که آن را به ۲۰ قطعه به طول ۱ تبدیل کند. هر بار که یاور یک قطعه چوب به طول $x + y$ را به دو قطعه با طول های x و y تقسیم کند، یارا $x \times y$ تومان به او و $x + y$ تومان به شاگردش می دهد. حداکثر پولی که یاور و شاگردش می توانند به دست بیاورند به ترتیب چند است؟

۱۱۶ و ۲۱۰ (۱) ۲۰۹ و ۱۹۰ (۲) ۲۰۹ و ۱۷۰ (۳) ۲۰۹ و ۱۹۰ (۴) ۸۸ و ۱۷۰ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

پولی که یاور به دست می آورد برای همه ی روش های خرد کردن ثابت است. قطعه چوب به طول $3 + 2$ را به صورت $(1 + 1) + (1 + 1 + 1)$ در نظر بگیرید. هنگام شکستن این قطعه چوب به دو قطعه به میزان $(1 + 1) \times (1 + 1 + 1)$ تومان پول به یاور داده می شود. حال تکه های چوب به طول واحد در یک قطعه چوب را شماره گذاری کنید. تکه i م و j م تا زمانی که پس از تقسیم شدن هر دو در یک قطعه قرار بگیرند، یارا پولی بابت آن دو به یاور نمی دهد. اما اولین باری که تکه i م و j م پس از تقسیم در دو قطعه ی جداگانه قرار گیرند، یارا یک واحد پول بابت ضرب i مین j که در پرانتز اول قرار می گیرد، در j مین i که در پرانتز دوم قرار می گیرد به یاور می دهد. از آن جایی که اکنون این دو تکه در یک قطعه قرار ندارند، دیگر بابت آن ها پولی به یاور داده نخواهد شد. پس یاور به هر صورتی که چوب را خرد کند، به میزان ثابتی پول از یارا می گیرد. حال اگر هر بار یک قطعه به طول واحد از چوب جدا کند، $\frac{19 \times 20}{2}$ تومان به دست می آورد. پس پاسخ برابر با گزینه ۲ یعنی ۱۹۰ می باشد.

برای شاگرد یاور، بهترین حالت زمانی رخ می دهد که از یکی از دو سر چوب شروع کنیم و هر بار یک واحد از چوب ببریم. با استقرای قوی ثابت می کنیم برای یک قطعه چوب به طول n بیشترین پول قابل دستیابی برابر است با $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$. به ازای $n = 2$ حکم بدیهی است. فرض کنید در مرحله اول چوب به دو قسمت به طول های k و $n + 1 - k$ تقسیم شود. آن گاه پولی که شاگرد یاور می گیرد، در بهترین حالت برابر است با:

$$T(n+1) = (k+n+1-k) + T(k) + T(n+1-k)$$

بدون از دست رفتن کلیت مساله فرض کنید: $k < n + 1 - k$ ، حال طبق فرض استقرا داریم:

$$T(n+1) = n+1 + \frac{(k+2)(k-1)}{2} + \frac{(n+2-k)(n-k)}{2} = n + \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + k^2 - k(n+1)$$

حال به دو جمله ی آخر توجه کنید، چون $k > n + 1 - k$ است. بیشترین مقدار عبارت بالا زمانی خواهد بود که k کمترین مقدار خود را داشته باشد، پس باید $k = 1$ باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$T(n+1) = n + \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 1 - (n+1) = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$$

□

سلطان در نقطه ی ۰ از محور اعداد صحیح قرار گرفته است و گرفتار ۹ غول خطرناک با شماره های ۱ تا ۹ شده است. غول ها دو نوع هستند: دسته ی نخست، غول های راست گرا که دستور می دهند سلطان ۲ واحد به راست برود، و دسته ی دوم غول های چپ گرا که دستور می دهند سلطان ۱ واحد به چپ برود.

کار در ۹ مرحله انجام می شود. در مرحله ی i ام، غول شماره ی i ، دستور موردنظر را (بر اساس راست گرا یا چپ گرا بودنش) به سلطان می دهد. سلطان می تواند به دستور غول عمل کند یا این که غول را بکشد و جابه جا نشود. اگر سلطان یکی از غول ها را بکشد، خسته می شود و ۲ غول بعدی را نمی تواند بکشد. در صورتی که در انتها، سلطان در خانه ی ۰ مختصات باشد، آزاد می شود و در غیر این صورت، زندانی می ماند. سلطان تنها می داند که k تا از غول ها راست گرا هستند و $9 - k$ غول دیگر، چپ گرا هستند، اما شماره ی غول ها را نمی داند و طبیعتا از ابتدا نمی داند که در مرحله ی i ام چه غولی دستور خواهد داد. به ازای چند عدد صحیح k با شرط $9 \leq k \leq 0$ ، سلطان الگوریتمی دارد که بتواند به طور تضمینی آزاد شود؟

۴ (۵)

۳ (۴)

۰ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

سلطان می تواند حداکثر ۳ غول را بکشد. ابتدا فرض کنید $k \geq 6$ باشد. در این صورت سلطان حداقل باید حرف حداقل $3 = 6 - 3$ غول راست گرا را گوش کند و دست کم $6 = (6 - 3) \times 2$ واحد به راست برود. پس برای رسیدن به نقطه ی ۰، دست کم ۶ غول چپ گرا نیاز است؛ در حالی که حداکثر $3 = 6 - 6 = 9$ غول چپ گرا وجود دارد.

حال فرض کنید $k = 5$ باشد. اگر سلطان کم تر از ۳ غول راست گرا را بکشد، دست کم نیاز به $6 = (5 - 2) \times 2$ گام به سمت چپ دارد؛ در حالی که تنها ۴ غول چپ گرا وجود دارد. از طرفی اگر ترتیب غول ها به این صورت

مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

باشد که در ابتدا هر ۵ گول راست گرا دستور بدهند و سپس ۴ گول چپ گرا دستور بدهند، سلطان می تواند حداکثر ۲ تا از گول های راست گرا را بکشد. پس در $k = 5$ هم الگوریتم تضمینی وجود ندارد.

حال فرض کنید $k < 2$ باشد. در این صورت سلطان با دست کم ۸ گول چپ گرا مواجه است که می تواند حداکثر ۳ تا از آن ها را بکشد. پس حداقل $5 = 8 - 3$ گام باید به سمت چپ انجام بدهد؛ در حالی که حداکثر ۱ گول راست گرا وجود دارد و سلطان نمی تواند در انتها در نقطه ی ۰ باشد.

حال فرض کنید $k = 4$ باشد. تنها حالت برد سلطان این است که ۲ گول راست گرا و ۱ گول چپ گرا را بکشد. گول ها را در ۳ دسته ی ۱ و ۲ و ۳ تقسیم بندی می کنیم که دسته ی شماره i ، شامل گول های شماره $3i - 1, 3i - 2, 3i$ است. سلطان از هر دسته حداکثر ۱ گول می تواند بکشد و از طرفی باید ۳ گول بکشد؛ پس از هر دسته باید دقیقن یک گول بکشد. اگر در دسته ی ۱، تنها ۱ گول راست گرا باشد، سلطان باید آن را بکشد؛ چون ممکن است ۳ گول دیگر، در یک دسته باشند و نمی توان از آن ها ۲ گول را کشت. پس سلطان هنگام دیدن گول های دسته ی اول، تا گول شماره ۳، اگر گول راست گرا ندید، نباید آن را بکشد. حال فرض کنید ترتیب گول ها از چپ به راست، به ترتیب زیر تنظیم شده باشد (سلطان این ترتیب را نمی داند، R یعنی راست گرا و L یعنی چپ گرا):

$LLRRRLRL$

سلطان تا گول شماره ۳ کسی را نمی کشد و گول شماره ۳ را می کشد. پس گول های شماره ۴ و ۵ را نمی تواند بکشد. پس مجبور است گول شماره ۶ را بکشد. پس گول های ۷ و ۸ را نمی تواند بکشد. پس مجبور است گول شماره ۹ را بکشد که به هدف خود نخواهد رسید. پس در $k = 4$ هم الگوریتم تضمینی وجود ندارد.

حال فرض کنید $k = 3$ باشد. سلطان اگر هیچ گولی را نکشد، به راحتی به هدف خود می رسد. پس در $k = 3$ الگوریتم تضمینی وجود دارد.

برای $k = 2$ ، سلطان باید ۳ گول چپ گرا را بکشد. مانند حالت $k = 4$ ، گول ها را ۳ دسته می کنیم. سلطان اگر در هر دسته، نخستین گول چپ گرایی که می توانست بکشد را بکشد، به هدف خود خواهد رسید. پس در $k = 2$ الگوریتم تضمینی وجود دارد.

پس پاسخ برابر ۲ ($k = 2$ و $k = 3$) است. □

۲۳

دنباله ی $(3, 5, 7, 4, 3, 5, 7, 4, 5, 6, 5)$ را در نظر بگیرید. دستگاهی داریم که می تواند جمع هر بازه از این اعداد را حساب کند. یعنی اگر دو عدد i و j را به آن بدهیم ($i \leq j$)، جمع اعداد i ام تا j ام (شامل خود این دو عدد) را محاسبه می کند. اما این دستگاه یک مشکل دارد و آن این که در هنگام حساب کردن جمع اعداد (در مبنای دو) سرریز اعداد (دو بر یک آن ها) را حساب نمی کند. یعنی برای ورودی های ۶ و ۷ که باید جمع ۵ و ۳ را محاسبه کند، خروجی اش عدد ۶ است ($110 = 11 + 101$).

برای این که ثابت کنیم دستگاه اشتباه کار می کند می خواهیم یک بازه را نشان دهیم که جمع اعداد آن با این دستگاه صفر شود. در این دنباله چند بازه داریم که جمع شان با این دستگاه صفر شود؟ به عبارت دیگر چند زوج i و j داریم که به ازای آن ها ماشین جواب صفر می دهد؟

۵ (۵) ۱۰ (۴) ۱ (۳) ۲ (۲) ۸ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

جمع بدون سرریز در مبنای دو یعنی همان XOR. برای حل سوال هم چون تمام جمع ها بازه ای اند می توانیم از ایده ی جمع پیشوندی prefix sum استفاده کنیم و به ازای هر تکرار در XOR پیشوندی این اعداد، یک بازه داریم که جمعش صفر است.

برای چک کردن، نمایش دودویی و در کنارش جمع پیشوندی آن ها آمده:

مرحله ی اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

array	binary	prefix XOR
		۰۰۰
۵	۱۰۱	۱۰۱
۶	۱۱۰	۰۱۱
۵	۱۰۱	۱۱۰
۴	۱۰۰	۰۱۰
۷	۱۱۱	۱۰۱
۵	۱۰۱	۰۰۰
۳	۰۱۱	۰۱۱
۴	۱۰۰	۱۱۱
۷	۱۱۱	۰۰۰
۵	۱۰۱	۱۰۱
۳	۰۱۱	۱۱۰

پس ۳ بار ۰۰۰ تکرار شده و ۳ بار ۱۰۱ و دو بار ۰۱۱ و دو بار ۱۱۰ و دو تای دیگر فقط یک بار آمده اند:

$$۳ + ۳ + ۱ + ۱ = ۸$$

□

یک جدول ۴×۴ را «خال خالی» می گوئیم، اگر خانه های آن به صورت شطرنجی (یک در میان) با رنگ های سیاه و سفید رنگ شده باشند. دو خانه از یک جدول را مجاور می گوئیم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. منظور از یک قطر در یک جدول، هر قطری اعم از اصلی و فرعی است. به این ترتیب، هر یک از خانه های گوشه به تنهایی یک قطر هستند و یک جدول ۴×۴ ، ۱۴ قطر دارد.

باب اسفنجی، آقای خرچنگ و اختاپوس هر کدام یک جدول ۴×۴ خال خالی دارند. باب اسفنجی در هر مرحله می تواند دو خانه ی مجاور از جدول خودش را در نظر بگیرد و رنگ آن دو خانه را جابه جا کند. آقای خرچنگ در هر مرحله می تواند دو خانه ی مجاور از جدول خودش را در نظر بگیرد و رنگ هر دو خانه را عوض کند (از سیاه به سفید و برعکس). اختاپوس نیز در هر مرحله می تواند یک قطر از جدول خودش را در نظر بگیرد و رنگ تمام خانه های آن قطر را عوض کند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید _____

چند جدول ۴×۴ متفاوت وجود دارد که باب اسفنجی با تعدادی مرحله می تواند به آن ها برسد؟

۲۴

$$(۱) ۲^۸ \quad (۲) ۲^{۱۵} \quad (۳) ۲ \binom{۱۶}{۸} \quad (۴) \binom{۱۶}{۸} \quad (۵) \frac{1}{2} \binom{۱۶}{۸}$$

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

تعداد خانه های سیاه ثابت (۸ تا) می ماند. از طرفی می توان الگوریتمی داد که به هر جدول با ۸ خانه ی سیاه رسید. پس پاسخ برابر $\binom{۱۶}{۸}$ است.

□

چند جدول ۴×۴ متفاوت وجود دارد که آقای خرچنگ با تعدادی مرحله می تواند به آن ها برسد؟

۲۵

مرحله ی اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱) 2^{16} (۲) 2^{16} (۳) 2^8 (۴) 2^{16} (۵) 2^{15}

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

زوجیت تعداد خانه های سیاه ثابت می ماند. از طرفی می توان الگوریتمی داد که به هر جدول با تعداد زوج خانه ی سیاه رسید. تعداد چنین جدول هایی نیز $2^{16}-1$ است. پس پاسخ برابر 2^{15} است. □

چند جدول 4×4 متفاوت وجود دارد که اختاپوس با تعدادی مرحله می تواند به آن ها برسد؟

(۱) 2^4 (۲) $2^{12} \times 9$ (۳) 2^{12} (۴) 2^{14} (۵) 2^{16}

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

خانه های گوشه، مستقلاً می توانند تغییر کنند. پس 2^4 حالت دارند. خانه های سفید ابتدایی تنها با یک دیگر و خانه های سیاه ابتدایی نیز تنها با یک دیگر تغییر می کنند. پس کافی است حالات یکی از آن ها را حساب کنیم. خانه های سفید ابتدایی به جز گوشه ها، ۶ خانه هستند که با حالت بندی ۱۶، به ۱۶ حالت می توانند برسند. پس پاسخ برابر $2^{12} = 16^2$ است. □

گراف G را به این شکل می سازیم: ابتدا به ازای هر یک از اعداد ۰ تا ۶۳ یک رأس در نظر می گیریم. سپس بین هر دو رأس که نمایش دودویی آن ها دقیقاً در یک بیت اختلاف دارد یک یال رسم می کنیم.

به هر زیرمجموعه ی ۷ تایی از رأس های G که دقیقاً شکل روبه رو را بسازند یک «آدمک» می گوئیم. دقت کنید که بین رأس های یک آدمک نباید هیچ یالی غیر از یال های نشان داده شده در شکل مقابل در گراف G وجود داشته باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

در گراف G چند آدمک می توان پیدا کرد؟

(۱) ۹۶۰۰ (۲) ۳۸۴۰ (۳) ۵۷۶۰ (۴) ۴۶۰۸۰ (۵) ۶۰۰

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

راس ها را به شکل روبه رو نام گذاری می کنیم. نمایش عدد رأس D در مبنای دو را برابر با $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)_2$ در نظر می گیریم. عدد راس های A, B, C, G باید دقیقاً در یک بیت با D اختلاف داشته باشند و رأس های A, B, C با هم تفاوتی ندارند. پس تا اینجا $4 \times \binom{6}{1} \times 64$ حالت داریم. عدد E و F در یک بیت با G متفاوت اند و به خاطر این که E و F نباید به A, B, C, D یال داشته باشند تنها در دو بیت خاص می توانند با G فرق کنند و از آنجایی که E و F در شکل تفاوتی ندارند این دو عضو یکتا معلوم می شوند. پس جواب نهایی برابر با $4 \times \binom{6}{1} \times 64 = 3840$ است. □

عدد یک آدمک را برابر با XOR مقدار راس های آن در نظر می گیریم. مجموع اعداد تمام آدمک ها در گراف G چند است؟

(۱) ۱۹۳۵۳۶۰ (۲) ۱۸۱۴۴۰ (۳) ۱۴۵۱۵۲۰ (۴) ۲۰۱۶ (۵) ۱۲۰۹۶۰

مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

ادعا می کنیم عدد هر آدمک برابر با نقیض عدد D است. برای اثبات ادعا اول ترتیب بیت ها رو جوری تغییر می دهیم که اختلاف A و B و C و G با D به ترتیب در بیت های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ باشند و تفاوت F و E با G در بیت های ۵ و ۶ باشند.

$$D = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)_2$$

$$A = (\overline{a_1}, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)_2$$

$$B = (a_1, \overline{a_2}, a_3, a_4, a_5, a_6)_2$$

$$C = (a_1, a_2, \overline{a_3}, a_4, a_5, a_6)_2$$

$$G = (a_1, a_2, a_3, \overline{a_4}, a_5, a_6)_2$$

$$E = (a_1, a_2, a_3, \overline{a_4}, \overline{a_5}, a_6)_2$$

$$F = (a_1, a_2, a_3, \overline{a_4}, a_5, \overline{a_6})_2$$

با توجه به اینکه به ازای هر بیت در D نقیض آن فرد بار آمده و خود آن زوج بار، XOR همه ی اعداد در نهایت برابر با نقیض D خواهد بود. با توجه به سوال قبل داریم که به ازای هر D دلخواه $4 \times \binom{6}{4}$ حالت مختلف داریم. پس مجموع عدد همه ی آدمک ها برابر با است با:

$$\sum_{x=0}^{63} x \times \binom{6}{4} \times 4 = \binom{64}{2} \times \binom{6}{4} \times 4 = 120960$$

□

باستان شناسان به تازگی روی سنگ های یک غار اشکالی از شجره نامه های یک قبیله ی باستانی یافته اند که نشان می دهد این قبیله در بچه دار شدن رسومات عجیبی داشته اند. در این قبیله اگر یک پدر k پسر داشته باشد، پسر بزرگ تر خانواده $k-1$ پسر به دنیا می آورد، پسر دوم خانواده $k-2$ پسر و همین طور تا پسر کوچک خانواده که هیچ پسری به دنیا نمی آورد و نباید پسر دار شود. در شکل روبه رو شجره نامه ی یک خاندان از این قبیله را می بینید که جد بزرگ آن ها دارای سه پسر بوده است. در این شکل پسران به ترتیب سن از چپ به راست قرار دارند (از بزرگ به کوچک). توجه داشته باشید که در این شجره نامه ها تنها اطلاعات مردان فامیل می آمده است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

در یکی از شجره نامه ها که روی سنگ ها یافت شده است، مشخص است که جد بزرگ خاندان ۱۰ پسر داشته است، اما اطلاعات مربوط به پسر سوم جد بزرگ بر اثر مرور زمان مخدوش شده است. با استفاده از اطلاعات فوق دانشمندان می خواهند بدانند تعداد مردان در خاندانی که جد بزرگش این پسر بوده، چند است؟

۲۵۶ (۵)

۱۲۸ (۴)

۴۰۳۲۰ (۳)

۸۴ (۲)

۵۰۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

تعداد گره های موجود در هر زیر درخت با این خاصیت برابر با توانی از دو است. بصورت دقیق تر تعداد گره های یک درخت که ریشه ی آن k فرزند دارد برابر با 2^k می باشد. فرزند سوم هفت فرزند خواهد داشت و در نتیجه در این زیر درخت 2^7 گره وجود خواهد داشت.

□

مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

۳۰

فاصله‌ی فامیلی دو فرد در یک شجره‌نامه را طول مسیری که باید روی شجره‌نامه طی کرد تا از یک فرد به فرد دیگر رسید تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال فاصله‌ی فامیلی یک فرد با پدرش یک، با پدربزرگش دو و با عموی سه است. حال در یک خاندان که جد بزرگش ۱۰۰ پسر دارد، فاصله‌ی فامیلی چند جفت از افراد در این خاندان برابر با ۱۹۸ می‌باشد؟ (جفت‌های (a, b) و (b, a) در شمارش تفاوتی ندارند و یک بار شمرده می‌شوند).

۱۹۷ (۱) ۱۹۸ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۱۰۰ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

برای این که مسیر به طول ۱۹۸ داشته باشیم این مسیر حتما باید از ریشه عبور کند. همچنین می‌دانیم یک سر مسیر باید در زیر درخت اول ریشه قرار داشته باشد (در غیر این صورت طول مسیر کم‌تر از ۱۹۸ خواهد بود).

لم. در درختی که ریشه‌ی آن k فرزند داشته باشد، تعداد راس‌های به عمق $k - 1$ برابر k می‌باشد.

اگر مسیر از عمیق‌ترین برگ زیر درخت اول شروع شود وقتی به ریشه می‌رسد، طولش برابر ۱۰۰ خواهد بود. در این صورت اگر به زیر درخت دوم برود طبق لم ۹۸ حالت برای ادامه مسیر وجود دارد و اگر به زیر درخت سوم برود، یک حالت برای ادامه مسیر وجود خواهد داشت. پس اگر مسیر از عمیق‌ترین برگ در زیردرخت اول شروع شود ۹۹ حالت وجود خواهد داشت.

همچنین اگر مسیر از یک راس در عمق ۹۹ شروع شود وقتی به ریشه می‌رسد، طول ۹۹ خواهد داشت و تنها می‌تواند به عمیق‌ترین راس در زیر درخت دوم برود. چون طبق لم برای شروع مسیر ۹۹ راس کاندیدا داریم در این حالت نیز ۹۹ مسیر به دست می‌آید. پس پاسخ صحیح $۹۹ + ۹۹ = ۱۹۸$ است. □

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

- سؤال‌های ۲۵ تا ۳۰ در چند دسته‌ی سؤال‌ی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است. جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ کاغذی به ضخامت یک دهم میلی‌متر داده شده است. این کاغذ را بیست بار تا می‌زنیم. با هر بار تا زدن ضخامت کاغذ دو برابر می‌شود. ضخامت نهایی کاغذ به کدام عدد نزدیک‌تر است؟ فرض کنید کاغذ به اندازه‌ی کافی برای تا زدن بزرگ است.

(۱) ۲ میلی‌متر (۲) ۱۰۰ متر (۳) ۱ متر (۴) ۱۰ سانتی‌متر (۵) ۲ سانتی‌متر

		۳

۲ می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۹ را در یک جدول 3×3 بچینیم طوری که اعداد هر سطر از چپ به راست و اعداد هر ستون از بالا به پایین به صورت صعودی مرتب باشند. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم، با این فرض که مکان عدد ۳ در جدول همانند شکل روبه‌رو از پیش تعیین شده است؟

(۱) ۱۶ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۱۵ (۵) ۱۷

۳ کلاس اول مدرسه‌ی محمودآباد ۱۲ دانش‌آموز دارد. معلم کلاس قصد دارد دانش‌آموزان را به سه دسته تقسیم کند و بین هر دو دانش‌آموزی که هم‌دسته نیستند، یک مسابقه برگزار کند. اگر تقسیم‌بندی طوری انجام شود که تعداد مسابقات بیشینه شود، این بیش‌ترین تعداد چند تا است؟

(۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۴۲ (۴) ۴۸ (۵) ۶۶

۴ روی محور اعداد حقیقی ۱۳۹۲ نقطه‌ی رنگی متمایز داده شده است که هر یک با یکی از ۹۲ رنگ موجود رنگ شده‌اند. یک بازه را «مینیمال رنگی» می‌گوییم اگر همه‌ی رنگ‌ها را پوشش دهد (یعنی از هر رنگی حداقل یک نقطه داخل آن باشد) و هیچ زیربازه‌ای از این بازه، همه‌ی رنگ‌ها را پوشش ندهد. حداکثر تعداد بازه‌های مینیمال رنگی چند تا است؟

(۱) ۱ (۲) ۱۳۰۱ (۳) ۹۱ (۴) ۹۲ (۵) ۱۳۹۱

۵ ما عادت کرده‌ایم وقتی عددی را می‌بینیم آن را به طور پیش‌فرض در مبنای ده تفسیر می‌کنیم. حال تصور کنید که استفاده از مبناهای ۲ تا ۱۰ به یک اندازه رایج است. در این حالت عدد ۱۲ را می‌توان به ۸ شکل مختلف (در مبناهای ۳ تا ۱۰) تفسیر کرد، اما عدد ۴۵۹ تنها به یک شکل قابل تفسیر است. تعداد اعداد از ۱ تا ۱۳۹۲ (در مبنای ده) که تنها به یک شکل قابل تفسیراند، چند تا است؟ دقت کنید که اعداد تک‌رقمی تنها به یک شکل قابل تفسیراند.

(۱) ۳۴۹ (۲) ۲۷۱ (۳) ۴۴۰ (۴) ۳۵۸ (۵) ۳۴۸

۶ جدولی 1392×1392 داریم که خانه‌ی (۱، ۱) آن رنگ شده است. در هر مرحله جدول را از یکی از خطوط موازی اضلاع تا می‌کنیم. در صورتی که یک خانه‌ی رنگی روی یک خانه‌ی بی‌رنگ قرار گیرد، هر دو رنگی می‌شوند. پس از هر مرحله، جدول را به حالت اولیه برمی‌گردانیم. حداقل چند حرکت لازم است تا تمامی خانه‌های جدول رنگی شوند؟

(۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۱۱ (۵) ۲۲

مرحله ی اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

۷

درخت وراثت نموداری برای نشان دادن میزان ارثی است که به هر یک از اعضای یک خانواده طی سال ها رسیده است. فرض کنید تمام اموال هر فرد بین فرزندانش (در صورتی که فرزندی داشته باشد) تقسیم می شود. میزان ارث هر نفر عددی صحیح و نامنفی است. به چند طریق می توان درخت وراثت روبه رو را تکمیل نمود؟

۴۰۳۲ (۱) ۱۱۳۴ (۲) ۳۷۸۰ (۳) ۲۰۱۶ (۴) ۱۵۱۲ (۵)

۸

روی یک خط ۱۳۹۲ درخت قرار گرفته اند که فاصله ی هر دو درخت متوالی از هم ۱۰۰ واحد است. ارتفاع درخت ها یک عدد صحیح از ۱ تا ۱۳۹۲ است و ارتفاع هیچ دو درختی برابر نیست. ما می توانیم در هر گام یکی از درخت ها را انتخاب کرده، آن را ببریم. هر درخت پس از بریده شدن به سمت راست می افتد و در صورتی که به درخت های دیگری برخورد کند آن ها را نیز خواهد انداخت. دو درخت در صورتی برخورد می کنند که ارتفاع درخت افتاده بیش تر یا مساوی فاصله ی دو درخت باشد. با توجه به این که اطلاعی درباره ی ترتیب قرار گرفتن درخت ها نداریم، حداقل باید چند درخت را قطع کنیم تا تمامی درخت ها بیافتند؟

۱۲۹۲ (۱) ۶۹۶ (۲) ۵۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۳۷ (۵)

۹

در مسئله ی قبل، فرض کنید تعداد درخت ها ۵۰ و ارتفاع هر درخت یک عدد صحیح غیر تکراری از ۱ تا ۵۰ است. همچنین فاصله ی بین تمامی درخت ها عدد صحیح x است. در ضمن ترتیب چیدن درخت ها نیز در اختیار ما است. می خواهیم x را طوری تعیین کنیم که بتوان با یک برش تمامی درخت ها را انداخت. مقدار x حداکثر چند است؟

۱۶ (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۱۷ (۵)

۱۰

تعدادی شش ضلعی همانند شکل مقابل داریم که داخل هر خانه یک عدد نوشته شده است. در هر مرحله می توان یکی از خانه هایی را که دقیقاً شش همسایه دارد انتخاب کرد و تمام شش ضلعی های دور آن را در جهت عقربه های ساعت چرخاند. می خواهیم مجموع اعداد در خانه های خاکستری بیشینه شود. این مجموع بیشینه چند است؟ دقت کنید که در حین چرخش اعداد جابه جا می شوند ولی رنگ خانه ها ثابت می ماند.

۳۶ (۱) ۳۰ (۲) ۲۶ (۳) ۱۸ (۴) ۳۲ (۵)

۱۱

به چند حالت می توان چهار وزیر را روی یک صفحه ی شطرنج 4×4 قرار داد طوری که یک دیگر را تهدید نکنند؟ دو وزیر یک دیگر را تهدید می کنند اگر هم سطر، هم ستون یا هم قطر باشند. فرض کنید صفحه ی شطرنج ثابت است و نمی چرخد.

۱ (۱) ۰ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۲ (۵)

۱۲

یک صفحه ی شطرنج 6×6 داریم که یک مهره ی اسب در خانه ی (۱, ۱) آن قرار گرفته است. می دانیم که اسب به شکل L روی صفحه حرکت می کند. روی هر خانه حداقل تعداد حرکات لازم برای رسیدن اسب به آن خانه را نوشته ایم. بزرگ ترین این اعداد چند است؟

۳ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۳

- یک جدول ۸ در ۸ داریم. هر خانه یک خانه‌ی قرینه نسبت به نقطه‌ی وسط دارد. برای مثال خانه‌ی ۳ در شکل قرینه خانه‌ی ۱ نسبت به نقطه‌ی وسط می‌باشد. همچنین هر خانه یک خانه‌ی قرینه نسبت به خط عمودی مرکزی نیز دارد. برای مثال خانه‌ی ۲ قرینه‌ی خانه‌ی ۱ نسبت به خط عمودی مرکزی می‌باشد. می‌خواهیم این جدول را با ۳ رنگ، رنگ کنیم به شرطی که هر خانه‌ی این جدول حداقل با یکی از دو خانه‌ی قرینه‌ی خود (قرینه نسبت به خانه‌ی مرکز و قرینه نسبت به خط عمودی وسط) هم‌رنگ باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۱۶۱۵ (۱) ۳۶۴ (۲) ۳۱۶ (۳) ۹۱۶ (۴) ۱۵۱۶ (۵)

۱۴

برای مرتب‌سازی، عمل «ابرجابه‌جایی» را چنین تعریف می‌کنیم. در هر ابرجابه‌جایی، یک زیررشته‌ی دلخواه از دنباله‌ی داده‌شده را معکوس می‌کنیم. برای مثال دنباله‌ی (۱, ۴, ۳, ۲, ۵) با یک ابرجابه‌جایی مرتب می‌شود. کافی است زیررشته‌ی (۴, ۳, ۲) را معکوس کنیم. ولی برای مرتب‌سازی دنباله‌ی (۴, ۲, ۳, ۱) دو ابرجابه‌جایی نیاز داریم. ابتدا کل دنباله را معکوس می‌کنیم تا به (۱, ۳, ۲, ۴) برسیم. سپس زیررشته‌ی (۳, ۲) را معکوس می‌کنیم. حداقل تعداد ابرجابه‌جایی که برای مرتب‌سازی هر دنباله‌ی دلخواه به طول ۴ کافی است، چند است؟

(۱) در برخی حالات مرتب‌سازی با ابرجابه‌جایی ممکن نیست. ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۵ (۵)

۱۵

«جدول صفر و یک» به جدولی می‌گوییم که در هر خانه‌ی آن صفر یا یک قرار گرفته است. عملی را تعریف می‌کنیم که از روی یک جدول صفر و یک ۴×۴ ، یک جدول صفر و یک ۴×۴ دیگر را به این شکل می‌سازد که هر خانه‌ی جدول جدید برابر حاصل ضرب خانه‌های مجاور آن خانه در جدول قدیمی است (خانه مجاور یک خانه، خانه‌ای است که با آن خانه یک ضلع مشترک دارد). برای مثال با دو بار اعمال این عمل روی جدول زیر به «جدول تمام صفر» (جدولی که تمام خانه‌های آن صفر است) می‌رسیم.

۱	۱	۰	۰	→	۱	۰	۰	۰	→	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۱		۰	۰	۰	۰		۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰		۰	۰	۰	۰		۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۰		۱	۰	۰	۰		۰	۰	۰	۰

تعداد کل جدول‌های صفر و یک ۴×۴ که با تکرار این عمل روی آن‌ها به جدول تمام صفر نمی‌رسیم چند تا است؟

۱۲۰ (۱) ۵۱۱ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴) ۳ (۵)

۱۶

تعداد رشته‌های ۱۰ تایی از ارقام را بیابید که در هر یک از آن رشته‌ها هر رقم برابر با تعداد رقم‌های یک مجاورش باشد.

۲۰ (۱) ۱ (۲) ۱۴ (۳) ۱۲ (۴) ۲ (۵)

۱۷

تعداد رشته‌های ۱۰ تایی از ارقام را بیابید که در هر یک از آن رشته‌ها هر رقم برابر با تعداد رقم‌های صفر مجاورش باشد.

۱۴ (۱) ۱۰ (۲) ۲۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰ (۵)

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۸ ۱۳۹۳ بادکنک را به ترتیب در یک ردیف قرار داده‌ایم. در هر مرحله می‌توانیم یکی از بادکنک‌ها را بترکانیم. فقط باید این شرط رعایت شود که هر بادکنکی که می‌ترکد تعداد بادکنک‌های سمت چپ و راست آن که ترکیده‌اند حداکثر یکی اختلاف داشته باشد. به چند طریق می‌توانیم این بادکنک‌ها را بترکانیم؟

۳۶۹۷ (۱) ۲۶۹۷ (۲) ۲۶۹۶ (۳) ۳۶۹۶ (۴) ۲۱۳۹۳ (۵)

۰	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۰

۱۹ خیکوله و خیکولتا روی جدول 4×4 روبه‌رو بازی زیر را انجام می‌دهند:

۱. ابتدا خیکوله سطرها را به دلخواه جابه‌جا می‌کند (سطرها را جایگشت می‌دهد).
۲. سپس ستون‌ها را به دلخواه جابه‌جا می‌کند (ستون‌ها را جایگشت می‌دهد).
۳. سپس خیکولتا تعداد جفت ۱‌های مجاور را می‌شمارد (دو خانه‌ای که ضلع مشترک دارند مجاورند) و به تعداد آن به خیکوله شکلات می‌دهد.

اگر خیکوله به بهترین نحو ممکن بازی کند چند شکلات می‌تواند به دست بیاورد؟

۱۴ (۱) ۱۷ (۲) ۱۶ (۳) ۱۵ (۴) ۱۳ (۵)

۲۰ تعدادی آجر همانند شکل مقابل داده شده‌اند. هر آجر روی یک یا دو آجر دیگر و یا روی زمین قرار دارد. آجری که روی زمین نیست تنها زمانی می‌افتد که آجر دیگری زیرش قرار نداشته باشد. می‌خواهیم تعدادی از آجرها را برداریم طوری که آجرهای سطر بالا برداشته نشوند و هیچ آجری نیفتد. در این صورت حداکثر چند آجر را می‌توان برداشت؟

۱۱ (۱) ۱۵ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴ (۵)

۲۱ همانند مسئله‌ی قبل آجرهایی همانند شکل روبه‌رو داریم، با این تفاوت که آجرهای خاکستری نباید برداشته شوند. در این صورت حداکثر چند آجر را می‌توان برداشت؟

۹ (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷ (۵)

۲۲ جدولی 1392×1392 داریم. خانه‌های این جدول را به ترتیب با اعداد ۰ تا $1392^2 - 1$ به ترتیب سطری از بالا به پایین و سپس ستونی از چپ به راست شماره‌گذاری می‌کنیم. به این ترتیب خانه‌های سطر i ام با اعداد $1392 \times i$ تا $1392 \times (i+1) - 1$ از چپ به راست شماره‌گذاری شده‌اند. دو خانه از جدول را مجاور می‌نامیم در صورتی که در یک ضلع اشتراک داشته باشند و آن ضلع توسط هیچ کدام از آن دو خانه بسته نشده باشد. طریقه‌ی بسته شدن اضلاع جدول این‌گونه است که عدد نوشته شده در خانه را به صورت دودویی می‌نویسیم. در صورتی که این عدد کمتر از چهار رقم داشت با گذاشتن ۰ در پشت عدد، آن را چهار رقمی می‌کنیم. حال یک بودن هر کدام از چهار رقم اول این عدد باعث بسته شدن ضلع متناظرش می‌شود. ارقام اول تا چهارم به ترتیب با ضلع‌های بالا، راست، پایین و چپ آن خانه متناظرند. (رقم اول کم ارزش‌ترین رقم در نمایش دودویی است). یک حرکت مجاز را رفتن از خانه‌ای به یکی از خانه‌های مجاورش تعریف می‌کنیم. حال در جدول ساخته‌شده به یک مجموعه از خانه‌ها «همبند» می‌گوییم اگر هر دو خانه با انجام تعدادی حرکت مجاز از یک‌دیگر قابل دسترسی باشند. اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه‌ی همبند این جدول را محاسبه کنید.

۴۱۷۶ (۱) ۲۷۸۴ (۲) ۶۹۶۰ (۳) ۵۵۶۸ (۴) ۱۳۹۲ (۵)

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۳ دنباله ی $(0, 0, 0, 0, 0)$ بر روی کاغذ نوشته شده است. در هر مرحله می توان یکی از تغییرات زیر را روی دنباله اعمال کرد:

- تمامی اعداد داخل لیست در دو ضرب می شوند.
- یکی از اعداد دنباله انتخاب و به علاوه ی یک می شود.

کمترین تعداد مرحله برای رسیدن به دنباله ی $(8, 3, 1, 5, 11, 7)$ چند است؟

۱۴ (۱) ۱۸ (۲) ۱۷ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶ (۵)

۲۴ مار کوچکی متشکل از ۸ مکعب به ضلع ۱ همانند شکل زیر داریم که از سر تا دم با شماره های ۱ تا ۸ شماره گذاری شده اند. هر دو مکعب پشت سر هم با مفصل کوچکی به هم وصل شده اند و فقط قابلیت چرخش نسبت به یک دیگر را دارند. این مار کوچک را به چند حالت مختلف می توان در یک جعبه ی مکعبی به ضلع ۲ جا داد؟ دو حالت مختلف در نظر گرفته می شوند اگر دو قطعه با شماره های مختلف از بدن مار در یک مکان از جعبه ی مکعبی قرار بگیرند. یعنی اگر دو حالت با چرخش جعبه ی مکعبی به هم تبدیل شوند، یکسان نیستند.

۱۹۲ (۱) ۹۶ (۲) ۴۸ (۳) ۶۴ (۴) ۱۴۴ (۵)

برنامه ی زیر را در نظر بگیرید:

- مقدار s را برابر با ۰ قرار بده.
- به ازای $i = 1, 2, \dots, x$ عملیات زیر را انجام بده:

– اگر x به i بخش پذیر بود، مقدار s را برابر با $s + i$ قرار بده.

- مقدار s را گزارش کن.

فرض کنید خروجی برنامه ی بالا برابر با $f(x)$ باشد. به طور مثال اگر x را برابر با ۴ قرار دهیم، به ازای $i = 1, 2$ مقدار s افزایش پیدا می کند. پس مقدار $f(4)$ برابر با ۷ خواهد بود.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۲۵ مقدار $f(441)$ برابر با چند است؟

۳۶۲ (۱) ۷۴۰ (۲) ۷۶۲ (۳) ۳۰۰ (۴) ۷۴۱ (۵)

۲۶ مقدار $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100)$ برابر با چند است؟

۳۲۴۹ (۱) ۸۳۵۴ (۲) ۸۲۹۹ (۳) ۸۲۴۹ (۴) ۳۲۹۹ (۵)

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

اخیرا در پی آزمایش های هسته ای در مجمع الجزایر پنیر، جنگی بین دو کشور پنیر شمالی و پنیر جنوبی در گرفته است. در این مجمع الجزایر ۱۰ جزیره وجود دارد که این دو کشور در پی تصرف آن ها هستند. در این جنگ هر یک از دو کشور به هر جزیره تعدادی نیرو اعزام می کند و در هر جزیره کشوری که نیروی بیش تری اعزام کرده باشد، پیروز نبرد خواهد شد و اگر تعداد نیروها مساوی باشد جزیره به هیچ یک از دو کشور تعلق نخواهد گرفت. اما همه می دانند که کشور پنیر جنوبی با همکاری کشورهای دیگر به تکنولوژی ای دست یافته که می تواند تعداد نیروهایی که طرف مقابل به هر جزیره ارسال می کند را پیش بینی کند و بر اساس آن نیروهای خود را به جزیره ها بفرستد. می دانیم هر یک از دو کشور بهترین شیوه را برای تصاحب بیش ترین تعداد جزیره به کار می بندند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۲۷ اگر کشور پنیر شمالی ۱۰۰ نیرو و کشور پنیر جنوبی ۴۵ نیرو در اختیار داشته باشد. کشور پنیر شمالی حداکثر چند جزیره را می تواند تصاحب کند؟

۵ (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) ۴ (۵)

۲۸ اگر کشور پنیر جنوبی ۴۵ نیرو در اختیار داشته باشد، کشور پنیر شمالی حداقل چند نیرو باید داشته باشد تا مطمئن باشد که نیمی از جزیره ها را تصاحب می کند؟

۶۸ (۱) ۷۰ (۲) ۶۹ (۳) ۷۳ (۴) ۷۵ (۵)

شش نفر دور یک میز نشسته اند که هر یک از آن ها کلاهی بر سر دارد. کلاه ها به رنگ های قرمز، آبی و سبز هستند. می دانیم که از هر رنگ حداقل یک کلاه وجود دارد. هر کسی می تواند رنگ کلاه پنج نفر دیگر را ببیند، اما توان دیدن رنگ کلاه خود را ندارد. این شش نفر بسیار باهوش هستند و در صورتی که از لحاظ منطقی امکان تشخیص رنگ کلاه خود با توجه به رنگ کلاه دیگران وجود داشته باشد، رنگ کلاه خود را تشخیص می دهند. برای مثال اگر شخصی هیچ کلاهی با رنگ آبی روی سر پنج نفر دیگر نبیند، متوجه می شود که رنگ کلاه او آبی است، چرا که می داند از هر رنگ باید حداقل یک کلاه، در بین کلاه ها موجود باشد.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۲۹ اگر از این شش نفر بخواهیم در صورتی که توان تشخیص رنگ کلاه خود را دارند، دست خود را هم زمان بلند کنند، با فرض پاسخ صادقانه حداقل و حداکثر چند نفر ممکن است دست خود را بلند کنند؟

۲ و ۲ (۱) ۲ (صفر و ۶) ۳ (صفر و ۲) ۴ (۲ و ۶) ۵ (۶ و ۶)

۳۰ حالا پس از این پاسخ صادقانه، مجددا از این شش نفر می خواهیم که در صورتی که هم اکنون رنگ کلاه خود را می دانند، دست خود را بلند کنند. در این حالت (باز با فرض پاسخ صادقانه) حداقل و حداکثر چند نفر ممکن است دست خود را بلند کنند؟

۱ (صفر و ۲) ۲ (صفر و ۶) ۳ (۲ و ۲) ۴ (۶ و ۶) ۵ (۲ و ۶)

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

این پاسخها با تلاش طراحان سوالها و اعضای کمیتهی مرحلهی اول المپیاد کامپیوتر فراهم شدهاند و ممکن است که کمبودها و خطاهایی در آن وجود داشته باشد. لطفاً هرگونه پیشنهاد برای اصلاح یا تکمیل این پاسخها را از طریق سامانهی اینترنتی <http://inoi.ir> به اطلاع کمیتهی ملی المپیاد کامپیوتر برسانید.

۱ کاغذی به ضخامت یک دهم میلی متر داده شده است. این کاغذ را بیست بار تا می زنیم. با هر بار تا زدن ضخامت کاغذ دو برابر می شود. ضخامت نهایی کاغذ به کدام عدد نزدیک تر است؟ فرض کنید کاغذ به اندازهی کافی برای تا زدن بزرگ است.

- (۱) ۲ میلی متر (۲) ۱۰۰ متر (۳) ۱ متر (۴) ۱۰ سانتی متر (۵) ۲ سانتی متر

پاسخ: گزینهی ۲ درست است.

□ ضخامت نهایی کاغذ برابر است با $104/8576 = 2^{20} \times 10^{-4}$ متر.

		۳

۲ می خواهیم اعداد ۱ تا ۹ را در یک جدول 3×3 بچینیم طوری که اعداد هر سطر از چپ به راست و اعداد هر ستون از بالا به پایین به صورت صعودی مرتب باشند. به چند طریق می توانیم این کار را انجام دهیم، با این فرض که مکان عدد ۳ در جدول همانند شکل روبهرو از پیش تعیین شده است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۱۵ (۵) ۱۷

پاسخ: گزینهی ۲ درست است.

۱	۲	۳
۴		
		۹

مکان اعداد ۱، ۲، ۴ و ۹ همانند جدول روبهرو به صورت یکتا مشخص می شود. برای عدد ۵ دو انتخاب داریم. اگر ۵ در خانهی (۳، ۱) قرار گیرد، ۶ در خانهی (۲، ۲) خواهد بود و در نتیجه برای قرار دادن ۷ و ۸ دو راه وجود دارد. اگر ۵ در خانهی (۲، ۲) قرار گیرد، هر یک از سه عدد دیگر می توانند در خانهی (۲، ۳) قرار گیرند و سپس مکان دو عدد دیگر به صورت یکتا مشخص می شود. پس در کل به ۵ طریق می توان جدول را پر کرد.

□

۳ کلاس اول مدرسهی محمودآباد ۱۲ دانش آموز دارد. معلم کلاس قصد دارد دانش آموزان را به سه دسته تقسیم کند و بین هر دو دانش آموزی که هم دسته نیستند، یک مسابقه برگزار کند. اگر تقسیم بندی طوری انجام شود که تعداد مسابقات بیشینه شود، این بیشترین تعداد چند تا است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۴۲ (۴) ۴۸ (۵) ۶۶

پاسخ: گزینهی ۴ درست است.

بیشترین تعداد زمانی حاصل می شود که سه گروه ۴ نفره داشته باشیم. در این حالت بین هر دو گروه ۱۶ مسابقه و در مجموع $48 = 3 \times 16$ مسابقه انجام می شود.

□

۴ روی محور اعداد حقیقی ۱۳۹۲ نقطه ی رنگی متمایز داده شده است که هر یک با یکی از ۹۲ رنگ موجود رنگ شده اند. یک بازه را «مینیمال رنگی» می گوئیم اگر همه ی رنگ ها را پوشش دهد (یعنی از هر رنگی حداقل یک نقطه داخل آن باشد) و هیچ زیربازه ای از این بازه، همه ی رنگ ها را پوشش ندهد. حداکثر تعداد بازه های مینیمال رنگی چند تا است؟

- (۱) ۱ (۲) ۱۳۰۱ (۳) ۹۱ (۴) ۹۲ (۵) ۱۳۹۱

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

اگر n نقطه داشته باشیم که با یکی از k رنگ، رنگ شده باشند، جواب $n - k + 1$ خواهد شد. با توجه به تعریف بازه ی مینیمال رنگی، هیچ دو بازه ی مینیمال رنگی نقاط انتهایی یکسان ندارند. بنابراین هر بازه ی رنگی را می توان با نقطه ی شروع آن به طور یکتا مشخص کرد. در ضمن نقطه ی شروع بازه ی مینیمال رنگی نمی تواند بین $k - 1$ نقطه ی پایانی باشد چرا که هر بازه ی مینیمال رنگی حداقل باید شامل k نقطه باشد. در نتیجه تعداد چنین بازه هایی $n - k + 1$ خواهد شد. مثالی که دقیقا این تعداد بازه ی مینیمال رنگی داشته باشد دنباله ی متناوب زیر است که هر رنگ با یکی از اعداد ۱ تا k نمایش داده شده است: $1, 2, \dots, k, 1, 2, \dots, k, 1, 2, \dots, k, \dots$ □

ما عادت کرده ایم وقتی عددی را می بینیم آن را به طور پیش فرض در مبنای ده تفسیر می کنیم. حال تصور کنید که استفاده از مبنای ۲ تا ۱۰ به یک اندازه رایج است. در این حالت عدد ۱۲ را می توان به ۸ شکل مختلف (در مبنای ۳ تا ۱۰) تفسیر کرد، اما عدد ۴۵۹ تنها به یک شکل قابل تفسیر است. تعداد اعداد از ۱ تا ۱۳۹۲ (در مبنای ده) که تنها به یک شکل قابل تفسیراند، چند تا است؟ دقت کنید که اعداد تک رقمی تنها به یک شکل قابل تفسیراند.

۳۴۹ (۱) ۲۷۱ (۲) ۴۴۰ (۳) ۳۵۸ (۴) ۳۴۸ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

باید تعداد اعدادی که حداقل یک رقم ۹ دارند را به همراه اعداد یک رقمی حساب کنیم. حالت بندی می کنیم.

- تعداد حالاتی که از ۱۳۹۰ کمتر نیستند: ۳
- تعداد حالاتی که بین ۱۳۰۰ تا ۱۳۸۹ هستند: ۹
- تعداد حالاتی که بین ۱۰۰۰ تا ۱۲۹۹ هستند: $57 = 9 \times 9 \times 3 - 300$
- تعداد حالاتی که بین ۱ تا ۹۹۹ هستند: $279 = 9 \times 9 \times 9 + 8 - 1000$

□ که مجموع این چهار عدد جواب است.

جدولی 1392×1392 داریم که خانه ی (۱، ۱) آن رنگ شده است. در هر مرحله جدول را از یکی از خطوط موازی اضلاع تا می کنیم. در صورتی که یک خانه ی رنگی روی یک خانه ی بی رنگ قرار گیرد، هر دو رنگی می شوند. پس از هر مرحله، جدول را به حالت اولیه برمی گردانیم. حداقل چند حرکت لازم است تا تمامی خانه های جدول رنگی شوند؟

۲۲ (۵) ۱۱ (۴) ۲۱ (۳) ۲۰ (۲) ۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

برای رنگی شدن ستون اول دست کم ۱۱ تایی افقی و برای رنگی شدن سطر اول دست کم ۱۱ تایی عمودی مورد نیاز است و با این تعداد نیز به سادگی می توان به جدولی کاملا رنگی دست یافت. □

درخت وراثت نموداری برای نشان دادن میزان ارثی است که به هر یک از اعضای یک خانواده طی سال ها رسیده است. فرض کنید تمام اموال هر فرد بین فرزندانش (در صورتی که فرزندی داشته باشد) تقسیم می شود. میزان ارث هر نفر عددی صحیح و نامنفی است. به چند طریق می توان درخت وراثت روبه رو را تکمیل نمود؟

۴۰۳۲ (۱) ۱۱۳۴ (۲) ۳۷۸۰ (۳) ۲۰۱۶ (۴) ۱۵۱۲ (۵)

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

کافی است میزان اموال افرادی را مشخص کنیم که فرزندی ندارند (برگ‌های درخت ریشه‌دار). اموال بقیه‌ی افراد به صورت یکتا مشخص می‌شود. باید زیردرخت رئوسی که مقدارشان معلوم است را به صورت جداگانه حل کنیم و برای به دست آوردن جواب نهایی جواب زیر مسئله‌ها را در هم ضرب کنیم. برای مثال برای معلوم کردن برگ‌های مربوط به رأس با عدد ۱۴ باید مقدار $2 = 3 - 4 - 5 - 14$ را بین دو برگ مربوطه پخش کنیم، که این کار به سه روش ممکن است. به همین ترتیب می‌توان تعداد روش‌های حل بقیه‌ی زیر درخت‌ها را پیدا کرد. جواب نهایی برابر با $3780 = 15 \times 4 \times 3 \times 21$ می‌باشد. □

روی یک خط ۱۳۹۲ درخت قرار گرفته‌اند که فاصله‌ی هر دو درخت متوالی از هم ۱۰۰ واحد است. ارتفاع درخت‌ها یک عدد صحیح از ۱ تا ۱۳۹۲ است و ارتفاع هیچ دو درختی برابر نیست. ما می‌توانیم در هر گام یکی از درخت‌ها را انتخاب کرده، آن را ببریم. هر درخت پس از بریده شدن به سمت راست می‌افتد و در صورتی که به درخت‌های دیگری برخورد کند آن‌ها را نیز خواهد انداخت. دو درخت در صورتی برخورد می‌کنند که ارتفاع درخت افتاده بیش‌تر یا مساوی فاصله‌ی دو درخت باشد. با توجه به این که اطلاعی درباره‌ی ترتیب قرار گرفتن درخت‌ها نداریم، حداقل باید چند درخت را قطع کنیم تا تمامی درخت‌ها بیافتند؟

(۱) ۱۲۹۲ (۲) ۶۹۶ (۳) ۵۰ (۴) ۱۰۰ (۵) ۳۷

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

در صورتی که درخت‌ها به ترتیب ارتفاع قرار گرفته باشند حداقل ۱۰۰ درخت باید قطع شوند. در حالت کلی نیز با تقسیم کردن خط به بازه‌هایی که ارتفاع درخت‌ها حداقل ۱۰۰ است می‌توان با قطع اولین درخت در هر بازه آن‌ها را انداخت. پس ۱۰۰ مرحله کافی است. □

در مسئله‌ی قبل، فرض کنید تعداد درخت‌ها ۵۰ و ارتفاع هر درخت یک عدد صحیح غیرتکراری از ۱ تا ۵۰ است. همچنین فاصله‌ی بین تمامی درخت‌ها عدد صحیح x است. در ضمن ترتیب چیدن درخت‌ها نیز در اختیار ما است. می‌خواهیم x را طوری تعیین کنیم که بتوان با یک برش تمامی درخت‌ها را انداخت. مقدار x حداکثر چند است؟

(۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰ (۵) ۱۷

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

افتادن هر درخت معادل با افتادن چند درخت دیگر خواهد بود در صورتی که ارتفاع آن از x بیش‌تر باشد. در نتیجه باید تعداد این چنین درخت‌هایی با ضرب انداختنشان (یک درخت می‌تواند چند درخت را بیاندازد) بیش‌تر از ۴۹ شود که به ازای $x = ۱۷$ چنین اتفاقی می‌افتد. □

تعدادی شش‌ضلعی همانند شکل مقابل داریم که داخل هر خانه یک عدد نوشته شده است. در هر مرحله می‌توان یکی از خانه‌هایی را که دقیقاً شش همسایه دارد انتخاب کرد و تمام شش‌ضلعی‌های دور آن را در جهت عقربه‌های ساعت چرخاند. می‌خواهیم مجموع اعداد در خانه‌های خاکستری بیشینه شود. این مجموع بیشینه چند است؟ دقت کنید که در حین چرخش اعداد جابه‌جا می‌شوند ولی رنگ خانه‌ها ثابت می‌ماند.

(۱) ۳۶ (۲) ۳۰ (۳) ۲۶ (۴) ۱۸ (۵) ۳۲

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

به جز خانه های وسط شش ضلعی ها تمامی اعداد را می توان به هر حالت دیگری رساند. در نتیجه می توان در ۵ خانه بیشترین اعداد را قرار داد.

به چند حالت می توان چهار وزیر را روی یک صفحه ی شطرنج 4×4 قرار داد طوری که یکدیگر را تهدید نکنند؟ دو وزیر یکدیگر را تهدید می کنند اگر هم سطر، هم ستون یا هم قطر باشند. فرض کنید صفحه ی شطرنج ثابت است و نمی چرخد.

۱ (۱) ۰ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۲ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۵ درست است.

با رسم درخت حالات که در شکل زیر نمایش داده شده به عدد ۲ می رسیم.

□

یک صفحه ی شطرنج 6×6 داریم که یک مهره ی اسب در خانه ی (۱, ۱) آن قرار گرفته است. می دانیم که اسب به شکل L روی صفحه حرکت می کند. روی هر خانه حداقل تعداد حرکات لازم برای رسیدن اسب به آن خانه را نوشته ایم. بزرگترین این اعداد چند است؟

۳ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

در هر حرکت می توان حداکثر سه واحد به هدف نزدیک تر شد. در صورتی که بخواهیم به خانه ی (۶, ۶) جدول برسیم باید حداقل ۱۰ واحد حرکت کنیم که معادل حداقل ۴ حرکت اسب است. همچنین با بررسی خانه های نهایی جدول می توان مثالی آورد که با ۴ حرکت به تمام آن خانه ها رسید.

□

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۳

- یک جدول ۸ در ۸ داریم. هر خانه یک خانه‌ی قرینه نسبت به نقطه‌ی وسط دارد. برای مثال خانه‌ی ۳ در شکل قرینه خانه‌ی ۱ نسبت به نقطه‌ی وسط می‌باشد. همچنین هر خانه یک خانه‌ی قرینه نسبت به خط عمودی مرکزی نیز دارد. برای مثال خانه‌ی ۲ قرینه‌ی خانه‌ی ۱ نسبت به خط عمودی مرکزی می‌باشد. می‌خواهیم این جدول را با ۳ رنگ، رنگ کنیم به شرطی که هر خانه‌ی این جدول حداقل با یکی از دو خانه‌ی قرینه‌ی خود (قرینه نسبت به مرکز و قرینه نسبت به خط عمودی وسط) هم‌رنگ باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

(۱) ۱۶۱۵ (۲) ۳۶۴ (۳) ۳۱۶ (۴) ۹۱۶ (۵) ۱۵۱۶

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

یک خانه را به همراه قرینه‌ی آن نسبت به خط عمودی و نسبت به نقطه‌ی مرکز و همچنین به همراه قرینه‌ی نسبت به خط عمودی قرینه‌ی نسبت به مرکز آن را (در مجموع چهار خانه) را در نظر می‌گیریم. این چهار خانه یا همگی هم‌رنگ هستند یا ضربدری هم‌رنگ هستند و یا دوتای پایین هم‌رنگ و دوتای بالا نیز هم‌رنگ می‌باشند. پس در مجموع $۳ + ۶ + ۶$ حالت داریم و چون تعداد این چهارتایی‌ها برابر ۱۶ می‌باشد در مجموع ۱۵ به توان ۱۶ حالت داریم.

۱۴

برای مرتب‌سازی، عمل «ابرجابه‌جایی» را چنین تعریف می‌کنیم. در هر ابرجابه‌جایی، یک زیررشته‌ی دلخواه از دنباله‌ی داده‌شده را معکوس می‌کنیم. برای مثال دنباله‌ی $(۱, ۴, ۳, ۲, ۵)$ با یک ابرجابه‌جایی مرتب می‌شود. کافی است زیررشته‌ی $(۴, ۳, ۲)$ را معکوس کنیم. ولی برای مرتب‌سازی دنباله‌ی $(۴, ۲, ۳, ۱)$ دو ابرجابه‌جایی نیاز داریم. ابتدا کل دنباله را معکوس می‌کنیم تا به $(۱, ۳, ۲, ۴)$ برسیم. سپس زیررشته‌ی $(۳, ۲)$ را معکوس می‌کنیم. حداقل تعداد ابرجابه‌جایی که برای مرتب‌سازی هر دنباله‌ی دلخواه به طول ۴ کافی است، چند است؟

(۱) در برخی حالات مرتب‌سازی با ابرجابه‌جایی ممکن نیست. (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲ (۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

با حالت‌گیری و رسیدن به دنباله‌ی $(۳, ۱, ۴, ۲)$ جواب به دست می‌آید.

۱۵

«جدول صفر و یک» به جدولی می‌گوییم که در هر خانه‌ی آن صفر یا یک قرار گرفته است. عملی را تعریف می‌کنیم که از روی یک جدول صفر و یک ۴×۴ ، یک جدول صفر و یک ۴×۴ دیگر را به این شکل می‌سازد که هر خانه‌ی جدول جدید برابر حاصل ضرب خانه‌های مجاور آن خانه در جدول قدیمی است (خانه مجاور یک خانه، خانه‌ای است که با آن خانه یک ضلع مشترک دارد). برای مثال با دو بار اعمال این عمل روی جدول زیر به «جدول تمام صفر» (جدولی که تمام خانه‌های آن صفر است) می‌رسیم.

۱	۱	۰	۰	→	۱	۰	۰	۰	→	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۱		۰	۰	۰	۰		۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰		۰	۰	۰	۰		۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۰		۱	۰	۰	۰		۰	۰	۰	۰

تعداد کل جدول‌های صفر و یک ۴×۴ که با تکرار این عمل روی آن‌ها به جدول تمام صفر نمی‌رسیم چند تا است؟

(۱) ۱۲۰ (۲) ۵۱۱ (۳) ۱ (۴) ۰ (۵) ۳

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

دو حالت شطرنجی صفر و یک حالت مادر هستند که هر یک 2^8 حالت را در بردارند که یک حالت تمام یک بین آن ها مشترک است.

□

تعداد رشته های ۱۰ تایی از ارقام را بیابید که در هر یک از آن رشته ها هر رقم برابر با تعداد رقم های یک مجاورش باشد.

۱۶

۲۰ (۱) ۱ (۲) ۱۴ (۳) ۱۲ (۴) ۲ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

چند لم برای سادگی در زیر آمده است که اثبات آن ها دشوار نیست.

- لم ۱: هر رقم صفر یا یک یا دو است.
- لم ۲: مجاور رقم ۲ حتما یک است.
- لم ۳: هر بلوک از یک های متوالی تنها دو رقم یک دارد.
- لم ۴: اگر رقم صفر داشته باشیم کل رشته صفر است.
- لم ۵: تنها رشته قابل قبول صفر است!

□

پس پاسخ مسئله یک است.

تعداد رشته های ۱۰ تایی از ارقام را بیابید که در هر یک از آن رشته ها هر رقم برابر با تعداد رقم های صفر مجاورش باشد.

۱۷

۱۴ (۱) ۱۰ (۲) ۲۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

چند لم برای سادگی در زیر آمده است که اثبات آنها دشوار نیست.

- لم ۱: هر رقم صفر یا یک یا دو است.
- لم ۲: دو صفر مجاور نداریم.
- لم ۳: مجاور رقم ۲ حتما صفر است.
- لم ۴: بین هر ۳ رقم متوالی حداقل یکی صفر است.
- لم ۵: اگر جایگاه صفرها با خاصیت لم ۲ و ۴ مشخص شود، بقیه ی ارقام به طور یکتا به دست می آید.
- لم ۶: به ۱۶ طریق می توان جایگاه صفرها را بنا بر لم ۲ و ۴ مشخص کرد.

□

پس پاسخ ۱۶ است.

۱۳۹۳ بادنک را به ترتیب در یک ردیف قرار داده ایم. در هر مرحله می توانیم یکی از بادنک ها را بترکانیم. فقط باید این شرط رعایت شود که هر بادنکی که می ترکد تعداد بادنک های سمت چپ و راست آن که ترکیده اند حداکثر یکی اختلاف داشته باشد. به چند طریق می توانیم این بادنک ها را بترکانیم؟

۱۸

۳۶۹۷ (۱) ۲۶۹۷ (۲) ۲۶۹۶ (۳) ۳۶۹۶ (۴) ۲۱۳۹۳ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

فرض کنید بادکنک ابتدا و انتها در دو حرکت اول نترکند، پس حداقل در حرکت سوم ترکیده‌اند و با توجه به این که حداقل یک طرف آن‌ها دو بادکنک ترکیده و طرف دیگر آن‌ها هیچ بادکنکی نترکیده است به تناقض می‌رسیم. پس دو حرکت اول باید دو بادکنک ابتدا و انتها باشند. به همین ترتیب باقی بادکنک‌ها نیز باید بترکند. □

۰	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۰

خیکوله و خیکولتا روی جدول 4×4 روبه‌رو بازی زیر را انجام می‌دهند:

۱. ابتدا خیکوله سطرها را به دلخواه جابه‌جا می‌کند (سطرها را جایگشت می‌دهد).
۲. سپس ستون‌ها را به دلخواه جابه‌جا می‌کند (ستون‌ها را جایگشت می‌دهد).
۳. سپس خیکولتا تعداد جفت ۱‌های مجاور را می‌شمارد (دو خانه‌ای که ضلع مشترک دارند مجاورند) و به تعداد آن به خیکوله شکلات می‌دهد.

اگر خیکوله به بهترین نحو ممکن بازی کند چند شکلات می‌تواند به دست بیاورد؟

- ۱۴ (۱) ۱۷ (۲) ۱۶ (۳) ۱۵ (۴) ۱۳ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

تعداد جفت‌های سطری و ستونی کنار هم جدا شمرده می‌شوند. سطری‌ها بهترین حالت ۷ تا و ستونی‌ها هم ۷ تا است. □

تعدادی آجر همانند شکل مقابل داده شده‌اند. هر آجر روی یک یا دو آجر دیگر و یا روی زمین قرار دارد. آجری که روی زمین نیست تنها زمانی می‌افتد که آجر دیگری زیرش قرار نداشته باشد. می‌خواهیم تعدادی از آجرها را برداریم طوری که آجرهای سطر بالا برداشته نشوند و هیچ آجری نیافتد. در این صورت حداکثر چند آجر را می‌توان برداشت؟

- ۱۱ (۱) ۱۵ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

دو خانه‌ی گوشه‌ای جدول باید باقی بمانند و پس از نگه‌داشتن آن‌ها بقیه‌ی آجرها به صورت یکتا تعیین می‌گردند. در شکل مقابل آجرهایی که باید باقی بمانند با رنگ تیره و آجرهایی که می‌توان برداشت با رنگ سفید مشخص شده‌اند. □

همانند مسئله‌ی قبل آجرهایی همانند شکل روبه‌رو داریم، با این تفاوت که آجرهای خاکستری نباید برداشته شوند. در این صورت حداکثر چند آجر را می‌توان برداشت؟

- ۹ (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

همانند مسئله‌ی قبلی ابتدا باید آجرهایی که باید باقی گذاشت را می‌گذاریم. سپس بین حالات ممکن که محدود است، حالتی را انتخاب می‌کنیم که بهترین نتیجه به دست آید. بهترین نتیجه همانند شکل روبه‌رو ۸ است. □

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۲

جدولی 1392×1392 داریم. خانه های این جدول را به ترتیب با اعداد ۰ تا $1392^2 - 1$ به ترتیب سطری از بالا به پایین و سپس ستونی از چپ به راست شماره گذاری می کنیم. به این ترتیب خانه های سطر i ام با اعداد $1392 \times i$ تا $(i+1) \times 1392$ از چپ به راست شماره گذاری شده اند. دو خانه از جدول را مجاور می نامیم در صورتی که در یک ضلع اشتراک داشته باشند و آن ضلع توسط هیچ کدام از آن دو خانه بسته نشده باشد. طریقه ی بسته شدن اضلاع جدول این گونه است که عدد نوشته شده در خانه را به صورت دودویی می نویسیم. در صورتی که این عدد کمتر از چهار رقم داشت با گذاشتن ۰ در پشت عدد، آن را چهار رقمی می کنیم. حال یک بودن هر کدام از چهار رقم اول این عدد باعث بسته شدن ضلع متناظرش می شود. ارقام اول تا چهارم به ترتیب با ضلع های بالا، راست، پایین و چپ آن خانه متناظرند. (رقم اول کم ارزش ترین رقم در نمایش دودویی است). یک حرکت مجاز را رفتن از خانه ای به یکی از خانه های مجاورش تعریف می کنیم. حال در جدول ساخته شده به یک مجموعه از خانه ها «همبند» می گوئیم اگر هر دو خانه با انجام تعدادی حرکت مجاز از یک دیگر قابل دسترسی باشند. اندازه ی بزرگ ترین مجموعه ی همبند این جدول را محاسبه کنید.

۴۱۷۶ (۱) ۲۷۸۴ (۲) ۶۹۶۰ (۳) ۵۵۶۸ (۴) ۱۳۹۲ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۱ درست است.

با توجه به این که 1392 بر 16 بخش پذیر است، تمامی اعضای یک ستون به یک صورت ضلع های مجاورشان را می بندند. همچنین الگوی جدول در هر 16 ستون تکرار می شود. بنابراین کافی است تنها 16 ستون اول را بررسی کنیم.

۲۳

دنباله ی $\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$ بر روی کاغذ نوشته شده است. در هر مرحله می توان یکی از تغییرات زیر را روی دنباله اعمال کرد:

- تمامی اعداد داخل لیست در دو ضرب می شوند.
- یکی از اعداد دنباله انتخاب و به علاوه ی یک می شود.

کمترین تعداد مرحله برای رسیدن به دنباله ی $\langle 7, 11, 5, 1, 3, 8 \rangle$ چند است؟

۱۴ (۱) ۱۸ (۲) ۱۷ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۴ درست است.

کمترین مرحله برابر است با مجموع تعداد بیت های ۱ در نمایش دودویی اعداد دنباله به علاوه ی بزرگ ترین x ای که بزرگ ترین عدد دنباله از 2^x بزرگ تر مساوی است. روش ساخت هم این گونه است که در مرحله ی اول اعداد که بیت x - ام آن ها یک است را به علاوه ی یک می کنیم و سپس کل اعداد را در دو ضرب می کنیم، در مرحله دوم اعدادی که بیت $1 - x$ - ام آن ها یک است را به علاوه ی یک می کنیم و سپس کل اعداد را در دو ضرب می کنیم. به همین ترتیب این کار را x بار انجام می دهیم. در آخر نیز اعدادی که بیت ۰ - ام آن ها یک است، به علاوه ی یک می شوند. دقت کنید که بعد از آخرین مرحله ی اضافه کردن دیگر اعداد را در دو ضرب نمی کنیم.

۲۴

مار کوچکی متشکل از ۸ مکعب به ضلع ۱ همانند شکل زیر داریم که از سر تا دم با شماره های ۱ تا ۸ شماره گذاری شده اند. هر دو مکعب پشت سر هم با مفصل کوچکی به هم وصل شده اند و فقط قابلیت چرخش نسبت به یک دیگر را دارند. این مار کوچک را به چند حالت مختلف می توان در یک جعبه ی مکعبی به ضلع ۲ جا داد؟ دو حالت مختلف در نظر گرفته می شوند اگر دو قطعه با شماره های مختلف از بدن مار در یک مکان از جعبه ی مکعبی قرار بگیرند. یعنی اگر دو حالت با چرخش جعبه ی مکعبی به هم تبدیل شوند، یکسان نیستند.

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۴۴ (۵)

۶۴ (۴)

۴۸ (۳)

۹۶ (۲)

۱۹۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۵ درست است.

انتخاب سر مار (مکعب شماره ۱) ۸ حالت دارد. انتخاب مکعب دوم مستقل از اولی ۳ حالت دارد و انتخاب مکعب سوم ۲ حالت. اما بعد از مکعب سوم حالت ها دیگر تقارن ندارند و نمی توان به این صورت شمرد. اما در کل بعد از انتخاب ۳ مکعب اول ۳ حالت ممکن است پیش بیاید. پس جواب برابر است با: $۸ \times ۳ \times ۲ \times ۳ = ۱۴۴$.
□

برنامه ی زیر را در نظر بگیرید:

- مقدار s را برابر با ۰ قرار بده.
- به ازای $i = ۱, ۲, \dots, x$ عملیات زیر را انجام بده:

– اگر x به i بخش پذیر بود، مقدار s را برابر با $s + i$ قرار بده.

- مقدار s را گزارش کن.

فرض کنید خروجی برنامه ی بالا برابر با $f(x)$ باشد. به طور مثال اگر x را برابر با ۴ قرار دهیم، به ازای $i = ۱, ۲$ و $i = ۴$ مقدار s افزایش پیدا می کند. پس مقدار $f(۴)$ برابر با ۷ خواهد بود.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۲۵ مقدار $f(۴۴۱)$ برابر با چند است؟

۷۴۱ (۵)

۳۰۰ (۴)

۷۶۲ (۳)

۷۴۰ (۲)

۳۶۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۵ درست است.

□ عدد ۴۴۱ برابر است با $۷^۲ \times ۳^۲$ که دارای ۹ مقسوم علیه است. باید جمع این ۹ عدد محاسبه شود.

۲۶ مقدار $f(۱۰۰) + f(۳) + f(۲) + f(۱)$ برابر با چند است؟

۳۲۹۹ (۵)

۸۲۴۹ (۴)

۸۲۹۹ (۳)

۸۳۵۴ (۲)

۳۲۴۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ درست است.

کافی است به ازای هر عدد داشته باشیم این عدد چندبار در مجموع نهایی حاضر می شود. با این کار اعداد به تعدادی دسته تقسیم می شوند و به ازای هر دسته داریم که اعداد این دسته چندبار در مجموع نهایی حضور دارند. سپس مجموع اعداد هر دسته را در عدد حضور آنها ضرب می کنیم و پاسخ نهایی را محاسبه می کنیم.
□

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

اخیرا در پی آزمایش های هسته ای در مجمع الجزایر پنیر، جنگی بین دو کشور پنیر شمالی و پنیر جنوبی در گرفته است. در این مجمع الجزایر ۱۰ جزیره وجود دارد که این دو کشور در پی تصرف آن ها هستند. در این جنگ هر یک از دو کشور به هر جزیره تعدادی نیرو اعزام می کند و در هر جزیره کشوری که نیروی بیشتری اعزام کرده باشد، پیروز نبرد خواهد شد و اگر تعداد نیروها مساوی باشد جزیره به هیچ یک از دو کشور تعلق نخواهد گرفت. اما همه می دانند که کشور پنیر جنوبی با همکاری کشورهای دیگر به تکنولوژی ای دست یافته که می تواند تعداد نیروهایی که طرف مقابل به هر جزیره ارسال می کند را پیش بینی کند و بر اساس آن نیروهای خود را به جزیره ها بفرستد. می دانیم هر یک از دو کشور بهترین شیوه را برای تصاحب بیشترین تعداد جزیره به کار می بندند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

اگر کشور پنیر شمالی ۱۰۰ نیرو و کشور پنیر جنوبی ۴۵ نیرو در اختیار داشته باشد. کشور پنیر شمالی حداکثر چند جزیره را می تواند تصاحب کند؟

۲۷

۵ (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) ۴ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۲ درست است.

چون کشور پنیر جنوبی از نحوه ی چینش کشور پنیر شمالی اطلاع می یابد یک استراتژی بهینه برای آن این است که همیشه سعی کند جزیره هایی که کمترین نیرو را دارند اشغال کند. اما می دانیم مجموع تعداد نیروهایی که پنیر شمالی به چهار جزیره ای که کمترین نیروها را دارند اعزام کرده است حداکثر ۴۰ است (چرا؟). در نتیجه کشور پنیر جنوبی می تواند حداقل ۴ جزیره را تصاحب کند. اما اگر کشور پنیر شمالی به هر جزیره دقیقا ۱۰ نیرو اعزام کند پنیر جنوبی نمی تواند بیش تر از ۴ جزیره را تصاحب کند و در نتیجه پنیر شمالی می تواند ۶ جزیره را تصاحب کند. □

اگر کشور پنیر جنوبی ۴۵ نیرو در اختیار داشته باشد، کشور پنیر شمالی حداقل چند نیرو باید داشته باشد تا مطمئن باشد که نیمی از جزیره ها را تصاحب می کند؟

۲۸

۶۸ (۱) ۷۰ (۲) ۶۹ (۳) ۷۳ (۴) ۷۵ (۵)

پاسخ: گزینه ی ۳ درست است.

اگر پنیر شمالی در هر جزیره ۷ نیرو قرار دهد، پنیر جنوبی حداکثر می تواند ۵ جزیره را اشغال کند. اما پنیر شمالی می تواند در یک جزیره ۶ نیرو قرار دهد به طوری که باز هم پنیر جنوبی نتواند بیش تر از ۵ جزیره را اشغال کند. با استفاده از اصل لانه کبوتری می توان نشان داد که پنیر شمالی با کمتر از ۶۸ نیرو نمی تواند این کار را انجام دهد، چون در این صورت پنیر جنوبی با ۴۵ نیرو می تواند حداقل ۶ جزیره را تصاحب کند (چرا؟). البته با ۶۸ نیرو اگر چه پنیر جنوبی نمی تواند بیش تر از ۵ جزیره را تصاحب کند اما پنیر شمالی هم نمی تواند مطمئن باشد که ۵ جزیره را تصاحب می کند، زیرا ممکن است در یکی از جزایر تساوی رخ دهد. □

شش نفر دور یک میز نشسته اند که هر یک از آن ها کلاهی بر سر دارد. کلاه ها به رنگ های قرمز، آبی و سبز هستند. می دانیم که از هر رنگ حداقل یک کلاه وجود دارد. هر کسی می تواند رنگ کلاه پنج نفر دیگر را ببیند، اما توان دیدن رنگ کلاه خود را ندارد. این شش نفر بسیار باهوش هستند و در صورتی که از لحاظ منطقی امکان تشخیص رنگ کلاه خود با توجه به رنگ کلاه دیگران وجود داشته باشد، رنگ کلاه خود را تشخیص می دهند. برای مثال اگر شخصی هیچ کلاهی با رنگ آبی روی سر پنج نفر دیگر نبیند، متوجه می شود که رنگ کلاه او آبی است، چرا که می داند از هر رنگ باید حداقل یک کلاه، در بین کلاه ها موجود باشد.

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید _____

اگر از این شش نفر بخواهیم در صورتی که توان تشخیص رنگ کلاه خود را دارند، دست خود را همزمان بلند کنند، با فرض پاسخ صادقانه حداقل و حداکثر چند نفر ممکن است دست خود را بلند کنند؟

۲۹

(۱) ۲ و ۲ (۲) صفر و ۶ (۳) صفر و ۲ (۴) ۲ و ۶ (۵) ۶ و ۶

پاسخ: گزینه ۳ درست است.

فقط کسانی که کلاه تک بر سر دارند قدرت تشخیص رنگ کلاه خود را دارند. حالت ۲ ۲ ۲ جواب حداقل و حالت ۴ ۱ ۱ جواب حداکثر را تولید می کند.

حالا پس از این پاسخ صادقانه، مجدداً از این شش نفر می خواهیم که در صورتی که هم اکنون رنگ کلاه خود را می دانند، دست خود را بلند کنند. در این حالت (باز با فرض پاسخ صادقانه) حداقل و حداکثر چند نفر ممکن است دست خود را بلند کنند؟

۳۰

(۱) صفر و ۲ (۲) صفر و ۶ (۳) ۲ و ۲ (۴) ۶ و ۶ (۵) ۶ و ۲

پاسخ: جواب صحیح «۳ و ۶» است که در گزینه ها موجود نیست.

کافی است حالت گیری کنیم.

• در حالت ۴ ۱ ۱ دو نفر دست بلند می کنند و چهار نفر دیگر متوجه تک بودن آن ها و در نتیجه رنگ کلاه خود می شوند.

• در حالت ۲ ۲ ۲ کسی دست بلند نمی کند و همه متوجه حالت ۲ ۲ ۲ می شوند. پس هر رنگی را تک دیدند رنگ کلاه خود آن ها است.

• در حالت ۳ ۲ ۱ فقط یک نفر دست بلند می کند و همه متوجه حالت ۳ ۲ ۱ می شوند. گروه ۱ و ۲ به راحتی رنگ کلاه خود را تشخیص می دهند. ولی اعضای گروه ۳ رنگ ها را به صورت ۲ ۲ ۱ می بینند و قادر به تشخیص رنگ کلاه خود از بین دو ۲ نیستند.

پس پاسخ ۳ و ۶ است.

□

مرحله ی اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

- سؤال های ۲۴ تا ۳۵ در چند دسته ی سؤالی آمده اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن ها آمده است.
- نمره دهی به همه ی سؤال ها یکسان می باشد. جواب درست به هر سؤال ۴ نمره ی مثبت و جواب نادرست ۱ نمره ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه ها در هر سوال به شکل تصادفی است.

۱	۰	۰
۰	۱	۱
۰	۰	۰

(۱) فرید یک جدول 3×3 به صورت مقابل دارد. او به رشید اجازه داده هر چند باری که خواست اعداد موجود در دو خانه ی مجاور را جابه جا کند. دو خانه مجاورند، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. با این حرکات رشید به چند جدول مختلف می تواند برسد؟

(۱) $35 - 1$ (۲) ۳۵ (۳) ۷۲ (۴) ۹۰ (۵) ۸۴

(۲) می خواهیم آهنگی با نت های موسیقی بسازیم با این شرط ها که فقط از نت های «سل»، «لا» و «سی» استفاده کنیم، بعد از هیچ نت «سل» ای بلافاصله نت «سی» نیاید و طول آهنگ دقیقاً ۳ نت باشد. با فرض اینکه می توان از نت تکراری استفاده کرد به چند طریق می توان چنین آهنگی ساخت؟

(۱) ۹ (۲) ۱۵ (۳) ۲۴ (۴) ۲۱ (۵) ۲۷

(۳) می خواهیم از نقطه ی A در شکل مقابل به یکی از نقاطی برویم که با دایره ی بزرگ مشخص شده اند. با فرض اینکه فقط می توانیم به سمت راست یا بالا حرکت کنیم، چند مسیر مختلف وجود دارد؟

A

(۱) 2^6 (۲) $\frac{12!}{2 \times 6! \times 6!}$ (۳) ۲۵ (۴) $\frac{10!}{2 \times 5! \times 5!}$ (۵) $\frac{12!}{6! \times 6!}$

(۴) یگانه یک جدول شطرنجی سیاه-سفید با ابعاد 19×19 دارد که سطرهایش را از بالا به پایین و ستونهایش را از چپ به راست با اعداد ۱ تا ۱۹ شماره گذاری کرده است. سپس در هر یک از خانه های جدول حاصل ضرب شماره ی سطر و شماره ی ستونی را که در آن قرار دارد یادداشت می کند. با فرض اینکه خانه ی بالا-چپ جدول سیاه باشد، مجموع اعدادی که در خانه های سیاه نوشته شده، چند است؟

(۱) 2×90^2 (۲) 2×100^2 (۳) 2×95^2 (۴) $90^2 + 100^2$ (۵) $2 \times 90^2 + 95$

(۵) رستم اعداد ۰ تا ۳۱ را در مبنای ۲ روی یک کاغذ می نویسد. او چندبار رقم ۱ را نوشته است؟ برای مثال برای نوشتن عدد ۵ در مبنای ۲، دوبار رقم ۱ را می نویسیم.

(۱) ۸۰ (۲) ۶۴ (۳) ۶۲ (۴) ۴۰ (۵) ۷۲

(۶) کوچکترین عدد طبیعی مانند n را در نظر بگیرید که به ازای هر $10 \geq i \geq 2$ ، باقیمانده ی تقسیم آن بر i برابر $i - 1$ باشد. ضرب ارقام عدد n چند است؟

(۱) ۱۸۱۴۴ (۲) ۷ (۳) ۹۰ (۴) ۰ (۵) ۱۶۳۲۹۶

(۷) ۱۵ شتر در یک صف پشت سرهم ایستاده اند. می دانیم که وزن هر شتر عددی طبیعی از ۱ تا ۱۵ است و ممکن است وزن دو شتر یکسان باشد. هر شتر مجموع وزن خود و دو برابر وزن نفر جلویی اش را حساب می کند به جز نفر اول صف که شتری در جلوی اش نیست. در کمال تعجب شترها متوجه می شوند که همه ی ۱۴ عدد محاسبه شده بر ۱۵ بخش پذیر است. وزن این ۱۵ شتر چند حالت مختلف می تواند داشته باشد؟

(۱) $15!$ (۲) 2^{14} (۳) ۱۵ (۴) ۲۲۵ (۵) $15^2 - 1$

مرحله ی اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

۱	۸	شش عنکبوت با شماره های ۱ تا ۶ روی تار عنکبوتی به شکل روبرو زندگی می کنند. هر عنکبوت دقیقاً با سه عنکبوت دیگر همسایه است. برای مثال عنکبوت ۱ با عنکبوت های ۲ و ۴ و ۶ همسایه است.		
۶	۲	در ابتدای روز هر عنکبوت روی در خانه اش، شماره اش را می نویسد. سپس در هر ساعت هر کدام از عنکبوت ها عدد نوشته شده روی در خانه اش را پاک می کند و به جای آن مجموع اعداد همسایه هایش را می نویسد. مثلاً بعد از گذشت یک ساعت روی در خانه ی عنکبوت شماره ی ۲ عدد ۹ نوشته می شود. پس از گذشت ۴ ساعت، مجموع اعداد نوشته شده روی همه ی خانه ها چند است؟		
۵	۳			
۴				
۱۳۹۹ (۵)	۱۹۲۹ (۴)	۱۷۰۱ (۳)	۱۸۶۹ (۲)	۱۹۱۹ (۱)

۹) مهشید قطعه ای از صفحه ی شطرنج را به شکل روبرو بریده است. او می خواهد مهره ی شاه را از خانه ی A به خانه ی B ببرد به طوری که:

- کمترین تعداد خانه را طی کند.
- تعداد خانه های سیاه مسیر دوبرابر تعداد خانه های سفید آن باشد (خانه های A و B هم جزء مسیر هستند).

مهره ی شاه در هر حرکت خود می تواند از یک خانه به خانه ی دیگر برود، به شرطی که این دو خانه در حداقل یک نقطه اشتراک داشته باشند. مثلاً از خانه ی A مستقیماً می توان به خانه های راست و بالا-راست آن رفت. مهشید به چند طریق می تواند این کار را انجام دهد؟

۳ (۵)	۱۶ (۴)	۱ (۳)	۰ (۲)	۸ (۱)

۱۰) دو تا ظرف داریم که در اولی یک لیتر آب و در دومی یک لیتر گلاب وجود دارد. از ظرف اول یک لیوان آب برمی داریم، به ظرف گلاب اضافه می کنیم و کاملاً هم می زنیم تا مخلوط شوند. بعد از ظرف دوم یک لیوان محلول آب و گلاب برمی داریم، به ظرف آب اضافه می کنیم و کاملاً هم می زنیم. درصد آب در ظرف اول و درصد گلاب در ظرف دوم را مقایسه کنید.

- ۱) مساوی هستند
- ۲) درصد آب در ظرف اول بیشتر است
- ۳) به حجم لیوان ربط دارد
- ۴) حتی با دانستن حجم لیوان هم نمی شود گفت
- ۵) درصد گلاب در ظرف دوم بیشتر است

۱۱) یک جدول ۱۰×۱۰ داریم. می خواهیم تعدادی از خانه های آن را رنگ کنیم به طوری که شرط زیر برقرار باشد:

- به ازای هر پوشش این جدول با مستطیل های ۱×۲ ، تعداد مستطیل های ۱×۲ که هر دو خانه ی آن ها رنگ شده است حداکثر ۲۵ باشد.

توجه کنید که در هر پوشش باید هر خانه ی جدول توسط دقیقاً یک مستطیل ۱×۲ پوشانده شود. همچنین مستطیل های ۱×۲ می توانند به صورت افقی یا عمودی قرار بگیرند و هر کدام باید دقیقاً دو خانه را پوشش دهند. با این شرایط حداکثر چند خانه را می توانیم رنگ کنیم؟

۷۵ (۵)	۶۰ (۴)	۸۰ (۳)	۵۰ (۲)	۵۱ (۱)

مرحله ی اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

- (۱۲) شکل مقابل چند جزیره را نشان می دهد که با تعدادی پل به هم متصل شده اند. حمید و رشید در ساعت ۱۲ ظهر در جزیره A هستند. آن ها باید به کشتی ای که در ساحل جزیره B لنگر انداخته و در ساعت ۴ بعد از ظهر حرکت می کند برسند. حرکت از ابتدای یک پل به انتهای آن یک ساعت زمان می برد و یک پل در هر لحظه می تواند وزن یک نفر را تحمل کند و اگر در یک لحظه هم حمید و هم رشید روی آن باشند، پل فرو می ریزد. چند حالت مختلف برای مسیر حرکت این دو وجود دارد به طوری که هر دوی آن ها به کشتی جزیره B برسند؟

B

(۱) ۱۲ (۲) ۲۰ (۳) ۱۶ (۴) ۳۶ (۵) ۲۸

- (۱۳) خیکوله مهری شطرنج جدیدی به اسم «خیل» اختراع کرده است. حرکت این مهره مانند فیل های معمولی است با این تفاوت که خانه هایی را روی صفحه شطرنج تهدید می کند که دقیقاً دو خانه ی قطری (هم از نظر تعداد سطر و هم از نظر تعداد ستون) با آن فاصله داشته باشند. به چند طریق می توان در یک صفحه ی شطرنج 8×8 دو مهره ی خیل متمایز قرار داد که یکدیگر را تهدید نکنند؟

(۱) ۱۸۷۲ (۲) ۳۸۸۸ (۳) ۱۱۴۴ (۴) ۱۹۴۰ (۵) ۲۲۸۸

- (۱۴) در هر یک از خانه های یک جدول 4×4 یکی از اعداد صفر یا یک را می نویسیم. سپس در کنار هر سطر حاصل جمع اعداد آن سطر را می نویسیم. سپس t را برابر حاصل ضرب اعداد کنار سطرها قرار می دهیم. به ازای چند حالت از جدول اولیه مقدار t برابر صفر می شود؟

(۱) $2^{16} - 1$ (۲) $2^{15} - 1$ (۳) 2^{15} (۴) $2^{15} + 1$ (۵) $2^{16} - 15$

- (۱۵) خالوخیکول برای خیکوله یک عروسک خریده است و خیکوله آن را دور یک دایره با صد جایگاه قرار داده است. فرض کنید در ثانیه ی اول عروسک در خانه ی شماره ی یک قرار دارد. ویژگی این عروسک این است که در هر ثانیه دو عروسک مانند خودش از جایش بیرون می آیند، یکی به ده خانه جلوتر می پرد و دیگری به یک خانه عقب تر. بنابراین در ثانیه ی دوم در هر یک از خانه های ۱، ۱۱ و ۱۰۰ یک عروسک قرار دارد. عروسک های جدید نیز به این روند ادامه می دهند (ممکن است در یک خانه بیش از یک عروسک قرار بگیرد). عروسک ها در ثانیه ی چندم تمامی صد خانه ی جدول را اشغال می کنند؟

(۱) ۱۹ (۲) ۱۷ (۳) ۲۰ (۴) ۱۸ (۵) ۲۱

- (۱۶) در یک تورنومنت ۱۵ پینگ پنگ باز حضور دارند و هر دونفر دقیقاً یکبار با هم بازی می کنند. به یک ۳ تایی از این بازیکنان، «ضایع» می گوئیم هرگاه اولی، دومی را برده باشد، دومی، سومی را برده باشد و سومی اولی را برده باشد. حداکثر چند ۳ تایی ضایع در این مسابقات وجود دارد؟

(۱) ۱۴۰ (۲) ۳۱۵ (۳) ۴۵۵ (۴) ۲۸۰ (۵) ۴۲۰

- (۱۷) می خواهیم هشت توپ یکسان را در سه کیسه ی یکسان قرار دهیم به طوری که هیچ توپی بیرون کیسه ها نباشد و همچنین در هر کیسه تعداد فردی توپ وجود داشته باشد. با فرض اینکه کیسه ها می توانند در داخل یکدیگر قرار گیرند، به چند طریق این کار ممکن است؟ توجه کنید که اگر کیسه ی a درون کیسه ی b باشد، توپ های درون کیسه ی a برای کیسه ی b هم شمرده می شود.

(۱) ۱۶ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۰ (۵) ۸

مرحله ی اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱۸) در شکل مقابل مبنا روی نقطه ی A ایستاده است. او فقط می تواند به صورت ساعت گرد روی کمان ها حرکت کند. مبنا به چند طریق می تواند با شروع از نقطه ی A و حرکت کردن روی کمان ها خود را به مکان اولیه اش برساند با فرض اینکه از هر نقطه حداکثر سه بار عبور کند؟ مثلاً یک مسیر ممکن این است که از کمان های بیرونی سه بار عبور کند و در نقطه ی A متوقف شود.

$$(۱) 2 \times 35 + 1 \quad (۲) 100 \quad (۳) 101 \quad (۴) 35 + 25 \quad (۵) 36$$

(۱۹) دنباله $a_1, a_2, \dots, a_m$ از اعداد ۱ تا n را خوب می نامیم اگر به ازای هر $i < j$ که $a_i = a_j$ هیچ یک از اعداد ظاهر شده در $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}$ خارج از بازه $[a_i, a_{i+1}, \dots, a_j]$ ظاهر نشده باشند. در واقع در یک دنباله خوب، اعداد ظاهر شده بین دو عدد مساوی نباید در خارج از بازه بینشان ظاهر شده باشند. به عنوان مثال دنباله ی ۱, ۲, ۳, ۱, ۴, ۲, ۱, ۳, ۲, ۱ خوب نیست، چون عدد ۲ هم بین دو تا ۱ ظاهر شده است و هم بیرون آن ها. طول بزرگترین دنباله ی خوب با اعداد ۱ تا n چند است؟

$$(۱) 4n \quad (۲) 3n \quad (۳) 2n - 1 \quad (۴) 2n \quad (۵) 4n - 1$$

(۲۰) جدولی 5×5 داریم. فرشید از یک خانه واقع در ستون اول شروع به حرکت می کند و در هر مرحله به سمت بالا، پایین و یا راست حرکت می کند تا نهایتاً از سمت راست جدول خارج شود. او به هیچ خانه ای دوبار نمی رود و نمی تواند از بالا و پایین جدول خارج شود. به عنوان مثال شکل مقابل یکی از مسیرهای ممکن را نشان می دهد. به ازای هر مسیری که فرشید می تواند بپیماید تعداد خانه های مسیر را یادداشت کرده ایم. مجموع این اعداد چند است؟

$$(۱) 218750 \quad (۲) 203125 \quad (۳) 15625 \quad (۴) 43750 \quad (۵) 109375$$

(۲۱) ۸ نفر با هم یک بازی می کنند به این صورت که هر نفر در ابتدا یک کلمه انتخاب می کند. سپس در هر مرحله این ۸ نفر به ۴ گروه ۲ تایی تقسیم می شوند و در هر گروه ۲ نفره، هرکس تمام کلماتی را که می داند به نفر مقابل اش می گوید. بازی زمانی تمام می شود که هر یک از این ۸ نفر هر ۸ کلمه ی اولیه را بداند. ما می دانیم که حمید فقط در مرحله ی اول راست می گوید و در باقی مراحل نمی توان روی حرف اش حساب کرد. حداقل چند مرحله لازم است تا مطمئن شویم هر ۸ نفر، ۸ کلمه ی اولیه را می دانند؟

$$(۱) 5 \quad (۲) 7 \quad (۳) 4 \quad (۴) 6 \quad (۵) 3$$

۱	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۰

(۲۲) جدول رو به رو به ما داده شده است. در هر مرحله می توانیم تغییری در این جدول بدهیم. تغییرات به این صورت است که جای دو سطر یا جای دو ستون را عوض می کنیم. با استفاده از این تغییرات به چند جدول مختلف می توانیم برسیم؟ توجه کنید که تغییرات را به تعداد دلخواه می توانیم انجام دهیم.

$$(۱) 144 \quad (۲) 96 \quad (۳) 576 \quad (۴) 288 \quad (۵) 24$$

مرحله ی اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۳) رشید به تازگی با دو نوع دستگاه به نام های کفگیر و سقفگیر آشنا شده است که به صورت زیر عمل می کنند:

- دستگاه کفگیر عدد x را به عنوان ورودی گرفته و $\lfloor x/2 \rfloor$ را به عنوان خروجی بر می گرداند.
- دستگاه سقفگیر عدد x را به عنوان ورودی گرفته و $\lceil x/2 \rceil$ را به عنوان خروجی بر می گرداند.

رشید ۱۳۹۱ دستگاه در یک ردیف پشت سر هم قرار داده است به طوری که دستگاه i ام کفگیر است اگر i عددی اول باشد و در غیر این صورت سقفگیر است. برای مثال دستگاه اول و چهارم سقف گیر هستند و دستگاه دوم و سوم کفگیر هستند.

حال رشید یک عدد طبیعی به عنوان ورودی به دستگاه اول می دهد، سپس خروجی این دستگاه وارد دستگاه دوم می شود، خروجی دستگاه دوم وارد دستگاه سوم می شود و به همین ترتیب تا دستگاه ۱۳۹۱ ام که خروجی نهایی را تولید می کند. به ازای چند عدد به عنوان ورودی دستگاه اول، خروجی نهایی برابر با یک می شود؟

۱۳۹۱ (۵) ۲۱۳۹۰ (۴) ۲۱۳۹۱ (۳) ۱۹۳۳۴۹۰ (۲) ۱۳۹۰ (۱)

سؤال های ۲۴ تا ۳۵ در چند دسته ی سؤال ی آمده اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن ها آمده است.

۱۰۰ انسان و لیستی از نام های ۱۰۰ حیوان وجود دارد. هر انسان نام دقیقاً ۱۰ حیوان را می داند و نام هر حیوان را دقیقاً ۱۰ انسان می دانند. هیچ دو انسانی دقیقاً ۱۰ نام مشابه را نمی دانند. آن ها می خواهند نام حیوانات را روی تخته بنویسند و از نوشتن نام های تکراری پرهیز کنند. برای این منظور تعدادی بازی طراحی کرده اند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید _____

۲۴) در بازی «نویسی می بازی» انسان ها در یک صف قرار می گیرند و هر کس در نوبت خود نام حیواناتی را که می داند و هنوز روی تخته نیستند، روی تخته می نویسد. هر کس در نوبت خود نتواند نام حیوانی را به تخته اضافه کند بازنده است.

وقتی نوبت همه انسان ها تمام شد تعداد بازنده ها چند عدد مختلف می تواند باشد؟

۸۹ (۱) ۸۲ (۲) ۹۰ (۳) ۸۰ (۴) ۸۱ (۵)

۲۵) در بازی «بنویس ولی می بازی» انسان ها در یک صف قرار می گیرند و هر کس در نوبت خود نام حیواناتی را که می داند و هنوز روی تخته نیستند، روی تخته می نویسد و اگر حداقل نام یکی از حیواناتی را که می داند قبلاً روی تخته نوشته باشند، می بازد.

وقتی نوبت همه انسان ها تمام شد تعداد بازنده ها چند عدد مختلف می تواند باشد؟

۸۱ (۱) ۹۹ (۲) ۸۰ (۳) ۱۰ (۴) ۹۰ (۵)

۲۶) در بازی «ببازی نمی نویسی» انسان ها در یک صف قرار می گیرند و هر کس در نوبت خود اگر حداقل نام یکی از حیواناتی را که می داند قبلاً روی تخته نوشته باشند، می بازد و چیزی روی تخته نمی نویسد. در غیر این صورت نام حیواناتی را که می داند روی تخته می نویسد.

وقتی نوبت همه انسان ها تمام شد، تعداد حیوانات روی تخته چند عدد مختلف می تواند باشد؟

۱ (۱) ۹۰ (۲) ۱۰ (۳) ۹۱ (۴) ۹ (۵)

مرحله ی اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

نازخیکول یک کیسه شامل ۲۲ تیله سفید و ۳۳ تیله سیاه دارد. تا زمانی که بیش از ۱ تیله در کیسه وجود داشته باشد، در هر مرحله نازخیکول بدون نگاه کردن به تیله ها دو تیله را به صورت تصادفی از کیسه خارج می کند و با توجه به رنگ آن ها، یکی از اعمال زیر را انجام می دهد:

- اگر هر دو تیله سفید بودند، هر دو تیله را دور می اندازد.
- اگر هر دو تیله سیاه بودند، یک تیله را دور می اندازد و دیگری را به کیسه باز می گرداند.
- اگر یک تیله سفید و یک تیله سیاه بود، تیله سفید را به کیسه بر می گرداند و تیله سیاه را دور می اندازد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

(۲۷) حداقل و حداکثر چند مرحله طول می کشد تا نازخیکول متوقف شود (زمانی که حداکثر ۱ تیله در کیسه وجود داشته باشد)؟

(۱) ۴۵، ۴۳ (۲) ۴۴، ۴۴ (۳) ۴۵، ۴۴ (۴) ۴۴، ۴۳ (۵) ۴۳، ۴۳

(۲۸) کدام گزاره در مورد حالت نهایی درست است؟

- (۱) در حالت پایانی حتما یک تیله سیاه در کیسه وجود دارد
- (۲) کیسه حتما خالی می شود
- (۳) در صورت خالی نشدن کیسه، رنگ تیله پایانی حتما سیاه است
- (۴) در حالت پایانی حتما یک تیله سفید در کیسه وجود دارد
- (۵) هیچکدام

یک جایگشت از اعداد ۱ تا n یک لیست از اعداد ۱ تا n است که هر عدد دقیقاً یک بار در آن ظاهر شده است. برای مثال $< ۱, ۵, ۳, ۴, ۲ >$ یک جایگشت از اعداد ۱ تا ۵ است. رنگ آمیزی معتبر برای یک جایگشت، رنگ آمیزی ای است که شرایط زیر را داشته باشد:

- دو عدد مجاور هم در جایگشت هم رنگ نباشند.
- دو عدد که اختلاف آن ها برابر با ۱ است هم رنگ نباشد.

عدد رنگی یک جایگشت برابر است با حداقل تعداد رنگ های متفاوتی که برای رنگ آمیزی معتبر اعداد آن جایگشت لازم است.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

(۲۹) عدد رنگی جایگشت $< ۱, ۵, ۲, ۴, ۶, ۳ >$ چند است؟

(۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۵ (۵) ۳

(۳۰) در میان تمام جایگشت های اعداد ۱ تا ۶ عدد رنگی چند جایگشت برابر با ۲ است؟

(۱) ۶۲۵ (۲) ۳۶ (۳) ۰ (۴) ۱۲۵ (۵) ۷۲

(۳۱) بیشترین عدد رنگی بین همه جایگشت های اعداد ۱ تا ۷ چند است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۴ (۵) ۵

مرحله ی اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

تپلوس ها موجوداتی هستند که بین هر جفت از آن ها یک رابطه ی دو طرفه ی دوستی یا دشمنی برقرار است. ویژگی جالب این موجودات این است که به ازای هر سه تپلوس دلخواهی، یا هر سه با هم دوست اند یا دو نفرشان که با هم دوست اند، هر دو با نفر سوم دشمن اند.

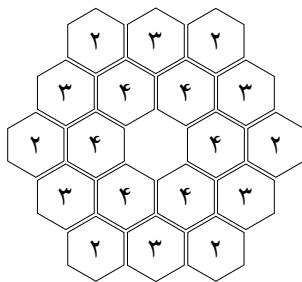
با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید.

(۳۲) جمشید سیاره ای متعلق به تپلوس ها کشف کرده است که در آن دقیقاً ۱۲ رابطه ی دشمنی وجود دارد. حداقل چند تپلوس در این سیاره زندگی می کند؟

۹ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۸ (۵)

(۳۳) تحقیقات اخیر جمشید نشان می دهد که در سیاره ای جدید، ۹ تپلوس با نام های T_1 تا T_9 زندگی می کنند. همچنین او فهمیده است که T_1 و T_2 با هم دشمن، T_2 و T_3 با هم دشمن و T_4 با هم دشمن و T_5 و T_6 با هم دشمن اند. با این اطلاعات روابط دوستی و دشمنی بین این ۹ تپلوس به چند شکل مختلف می تواند باشد؟

۱۳ (۱) ۳۲ (۲) ۵۶ (۳) ۲۸ (۴) ۶۴ (۵)



شکل روبرو کشور خیکولند را نشان می دهد که از ۱۸ قبیله تشکیل شده و قلمروی هر قبیله به شکل یک ۶-ضلعی است. طبق یک آیین دیرینه صبح روز مرحله ی اول هر قبیله به تعدادی از همسایه های خود حمله می کند. در شکل عدد روی قلمروی هر قبیله نشان دهنده ی تعداد قبایلی است که این قبیله به آن ها حمله خواهد کرد. دو قبیله همسایه اند اگر و تنها اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. یک قبیله تنها نامیده می شود اگر از طرف همه ی همسایه های خود مورد حمله قرار بگیرد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید.

(۳۴) حداقل چند قبیله ی تنها وجود دارد؟

۶ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴) ۱۸ (۵)

(۳۵) حداکثر چند قبیله ی تنها وجود دارد؟

۱۵ (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) ۱۸ (۴) ۱۳ (۵)

مرحله ی اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

به نام خدا

پاسخ تشریحی

مرحله اول بیست و سومین دوره المپیاد کامپیوتر

سال ۱۳۹۱

کد دفترچه: ۱

❖ این پاسخها با تلاش همیاران و اعضای کمیته ی ملی المپیاد کامپیوتر فراهم شده اند و دور از انتظار نیست که کمبودها و خطاهایی در آن وجود داشته باشد. هرگونه پیشنهاد اصلاح یا تکمیل این پاسخها را از طریق سامانه ی اینترنتی <http://www.inoi.ir> به اطلاع کمیته ی ملی المپیاد کامپیوتر برسانید.

مرحله اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱) گزینه ی ۵ درست است.

با استفاده از حرکات توصیف شده می توان هر ترتیبی از قرارگیری صفر و یک ها را در جدول ساخت (حتی اگر اعداد تمامی خانه های جدول از یکدیگر متمایز بودند نیز می توانستیم هر حالتی را تولید کنیم). در نتیجه جواب مسئله برابر است با:

$$\binom{9}{3} = 84$$

(۲) گزینه ی ۴ درست است.

در صورتی که نت اول سل نباشد، برای نت بعدی سه حالت و در صورتی که سل باشد دو حالت داریم. به همین ترتیب نت دوم را تقسیم بندی می کنیم تا به نتیجه ی زیر برسیم:

$$2 \times (2 \times (3) + 1 \times (2)) + 1 \times (1 \times (3) + 1 \times (2)) = 21$$

(۳) گزینه ی ۱ درست است.

هر مسیر از نقطه ی A به نقاط بزرگ را می توان با یک رشته ی دودویی به طول ۶ متناظر ساخت (صفر در رشته به معنی حرکت به سمت راست و یک به معنی حرکت به سمت بالا خواهد بود).

به این نکته توجه کنید که در هر نقطه از مسیر دقیقا دو انتخاب داریم و طول مسیر هم دقیقا ۶ می باشد. در نتیجه تعداد کل حالات برابر است با: 2^6 .

(۴) گزینه ی ۱ درست است.

طبق نکات یاد شده در سوال می دانیم خانه های سیاه، خانه هایی هستند که زوجیت شماره ی سطر و ستون شان یکی است.

ابتدا مجموع خانه های واقع در سطر و ستون فرد و سپس مجموع خانه های واقع در سطر و ستون زوج را محاسبه می کنیم. هر کدام شامل جدولی کامل خواهند بود که مجموعش از ضرب مجموع سطر در مجموع ستون بدست می آید.

$$(1 + 3 + \dots + 19)^2 + (2 + 4 + \dots + 18)^2 = 90^2 + 100^2$$

(۵) گزینه ی ۱ درست است.

هر رقم از یک عدد ۵ رقمی در مبنای دو می تواند یک یا صفر باشد که دقیقا در ۱۶ عدد، یک و در ۱۶ عدد دیگر صفر است. در نتیجه مجموع تعداد ارقام یک در این اعداد برابر است با:

$$16 \times 5 = 80$$

(۶) گزینه ی ۳ درست است.

در صورتی که به عدد n یک واحد اضافه کنیم باقیمانده ی آن بر هر $2 \leq i \leq 10$ ، صفر خواهد بود. کوچکترین عدد با این ویژگی، ک.م.م این اعداد خواهد بود:

مرحله اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

$$n + 1 = 8 \times 9 \times 5 \times 7 = 2520 \Rightarrow n = 2519$$

پس ضرب ارقام آن برابر ۹۰ خواهد بود.

(۷) گزینه ی ۳ درست است.

ادعا می کنیم در صورتی که وزن شتر اول مشخص شود، وزن بقیه ی شترها به صورت یکتا تعیین می شود. برای اثبات این ادعا باید وزن هر شتر را از روی وزن شتر جلوی آن بدست آوریم.

فرض کنید که وزن شتر جلویی i باشد. اگر i فرد باشد وزن شتر باید $\frac{15-i}{2}$ و در غیر اینصورت باید $\frac{30-i}{2}$ باشد. در نتیجه تعداد کل حالات ۱۵ تا است.

* نکته: می توان همین روند را برای شتر آخر نیز نوشت. سعی کنید وزن شتر $(i - 1)$ ام را براساس وزن شتر i ام بدست آورید.

(۸) گزینه ی ۳ درست است.

در هر مرحله عدد نوشته شده در خانه ها پاک می شود ولی به عدد سه خانه ی دیگر اضافه می شود. پس در هر مرحله مجموع اعداد خانه ها سه برابر خواهد شد.

در ابتدا مجموع اعداد، ۲۱ است و پس از گذشت چهار ساعت برابر $21 \times 81 = 1701$ می شود.

(۹) گزینه ی ۵ درست است.

تعداد خانه های مسیر ۶ تا هستند در نتیجه باید دقیقا از ۲ خانه ی سفید بگذریم. در نتیجه هر زمان که به خانه ی سفید رسیدیم باید به خانه ی سفید بالا-راست آن برویم و سپس از خانه های سفید خارج شویم. پس تعداد روش های مختلف اینکار ۳ حالت است (باتوجه به اینکه اولین بار به کدام خانه ی سفید رسیده ایم).

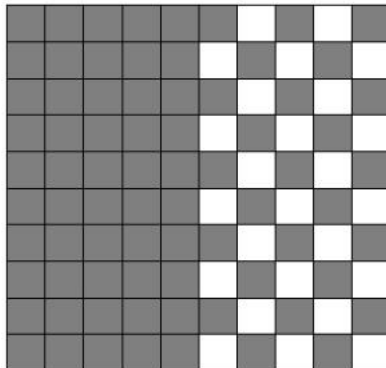
(۱۰) گزینه ی ۱ درست است.

چون در نهایت در هر دو ظرف یک لیتر مایع وجود دارد، هر چقدر که در ظرف اول آب باشد در ظرف دوم به همان میزان گلاب وجود دارد. در نتیجه درصدهای ذکر شده با یکدیگر برابر هستند.

(۱۱) گزینه ی ۵ درست است.

در صورتی که در یک پوشش ۲۵ مستطیل کامل رنگ شده باشد و از بقیه ی مستطیل ها نیز حداکثر یک خانه ی رنگ شده داشته باشیم، به حداکثر ۷۵ خانه ی رنگی خواهیم داشت.

مثال زیر با این تعداد رنگ آمیزی، شرایط مسئله را برآورده کرده است.



مرحله اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

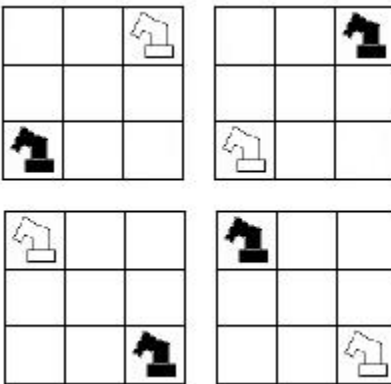
(۱۲) گزینه ی ۲ درست است.

در ساعت اول دو حالت برای حرکت آنها وجود دارد. در ساعت دوم اگر هر دو به جزیره ی وسط نقشه نروند، بقیه مسیر به صورت یکتا مشخص می شود. تعداد این حالات برابر ۸ است. اگر هر دو به جزیره ی وسط سفر کنند دو حالت برای ادامه ی حرکت وجود دارد. در نتیجه جواب نهایی برابر است با:

$$2 \times (8 + 2) = 20$$

(۱۳) گزینه ی ۲ درست است.

حالات غیرمعتبر را از کل حالات قرارگیری دو خیل در صفحه ی شطرنج کم می کنیم. وقتی دو خیل همدیگر را تهدید می کنند که در دو قطر یک مربع 3×3 باشند. چون رنگ خیل ها باهم فرق دارد به چهار حالت زیر می توانند در قطر قرار بگیرند.



همچنین به ۳۶ حالت می توان جدول 3×3 را در جدول اولیه مشخص کرد. در نتیجه جواب نهایی برابر است با:

$$64 \times 63 - 4 \times 36 = 3888$$

(۱۴) گزینه ی ۱ درست است.

تنها در صورتی t صفر خواهد شد که حداقل یکی از اعداد کنار سطرها صفر شود. برای محاسبه بهتر است که حالات متمم آن را محاسبه کنیم.

تعداد حالاتی که هیچ کدام از اعداد کنار سطرها صفر نشود، بدین معنی است که در هر سطر حداقل یک عدد ۱ داشته باشیم. یعنی تعداد حالات هر سطر برابر ۱۵ خواهد بود (همه ی حالات بجز اینکه همه ی خانه ها صفر باشند). پس کل حالات متمم برابر 15^4 می شود و جواب مسئله ی اصلی برابر خواهد بود با:

$$2^{16} - 15^4$$

(۱۵) گزینه ی ۱ درست است.

با بررسی مدت زمان رسیدن به خانه های مختلف، خانه ی ۸۲ دورترین خانه از عروسک است که برای رسیدن به آن ۱۸ ثانیه زمان نیاز است و در نهایت در ثانیه ی ۱۹م این خانه پر می شود. می توان به سادگی بررسی کرد که تمامی خانه های جدول در این زمان دارای عروسک هستند.

مرحله اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱۶) گزینه ی ۱ درست است.

در صورتی که یک سه تایی ضایع نباشد دقیقا یکی از آنها دو نفر دیگر را برده است (برنده) و دقیقا یکی از آنها از دو نفر دیگر باخته است (چرا؟). به جای شمارش سه تایی های ضایع، متمم آنها را می شماریم.

هر سه تایی غیرضایع با دو برد برنده اش مشخص می شود. پس کفایت که تعداد جفت پیروزی های ممکن در مسابقات را بیابیم. فرض کنید که تعداد بردهای نفر اول تا پانزدهم به ترتیب $d_1, \dots, d_{15}$ باشد. می دانیم مجموع این اعداد برابر تعداد مسابقات است (چون هر مسابقه دقیقا یک برنده دارد). در نتیجه تعداد زوج پیروزی ها برابر خواهد بود با:

$$\binom{d_1}{2} + \binom{d_2}{2} + \dots + \binom{d_{15}}{2}$$

که می خواهیم این عدد را کمینه کنیم. تنها عدد غیرمعلوم در عبارت بالا مجموع مربعات این اعداد است که طبق نامساوی حسابی-مربعی مینیمم آن زمانی اتفاق می افتد که همگی آنها با یکدیگر برابر باشند (هرکس ۷ برد و ۷ باخت داشته باشد).

از طرفی یک مثال نیز برای چنین اعدادی وجود دارد. در صورتی که ۱۵ نفر را به ترتیب دور دایره قرار دهیم، هرکسی از ۷ نفر جلوی خود ببرد و از ۷ نفر قبل از خود ببازد این کار میسر می شود. به ازای این حالت تعداد سه تایی های ضایع برابر می شود با:

$$\binom{15}{3} - 15 \times \binom{7}{2} = 455 - 315 = 140$$

(۱۷) گزینه ی ۴ درست است.

ابتدا وضعیت کیسه ها نسبت به یکدیگر را بدست می آوریم. در صورتی که تعداد کیسه های بیرونی فرد باشد، یکی از کیسه ها حاوی زوج توپ خواهد بود. در نتیجه تعداد کیسه های بیرونی دو تا خواهد بود و کیسه ی سوم درون یکی از آنها است. کیسه ی بیرونی که کیسه ای در آن نیست، می تواند ۱، ۳، ۵ یا ۷ توپ داشته باشد. همچنین توپ های باقی مانده در بین دو کیسه ی دیگر تقسیم می شوند (اگر توپ های باقیمانده به ترتیب ۷، ۵، ۳ و ۱ باشد به ۴، ۳، ۲ و ۱ حالت در این دو کیسه قرار می گیرد).

در نتیجه جواب نهایی برابر است با: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$

(۱۸) گزینه ی ۱ درست است.

بر اساس تعداد دوره هایی که در نهایت می زنیم تقسیم بندی می کنیم (تعداد دفعاتی که از A می گذریم:

- اگر یک دور بزنی، هر دور کوچک را می توانیم صفر، یک یا دو بار طی کنیم. در نتیجه تعداد این حالات برابر 3^5 است.
- اگر دو دور بزنی، در هر دور کوچک سه حالت ممکن است (یا اصلا دور کوچک را طی نمی کنیم، یا فقط در دور اول یا فقط در دور دوم آن را دور می زنیم). پس تعداد این حالات نیز 3^5 است.
- در نهایت اگر سه دور بزنی، دنباله حرکات به صورت یکتا بدست می آید.

در نتیجه کل حالات برابر است با: $2 \times 3^5 + 1$.

(۱۹) گزینه ی ۲ درست است.

اگر در دنباله یک عدد چهار بار استفاده شود، همان چهار عدد ناقض شرط مسئله هستند (چرا؟).

پس طول دنباله حداکثر $3n$ خواهد بود. در صورتی که از هر عدد سه بار استفاده شود و تمام اعداد یکسان در کنار هم آمده باشند به راحتی دیده می شود که شرط مسئله در آن صدق می کند:

مرحله ی اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

111222 ... nnn

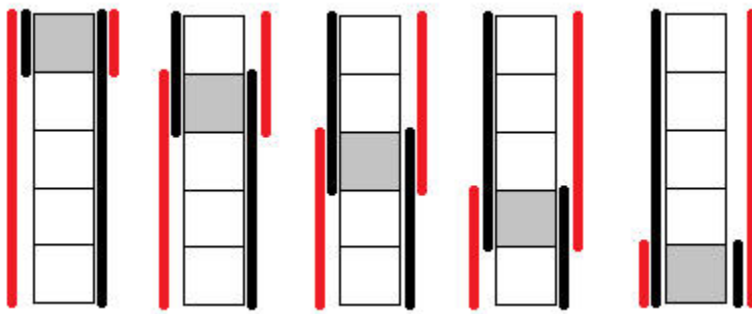
(۲۰) گزینه ی ۲ درست است.

برای محاسبه ی جواب کافیست به جای جمع زدن طول مسیرهای ممکن، برای هر خانه تعداد مسیرهایی که از آن می گذرند را محاسبه کنیم. یک خانه را در نظر بگیرید. برای عبور از آن باید حتما از یک سطر با شماره ی بزرگتر مساوی (یا کوچکتر مساوی) این خانه وارد ستون آن شویم و از یک سطر با شماره ی کوچکتر مساوی (یا بزرگتر مساوی) این خانه از ستون آن خارج شویم. همچنین برای حرکت بین بقیه ی ستون ها محدودیتی وجود ندارد و در واقع برای رفتن از یک ستون به ستون بعدی ۵ انتخاب داریم. در نتیجه در هر صورت 5^4 حالت برای حالات مختلف مسیر در بقیه ی ستون ها وجود دارد.

از بین ۲۵ مسیر مختلفی که برای ورود و نهایتا خروج از این ستون وجود دارد، بسته به اینکه خانه ی مورد نظر در کدام سطر باشد تعداد مسیرهای گذرنده از آن متفاوت خواهد بود:

- اگر در سطر اول باشد: در ۹ حالت از این خانه می گذرد.
- اگر در سطر دوم باشد: در ۱۵ حالت از این خانه می گذرد.
- اگر در سطر سوم باشد: در ۱۷ حالت از این خانه می گذرد.
- اگر در سطر چهارم باشد: در ۱۵ حالت از این خانه می گذرد.
- اگر در سطر پنجم باشد: در ۹ حالت از این خانه می گذرد.

حالات مختلف مسیر در شکل زیر مشخص شده اند:



در نتیجه مجموع کل حالات برابر است با:

$$5^4 \times 5 \times (9 + 15 + 17 + 15 + 9) = 203125$$

(۲۱) گزینه ی ۳ درست است.

در چهار مرحله با حرکات زیر می توان به هدف سوال رسید. فرض کنید که حمید نفر اول است.

(1,2) (3,4) (5,6) (7,8)

مرحله ی اول:

- هرکسی از دو خبر آگاه است.

(1,3) (2,4) (5,7) (6,8)

مرحله ی دوم:

- به جز ۳ همگی از چهار خبر آگاهند.

(1,5) (2,6) (3,7) (4,8)

مرحله ی سوم:

مرحله اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

- به جز 3 و 7 و 5 بقیه از همه ی اخبار آگاهند.

مرحله ی چهارم: (1,2) (3,4) (5,6) (7,8)

- تمامی افراد از همه ی اخبار آگاهند.

از طرفی با سه حرکت نمی توان به نتیجه رسید. زیرا پس از مرحله ی اول هرکس حداکثر دو خبر دارد. پس از مرحله ی دوم هرکس حداکثر ۴ خبر دارد به جز کسی که با حمید جفت شده است که حداکثر دو خبر دارد. او در مرحله ی بعدی حداکثر ۴ خبر جدید می گیرد و بنابراین بعد از سه مرحله حداکثر ۶ خبر خواهد داشت.

(۲۲) گزینه ی ۳ درست است.

در ابتدا تعداد یک های سطرها و همچنین ستون ها برابر مجموعه ی $\{1, 2, 3, 4\}$ است. در هر مرحله اگر جای دو سطر (ستون) را عوض کنیم این مجموعه نه برای ستون ها و نه برای سطرها تغییری نمی کند. از طرفی با حرکات ذکر شده هر جایگشتی از این مجموعه را می توان تولید کرد (چرا؟).

اگر جایگشت سطر و ستون ها را بدانیم، جدول به صورت یکتا مشخص می شود. چرا که اعداد سطر و ستون با شماره ی ۴ همه یک هستند و در نتیجه اعداد سطر و ستون با شماره ی ۱ نیز بدست می آید. پس از آن اعداد سطر و ستون با شماره ی ۳ و در نهایت بقیه اعداد بدست می آیند. پس با توجه به نکات بالا تعداد جداول مختلف برابر است با:

$$(4!)^2 = 576$$

(۲۳) گزینه ی ۳ درست است.

مستقل از اینکه دستگاه ها کفگیر باشند یا سقفگیر، همیشه تعداد اعداد 2^{1391} خواهد بود.

در واقع تعداد اعدادی که پس از i مرحله به ۱ ختم می شوند، 2^i تا است.

اگر پس از یک سقفگیر به عدد X برسیم، عدد قبلی $2X - 1$ یا $2X$ بوده است.

اگر پس از یک کفگیر به عدد X برسیم، عدد قبلی $2X + 1$ یا $2X$ بوده است.

نکته ی دیگر این است که در هر مرحله مجموعه ی جواب ها یک بازه است که در مرحله ی بعد این بازه دو برابر می شود (با استقرا ثابت کنید) در نتیجه پس از ۱۳۹۱ مرحله 2^{1391} عدد مختلف خواهیم داشت.

(۲۴) گزینه ی ۲ درست است.

می دانیم حداقل ۱۰ نفر بازنده نمی شوند. پس حداکثر ۹۰ نفر بازنده خواهند شد.

از طرفی نفر اول نام ۱۰ حیوان را می نویسد و هر فرد غیربازنده ای نام حداقل یک حیوان را می نویسد. پس حداقل ۹ نفر بازنده خواهیم داشت.

تمام اعداد بین ۹ تا ۹۰ قابل دستیابی است و می توان مثالی برای هر یک یافت. در نتیجه جواب مسئله برابر ۸۲ است.

(۲۵) گزینه ی ۴ درست است.

یک نفر در صورتی بازنده نیست که بتواند دقیقاً نام ۱۰ حیوان مختلف را بنویسد. در نتیجه تعداد افرادی که بازنده نیستند عددی بین ۱ تا ۱۰ خواهد بود. به وضوح تمام حالات نیز با ارائه ی مثال قابل دستیابی هستند. در نتیجه جواب مسئله ۱۰ است.

(۲۶) گزینه ی ۵ درست است.

هر نفر که نبازد نام دقیقاً ۱۰ حیوان را خواهد نوشت. در نتیجه همیشه تعداد حیوانات روی تخته بر ۱۰ بخش پذیر است.

مرحله اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

ولی می‌دانیم در انتها حالتی که ۱۰ حیوان روی تخته نوشته شده باشد اتفاق نمی‌افتد. چرا که در اینصورت ۹۹ نفر بعدی باید نام یکی از ۱۰ حیوان روی تخته را بدهند. این بدان معنی است که نام این ۱۰ حیوان حداقل ۱۰۹ بار (۱۰ حیوان برای نفر اول و ۹۹ حیوان برای ۹۹ نفر بعدی) باید آمده باشد که با توجه به شرایط اولیه مسئله ممکن نیست.

پس تعداد حیوانات روی تخته ۹ عدد مختلف می‌تواند باشد. برای هر کدام از این حالات می‌توان مثالی یافت.

(۲۷) گزینه‌ی ۴ درست است.

تنها در صورتی که دو تیلای سفید بیرون آورده شود، دو تیلای از کیسه حذف می‌شود. در نتیجه حداکثر ۱۱ بار این اتفاق خواهد افتاد. در بقیه حالات نیز یک تیلای حذف می‌شود. در ابتدا ۵۵ تیلای و در انتها حداکثر ۱ تیلای خواهد ماند. در نتیجه حداقل ۴۳ مرحله نیاز است. اگر در ۱۱ مرحله‌ی اول تیلای سفید از کیسه بیرون آید این حالت اتفاق می‌افتد.

از طرفی در انتها هیچ تیلای سفیدی در کیسه نیست (چون تعداد تیلایهای سفید همواره زوج هستند). در نتیجه دقیقاً ۱۱ بار دو تیلای حذف شده است. در ابتدا ۵۵ تیلای و در انتها می‌تواند تیلای در کیسه نماند، پس حداکثر ۴۴ مرحله نیاز است. اگر تا زمانی که تیلای سیاه در کیسه است تیلای سفید و سیاه از کیسه بیرون آید این حالت اتفاق خواهد افتاد.

(۲۸) گزینه‌ی ۴ درست است.

با توجه به روش ذکر شده در مرحله‌ی قبل دو حالت برای انتهای بازی وجود دارد:

- یک تیلای سیاه در کیسه بماند.
- هیچ تیلای در کیسه نماند.

در نتیجه در بین گزینه‌های سوال، تنها گزینه‌ی ۴ صحیح است.

(۲۹) گزینه‌ی ۵ درست است.

سه عدد ۱، ۲ و ۵ باید رنگ‌آمیزی متفاوتی داشته باشند (۱ با ۵ و ۲ مجاور است و اختلاف ۱ و ۲ یک واحد است). با سه رنگ نیز به ترتیب زیر می‌توان به هدف رسید.

< 1, 5, 2, 4, 6, 3 >

(۳۰) گزینه‌ی ۵ درست است.

در صورتی عدد رنگی جایگشت ۲ خواهد بود که اعداد زوج به یک رنگ و اعداد فرد به رنگ دیگر باشند. در این صورت باید در جایگاه‌های زوج و در جایگاه‌های فرد رنگ‌های متمایزی باشند. در نتیجه اعداد زوج در یکی از این جایگاه‌ها و اعداد فرد در جایگاه دیگر باشند. پس تعداد این حالات برابر خواهد بود با:

$$2 \times (3!)^2 = 72$$

(۳۱) گزینه‌ی ۴ درست است.

اگر به ترتیب از ابتدای جایگشت رنگ‌آمیزی کنیم، هر عدد یک همسایه قبل از خود دارد و دو عدد که با آن حداکثر یک واحد اختلاف دارند. پس اگر ۴ رنگ داشته باشیم، همواره می‌توان اعداد را رنگ کرد. برای مثال زیر نیز حداقل ۴ رنگ مورد نیاز است:

< 2, 4, 1, 3, 5, 6, 7 >

مرحله اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

(۳۲) گزینه ی ۴ درست است.

فرض کنید گرافی داریم که راس هایش تپلوس ها و یال های آن، رابطه ی دشمنی بین دو نفر هستند. در اینصورت شرط سوال بدین معنی است که در هر سه تایی زوج یال وجود دارد.

با این تعاریف، ثابت می کنیم با ۶ راس نمی توان ۱۲ یال در گراف داشت و با ۷ راس یک مثال می آوریم.

برهان خلف. فرض کنید با ۶ راس بتوان چنین گرافی ساخت. مکمل گراف را در نظر بگیرید. در این گراف در هر سه تایی فرد یال داریم (چرا؟).

• اگر دو تا از این یال ها در یک راس اشتراک داشته باشند، باید یال سوم با آنها تشکیل یک مثلث دهد که در اینصورت سه راس دیگر صفر یال خواهند داشت و این ممکن نیست.

• اگر هیچ سه یالی در هیچ راسی اشتراک نداشته باشند، از هر یال، یک راس در نظر می گیریم و این سه راس در بین خود یالی ندارند که این ممکن نیست.

مثال برای ۷ راس: گرافی کامل دوبخشی با بخش های ۳ و ۴ عضوی در نظر بگیرید. این گراف شرایط مسئله را دارد و دارای ۱۲ یال است.

(۳۳) گزینه ی ۲ درست است.

اگر وجود و یا عدم وجود یال های بین $(T_1, T_3), (T_1, T_6), (T_1, T_7), (T_1, T_8), (T_1, T_9)$ مشخص گردند بقیه یال ها به صورت یکتا تعیین خواهند شد. این یال ها نیز هر کدام به صورت مستقل ۲ حالت دارند. در نتیجه تعداد کل حالات برابر ۳۲ خواهد بود.

(۳۴) گزینه ی ۴ درست است.

اگر قبیله ای به یکی از قبیله های همسایه ی خود حمله نکند آن را ایمن ساخته است.

مثالی وجود دارد که تمام قبیله ها ایمن خواهند شد. در این مثال هر قبیله دقیقاً به یکی از قبایل همسایه ی خود حمله نمی کند.

می توان با استفاده از قبیله های شماره های ۳، قبیله های شماره ۴ را ایمن ساخت.

می توان با استفاده از قبیله های شماره های ۴، قبیله های شماره ۲ را ایمن ساخت.

می توان با استفاده از قبیله های شماره های ۲، قبیله های شماره ۳ را ایمن ساخت.

(۳۵) گزینه ی ۲ درست است.

همانند روش قبل باید حداقل قبیله را انتخاب (ایمن) کنیم که هر قبیله ای با حداقل یکی از آنها همسایه باشد.

در صورتی که قبیله ها با شماره ی ۴ را انتخاب کنیم شرایط مسئله برآورده می شود.

اثبات می کنیم با کمتر از ۶ قبیله نمی توان به هدف رسید:

برهان خلف. فرض کنید که با انتخاب ۵ قبیله بتوان به مقصود سوال رسید. قبیله ها را مانند زیر تقسیم بندی کنید. طبق اصل لانه ی کبوتری از

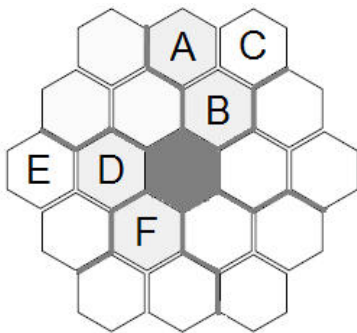
یک بخش قبیله ای انتخاب نمی شود (مثلاً بخش بالا چپ). در نتیجه باید خانه ی A و یکی از قبیله های مجاورش (B یا C) را انتخاب نمود. به

همین صورت باید یکی از قبیله های D یا E نیز انتخاب شود (که در هر صورت D انتخاب بهتری خواهد بود) همچنین یکی از همسایه های آن

نیز باید انتخاب شود که در هر حال F انتخاب بهتری خواهد بود. در نتیجه در ادامه با انتخاب

یک قبیله ی دیگر نمی توان شرایط را برآورده کرد. پس حداقل انتخاب ۶ قبیله لازم است.

در نتیجه حداقل تعداد قبیله های تنها برابر ۱۲ خواهد بود.



مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

• سؤال های بیست و دو تا سی و پنج در پنج دسته ی سؤال ی آمده اند و پیش از هر دسته توضیحی مربوط به آن ها مطرح شده است.

• نمره دهی به همه ی سؤال ها یکسان می باشد. جواب درست به هر سؤال ۴ نمره ی مثبت و جواب نادرست ۱ نمره ی منفی دارد.

(۱) نوید و سعید مشغول بازی «سنگ، کاغذ، قیچی» هستند. در هر دست از این بازی دو نفره، دو بازیکن دستشان را به پشت سر خود برده و سپس دست خود را به یکی از سه شکل سنگ، کاغذ یا قیچی به دیگران نشان می دهند. سنگ قیچی را می برد و به کاغذ می بازد، کاغذ سنگ را می برد و به قیچی می بازد، و قیچی کاغذ را برد و به سنگ می بازد. در صورتی که هر دو بازیکن یک شکل یکسان را انتخاب کرده باشند، آن دست مساوی اعلام می شود.

در این بازی، برنده ی هر دست ۱ امتیاز و بازنده ۰ امتیاز می گیرد. در صورت تساوی نیز هر دو طرف صفر امتیاز خواهند گرفت. برنده بازی کسی خواهد بود که مجموع امتیازش زودتر از دیگری به عدد ۳ برسد.

تعداد حالات هایی از بازی که نوید در انتهای دست هفتم برنده بازی شود چند است؟

$$(۱) ۳^۷ \times ۵۶۰ \quad (۲) ۱۶۵ \times ۳^۷ \quad (۳) ۲۴۰ \times ۷^۳ \quad (۴) ۳۸۵ \times ۷^۳ \quad (۵) ۳۳۰ \times ۷^۳$$

(۲) علی یک انبار دارد که در آن عدد ذخیره کرده است. این انبار به شکلی است که او تنها می تواند اعداد خود را در دو نقطه از آن به صورت دو ستون روی هم قرار داده و ذخیره کند. علی تا کنون اعداد $\langle ۷, ۳, ۵, ۱, ۲, ۶, ۴ \rangle$ را در انبار ذخیره کرده و آن ها را در ستون اول به ترتیب از چپ به راست روی هم قرار داده است؛ یعنی عدد ۷ پایین ترین و عدد ۴ بالاترین عدد این ستون شده اند. ستون دوم در حال حاضر خالی است.

علی برای جابه جا کردن این اعداد یک دستگاه حمل عدد دارد که در هر بار استفاده از آن می تواند تعداد دلخواهی از اعداد بالای یک ستون را برداشته و با همان ترتیب به بالای ستون دیگر انتقال دهد. برای مثال علی اگر بخواهد با این دستگاه ۳ عدد از ستون اول را به ستون دوم انتقال دهد، اعداد ستون اول به ترتیب $\langle ۷, ۳, ۵, ۱ \rangle$ و اعداد ستون دوم به ترتیب $\langle ۲, ۶, ۴ \rangle$ خواهند شد.

حداقل چند مرحله لازم است تا علی بتواند از وضعیت اولیه ی داده شده به وضعیتی برسد که همه ی اعداد در یکی از دو ستون به ترتیب صعودی از پایین به بالا قرار گرفته باشند؟

$$(۱) ۱۰ \quad (۲) ۹ \quad (۳) ۷ \quad (۴) ۸ \quad (۵) ۶$$

(۳) یک دنباله ی ۷ عنصری از اعداد ۱ و -۱ را «موفق» می گویم اگر نتوان هیچ زیردنباله ای از عناصر متوالی آن (شامل حداقل دو عنصر) را یافت که مجموع اعداد آن زیردنباله منفی بشود. به عنوان مثال دنباله ی $\langle ۱, -۱, ۱, ۱, ۱, -۱, ۱ \rangle$ موفق است ولی دنباله ی $\langle ۱, -۱, ۱, -۱, ۱, -۱, ۱ \rangle$ موفق نیست چرا که زیردنباله ی شامل عناصر دوم تا چهارم (از سمت چپ) در آن مجموعی برابر با -۱ دارد که منفی است.

تعداد دنباله های ۷ عنصری موفق چندتا است؟

$$(۱) ۱۹ \quad (۲) ۱۳ \quad (۳) ۲۴ \quad (۴) ۲۱ \quad (۵) ۱۶$$

(۴) مجید در خانه ی گوشه ی بالا و سمت چپ یک جدول ۶×۶ قرار دارد و می خواهد به خانه ی پایین و سمت راست جدول برود. در هر گام او می تواند به یکی از سه خانه ی پایینی، سمت راستی و یا سمت چپی خودش (در صورت وجود) برود. دقت کنید که مجید مجاز نیست یک خانه را دوبار ببیند و الزامی هم ندارد که کوتاه ترین مسیر را طی کند.

با رعایت قوانین فوق، مجید به چند طریق می تواند به مقصدش برسد؟

$$(۱) ۲۵۲ \quad (۲) ۱۵۶۲۵ \quad (۳) ۴۶۶۵۶ \quad (۴) ۱۲۹۶ \quad (۵) ۷۷۷۶$$

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

(۵) می خواهیم ۱۳ نوع ماده ی شیمیایی با شماره های ۱ تا ۱۳ را با کامیون های ویژه ای از شیراز به تهران حمل کنیم. حجم همه ی ۱۳ ماده شیمیایی روی هم از ظرفیت یک کامیون کمتر است. اما بعضی از آن ها را نمی توانیم با هم در یک کامیون قرار دهیم.

با تحقیق های انجام شده متوجه شده ایم اگر باقیمانده ی حاصل ضرب شماره ی دو ماده ی شیمیایی بر ۳ مساوی ۱ شود، آن دو ماده نمی توانند همزمان در یک کامیون قرار بگیرند. مثلاً ماده ی شماره ی ۲ و ۵ نمی توانند با یک کامیون حمل شوند، چرا که باقیمانده ی تقسیم ۱۰ بر ۳ برابر ۱ است و بنابراین به دو کامیون جداگانه برای حمل این دو ماده نیاز است. اما به فرض ماده های ۳ و ۶ و ۸ می توانند همگی در یک کامیون قرار بگیرند.

حداقل تعداد کامیون های لازم برای انتقال این ۱۳ نوع ماده ی شیمیایی چقدر است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۳ (۵) ۲

(۶) اعداد ۱ تا ۳۲ روی تخته نوشته شده اند. در هر مرحله می توانیم دو عدد ناصفر a و b را از روی تخته پاک کنیم و به جای آن ها اعداد $|a - b|$ و $|a + b|$ را بنویسیم. با تکرار این مراحل حداکثر به چند عدد صفر می توانیم برسیم؟

(۱) ۳۲ (۲) ۳۰ (۳) ۱۶ (۴) ۳۱ (۵) ۸

(۷) ۵ گزاره در زیر آمده است. حداکثر چند تا از آنها می توانند با هم درست باشند؟

الف) اگر ب درست باشد آنگاه این گزاره غلط است.

ب) اگر تعداد گزاره های درست بیش تر از ۲ باشد یکی از آنها پ است.

پ) حداقل یکی از الف و ت غلط است.

ت) ب و پ یا هردو درست اند یا هردو غلط.

ث) ب یا درست است یا غلط.

(۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۲ (۵) ۰

(۸) دستگاه برش «الوار بُر» ابزاری برای برش الوارهای چوبی است. این دستگاه به عنوان ورودی تعدادی الوار هم انداز ی $1 \times n$ و یک عدد k (کوچکتر از n و بزرگتر از صفر) را می گیرد. سپس به طور همزمان و با یک برش عظیم هر کدام از الوارها را به دو تکه با اندازه های $1 \times k$ و $1 \times (n - k)$ تبدیل می کند. برای مثال می توانیم به این دستگاه سه الوار 1×5 بدهیم تا در یک حرکت آن ها را به سه تکه ی 1×1 و سه تکه ی 1×4 تبدیل کند.

سهراب یک الوار چوبی 1×100 به عنوان کادوی تولد از رستم هدیه گرفته است! او می خواهد با کمترین تعداد دفعه استفاده از دستگاه، این الوار طویل را به ۱۰۰ تکه ی 1×1 تبدیل کند. کمترین تعداد دفعه استفاده از دستگاه برای این منظور چند است؟

دقت کنید که همه ی الوارهای ورودی به دستگاه در یک مرحله، باید با هم هم اندازه باشند.

(۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۹ (۵) ۹۹

(۹) اشکان ۱۶ مهره در خانه ی بالا سمت چپ یک جدول 4×4 قرار داده است. او در هر مرحله میتواند یک خانه که بیشتر از یک مهره دارد را انتخاب کرده، ابتدا یکی از مهره های آن را نابود کند، سپس از مهره های باقی مانده تعدادی را در همان خانه مورد نظر باقی بگذارد، تعداد دلخواهی را به خانه سمت راست آن (در صورت وجود) و نهایتاً تعداد دلخواهی را به خانه ی پایین آن (در صورت وجود) انتقال دهد.

هدف اشکان این است که با مجموعه ای از این حرکت ها به وضعیتی برسد که در آن تعداد خانه های مهره دار بیشینه باشد. این مقدار بیشینه چقدر است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳ (۵) ۹

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

- ۱۰) دارا و سارا با هم این بازی را انجام می دهند. ابتدا دارا اعداد $۱, ۲, \dots, ۹$ را به ترتیب مقابل در شکل قرار می دهد. سپس سارا جای تعداد دلخواهی از این اعداد را با هم عوض می کند تا اعداد حسابی بر بخورد. اکنون دارا باید با تعدادی حرکت مجاز اعداد را به شکل اولیه (شکل مقابل) برگرداند. در هر حرکت مجاز دارا ابتدا بین سطر ۵ خانه ای شکل، یا ستون ۵ خانه ای شکل یکی را انتخاب کرده و ۵ عدد آن سطر یا ستون را برداشته و به دلخواه خودش دوباره می چیند. در بدترین حالت بر زدن سارا، دارا پس از چند حرکت می تواند تمام اعداد را به شکل اولیه سر جای خودش بگذارد؟
- | | | | | |
|------|------|------|-------|------|
| ۹ (۵ | ۸ (۴ | ۵ (۳ | ۱۰ (۲ | ۴ (۱ |
|------|------|------|-------|------|

۱۱) یک خانواده که ۱۵ فرزند دارد به یک پیتزافروشی رفته است.

- ۵ تا از این فرزندان هر کدام با ۳ تکه پیتزای مخصوص یا ۴ تکه پیتزای پیرونی سیر می شوند.
- ۵ تای دیگر هر کدام با ۴ تکه پیتزای مخصوص یا ۵ تکه پیتزای پیرونی سیر می شوند.
- ۵ تای سوم هم هر کدام با ۵ تکه پیتزای مخصوص یا ۶ تکه پیرونی سیر می شوند.

اگر هر پیتزای مخصوص (۸ تکه) ۱۰ تومان و هر پیتزای پیرونی (۸ تکه) ۸ تومان باشد، این خانواده چقدر باید برای سیر کردن فرزندانش هزینه کند؟ (دقت کنید که نمی توان قسمتی از یک پیتزا را جداگانه خرید و همواره می توانیم تنها تعدادی پیتزای کامل بخریم.)

۷۴ (۱ تومان	۷۶ (۲ تومان	۸۰ (۳ تومان	۷۸ (۴ تومان	۷۲ (۵ تومان

۱۲) پدر مسعود به او برنامه ی زیر را داده است. مسعود مجاز است به عنوان ورودی به این برنامه دو عدد طبیعی کوچکتر از ۳۲ بدهد.

- ۱- اعداد a و b را از ورودی دریافت کن.
- ۲- متغیر i را برابر با ۱ و متغیر s را برابر با ۰ قرار بده.
- ۳- اگر باقی مانده ی تقسیم a بر ۲ با باقی مانده ی تقسیم b بر ۲ متفاوت بود، به s به اندازه i واحد اضافه کن.
- ۴- i را یک واحد افزایش بده.
- ۵- a را برابر خارج قسمت تقسیم خودش بر ۲ و b را برابر خارج قسمت تقسیم خودش بر ۲ قرار بده.
- ۶- اگر حداقل یکی از a یا b بزرگتر از ۰ بود به خط ۳ برو.
- ۷- اگر s برابر با ۳ بود به اندازه ی حاصل ضرب مقادیر اولیه ی ورودی a و b به حسام شکلات بده.
- ۸- پایان

هدف مسعود این است که اعدادی را به عنوان ورودی به این برنامه بدهد که حداکثر تعداد شکلات را بگیرد! برای مثال اگر مسعود اعداد ۲۳ و ۱۹ را به این برنامه بدهد در پایان ۴۳۷ شکلات می گیرد. اما اگر اعداد ۱۴ و ۱۷ را به عنوان ورودی به برنامه بدهد هیچ شکلاتی نمی گیرد. حداکثر تعداد شکلاتی که مسعود می تواند از این برنامه بگیرد چقدر است؟

۸۷۰ (۵	۸۶۸ (۴	۸۳۷ (۳	۹۲۸ (۲	۸۱۰ (۱

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱۳) خانواده ی آقای محسنی در ساوه زندگی می کنند و باغ انار دارند. حسن، پسر کوچک خانواده، می خواهد به دیدن دوستش حسین که در اصفهان زندگی می کند برود. آن ها قرار می گذارند که به محض رسیدن حسن، بازی زیر را انجام دهند:

در ابتدا حسین یک عدد طبیعی بزرگ تر از صفر و کوچک تر از ۱۰ در ذهنش انتخاب می کند. سپس در هر مرحله حسن می تواند:

- یا یک انار به حسین بدهد و از وی بپرسد که آیا عدد انتخابی اش دقیقاً X است یا نه؟ (X را حسن می گوید)
- یا سه انار به حسین بدهد و از وی بپرسد که آیا عدد انتخابی اش از X (که حسن می گوید) کوچکتر است یا نه؟

هر وقت حسن یک سؤال نوع اول را بپرسد و حسین جواب «بله» بدهد، حسن برنده می شود و حسین به او یک جعبه گز سوغاتی می دهد. حسن حداقل چند انار باید با خودش به اصفهان ببرد که مطمئن باشد حتماً و در هر شرایطی می تواند به جعبه ی گز برسد؟ دقت کنید که حسن پس از شنیدن جواب بله برنده می شود و این که عدد حسین را فهمیده باشد کافی نیست.

(۱) هفت (۲) شش (۳) پنج (۴) نه (۵) هشت

(۱۴) گراف شکل زیر از ۱۰ رأس و ۱۱ یال تشکیل شده است. می خواهیم روی تعدادی از رأس های این گراف خانه بسازیم به شرطی که اولاً هیچ دو خانه ای مجاور نباشند (با یک یال مستقیماً به هم متصل نباشند)؛ ثانیاً پس از پایان کار، در هیچ یک از رأس های خالی نتوان با رعایت شرط اول خانه ی جدیدی ساخت.

به چند روش می توان این کار را انجام داد؟ یکی از این روش های خانه سازی در شکل سمت چپ نمایش داده شده است.

(۱) ۱۷ (۲) ۲۴ (۳) ۱۱ (۴) ۲۷ (۵) ۱۵

(۱۵) تمام اعداد ۵ رقمی که بر ۵ بخش پذیر نیستند را در نظر بگیرید. اگر تمام این اعداد را در یکدیگر ضرب کنیم و عدد حاصل را X بنامیم، در این صورت باقی مانده ی تقسیم X بر ۵ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱ (۵) ۰

(۱۶) محمد ۱۳ قاب چوبی به شکل مربع دارد که حاشیه ی هر کدام ۲ سانتی متر عرض دارد. طول ضلع قاب های محمد به ترتیب ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵ و ۲۶ هستند. مثلاً مساحت قاب به ضلع ۱۵ با توجه به حاشیه ی داخلی برابر با ۱۲۱ سانتی متر مربع است.

محمد می خواهد حداقل ۴ تا از این قاب ها را برای اسباب کشی انتخاب کند. او می خواهد این قاب ها را طوری انتخاب کند که اولاً همگی درون هم بروند (قاب به ضلع ۲۵ دقیقاً درون قاب به ضلع ۲۹ می رود)؛ ثانیاً مساحت فضای خالی درون قاب ها که او حمل می کند (مساحت درونی خارجی ترین قاب منهای مساحت چوب های حاشیه های قاب های داخلی) کمینه بشود! این میزان کمینه کدام است؟

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

دقت کنید که درون هر قاب (به جز داخلی ترین قاب) دقیقاً یک قاب باید مستقیماً برود و هر قاب (به جز خارجی ترین قاب) هم می بایست به طور مستقیم دقیقاً درون یک قاب دیگر باشد.

۶۸ (۱) ۶۴ (۲) ۵۰ (۳) ۸۹ (۴) ۵۷ (۵)

(۱۷) چند دنباله با اعداد غیر تکراری از اعداد ۶ تا ۱۲ وجود دارد که با ۶ شروع شود و به ۱۲ ختم شود و بزرگترین مقسوم علیه مشترک هر دو عدد متوالی دنباله، بزرگتر از ۱ باشد؟

۶ (۱) ۴ (۲) ۱۰ (۳) ۵ (۴) ۸ (۵)

(۱۸) به چند طریق می توان k مهره از میان n تا مهره ای که در یک ردیف چیده شده اند انتخاب کرد به طوری که فاصله اولین و آخرین مهره ی انتخاب شده حداکثر $k+1$ باشد؟ فرض کنید n و k اعداد صحیح بزرگتر از ۲ هستند و $n \geq k+1$. دقت کنید که فاصله ی دو مهره ی کنار هم ۱ است.

$$\begin{aligned} 1 + (n-k)\left(\frac{k^y-k}{y}\right) - \frac{k^y-k}{y} & (۲) & 1 + (n-k)\left(\frac{k^y+k}{y}\right) - \frac{k^y+k}{y} & (۱) \\ 1 + (n-k)\left(\frac{k^y+k}{y}\right) - \frac{k^y-k}{y} & (۳) & 1 + (n+k)\left(\frac{k^y-k}{y}\right) - \frac{k^y-k}{y} & (۴) \\ 1 + (n-k)\left(\frac{k^y-k}{y}\right) - \frac{k^y+k}{y} & (۵) \end{aligned}$$

(۱۹) الگوریتم زیر را در نظر بگیرید. این الگوریتم عدد نامنفی x را به عنوان ورودی دریافت می کند و عدد صحیح z را به عنوان خروجی بر می گرداند.

منظور از $\lfloor x \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی x است. منظور از $x \oplus y$ نیز عمل XOR بیتی بین این دو عدد است که برابر است با حاصل جمع تمام 2^i هایی که بیت i ام از سمت راست (با شروع از اندیس صفر) در دقیقاً یکی از آن دو عدد، برابر با «یک» باشد. برای مثال XOR هر عددی با صفر خود همان عدد می شود و $14 \oplus 5 = 11$.

۱- عدد y را برابر با x قرار بده و z را برابر با صفر قرار بده.

۲- x را برابر با $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ قرار بده.

۳- اگر x برابر با صفر نبود y را برابر $x \oplus y$ قرار بده و به خط ۲ برو.

۴- z را برابر با دو برابر z قرار بده

۵- z را با باقیمانده ی y بر ۲ جمع کن.

۶- y را برابر با $\lfloor \frac{y}{4} \rfloor$ قرار بده.

۷- اگر y مخالف صفر بود به خط ۴ برو.

۸- z را به عنوان خروجی برگردان.

به ازای چند x کمتر یا مساوی ۱۰۲۳ خروجی این الگوریتم برابر با صفر است؟

۱۰۲۴ (۱) ۳۲ (۲) ۵۱۲ (۳) ۶۴ (۴) ۰ (۵)

(۲۰) به چند طریق می توان در خانه های یک جدول 5×3 ستاره گذشت طوری که در هر خانه حداکثر یک ستاره قرار بگیرد و در هر سطر و ستون ۱ یا ۲ ستاره قرار بگیرد؟

(راهنمایی: ابتدا سعی کنید حداقل و حداکثر تعداد ستاره های که می توانیم بگذاریم را بیابید.)

۲۷۰ (۱) ۱۸۰ (۲) ۹۰ (۳) ۱۵۰ (۴) ۲۱۰ (۵)

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۱) شنگول و منگول و حبه انگور در حال بحث در مورد سؤالات مرحله اول المپیاد هستند:

شنگول: آزمون مرحله اول المپیاد کامپیوتر امسال ۳۵ سؤال پنج گزینه ای دارد.

منگول: ۳۵ تا؟!

حبه انگور: این که خیلی زیاد است! می دانی نمره های دانش آموزان شرکت کننده در این آزمون چند حالت متفاوت می تواند داشته باشد؟

شما اگر جای شنگول بودید چه جوابی به حبه انگور می دادید؟ دقت کنید که هر پاسخ صحیح ۱ نمره، هر پاسخ نرده صفر نمره و هر پاسخ نادرست ۰/۲۵ - نمره دارد.

۱۷۱ (۱) ۱۷۲ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۶۹ (۴) ۱۷۳ (۵)

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱ - مقدار x را برابر با عدد A قرار بده.

۲ - مقدار y را برابر با صفر قرار بده.

۳ - تا وقتی که x بزرگتر از صفر است عملیات زیر را انجام بده:

۱-۳ - B را برابر با باقیمانده ی تقسیم x بر ۱۰ در نظر بگیر.

۲-۳ - y را برابر با مقدار $B + 10 \times y$ قرار بده.

۳-۳ - x را برابر با خارج قسمت تقسیم x بر ۱۰ قرار بده.

۴ - x را برابر با $A + y$ قرار بده.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید:

(۲۲) فرض کنید اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰ را به عنوان A به الگوریتم بدهیم. به ازای چند مقدار از آن ها عدد خروجی بر ۳ بخش پذیر است؟

۱۶۶۶ (۱) ۱۰۰۰۰ (۲) ۳۳۳۳ (۳) ۶۶۶۷ (۴) ۶۶۶۶ (۵)

(۲۳) فرض کنید اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰ را به عنوان A به الگوریتم بدهیم. به ازای چند مقدار از آن ها عدد خروجی بر ۲ بخش پذیر است؟

۴۰۰۹ (۱) ۴۰۰۴ (۲) ۲۰۱۲ (۳) ۵۰۰۴ (۴) ۵۰۰۹ (۵)

(۲۴) فرض کنید اعداد ۱۰۰۰ تا ۹۹۹۹ را به عنوان A به الگوریتم بدهیم. به ازای چند مقدار از آن ها عدد خروجی یک عدد اول است؟

۱۱ (۱) ۵۳ (۲) ۹۴ (۳) ۰ (۴) ۱۲۲ (۵)

امین می خواهد کف اتاق خود را که به شکل شش ضلعی است، کاشی کاری کند. پدر امین کف اتاق و کاشی ها را مثلث بندی کرده و از او می خواهد طوری کاشی کاری کند که مثلث های کاشی ها و کف اتاق دقیقاً روی هم قرار بگیرند. امین برای این کار تنها یک نوع کاشی در اختیار خواهد داشت و نمی تواند کاشی ها را بشکند. شکل مثلث بندی شده ی روبرو کف اتاق امین را نشان می دهد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید:

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۵) امین به چند طریق می تواند با کاشی هایی به شکل
 ۳ (۱) ۲۱ (۲) ۱۲ (۳) ۹ (۴) ۴ (۵) کف اتاق خود را بپوشاند؟

۲۶) امین به چند طریق می تواند با کاشی هایی به شکل
 ۱۳۶ (۱) ۱۰۰ (۲) ۷۸۴ (۳) ۷۶۸ (۴) ۸۵۶ (۵) کف اتاق خود را بپوشاند؟

امین، علی، محمد، مصطفی و مهدی در یک اتاق نشسته اند. هر یک از آن ها به طور ثابت به دقیقاً یک نفر دیگر نگاه می کنند و البته متوجه می شوند که او نیز به چه کسی نگاه می کند.
 مرتضی وارد اتاق می شود و از هر یک از آنها دو سوال می پرسد:

(آ) در لحظه ی ورود من به اتاق چه کسی را می دیدی؟

(ب) فردی که به او نگاه می کردی، چه کسی را می دید؟

او $10 = 5 \times 2$ پاسخ می شنود و آنها را در یک جدول 5×2 به صورت زیر تنظیم می کند:

امین علی محمد مصطفی مهدی

پاسخ سوال «آ»

پاسخ سوال «ب»

— با توجه به توضیحات بالا به ۵ سؤال زیر پاسخ دهید (فرض های هر سؤال مستقل از سایر سؤالات است): —

۲۷) اگر همه افراد پاسخ درستی بدهند جدول مرتضی به چند حالت مختلف ممکن می تواند پر شود؟
 ۲۱۰ (۱) ۵! (۲) ۲۰۵ (۳) ۴۴ (۴) ۵۵ (۵)

۲۸) مرتضی جدولی را که در آن تنها نام دو نفر به چشم بخورد، یک «جدول دونفره» می نامد! چند تا از جدول های معتبر و ممکن، «دونفره» هستند؟

۳۲ (۱) ۱۰ (۲) ۸۰ (۳) ۸ (۴) ۳۲۰ (۵)

۲۹) فرض کنید مهدی از پاسخ دادن به سوالات طفره رفته است. با این حال مرتضی با بررسی پاسخ دیگران موفق می شود ستون مربوط به پاسخ مهدی را پر کند. چند تا از جدول های ممکن مرتضی این ویژگی را دارند که بتوان با خالی بودن پاسخ مهدی، مقدار آن خانه را به طور یکتا استنباط کرد؟

۹۴۳ (۱) ۱۷۵ (۲) ۸۱ (۳) ۳۶۹ (۴) ۷۰۰ (۵)

۳۰) مرتضی جدول معتبری که بتوان با دانستن هر چهار ستون آن جدول، ستون پنجم را به طور دقیق و یکتا استنباط کرد، یک جدول «رؤیائی» می نامد. چند تا از جدول های ممکن رؤیائی هستند؟

۲۴ (۱) ۱۲۰ (۲) ۴۴ (۳) ۳۲ (۴) ۶ (۵)

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

(۳۱) فرض کنید یکی از این پنج نفر به حداقل یک سوال، پاسخ اشتباه داده است ولی بقیه راست گو هستند. مرتضی می خواهد از روی پاسخ ها فرد دروغ گو را پیدا کند. می دانیم پاسخ های امین به این صورت است:

(آ) علی را می دیدم.

(ب) علی محمد را می دید.

چندتا از گزاره های زیر درست هستند؟

- اگر امین دروغ گو باشد مرتضی او را پیدا می کند.
- اگر علی دروغ گو باشد مرتضی او را پیدا می کند.
- اگر محمد دروغ گو باشد مرتضی او را پیدا می کند.
- اگر مصطفی یا مهدی دروغ گو باشند مرتضی آنها را پیدا می کند.

۳ (۵)

۰ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

کامبیز کفش های جدیدی خریده است. این کفش ها ویژگی جالبی دارند و آن این که بعد از پیمودن اولین گام، اگر طول گام قبلی ای که با این کفش برداشته شده است x باشد در گام بعدی او فقط می تواند گامی یا به طول $2x$ یا به طول $\frac{x}{2}$ بردارد. به دلیل وزن زیاد کامبیز، کامبیز نمی تواند گامی با طول کوچکتر از یک بردارد! همچنین او نمی تواند هرگز جهت حرکتش را تغییر بدهد و همواره مستقیم پیش می رود.

در ابتدای کار کامبیز در خانه صفرم یک جدول ۱-در-بی نهایت قرار دارد. در اولین مرحله، کامبیز با برداشتن یک گام به طول یک از خانه ی صفرم به خانه ی یکم می رود. هدف کامبیز این است که با پیمودن تعدادی گام به یک نقطه ی مشخص شده برسد. مثلاً یک دنباله حرکات قابل قبول برای رسیدن به خانه ی سیزده می تواند به این صورت باشد:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 13$$

یک خانه را «خوب» می گوئیم اگر کامبیز بتواند با اتخاذ یک سیاست گام برداشتن به آن خانه برسد. به طور مشابه، یک خانه را «بد» می گوئیم اگر کامبیز هرگز نتواند با هر ترتیبی به آن برسد. برای مثال ۱۳ یک خانه ی خوب و ۲ یک خانه ی بد است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید:

(۳۲) کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) ۱۳۹۰ یک خانه ی خوب و ۲۰۱۲ یک خانه ی بد است.
- (۲) ۲۰۰۰ یک خانه ی خوب و ۱۴۰۰ یک خانه ی بد است.
- (۳) ۱۴۰۰ یک خانه ی خوب و ۲۰۰۰ یک خانه ی بد است.
- (۴) ۱۳۹۱ یک خانه ی خوب و ۲۰۱۳ یک خانه ی بد است.
- (۵) ۲۰۱۲ یک خانه ی خوب و ۱۳۹۰ یک خانه ی بد است.

(۳۳) فرض کنید تمام خانه های خوبی که با حداکثر ۱۰۰ حرکت می توان به آن رسید را با شروع از یک، در دنباله ای مرتب پشت سر هم نوشته ایم. این دنباله به شکل $\langle 1, 3, 4, 6, \dots \rangle$ است. ۲۰۱۲ امین عدد این دنباله کدام است؟

۳۰۱۹ (۵)

۲۰۱۲ (۴)

۳۰۱۸ (۳)

۴۰۲۴ (۲)

۲۰۱۳ (۱)

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

رشته ی $S_1 = aAbBaAb$ را در نظر بگیرید. از روی این رشته می توانیم رشته ی S_1 را با این قاعده بسازیم که به جای هر حرف A عبارت BaB و به جای هر B عبارت AbA را بگذاریم. با این وصف رشته ی S_1 برابر با $aBaBbAbAaBaBb$ خواهد بود. با همین قاعده می توانیم رشته های S_2 ، S_3 و ... را بسازیم.

با توجه به توضیحات بالا به دو سؤال زیر پاسخ دهید:

(۳۴) ۷۷۷ امین حرف از سمت چپ در رشته ی S_7 کدام است؟

(۱) a (۲) اندازه ی رشته کمتر از ۷۷۷ است. (۳) A (۴) B (۵) b

(۳۵) ۱۰۲۷ امین حرف از سمت چپ در رشته ی S_4 کدام است؟

(۱) اندازه ی رشته کمتر از ۱۰۲۷ است. (۲) a (۳) A (۴) B (۵) b

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

- این پاسخ ها با تلاش طراحان سوال ها و همکاری اعضای کمیته ملی المپیاد کامپیوتر فراهم شده اند و دور از انتظار نیست که کمبودها و خطاهایی در آن وجود داشته باشد. هر گونه پیشنهاد اصلاح یا تکمیل این پاسخ ها را از طریق سامانه اینترنتی <http://www.inoi.ir> به اطلاع کمیته ملی المپیاد کامپیوتر برسانید.

(۱) گزینه ی «۲» درست است.

هر بار که نوید بازی را می برد یک W و هر بار او می بازد یک L و برای هر مساوی ها نیز یک D در ادامه حروف نوشته شده (با شروع از تخته سیاه خالی!) روی تخته می نویسیم. اکنون خواسته ی سوال تعداد رشته های به طول ۷ است که دارای ۳ حرف W ، حداکثر ۲ حرف L و تعدادی حرف D باشند است. همچنین یکی از W ها باید در انتهای این رشته باشد؛ زیرا یک برد نوید دقیقاً باید در پایان دست هفتم اتفاق بیفتد که بازی همان جا دقیقاً تموم شود. پس می توان با در نظر گرفتن این قضیه، تنها تعداد رشته هایی به طول ۶ از سه حرف W و L و D را یافت که در آن حداکثر ۲ حرف L و دقیقاً ۲ حرف W داشته باشیم؛ سپس به انتهای تک تک این رشته ها یک W افزود تا یک جواب یکتای مسئله بشود!

برای محاسبه تعداد این رشته های ۶ حرفی می بینیم که این دقیقاً ۲ تا W موجود می توانند به $\frac{6!}{4! \times 2!} = 15$ حالت جایگاه خودشان در رشته ۶ حرفی را تثبیت کنند. سپس ۴ جایگاه باقی مانده می توانند به $2^4 = 16$ روش حروف L و D بگیرند، منتهی حالتی که در آن همه L باشند (یک حالت) و یا دقیقاً سه تا L داشته باشیم (و یک D ، دقیقاً ۴ حالت) غیرمجاز است. پس از آن ۱۶ روش، این ۵ حالت غیرمجاز را اگر حذف کنیم تعداد راه های مجاز برای پر کردن این ۴ خانه باقی مانده برابر ۱۱ می شود. در انتها، طبق اصل ضرب جواب نهایی برابر با $165 = 11 \times 15$ است.

(۲) گزینه ی «۵» درست است.

عمل «جایجایی x » را انتقال عدد x و کلیه اعداد هم ستونش که بالای آن هستند به ستون دیگر تعریف می کنیم. برای نمونه در صورت سؤال عمل «جایجایی ۲» به عنوان مثال ذکر شده است.

اگر اعمال «جایجایی ۱»، «جایجایی ۵»، «جایجایی ۵»، «جایجایی ۴»، «جایجایی ۶»، «جایجایی ۳» و در نهایت «جایجایی ۷» را انجام بدیم، خواهیم دید که در پایان این عمل، اعداد به نحو خواسته شده در ستون دوم مرتب می شوند.

برای اثبات اینکه در کمتر از ۶ مرحله این مرتب سازی امکان پذیر نیست کافی است در نظر داشته باشیم که هر دو عدد متوالی که ترتیب آن ها درست نیست نیازمند یک جابه جایی مجزاً از وسط شان می باشند. تعداد این زوج ها در این مسأله ۵ می باشد. همچنین یک جابه جایی برای بردن ۷ به بالای یک ستون نیاز است. پس حداقل ۶ حرکت لازم است و با ۶ حرکت نیز یک روش حل ارائه کرده ایم.

(۳) گزینه ی «۱» درست است.

می توان نشان داد شرط لازم و کافی برای اینکه یک دنباله موفق باشد این است که بین هر دو عدد ۱ - متوالی آن حداقل دو عدد ۱ آمده باشد. (چرا؟) پس در این دنباله حداکثر ۳ عدد ۱ - وجود دارد. اکنون روی تعداد اعداد ۱ - در دنباله حالت بندی می کنیم.

اگر دقیقاً ۳ عدد ۱ - وجود داشته باشد حتماً باید دو عنصر انتهایی و همچنین عنصر میانی رشته برابر با ۱ - و سایر عناصر برابر با ۱ باشد. پس در اینجا یک حالت داریم.

اگر دو عدد ۱ - وجود داشته باشد، ۱ - سمت چپ می تواند عنصر اول، دوم، سوم یا چهارم (از سمت چپ) باشد که به ترتیب ۴، ۳، ۲ و ۱ انتخاب برای دومین ۱ - باقی می گذارد. پس در اینجا ۱۰ حالت خواهیم داشت.

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

اگر یک عدد ۱- وجود داشته باشد، این ۱- در هر یک از هفت جایگاه می تواند قرار بگیرد.

نهایتاً اگر هیچ ۱- ای نداشته باشیم نیز یک حالت (تمام ۱) داریم.

حاصل جمع تمامی این حالت های حالت بندی شده برابر با $1 + 7 + 10 + 1 = 19$ حالت است.

(۴) گزینه ی «۵» درست است.

مجید باید در هر یک از ۵ سطر اول (بالایی) انتخاب کند که از کدام خانه ی آن سطر به سمت پایین می رود و

پس از آن دقیقاً یک مسیر یکتا خواهد داشت! (چرا؟)

انتخاب خانه ی «پایین رونده» برای هر کدام از این ۵ سطر ۶ حالت پیش روی مجید قرار می دهد. پس جواب برابر است با $6 \times 5 = 30$.

(۵) گزینه ی «۲» درست است.

اعداد را بر اساس باقیمانده شان در تقسیم بر ۳ به سه گروه تقسیم می کنیم. هیچ دو عددی که باقیمانده هر دویشان بر ۳ برابر ۱ باشد نمی توانند کنار هم در یک کامیون بیایند. (چرا؟) پس حداقل ۵ کامیون لازم است تا این اعداد، یعنی ۱ و ۴ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ هر کدام شان در یک کامیون حمل شوند.

همین قضیه در مورد اعضای گروه دوم (یعنی ۲ و ۵ و ۸ و ۱۱) نیز صادق است. آن ها را نیز در کامیون های جدا قرار می دهیم. در مورد اعضای گروه سوم (باقی مانده صفر) هم محدودیتی نداریم. پس یک روش با ۵ کامیون می تواند قرار دادن اعداد $\langle 3k, 3k+1, 3k+2 \rangle$ (در صورت وجود این اعداد در بازه ی اعداد داده شده) در کامیون k برای $0 \leq k \leq 4$ باشد.

(۶) گزینه ی «۱» درست است.

در مرحله اول عملیات گفته شده را روی اعداد $(1, 31)$ و $(2, 30)$ و ... انجام می دهیم. بعد از این حرکت، نیمی از اعداد از بین می روند و اعداد زوج باقی می مانند. مجدداً همین کار را انجام می دهیم تا اعداد به شکل $4k$ باقی بمانند. به همین ترتیب اعمال را انجام می دهیم تا به عدد ۱۶ برسیم. عدد ۱۶ و عدد ۳۲ که در ابتدا کنار گذاشته شده بود هم با ۲ حرکت به عدد ۰ تبدیل می شوند.

(۷) گزینه ی «۱ و ۳» درست است.

صورت سوال به همین شکل کامل است و اگر به تعاریف دقیق منطق ریاضی هم رجوع کنیم مشکلی در سوال دیده نمی شود و تنها یک گزینه درست خواهد بود که «حداکثر ۳ گزاره ی صحیح» است.

تعاریف منطق مورد استفاده در این سوال چندان دور از ذهن نبوده و حتی اگر دانش آموزی با آنها به صورت دقیق برخورد نکرده باشد در درک آنها با مشکلی روبرو نمی شود. تعریف تناقض از جمله ی این موارد است.

صورت سوال در دو عبارت کج تابی دارد: یکی «گزاره» که با دقت به تعریف دقیق آن جواب درست سوال ۳ خواهد بود و دیگری «... با هم درست باشند؟» که از آن می تواند تلقی شود کنار گذاشتن یک گزاره و در نظر گرفتن مستقل دیگر گزاره ها نیز مجاز است.

با این که برداشت دوم باز هم با توجه به معنای دقیق «گزاره» جواب ۳ را نتیجه می دهد، اما چون هدف، سنجش میزان دقت داوطلبان به تفاوت میان «گزاره» و «جمله» نیست، جواب ۴ نیز مورد قبول قرار می گیرد.

در نهایت باید گفت این سوال توانایی تحلیل درخت حالت یک مساله ی پیچیده را مورد سنجش قرار می دهد.

(۸) گزینه ی «۲» درست است.

برای یافتن یک ایده مناسب سعی می کنیم مسئله را از مقدارهای کم به زیاد حل کنیم. برای یک تکه الوار به طول یک (برای سادگی آن را «الوار یک» می نامیم) هیچ مرحله ای لازم نیست! برای الوار دو، به هر تعدادی هم که

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

باشند، یک برش کافی ست. برای الوار سه ما به دو برش احتیاج داریم، اول آن را به الوار یک و الوار دو تقسیم کنیم؛ بعد الوار دو را ببریم. برای الوار ۴ هم، مشابه سه به دو برش احتیاج داریم؛ یکی تقسیم بر دو الوار دو، یکی هم برش های الوارهای دو.

اکنون کمترین طول الواری که با سه برش می توان آن را به الوارهای یک تبدیل کرد چند است؟ الوار هشت! کافی ست آن را به دو الوار ۴ تبدیل کنیم. دیدیم هم که الوار ۴ هم با دو برش حل می شود، پس الوار هشت با سه برش کلاً تقسیم می شود. (چرا الوارهای بزرگتر از هشت با سه برش کامل تقسیم نمی شوند؟)

با همین رویه می بینیم توان های دو بهترین الوارها هستند. در واقع یک الگوریتم این است که طول الوار اولیه را به مبنای دو برده و آن را به صورت جمع توان های ۲ یکتا بنویسیم؛ سپس با بریدن این توان های دو از الوار اولیه، عملاً تنها تعدادی الوار توان دو برای ما بماند. سپس از بزرگترین توان دو شروع به نصف کردن می کنیم. برای مثال می توان ۱۰۰ را به صورت $64 + 32 + 4$ نوشت. کافی ست ابتدا ۶۴ را با یک برش از آن جدا کنیم تا به دو قسمت ۶۴ و ۳۶ تقسیم بشود. در برش بعدی ۳۶ را به دو قسمت ۳۲ و ۴ تقسیم می کنیم. اکنون از این جا به بعد کافی است تنها ۶۴ را حل کنیم (در ۶ مرحله). پس این جواب با ۸ مرحله به دست می آید.

در واقع طبق این الگوریتم اگر طول الوار اولیه ما L باشد و نمایش مبنای دوی آن به صورت B باشد که B دقیقاً n بیت ۱ داشته و طول B نیز برابر k بیت باشد، می توان در $(k-1) + (n-1)$ برش آن را به الوارهای یک تقسیم کرد.

چرا این الگوریتم بهینه است و کمترین تعداد برش را به ما نشان می دهد؟ کافی ست توجه کنید که اگر عدد L که نمایش مبنای دوی آن B (با طول k بیت که n تا از این بیت ها یک هستند) را با یک برش به دو الوار X و Y تقسیم کنیم، اولاً حاصل جمع تعداد بیت های یک X و تعداد بیت های یک Y کمتر از n نمی شود، ثانیاً طول مبنای دوی یکی از این دو عدد حداقل $k-1$ است. (ادامه اثبات بر عهده خواننده)

(۹) گزینه ی «۲» درست است.

ابتدا ثابت می کنیم نمی توان ۱۲ خانه ی مهره دار ساخت.

با انجام عملیات روی یک خانه حداکثر ۲ خانه ی جدید به خانه های مهره دار اضافه می شود. پس حداقل ۶ بار جابه جایی نیاز است تا ۱۲ خانه دارای مهره شوند. از سوی دیگر این کار نیازمند سوزاندن ۶ مهره می باشد که در نتیجه ی آن ۱۰ مهره باقی می ماند که کمتر از ۱۲ است. پس به تناقض می رسیم و امکان ندارد بیش از ۶ بار جابه جایی انجام شود.

جواب ۱۱ را هم به راحتی می توان به چندین روش مختلف ساخت. یک روش آن انجام عمل روی خانه های اول و دوم و سوم از سمت چپ در سطر بالا و سپس خانه های دوم و سوم از ستون سوم با نسبت مناسب مهره ها هست به طوری که در پایان این ۵ بار عملیات، در هر کدام از خانه هایی که شانس دارا بودن مهره را دارند، دقیقاً یک مهره باقی مانده باشد.

(۱۰) گزینه ی «۵» درست است.

می بینیم که در شکل نهایی تمامی اعداد فرد یک رقمی در سطر و اعداد زوج (به انضمام عدد یک در مرکز) در ستون هستند.

از سوی دیگر، هر عدد زوجی که در سطر شکل باشد و یا هر عدد فردی که در ستون باشد برای رسیدن به مقصد نهایی خودش، حتماً باید یک بار به وسط شکل بیاید و سپس به محل نهایی اش برود. با این وصف کافی است حالتی را در نظر بگیریم که در آن ۱ در وسط بود و تمامی اعداد زوج در سطر و تمامی اعداد فرد در ستون باشند.

در این حالت به ازای هر یک از اعداد ۲ تا ۹، الزاماً باید حداقل یک بار هر کدام این اعداد به مرکز بیایند. (چرا؟) پس تا این جای کار ۸ حرکت انجام داده ایم. پس از این ۸ حرکت نیز، می دانیم عدد مرکزی ۱ نیست.

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

پس یک حرکت نیز برای آوردن ۱ به مرکز لازم است. پس برای این مرتب سازی حداقل ۹ حرکت نیاز است و با ۹ حرکت هر ترکیبی را می توان درست کرد؛ کافی است اعدادی که در سطر یا ستون مناسب خودشان نیست را یکی یکی (با تناوب سطر و ستون در صورت نیاز) به مرکز بیاوریم.

(۱۱) گزینه ی «۱» درست است.

کافیست روی تعداد پیتزای مخصوص حالت گیری کنیم و تعداد پیتزای پیرونی را در هر حالت بدست بیاوریم. اگر این خانواده ۵ پیتزای مخصوص و ۳ پیتزای پیرونی بخرند، ۷۴۰۰۰ تومان خرج می کنند و ۴ تا از بچه ها با ۶ تکه پیتزای پیرونی سیر می شوند و بقیه پیتزای مخصوص می خورند. به این نکته توجه شود که برای دسته ی اول استفاده از پیتزای مخصوص به صرفه و برای دسته آخر پیرونی به صرفه است و برای دسته وسط فرقی نمی کند.

(۱۲) گزینه ی «۵» درست است.

با نگاه به خطوط ۳ و ۵ می توان دریافت که این برنامه بر روی نمایش مبنای دو (باینری) اعداد a و b کار می کند. بدنه ی اصلی این برنامه حلقه ی شامل خطوط ۳ تا ۷ است. در این حلقه مقادیر a و b تنها در خط ۵ تغییر می کند و متغیر i که در خط ۴ هر بار یک واحد افزایش می یابد شمارنده ی حلقه است. در واقع می توان دید که در زمان i امین اجرای این حلقه مقادیر a و b باقی مانده ی تقسیم مقادیر اولیه این دو عدد بر 2^i یا به عبارتی انتقال یافته ی نمایش باینری این اعداد به اندازه ی i واحد به سمت راست هستند.

از سوی دیگر، تعداد شکلات های دریافتی در خروجی برنامه تنها به مقدار s وابسته است و این مقدار تنها در خط ۳ تغییر می کند. با کمی دقت می توان دریافت که این متغیر تنها در زمان هایی افزایش می یابد که بیت سمت راست (باقی مانده بر ۲) در اعداد a و b با هم متفاوت باشد و این مقدار افزایش نیز برابر با شماره حلقه است. به عبارت ساده تر، مقدار s در پایان برنامه برابر با حاصل جمع شماره بیت هایی است که a و b در آن بیت ها با هم متفاوتند. برای مثال اگر $a = 13 = (1101)_2$ و $b = 30 = (11110)_2$ باشد، می بینیم که این دو عدد در بیت های اول و دوم و پنجم (از سمت راست) با هم متفاوتند، پس مقدار s در پایان برنامه به ازای ورودی های ۱۳ و ۳۰ برابر با ۸ خواهد بود.

اکنون به حل مسئله می پردازیم. تنها حالات ممکن برای این که در پایان برنامه مقدار متغیر s برابر با ۳ باشد، یکی از دو حالت زیر است:

(آ) تنها در یک مرحله، ۳ واحد به s اضافه شده باشد.

در این صورت اعداد ورودی تنها در بیت سوم با هم اختلاف دارند. برای حداکثر شدن حاصل ضرب دو عدد ورودی، بقیه بیت ها باید برابر ۱ باشند و در این حالت بیشترین حاصل ضرب مربوط به اعداد ۳۱ و ۲۷ (با نمایش های $(11111)_2$ و $(11011)_2$) است.

(ب) در دو مرحله، اعداد ۱ و ۲ به s اضافه شده اند.

در این صورت، اعداد ورودی دقیقاً فقط در بیت های اول و دوم با هم اختلاف دارند. بر حسب آن که دو بیت آخر که در دو عدد ورودی متفاوتند به صورت ۱۱ و ۰۰ یا به صورت ۱۰ و ۰۱ باشند، بیشترین حاصل ضرب متعلق به زوج اعداد (۳۱ و ۲۸) یا (۲۹ و ۳۰) است.

با مقایسه حاصل ضرب ۳ زوج اعداد یافته شده در بالا، خواهیم دید که بیشترین خروجی ممکن برابر با $30 * 29 = 870$ است.

(۱۳) گزینه ی «۵» درست است.

یک راه این است که فقط از سؤال نوع اول استفاده کنیم. در این صورت در بدترین حالت ممکن ست مجبور به پرداخت ۱۰ انار بشویم!

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

در غیر این صورت حداقل یک بار از سؤال نوع دوم استفاده می کنیم. این سؤال می تواند به راحتی بازه ی گزینه های ممکن برای جواب را نصف کند (در صورتی که بازه متوالی باشد، مثل شروع کار که بازه از صفر تا ۹ شامل هر دو این اعداد، است). پس بهتر است حتماً اولین سؤال ما نوع دوم باشد که بازه را از ۱۰ گزینه به ۵ گزینه تقلیل بدهد. (چرا؟)

اکنون با یک بازه ۵ گزینه ای طرفیم که بدون لطمه به فرض مسئله، آن را صفر تا ۴ (شامل هر دوی این اعداد) تصور می کنیم. حال اگر بخواهیم یک بار دیگر سؤال نوع دوم بپرسیم در واقع بر حسب بلی یا خیر بودن جواب با دو حالت ۲ گزینه ای و ۳ گزینه ای مواجه می شویم. و در بدترین حالت ممکن است با این سؤال و با پرداخت ۳ سیب، تنها دو گزینه را حذف کنیم!

پس بهترین حالت این است که از اینجا به بعد تنها به سؤالات نوع اول اکتفا کنیم. و در بهترین حالت با ۳ سیب در ابتدا و بعد ۵ بار تک سیب در ادامه، یعنی جمعاً ۸ سیب، حتماً به جواب می رسیم.

(۱۴) گزینه ی «۵» درست است.

روی تأسیس یا عدم تأسیس خانه روی دو رأسی که درجه ۳ دارند (مشترک بین دو شش ضلعی) که آن ها را رأس های طلایی می نامیم حالت گیری می کنیم. واضح است که هر دوی این رأس ها هم زمان نمی توانند خانه داشته باشند. در حالتی که هیچ یک از این رأس ها انتخاب نشود، با حذف آن دو، به دو مسیر مجزای ۴ رأسی می رسیم. از آن جا که هر مسیر ۴ رأسی را می توان به سه روش مورد خانه سازی بیشینه (خواست مسئله) قرار داد، پس در این حالت به ۹ روش می توان خانه ها را ساخت. اما نکته قابل تأمل آن جاست که هر کدام از رأس طلایی باید حداقل یکی از همسایه های غیر طلایی اش الزاماً انتخاب شود. در غیر این صورت شرط «ثانیاً» در صورت مسئله روی آن رأس طلایی نقض می شود. با کمی دقت می توان دریافت که از ۹ حالت شماره شده، دقیقاً ۲ حالت مشمول این حالت می شوند که می بایست از حالت های انتخاب شده کسر شوند. و در نتیجه در این حالت در مجموع ۷ حالت مجاز داریم.

در حالت دیگر اگر یکی از رأس های طلایی انتخاب شوند، با حذف آن رأس و رؤس مجاورش کل گراف به دو مسیر ۳ رأسی تبدیل می شود که هر مسیر دو حالت برای خانه سازی بیشینه دارد (یا دو رأس انتهایی، یا رأس وسطی). پس در این حالت برای هر رأس میانی که انتخاب شود ۴ حالت و در مجموع ۸ حالت داریم. با این وصف، جواب نهایی برابر ۱۵ روش خواهد بود.

(۱۵) گزینه ی «۴» درست است.

اعداد مورد نظر را به دسته های ۴ تایی متوالی تقسیم می کنیم. باقیمانده ی حاصل ضرب اعداد داخل هر دسته بر ۵ برابر است با:

$$\prod_{i=5x+1}^{5x+4} i \equiv (1 \times 2 \times 3 \times 4) \equiv 24 \equiv 4 \equiv -1 \pmod{5}$$

از طرف دیگر تعداد دسته های اعداد برابر است با:

$$\frac{10^5 - 10^4}{5} = 18000$$

پس باقی مانده ی حاصل ضرب خواسته شده بر ۵ معادل $(-1)^{18000} \equiv 1 \pmod{5}$ خواهد بود.

(۱۶) گزینه ی «۱» درست است.

مرحله اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

در ابتدا برای هر قاب مشخص می کنیم که حداکثر چند قاب به صورت تو در تو می تواند درون آن قرار بگیرد. واضح است که هیچ قابی نمی تواند درون قاب های ۵ و ۶ و ۷ قرار بگیرد. قاب های ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ می توانند یکی از قاب های قبلی را در خود جای بدهند و در نتیجه حداکثر یک قاب درونشان می تواند قرار بگیرد. قاب ۱۵ می تواند قاب ۱۱ را (که خود می تواند قاب ۵ یا ۶ یا ۷ را در بر بگیرد) در خود جای دهد؛ پس قاب ۱۵ می تواند حداکثر دو قاب درونش داشته باشد. قاب ۱۸ نیز به طور مشابه می تواند قاب ۱۳ یا ۱۲ (که خود می تواند شامل قاب ۵ یا ۶ یا ۷ شوند) را داشته باشد که حداکثر قاب های درونش دو عدد می شود. قاب ۲۱ (با در بر گرفتن ۱۵) و قاب ۲۲ یا ۲۳ (با در بر گرفتن ۱۸) می توانند سه قاب داخل خودشان جای بدهد و جمعاً ۴ قاب ممکن را بسازند. به همین نحو برای قاب های ۲۵ و ۲۹ می توان به ترتیب ۵ و ۶ قاب تو در تو داشت. اکنون مسئله را با رویکرد مشابه برای مساحت فضای خالی پیگیری می کنیم. می دانیم اگر به عنوان مثال حضور قاب ۱۱ در ترکیب ۴ قاب نهایی اجباری باشد، آنگاه بهتر آن است که حتماً یکی از قاب های قابل قرارگیری درون آن، یعنی ۵ یا ۶ یا ۷ نیز انتخاب شوند (چرا؟) و همچنین قاب ۷ از قاب های ۵ و ۶ برای این منظور بهتر است، چرا که از ۴۹ سانتی متر مربع داخل قاب ۱۱، فضای بیشتری را اشغال می کند. همچنین آگه قرار باشد قاب ۱۱ در قاب دیگری (مثلاً قاب ۱۸) قرار بگیرد، می توان مسئله درونی قاب ۱۱ را به صورت مستقل بررسی کرد.

با این رویه، اکنون برای هر قاب بیشترین تعداد قاب های قابل قرارگیری درونش (مشابه پاراگراف اول) و کمترین مساحت خالی باقی مانده درون آن را از کوچک ترین به بزرگ ترین قاب محاسبه می کنیم.

- قاب ۵ فضای خالی برابر با ۱ سانتی متر مربع خواهد داشت و با احتساب خودش ۱ قاب را در بر می گیرد. برای قاب های ۶ و ۷ نیز فضای خالی بهینه به ترتیب ۴ و ۹ سانتی متر مربع خواهد بود.
- قاب های ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ بهتر است قاب ۷ را (که درونش ۹ واحد فضای خالی دارد) در خود جای دهند؛ پس بهترین حالت برای هر یک از این ها تشکیل ۲ قاب تو در تو (با احتساب خودشان) و به ترتیب ۹ و $24 = 15 + 9$ و $41 = 32 + 9$ واحد است. یعنی مثلاً قاب ۱۳ می تواند جمعاً دو قاب داشته باشد و ۴۱ سانتی متر مربع فضای خالی کمترین فضای خالی باقی مانده برایش در آن حالت است.
- قاب ۱۵ تنها قاب ۱۱ را می تواند در بر بگیرد که در این حالت ۳ قاب تو در تو با ۹ واحد فضای خالی خواهند داشت.
- قاب ۱۸ می تواند هر یک از قاب های ۱۳ یا ۱۲ یا ۱۱ را در بر بگیرد که به ترتیب $41 = 27 + 14$ و $52 = 24 + 28$ و $84 = 75 + 9$ سانتی متر مربع فضای خالی ایجاد می کند. پس بهترین گزینه برای قاب ۱۸، در بر گرفتن مستقیم قاب ۱۳ و ایجاد ۶۸ سانتی متر فضای خالی است.
- قاب ۲۱ می تواند قاب ۱۵ را در بر بگیرد که در این حالت ۴ قاب تو در تو با $73 = 9 + 64$ واحد فضای خالی دارد. (یک جواب کاندید)
- قاب ۲۲ می تواند قاب ۱۸ را در بر بگیرد که دقیقاً در آن فیت می شود و همان ۶۸ واحد فضای خالی را در حالت «۷، ۱۳، ۱۸، ۲۳» خواهند داشت.
- قاب ۲۳ نیز می تواند قاب ۱۸ را در بر بگیرد که فضای خالی بین همین دو قاب قطعاً بیش از صفر واحد فضای خالی بین ۲۲ و ۱۸ است! پس این گزینه مطلوب نیست.
- برای سایر قاب های بزرگتر نیز، جواب بهتری از ۶۸ واحد پیدا نمی شود.

(۱۷) گزینه ی «۱» درست است.

روی طول دنباله حالت گیری می کنیم.

اعداد ۷ و ۱۱ اول هستند، پس نمی توانند استفاده شوند. در صورت استفاده از عدد ۹ نیز، هیچ عدد دیگری نمی تواند قبل یا بعد از آن در میانه ی دنباله بیاید چرا که ۹ تنها مضرب ۳ از کاندیداهای ممکن است. پس تنها یک حالت (۶، ۹، ۱۲) را داریم.

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

اعداد ۸ و ۱۰ زوج می باشند و هر گونه دنباله ی زوج چون همه ی اعداد آن بر ۲ بخش پذیر است، معتبر است. پس بر حسب وجود یا عدم وجود هر کدام این دو، ما جمعاً می توانیم ۴ حالت داشته باشیم. دقت کنید که چون صحبت از دنباله آمده است، در حالتی که هر دوی ۸ و ۱۰ بخواهند ظاهر شوند، ترتیب آن دو می تواند صعودی یا نزولی باشد! ولی در بقیه ی حالات دقیقاً یک حالت داریم. پس در این قسمت ما به طور دقیق ۵ حالت می توانیم داشته باشیم.

نهایتاً جواب نهایی برابر با ۶ دنباله به صورت زیر است:

$$\langle 6, 9, 12 \rangle, \langle 6, 12 \rangle, \langle 6, 8, 12 \rangle, \langle 6, 10, 12 \rangle, \langle 6, 8, 10, 12 \rangle, \langle 6, 10, 8, 12 \rangle$$

(۱۸) گزینه ی «۴» درست است.

بر حسب فاصله ی اولین و آخرین مهره ی انتخاب شده حالت گیری می کنیم.

اگر این مهره ها همگی در کنار هم باشند (فاصله $k - 1$) در آن صورت کافی ست تنها مکان اولین مهره را تعیین کنیم که در نتیجه $n - k + 1$ حالت داریم.

در صورتی که فاصله این مهره ها k باشد (یک خانه خالی میان رشته مهره های انتخاب شده وجود داشته باشد)، برای مکان اولین مهره $n - k$ حالت و برای انتخاب مکان خانه خالی هم $k - 1$ حالت داریم. پس جواب این حالت برابر با $(n - k) \times (k - 1)$ حالت می شود. دقت کنید که خانه ی خالی نمی توان بعد از آخرین مهره قرار بگیرد، چرا که این حالت را در قسمت قبل شماره داریم.

آخرین وضعیت، در مواقعی است که فاصله اولین و آخرین مهره برابر با $k + 1$ باشد. در این حالت دو خانه ی خالی در رشته داریم که جواب به صورت $\binom{k}{2} \times (n - k - 1)$ می شود.

با ساده سازی ریاضی و فاکتور گرفتن از $(n - k)$ می توان دید که جمع این سه حالت می شود:

$$(n - k + 1) + (n - k) \times (k - 1) + (n - k - 1) \times \binom{k}{2}$$

(۱۹) گزینه ی «۲» درست است.

این الگوریتم دارای دو حلقه مجزا در خطوط ۲ تا ۳ و سپس در خطوط ۴ تا ۷ است. در حلقه اول، از مقدار اولیه x ، یک مقدار y به دست می آید. در حلقه دوم نیز از مقدار y ، مقدار جدید z ساخته می شود. اکنون این دو حلقه مجزا را از انتها به ابتدا بررسی می کنیم.

ابتدا می خواهیم ببینیم برای چه y هایی در اولین ورود به خط چهارم (خروجی حلقه اول) در پایان کار z صفر خواهد شد. برای صفر ماندن z می بایست در خط ۵ همواره باقی مانده تقسیم y بر دو یا در واقع سمت راست ترین بیت y صفر باشد. در خط ۶ نیز می بینیم که در واقع معادل باینری عدد y ، دو واحد به سمت راست شیفت می یابد (دو بیت سمت راستش حذف شده و بقیه بیت ها ارزش شان دو مرتبه کمتر می شود). از این رو، شرط لازم و کافی برای صفر بودن z در پایان کار این است که نمایش مبنای دوی y باید حتماً به صورت $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot 0$ باشد که a تا e می توانند صفر یا یک باشند.

اکنون حلقه اول را تحلیل می کنیم. با کمی تحلیل می توان دید که y در واقع XOR خود x و یک واحد شیفت یافته به راست x (همان $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$) و دو واحد شیفت یافته به راست x و ... است. یعنی در واقع بیت i ام y (از سمت چپ) برابر با XOR تمامی بیت پرارزش x است. برای مثال اگر $x = 13 = (1101)_2$ باشد، بیت اول y برابر با ۱، بیت دوم y برابر با XOR دو بیت سمت چپ x یعنی ۱ و ۱ است. بیت سوم y برابر با XOR

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

سه بیت سمت چپ (ابتدا دو تا شان با هم، بعد حاصل با بیت سوم XOR شود) یعنی $0 = 1 \oplus 1 \oplus 1$ است. پس در نهایت $y = (1001)_2 = 9$ می شود.

با کمی دقت می توان دریافت که y در واقع تابعی یک به یک و پوشا است. یعنی به ازای هر x دقیقاً یک y ساخته می شود و هر y نیز دقیقاً از یک x به دست می آید.

با این وصف تنها کافی است تعداد اعدادی که به صورت هستند را به عنوان y های مطلوب بشماریم. چرا که طبق گفته های بالا، هر کدام از این y ها الزاماً حاصل انجام عملیات خطوط ۲ تا ۳ روی دقیقاً یک x هستند. از آن جا که برای هر کدام از بیت های a تا e نیز می توان دو حالت صفر یا یک تصور کرد، پس در مجموع $32 = 2^5$ عدد x وجود دارد که خروجی $z = 0$ را بر می گردانند.

(۲۰) گزینه ی «۱» درست است.

از آن جا که ۵ ستون داریم و در هر ستون باید حداقل ۱ ستاره قرار بگیرد، حداقل ۵ ستاره مورد نیاز است. از آن جا هم که ۳ سطر داریم و در هر سطر حداکثر ۲ ستاره می تواند واقع شود، حداکثر ۶ ستاره می توانیم داشته باشیم. پس دقیقاً یا ۵ و یا ۶ ستاره داریم.

در حالتی که ۵ ستاره داشته باشیم، ستاره ها از نظر ستونی باید متمایز باشند و در سطرها هم می بایست الزاماً ۲ و ۳ ستاره قرار بگیرد. برای دقیق تر کردن شمارش می توان گفت که بالای هر ستون، اندیس سطری که ستاره ی آن ستون در آن واقع است را می نویسیم. پس هر حالت به صورت یکتا متناظر خواهد بود با یک رشته به طول ۵ از اعداد ۱ و ۲ و ۳ که در آن هر عدد دقیقاً یک بار ظاهر شده است. برای شمارش تعداد این رشته ها، ابتدا کافی است عددی که تنها یک بار ظاهر می شود را ابتدا انتخاب کرده (۳ حالت) و جایش را در رشته ۵ حرفی مشخص کنیم (۵ حالت)، سپس ۴ جای باقی مانده در رشته را به $6 = (4)$ حالت با دو تا از هر کدام از دو عدد دیگر پر کنیم. پس تعداد جواب های این حالت برابر با $90 = 3 \times 5 \times 6$ می شود.

در حالتی که ۶ ستاره داشته باشیم، در هر سطر می بایست الزاماً دو ستاره قرار بگیرد و یکی از ستون ها هم دو ستاره داشته باشد. ابتدا ستونی که دو ستاره دارد را مشخص می کنیم (۵ حالت) و تنها خانه ی این ستون که ستاره ندارد را مشخص می کنیم (۳ حالت). فرض می کنیم در این ستون خانه های سطر a و b (که $1 \leq a < b \leq 3$) ستاره دارند. اکنون ستاره ی دوم سطر a را مشخص می کنیم (۴ حالت) و سپس ستاره ی دوم سطر b (سه حالت)، برای سطر مشخص نشده نیز دقیقاً دو ستون خالی وجود خواهند داشت. پس تعداد روش های این حالت برابر با $180 = 3 \times 4 \times 5 \times 3$ خواهد بود.

جواب نهایی نیز برابر با $270 = 90 + 180$ می شود.

۲ حالت زیر دو جواب مسأله است، بقیه جواب ها جایگشتی از این حالت ها می باشند.

```

**...
..**
....*

```

```

**...
..**
...**

```

(۲۱) گزینه ی «۳» درست است.

برای سادگی تشریح، نمره ی هر دانش آموز را همیشه ضرب در ۴ و سپس به اضافه ی ۳۵ می کنیم. یعنی اگر نمره ابتدایی n باشد، ما نمره ی $35 + n \times 4$ را در نظر می گیریم. چون این عملیات روی تمامی نمرات تأثیر

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

همگون می گذارد (تابع یک به یک است)، عملاً تعداد حالت های مختلف تغییر نمی کند. با این کار در واقع انگار هر پاسخ درست ۵ نمره و هر پاسخ نژده ۱ نمره و هر پاسخ غلط صفر نمره دارد.

به نظر می رسد با این کار می توان تمام اعداد بین صفر تا ۱۷۵ یعنی ۱۷۶ حالت مختلف را تولید کرد. حال آن که امکان تولید ۱۷۴ و ۱۷۳ و ۱۷۲ و همچنین ۱۶۹ و ۱۶۸ و نیز ۱۶۴ وجود ندارد. چرا که نمی توان x و y ای (به مثابه تعداد پاسخ های درست و تعداد پاسخ های نژده) یافت که اولاً $x + y \leq 35$ و ثانیاً $5 \times x + y$ برابر با یکی از این ۶ عدد بالا بشود. (اعداد بالا از کجا آمده اند؟) پس جواب برابر با ۱۷۶ منهای ۶ یا در واقع ۱۷۰ می شود.

(۲۲) گزینه ی «۳» درست است.

با کمی دقت می توان دریافت که متغیر B در هر مرحله یک رقم سمت راست x را جدا می کند و آن را به سمت چپ y می چسباند. این کار تا پایان یافتن ارقام x و صفر شدن آن ادامه دارد. پس y در واقع عدد ساخته شده از برعکس کردن ارقام x است.

می دانیم عددی بر ۳ بخش پذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخش پذیر باشد. از آن جا که ارقام ناصفر x و y با هم برابرند پس باقی مانده این دو عدد بر ۳ برابر می باشد. و برای بخش پذیر بودن $x + y$ می بایست خود x بر ۳ بخش پذیر باشد.

پس کافی است تعداد مضارب ۳ در بازه ی $[1, 10000]$ را بشماریم که به وضوح یک سوم این اعداد یعنی $\lfloor \frac{10000}{3} \rfloor = 3333$ می شود.

(۲۳) گزینه ی «۴» درست است.

برای اعداد ۱ تا ۹ همه اعداد تولید شده بر ۲ بخش پذیر هستند چرا که $x + y = 2x$ است. از ۱۰ به بعد به ازای هر ۱۰ عدد متوالی دقیقاً ۵ تا به ۲ بخش پذیر می باشند و ۵ تا به ۲ بخش پذیر نمی باشند. نهایتاً خود عدد ۱۰۰۰۰ هم وقتی با معکوس خود جمع می گردد عددی فرد می شود. پس جواب برابر است با:

$$(9999 - 9)/2 + 9 = 4995 + 9 = 5004$$

(۲۴) گزینه ی «۴» درست است.

می دانیم عددی بر ۱۱ بخش پذیر است که اگر ابتدا ارقام آن عدد را یکی در میان به دو دسته تقسیم کنیم و مجموع ارقام هر دسته را به دست آوریم و سپس دو عدد به دست آمده را از هم کم کنیم، عدد حاصل بر ۱۱ بخش پذیر باشد.

از طرفی در این سؤال ما با یک سری عدد چهار رقمی سروکار داریم. و چون عدد را با معکوسش جمع می کنیم مجموع رقم اول و سوم برابر با مجموع رقم دوم و چهارم می شود که تفاضل این دو صفر می شود که این یعنی عدد بر ۱۱ بخش پذیر است. (در نظر داشته باشید که ممکن است جمع دو عدد در یک رقم بیشتر از ۱۰ شود و در عدد نهایی تغییر ایجاد شود اما همچنان عدد بر ۱۱ بخش پذیر است چون متناظر آن در جایی دیگر نیز جمع بیشتر از ۱۰ می شود). در واقع اگر عدد ما به صورت $abcd$ باشد، خواهیم داشت $x + y = 1001(a+b) + 110(b+c)$ که همواره مضربی از ۱۱ است.

پس تمام اعداد بر ۱۱ بخش پذیر هستند و هیچ عدد اولی تولید نمی شود.

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۵) گزینه ی «۴» درست است.

با کمی دقت می توان دریافت که شکل اصلی را می توان به دو بخش مجزا تقسیم کرد. یک بخش خارجی شامل کلیه مثلث هایی که یک ضلع یا رأس مشترک با حاشیه شکل اصلی دارند (۱۸ مثلث) و بخش دیگر داخلی شامل ۶ مثلث میانی که تشکیل یک شش ضلعی منتظم می دهند.

می دانیم مثلث میانی بالاترین سطر شکل باید به صورت افقی و در کنار مثلث های هم سطرش پوشیده بشود. (چرا؟) از این رو این مثلث سه حالت برای پوشیده شدن خواهد داشت. با تعیین وضعیت پوشیده شدن این مثلث، تمامی مثلث های بخش خارجی به صورت یک تا پوشیده شدنشان تعیین می شود.

برای پوشانیدن بخش داخلی نیز کافی است یکی از سه قطر اصلی شش ضلعی منتظم داخلی را در نظر بگیریم. این قطر دقیقاً بخش داخلی را به دو عدد کاشی تقسیم می کند. پس برای بخش داخلی نیز ۳ حالت داریم.

از حال ضرب این دو بخش مستقل، به $3 \times 3 = 9$ روش کاشی کاری می رسیم.

(۲۶) گزینه ی «۳» درست است.

مثلث های شکل یا یک گوشه تیز رو به بالا دارند یا یک گوشه تیز رو به پایین. بر حسب این گوشه آن ها را نوع الف یا ب می نامیم.

کاشی های داده شده همواره یا دو مثلث نوع الف را می پوشانند یا دو مثلث نوع ب. از سوی دیگر اگر اتاق را به دو بخش شامل فقط مثلث های نوع الف و فقط مثلث های نوع ب تقسیم کنیم می بینیم که این دو بخش کاملاً شبیه هم و متقارن هستند. پس کافی است جواب را برای یکی از این بخش ها (مثلاً فقط مثلث های نوع الف) به دست بیاوریم و حاصل را به توان دو برسانیم. (چرا؟)

با حالت گیری می توان دید که این زیرمسئله به ۲۸ حالت قابل حل است. پس جواب برای کل شکل برابر است با: $28^2 = 784$

(۲۷) گزینه ی «۱» درست است.

کافیست خانه های سطر اول پر شوند. خانه های سطر دوم یکتا تعیین می گردد.

هر نفر می تواند به ۴ نفر دیگر نگاه کند و تعداد نفرات ۵ است پس جواب برابر است با: $4^5 = 1024$

به عبارت دقیق تر تعداد حالات برابر است با تعداد گراف های جهت دار ۵ رأسی و ۵ یالی که هر رأس دقیقاً یک یال خروجی به رأسی غیر از خودش دارد. تعداد این گراف ها نیز برابر با همان ۱۰۲۴ حالت است.

(۲۸) گزینه ی «۳» درست است.

فرض کنید جواب الف امین برابر x باشد. از آن جا که کسی به خودش نگاه نمی کند، x چهار حالت دارد. اکنون جواب الف x را y می نامیم. از آن جا که تمامی جدول باید با دو اسم پر بشود، پس جواب الف y نیز می بایست x باشد. در نتیجه کل سیستم به این شکل خواهد بود که x و y به هم نگاه می کنند و سه نفر دیگر الزاماً به یکی از این دو می نگرند.

پس تعداد حالت های مسئله برابر خواهد بود با $10 = \binom{5}{2}$ برای انتخاب این دو نفر ضرب در $8 = 2^3$ حالت برای دو گزینه نگاه هر کدام از سه نفر دیگر؛ که حاصل نهایی $80 = 10 \times 8$ خواهد بود.

(۲۹) گزینه ی «۵» درست است.

برای این که بتوان پاسخ های مهدی را به صورت یکتا تعیین کرد باید از جواب های دیگران پاسخ سؤال الف مهدی را یافت که به فرض شخص w است. پاسخ سؤال ب مهدی نیز برابر با پاسخ سؤال الف شخص w خواهد بود.

مرحله اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

برای تعیین کردن w باید حتماً یک نفر مهدی را ببیند که بتوانیم جواب بی آن شخص، w مورد نظر ما باشد. یعنی در واقع در گراف ساخته شده، باید حداقل یک یال ورودی به رأس مهدی وجود داشته باشد.

برای شمارش این گراف های مطلوب، کافی است گراف های نامطلوب (که کسی به رأس مهدی یال ندارد) را از کل گراف ها کم کنیم. تعداد این گراف های نامطلوب برابر خواهد بود با ۴ حالت برای انتخاب رأسی که مهدی به آن یال دارد ضرب در ۳ گزینه برای هر کدام از ۴ رأس دیگر یعنی $3 \times 4 = 324$.

اکنون اگر این تعداد را از کل گراف ها (که $1024 = 4^5$ تا هستند) کم کنیم، جواب برابر با $1024 - 324 = 700$ می شود.

(۳۰) گزینه ی «۳» درست است.

طبق استدلال سؤال قبلی، برای برقرار بودن این شرط، هر نفر توسط حداقل یک نفر دیده شود. در حالت گرافی این شرط به معنی این است که گراف باید به چند دور تقسیم شود.

برای این منظور دو حالت وجود دارد: یک دور ۵ رأسی که تعداد حالات برابر است با $4! = 24$ ؛ یا یک دور ۳ رأسی و یک دور ۲ رأسی که تعداد حالات برابر است با $2 \times \binom{5}{3} = 20$ (۳ رأس دور ۳ رأسی را انتخاب می کنیم و جهت چرخش یال های این مثلث هم دو حالت دارد).

جواب مسأله مجموع جواب های این ۲ حالت یعنی $24 + 20 = 44$ است.

(۳۱) گزینه ی «۴» درست است.

مرتضی هیچ گاه نمی تواند بفهمد که فرد دیده شده دروغ می گوید یا فرد بیننده. (اگر دروغگو کمی ماهر باشد!) در واقع از آن جا که پاسخ الف علی و پاسخ بی امین باید عملاً به یک شخص اشاره کنند، اگر این دو پاسخ با هم متفاوت باشند مرتضی می تواند بفهمد یکی شان دارد دروغ می گوید، اما نمی تواند بفهمد کدام شان راست و کدام شان دروغ می گوید.

از سوی دیگر، اگر شخصی توسط هیچ شخص دیگری دیده نشود، ممکن نیست بفهمیم راست می گوید یا دروغ، چون پاسخ الفش در پاسخ بی هیچ کس دیگری یافت نمی شود و شخص آزاد است هر کسی را می خواهد دروغ بگوید و مرتضی هم نفهمد!

پس می توان دید که هرگز مرتضی نمی تواند در این سیستم دروغگو را بیابد و جواب درست «هیچ گزاره ای درست نیست» می باشد.

(۳۲) گزینه ی «۱» درست است.

طول گام های کامبیز توان های ۲ هست و این توان ها در تقسیم بر عدد ۳، باقی مانده ی ۱ یا ۲ دارند. با کمی دقت می توان دید که باقیمانده ی تقسیم بر ۳ ی گام های متوالی کامبیز دقیقاً به صورت ۱ و بعد ۲ و بعد ۱ و بعد ۲ و ... است! (چرا؟)

در واقع کامبیز بعد از برداشتن اولین گام و حضور در خانه ی ۱، به صورت دقیقاً یکی در میان در خانه های $3k$ و $3k+1$ خواهد بود و هرگز امکان ورود به خانه های $3k+2$ (خانه هایی که در تقسیم بر ۳ باقی مانده ۲ دارند) را ندارد.

از طرف دیگر با برداشتن گام هایی به طول ۱ و بعد ۲ و بعد ۱ و بعد ۲ و ... کامبیز می تواند به تمام خانه های به صورت به صورت $3k$ و $3k+1$ برسد.

پس در صورتی که در تقسیم شماره ی یک خانه بر عدد ۳ باقی مانده برابر ۲ بشود آن خانه «بد» و در غیر این صورت «خوب» است. این گزاره تنها در مورد گزینه «۱۳۹۰» یک خانه ی خوب و ۲۰۱۲ یک خانه ی بد است. «صادق است»

مرحله ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

(۳۳) گزینه ی «۳» درست است.

اعداد دنباله به صورت زیر می باشند: $(3 \times 1 - 2, 3 \times 1), (3 \times 2 - 2, 3 \times 2), (3 \times 3 - 2, 3 \times 3), \dots$
 پس کافیس ۲۰۱۲ را تقسیم بر ۲ کنیم و ببینیم ۲۰۱۲ امین عدد به عنوان عضو دوم ۱۰۰۶ امین زوج دوتایی ظاهر می شود. این عدد هم برابر است با: $3 \times 1006 = 3018$

(۳۴) گزینه ی «۲» درست است.

اگر L_i را برابر طول رشته S_i ، N_i را برابر تعداد حروف بزرگ در S_i و n_i را برابر تعداد حروف کوچک در S_i تعریف کنیم، روابط زیر برقرار هستند.

$$\begin{aligned} L_i &= n_i + N_i \\ N_i &= 2 \times N_{i-1} \\ n_i &= n_{i-1} + N_{i-1} \end{aligned}$$

با صریح سازی این فرمول ها به ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} N_i &= 2^i \times N_1 = 3 \times 2^i \\ n_i &= 1 + 3 \times 2^i \\ L_i &= 1 + 6 \times 2^i \end{aligned}$$

از این رو، طول رشته هفتم برابر با $L_7 = 1 + 6 \times 2^7 = 769$ می باشد که از ۷۷۷ کمتر بوده و گزینه آخر درست است.

(۳۵) گزینه ی «۵» درست است.

اگر تمامی حروفی که از اولین A (دومین حرف از سمت چپ) در S_1 ساخته می شوند را قرمز کنیم (هم حروف ساخته شده به صورت مستقیم در S_1 و هم در ادامه حروفی که از این حروف قرمز ساخته می شوند)، خواهیم دید که در S_9 ابتدا یک a مشکی داریم که از ابتدا دست نخورده مانده است، سپس ۱۰۲۳ حرف قرمز بزرگ یا کوچک داریم (چرا؟)، پس از آن یک b مشکی (دست نخورده از ابتدا) و پس از آن حروفی می آیند که از B موجود در S_1 ساخته شده اند.

با این وصف مسئله تبدیل می شود به این که $1 - 1023 - 1 - 1027 = 2$ امین حرف از سمت چپ رشته ای که از B پس از ۹ مرحله ساخته می شود را بیابیم. در روشی مشابه، این بار حروفی که از این B موجود در S_1 به صورت مستقیم یا غیرمستقیم ساخته می شوند را آبی می کنیم. اکنون کافیست دومین حرف آبی در S_9 را بیابیم.

اگر دقت کنیم در اولین مرحله اجرای قاعده، رشته آبی با $Ab\dots$ شروع می شود (در S_1)؛ همین قسمت در S_9 رشته ای به صورت $Ba\dots$ را می سازد. با همین رویه می توانیم ببینیم رشته ی آبی در S_9 با $Ab\dots$ شروع می شود و در نتیجه دومین حرف آبی و ۱۰۲۷ امین حرف کل رشته ی S_9 برابر با b است.

مرحله ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱) ده توپ داریم که روی آن ها اعداد ۱ تا ۱۰ (هر عدد دقیقا روی یک توپ) نوشته شده است. همه ی توپ ها را به دل خواه خود داخل تعدادی سطل می ریزیم و سپس روی هر سطل، جمع اعداد توپ های درونش را می نویسیم. با در نظر گرفتن همه ی حالات توزیع توپ ها، مجموعه ی اعداد نوشته شده روی سطل ها می تواند برابر چندتا از ۴ مجموعه ی زیر باشد؟

• {۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳}

• {۱، ۲، ۳، ۱۰، ۲۰، ۲۰}

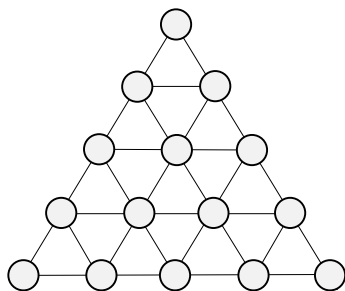
• {۵، ۱۲، ۱۷، ۲۱}

• {۵، ۵، ۵، ۱۰، ۱۰، ۱۰}

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

۲) ۱۵ گل دان خالی را در یک ردیف چیده ایم. می خواهیم درون دقیقا ۴ تا از گل دان ها گل بگذاریم، طوری که بین هر دو گل دان پر حداقل دو گل دان خالی وجود داشته باشد. به چند طریق می توانیم این کار را انجام دهیم؟

الف) ۸۴ (ب) ۱۲۶ (ج) ۳۵ (د) ۱۴۰ (ه) ۱۳۶۵

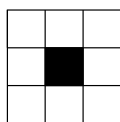


۳) شکل مقابل از ۱۵ توپ و ۳۰ میله تشکیل شده که هر میله دو توپ را به هم وصل می کند و هر توپ به ۲، ۴ یا ۶ توپ دیگر وصل است. حداقل چند توپ را باید حذف کنیم به طوری که هر یک از توپ های باقی مانده حداکثر به دو توپ دیگر وصل باشد؟ دقت کنید وقتی یک توپ را حذف کنیم، میله هایی که یک سرشان این توپ باشد نیز حذف می شوند.

الف) ۸ (ب) ۵ (ج) ۴ (د) ۶ (ه) ۳

۴) علی می خواهد تعدادی عدد از چپ به راست بنویسد که با ۱ شروع و با ۲۰ تمام شود و شامل اعداد ۵ یا ۱۰ نباشد. هم چنین به جز ۱، هر عدد یا یکی بیشتر از عدد قبلی خود (عددی که درست سمت چپ آن نوشته شده) باشد، یا دو برابر آن. او به چند روش مختلف می تواند این کار را انجام دهد؟

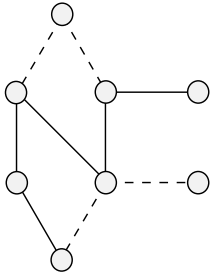
الف) ۱۰ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۴ (ه) ۸



۵) به چند طریق می توان خانه های یک جدول 5×3 را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ آمیزی کرد به نحوی که شکل سمت چپ در آن یافت نشود؟ این شکل شامل یک خانه ی سیاه و هشت خانه ی سفید مجاور آن است.

الف) ۳۲۵۷۷ (ب) ۳۲۶۴۱ (ج) ۳۲۷۶۹ (د) ۳۲۷۶۸ (ه) ۳۲۵۷۶

مرحله ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور



(۶) می خواهیم توپ های شکل مقابل را با رنگ های سبز، زرد و قرمز رنگ آمیزی کنیم، به طوری که هر دو توپی که با خط مممتد به هم وصل شده اند رنگ متفاوت داشته باشند، و هر دو توپی که با خط چین به هم وصل شده اند هم رنگ باشند. به چند روش می توان این کار را انجام داد؟

۳ (هـ)

۱۲ (د)

۱۸ (ج)

۹ (ب)

۶ (الف)

۱	۵	-۲	۴
۲	۳	۰	۵
۴	-۱	۴	۲
-۱	۲	۵	-۴

ورودی نمونه

۷	۲	۹	۳
۸	۶	۱۰	۶
۰	۱۳	۶	۵
۶	۳	۲	۷

خروجی نمونه

۸	-۴	-۵	۲
۲	۰	۱	-۷
-۳	۵	۹	۵
۶	۰	۳	۹

خروجی اصلی

(۷) دستگاهی داریم که یک جدول 4×4 را که در هر خانه ی آن عددی صحیح نوشته شده به عنوان ورودی می گیرد، و در خروجی یک جدول 4×4 تحویل می دهد که مقدار خانه ی (i, j) از آن برابر است با مجموع خانه های مجاور (i, j) در جدول ورودی. دو خانه مجاور هستند اگر ضلع مشترک داشته باشند. به عنوان مثال با توجه به شکل مقابل اگر ورودی نمونه را به دستگاه بدهیم، خروجی نمونه را تحویل خواهیم گرفت. محمد یک جدول به ورودی دستگاه داده که ما آن را ندیده ایم، ولی می دانیم دستگاه جدول خروجی اصلی (شکل مقابل) را در خروجی تحویل داده است. جمع اعداد نوشته شده در ۱۶ خانه ی جدولی که محمد به ورودی دستگاه داده چیست؟

۷ (هـ)

۶ (د)

۸ (ج)

۹ (ب)

۱۰ (الف)

مرحله ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

کشور « k -منگولیا» 2^k شهر دارد که با شماره های 0 تا $2^k - 1$ نام گذاری شده اند. در این کشور بعضی از جفت شهرها با جاده به هم وصل هستند. برای این که بدانیم دو شهر با شماره های x و y با یک جاده به هم وصل هستند یا خیر، ابتدا دو عدد x و y را در مبنای 2 می نویسیم. اگر هر یک از دو عدد حاصل کم تر از k رقم داشت، تعداد مناسبی 0 به سمت چپ آن اضافه می کنیم تا هر دوی آن ها k رقمی شوند. نهایتاً شهرهای x و y با یک جاده به هم متصل هستند اگر و تنها اگر دو عدد به دست آمده دقیقاً در یکی از k رقم با هم متفاوت بودند. مثلاً در کشور 4 -منگولیا، بین شهرهای 1 و 9 جاده ی مستقیم وجود دارد چرا که $2(1001)$ و $2(1001)$ تنها در رقم سمت چپ با هم تفاوت دارند، ولی شهرهای 2 و 9 جاده ی مستقیم ندارند چرا که $2(0010)$ و $2(1001)$ در سه رقم متفاوت هستند.

با توجه به توضیح بالا به چهار سوال زیر پاسخ دهید:

۸) در کشور 4 -منگولیا می خواهیم به هر شهر یک رنگ اختصاص دهیم طوری که هیچ دو شهر مجاوری (که با جاده ی مستقیم متصل شده اند) هم رنگ نباشند. حداقل چند رنگ مختلف نیاز داریم؟

الف) ۲ (ب) ۱۶ (ج) ۸ (د) ۳ (ه) ۴

۹) حداقل با چند رنگ می توانیم به هر یک از جاده های کشور 7 -منگولیا رنگی اختصاص دهیم، که به هیچ شهری دو جاده ی هم رنگ متصل نباشند؟

الف) ۸ (ب) ۲۷ (ج) ۷ (د) ۵ (ه) ۶

۱۰) در کشور 10 -منگولیا حداقل چند جاده را باید گُل کاری کنیم طوری که به هر شهر حداقل یک جاده ی گُل کاری شده متصل باشد؟

الف) ۲۱۰ (ب) ۱۱ (ج) ۱۰ (د) ۲۹ (ه) ۹

۱۱) در کشور 11 -منگولیا حداقل چند شهر را باید چراغانی کنیم طوری که دست کم یکی از دو شهر متصل به هر جاده چراغانی باشد؟

الف) ۲۹ (ب) ۱۰ (ج) ۱۱ (د) ۹ (ه) ۲۱۰

مرحله ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

	۱	۲	۳	۴
۱	۳	۱		۳
۲	۳		۲	
۳		۱		۳
۴	۲	۴	۱	۲

یک جدول 16×16 را در نظر بگیرید که سطرها و ستونهای آن به ترتیب شماره های ۱ تا ۱۶ گرفته اند. هر خانه می تواند خالی باشد یا درون آن یک سکه قرار گرفته باشد. روی هر سکه یک شماره بین ۱ تا ۱۶ نوشته شده است، اما از هر شماره حداکثر ۱۶ سکه در جدول وجود دارد. در شکل روبه رو مثالی از یک جدول 4×4 با ۱۱ سکه دیده می شود. توجه کنید که برای سادگی، دو شکل اول برای جدول 4×4 رسم شده اند. اما هر سه سوال را باید بر اساس جدول 16×16 پاسخ دهید.

_____ با توجه به توضیح بالا به سه سوال زیر پاسخ دهید: _____

(۱۲) در یک سطر دلخواه، حداکثر چند سکه ممکن است وجود داشته باشد که عدد نوشته شده بر روی آن ها برابر باشد؟ (در مثال بالا این عدد ۲ است)

- الف) ۸ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۴ (ه) ۱۶

	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۱	۱	
۲	۱	۱	۱	
۳	۱	۱	۱	
۴	۱	۱	۱	

(۱۳) فرض کنید که تمام سکه های این جدول را برمی داریم و بر اساس عدد نوشته شده بر روی آن ها به صورتی که در شکل نشان داده شده است به صورت مرتب می چینیم. در این نحوه مرتب سازی سکه ها از خانه ی (۱، ۱) تا (۱۶، ۱۶) مطابق شکل دنبال هم فرض می شوند (توجه کنید سکه ی واقع در (۱، ۲) پس از سکه ی واقع در (۱۶، ۱) فرض می شود. منظور از (۱، ۲) خانه ی سطر ۱ و ستون ۲ است.) با این مرتب سازی، سکه هایی که عددشان برابر است پشت سر هم قرار می گیرند.

پس از انجام این مرتب سازی، در یک سطر دلخواه حداکثر چند سکه ممکن است وجود داشته باشد که عدد نوشته شده بر روی آن ها برابر باشد؟ (در جدول مثال اولیه، این عدد ۱ است)

- الف) ۱ (ب) ۸ (ج) ۷ (د) ۲ (ه) ۴

	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۱	۱	
۲	۱	۱	۱	
۳	۱	۱	۱	
۴	۱	۱	۱	

(۱۴) فرض کنید که جدول اولیه را مطابق شکل زیر به ۱۶ جدول هر یک به اندازه ی 4×4 تقسیم می کنیم. اگر سکه های موجود در هر یک این جدول های کوچک تر 4×4 را (مستقل از بقیه ی جدول ها) مطابق مسئله ی قبل درون خود آن جدول ها مرتب کنیم، حال در یک سطر دلخواه، حداکثر چند سکه ممکن است وجود داشته باشد که عدد نوشته شده بر روی آن ها برابر باشد؟

- الف) ۲ (ب) ۴ (ج) ۱ (د) ۷ (ه) ۸

مرحله ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

دستگاه «ایکس-ار» (XOR) دو عدد می گیرد و یک عدد برمی گرداند. این دستگاه ابتدا دو عدد ورودی را به مبنای ۲ می برد و با افزودن تعداد مناسبی صفر به سمت چپ عدد کوتاه تر، تعداد رقم های آن دو عدد را برابر می کند. سپس عدد دوم را زیر عدد اول (در دو سطر، شبیه وقتی که بخواهیم آن ها را جمع کنیم) می نویسد به صورتی که رقم i ام عدد اول بالای رقم i ام عدد دوم قرار بگیرد. حال هر دو رقم را که در یک ستون قرار دارند مقایسه می کند: اگر مساوی بودند زیر آن ها و در سطر سوم یک رقم ۰ می نویسد، و در صورتی که یکسان نبودند زیر آن ها رقم ۱ می گذارد. در انتها با تبدیل عدد دودویی نوشته شده در سطر سوم از مبنای ۲ به مبنای ۱۰ و تحویل آن در خروجی، کار پایان می یابد. مثلاً اگر به دستگاه اعداد ۵ و ۱۲ را بدهیم، دستگاه با تبدیل آن ها به مبنای دو، عددهای $(۰۱۰۱)_2$ و $(۱۱۰۰)_2$ را تولید کرده در دو سطر می نویسد و با توجه به آن ها عدد $(۱۰۰۱)_2$ در سطر سوم درج خواهد شد و لذا دستگاه عدد ۹ را به عنوان خروجی برمی گرداند.

_____ با توجه به توضیح بالا به سه سوال زیر پاسخ دهید: _____

(۱۵) علی ۳۱ کارت با شماره های ۱ تا ۳۱ دارد. او هر بار یک جفت کارت را که مجموع شماره ی آن ها برابر ۳۲ است انتخاب و شماره ی آن دو کارت را به ورودی دستگاه می دهد. اگر علی این کار را برای تمامی زوج کارت هایی که مجموع شماره شان ۳۲ است انجام دهد، بزرگترین عددی که در خروجی دستگاه XOR ظاهر می شود چقدر است؟

الف) ۳۰ (ب) ۹۳۰ (ج) ۲۹ (د) ۳۱ (ه) ۳۲

(۱۶) برنامه ی زیر چه عددی را چاپ خواهد کرد؟

(۱) s را برابر ۰ قرار بده.

(۲) برای i از ۱ تا ۱۳۹۰، دو دستور زیر را اجرا کن:

۱.۲) اعداد i و $i+1$ را به ورودی دستگاه بده و عدد خروجی را در x قرار بده.

۲.۲) اعداد x و s را به ورودی دستگاه بده و عدد خروجی را در s قرار بده.

(۳) مقدار s را چاپ کن.

الف) ۱۳۹۱ (ب) ۱۳۹۲ (ج) ۱۳۹۰ (د) ۰ (ه) ۱

(۱۷) برنامه ی زیر چه عددی را چاپ خواهد کرد؟

(۱) s را برابر ۰ قرار بده.

(۲) برای i از ۱ تا ۹۰، دو دستور زیر را اجرا کن:

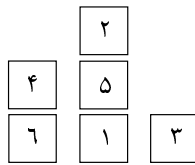
۱.۲) اعداد i و $i+1$ را به ورودی دستگاه بده و عدد خروجی را در x قرار بده.

۲.۲) مقدار $s+x$ را در s قرار بده.

(۳) مقدار s را چاپ کن.

الف) ۹۰ (ب) ۱ (ج) ۵۶۴ (د) ۲۰۲۵ (ه) ۵۶۵

مرحله ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور



۶ مکعب با شماره های ۱ تا ۶ و یک میز در اختیار داریم. هر مکعب را می توانیم یا به صورت مستقل روی میز بگذاریم یا دقیقاً روی یک مکعب دیگر. به تعدادی از مکعب ها که از پایین به بالا روی هم قرار گرفته اند یک برج می گوئیم. برای مثال در شکل مقابل، $(1, 5, 2)$ به ترتیب یک برج می سازند. یک «وضعیت»، یک نحوه ی شکل گیری برج هاست. جای برج ها نسبت به هم اهمیتی ندارد و فقط این مهم است که هر مکعب روی کدام مکعب (یا روی میز) است. مثلاً در شکل اگر جای برج $(4, 6)$ با برج تکی (3) عوض شود، وضعیت جدیدی را نمی سازد؛ اما اگر جای 4 با 6 عوض شود یک وضعیت جدید داریم.

با توجه به توضیح بالا به سه سوال زیر پاسخ دهید:

۱۸) ۶ مکعب چند وضعیت شامل دقیقاً دو برج می توانند داشته باشند؟ چند وضعیت شامل دقیقاً سه برج؟

الف) ۱۸۰۰ و ۹۶۰ (ب) ۱۸۰۰ و ۱۲۰۰ (ج) ۴۴۶۴۰ و ۵۲۲۷۲۰ (د) ۲۱۶۰ و ۱۵۶۰ (ه) ۲۱۶۰ و ۲۱۶۰

۱۹) یک «حرکت»، شامل برداشتن بالاترین مکعب از یک برج و قرار دادن آن بر روی بالاترین مکعب برجی دیگر از مکعب ها یا روی میز است. (این دو کار با هم «یک» حرکت هستند.) مثلاً در شکل بالا می توان با یک حرکت ۲ را روی ۳ یا روی ۴ و یا حتی روی میز قرار داد.

با حداقل چند حرکت می توان وضعیت شکل بالا را تبدیل به وضعیت تک-برج با اعداد صعودی ۱ تا ۶ از پایین به بالا (یعنی تنها یک برج $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$) کرد؟ حداقل چند حرکت برای تبدیل وضعیت بالا به تک-برج نزولی از پایین به بالا (یعنی $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$) لازم است؟

الف) ۵ صعودی، ۶ نزولی (ب) ۶ صعودی، ۶ نزولی (ج) ۶ صعودی، ۷ نزولی (د) ۷ صعودی، ۷ نزولی (ه) ۷ صعودی، ۶ نزولی

۲۰) حداقل میزان K چه قدر باید باشد که مطمئن باشیم با حداکثر K حرکت هر وضعیت آغازینی از ۶ مکعب را می توانیم به هر وضعیت دیگری که از ما خواسته می شود، تبدیل کنیم؟

الف) ۶ (ب) ۱۰ (ج) ۷ (د) ۱۲ (ه) ۱۱

مرحله ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

در بین شهرهای یک کشور، راه های خاکی و آسفالت کشیده شده اند. همه ی راه ها یک طرفه اند و ممکن است یک راه که از یک شهر خارج می شود به شهر دیگری وارد شود، یا آن که راه به صورت یک حلقه باشد و به همان شهر مبدا وارد شود. می دانیم که از هر شهر دقیقاً یک راه خاکی و یک راه آسفالت خارج می شود، هم چنین امکان دارد هر دو راه خاکی و آسفالت خارج شده از یک شهر، به یک شهر یکسان وارد شوند.

هر شهر یا استقلالی است یا پرسپولیسی. لیلی ساکن شهر پایتخت کشور است و می خواهد با گرفتن یک «مسیر» که به صورت رشته ای از حرف های «خ» (مخفف خاکی) و «آ» (مخفف آسفالت) مشخص می شود، با شروع از پایتخت به ترتیب راه های مشخص شده در مسیر را پیماید و به مقصد برسد. مثلاً اگر مسیر او «خ آخ آ» باشد، ابتدا راه خاکی خارج شده از پایتخت را طی کرده به شهر بعدی می رود (اگر آن راه خاکی حلقه باشد مجدداً به پایتخت می رسد)، سپس راه آسفالت خارج شده از شهر دوم را طی کرده به شهر سوم می رود و در ادامه با پیمودن یک راه خاکی و یک راه آسفالت به مقصد می رسد. بر این اساس به سه سوال زیر پاسخ دهید. توجه کنید که مفروضات هر سوال متفاوت است، یعنی هر سوال کشور جداگانه ای را با شرایط ذکر شده توصیف می کند.

_____ با توجه به توضیح بالا به سه سوال زیر پاسخ دهید: _____

۲۱) فرض کنید وضعیت راه های کشور طوری است که برای هر مسیر که تعداد «خ» های آن زوج است، مقصد لیلی یک شهر استقلالی، و در غیر این صورت مقصد وی پرسپولیسی باشد. مثلاً مقصد مسیر «خ آ آ آ» استقلالی و مقصد «خ آخ آخ» پرسپولیسی است. این کشور حداقل چند شهر دارد؟

الف) ۲ (ب) ۵ (ج) ۴ (د) ۶ (ه) ۳

۲۲) فرض کنید مقصد مسیرهایی استقلالی است که تعداد «خ» های آن مضرب ۱۳۸۹ باشد، و در غیر این صورت مقصد پرسپولیسی باشد. این کشور حداقل چند شهر دارد؟

الف) ۶۹۴ (ب) ۱۳۸۹ (ج) ۲۷۷۸ (د) ۱۳۸۸ (ه) ۱۳۹۰

۲۳) فرض کنید مقصد مسیر تنها و تنها وقتی استقلالی باشد که مسیر دقیقاً ۲۰ راه خاکی متوالی (بدون راه آسفالت)، و یا دقیقاً ۱۰ راه آسفالت متوالی (بدون راه خاکی) باشد. این کشور حداقل چند شهر دارد؟

الف) ۳۳ (ب) ۳۱ (ج) ۳۰ (د) ۳۲ (ه) ۲۹

مرحله ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

کف یک سالن به صورت جدول 3×3 و یا 4×4 از موزاییک‌هایی پوشیده شده که روی هریک از آن‌ها عدد ۰ و یا ۱ نوشته شده است. پنج روبات داریم که یکی از آن‌ها دروغ‌گو و سایرین راست‌گو هستند.

ابتدا روبات دل‌خواهی را روی یکی از موزاییک‌ها (به دل‌خواه) می‌گذاریم و آن را روشن می‌کنیم. روبات هر بار عدد موزاییکی را که روی آن قرار دارد اعلام می‌کند و سپس به یکی از موزاییک‌های مجاور (که با آن ضلع مشترکی دارند) می‌رود. مسیر حرکت روبات توسط خودش تعیین می‌شود اما طوری حرکت می‌کند که روی هر موزاییک دقیقاً یک بار قرار گیرد و پس از اعلام عدد همه‌ی موزاییک‌ها متوقف می‌شود. همین فرایند را برای روبات‌های دیگر، یکی پس از دیگری، انجام می‌دهیم.

_____ با توجه به توضیح بالا به سه سوال زیر پاسخ دهید: _____

(۲۴) ابتدا در یک سالن 3×3 فرایند بالا را انجام داده و عددهای اعلام شده توسط هر روبات را به ترتیب (از چپ به راست) در پنج گزینه‌ی زیر آورده‌ایم. می‌دانیم روبات‌های راست‌گو هم‌واره عدد نوشته شده روی موزاییک‌ها را به درستی اعلام می‌کنند، اما روبات دروغ‌گو عدد حداقل یک موزاییک را نادرست می‌گوید. کدام گزینه مربوط به روبات دروغ‌گو می‌باشد؟

(ب) ۱ ۱ ۱ ۰ ۱ ۱ ۰ ۰ ۱

(د) ۱ ۱ ۱ ۰ ۱ ۱ ۱ ۰ ۰

(الف) ۱ ۰ ۱ ۱ ۰ ۱ ۱ ۰ ۱

(ج) ۱ ۰ ۱ ۱ ۱ ۰ ۰ ۱ ۱

(ه) ۱ ۱ ۰ ۱ ۱ ۱ ۱ ۰ ۰

(۲۵) فرایند سوال قبل را در یک سالن 4×4 اجرا کرده‌ایم. این بار کدام گزینه، اعداد اعلام شده توسط روبات دروغ‌گو است؟

(ب) ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۱

(د) ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱

(الف) ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۱ ۰ ۰ ۱ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰

(ج) ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۱ ۱ ۱

(ه) ۱ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۱

(۲۶) فرایند سوال قبل را در یک سالن 4×4 دیگر اجرا کرده‌ایم. این بار کدام گزینه، اعداد اعلام شده توسط روبات دروغ‌گو است؟

(ب) ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰

(د) ۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰

(الف) ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۱

(ج) ۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰

(ه) ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۱

مرحله ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

برنامه ی زیر را در نظر بگیرید:

۱: عدد X را از ورودی بگیر.

۲: مقدار عدد Y را برابر صفر قرار بده.

۳: باقی مانده ی تقسیم عدد X بر ۲ را B بگیر.

۴: مقدار Y را برابر $2 \times Y + B$ قرار بده. (مثلاً اگر Y مساوی ۵ و B برابر ۱ است، مقدار Y برابر ۱۱ خواهد شد).

۵: مقدار X را برابر خارج قسمت تقسیم خودش بر ۲ قرار بده. (مثلاً اگر X برابر ۱۳ بود، مقدار X به ۶ تغییر خواهد یافت).

۶: اگر X بزرگتر از صفر است، به مرحله ۳ برو. در غیر این صورت به مرحله ۷ برو.

۷: مقدار Y را به عنوان خروجی برگردان.

۸: پایان

می بینیم اگر مقدار ۱۲ را به عنوان ورودی X بدهیم، خروجی برنامه برابر ۳ خواهد بود.

با توجه به توضیح بالا به چهار سوال زیر پاسخ دهید:

۲۷) فرض می کنیم اگر عدد ورودی X را در مبنای دو بنویسیم به صورت X' (متشکل از ۰ و ۱) خواهد بود و اگر خروجی برنامه را در مبنای دو بنویسیم به صورت Y' خواهد بود. Y' همواره چه نسبتی با X' دارد؟

الف) تعداد «یک» های رشته ی X' است.

ب) تعداد «صفر» های رشته ی X' است.

ج) زیررشته ای از X' است با حذف تعدادی از ارقام مبنای دوی X' .

د) مقسوم علیه ای از X' است.

ه) برعکس شده (متقارن) X' است با حذف صفرهای سمت چپ.

۲۸) اگر ورودی برنامه مقدار X باشد، خروجی متناظر آن را $R(X)$ می نامیم؛ مثلاً طبق آنچه گفته شد مقدار $R(۱۲)$ برابر ۳ است. مقدار $R(۴۴۴)$ کدام گزینه است؟

الف) ۱۱۱ ب) ۵۵ ج) ۵۹ د) ۵۷ ه) ۱۲۳

۲۹) عدد A را زیبا می نامیم اگر $R(A) > A$ باشد. مثلاً عدد ۱۱ یک عدد زیبا است چرا که $R(۱۱) = ۱۳$ و $۱۳ > ۱۱$ است. اما عدد ۱۲ یا عدد ۷ زیبا نیستند. چند عضو از مجموعه ی $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۶۳\}$ زیبا هستند؟

الف) ۵ ب) ۱۲ ج) ۹ د) ۸ ه) ۱۳

۳۰) چند تا از اعداد بین $۲^{۱۲}$ تا $۲^{۱۳}$ (شامل خود این دو عدد) زیبا هستند؟

الف) ۴۹۶ ب) ۹۹۲ ج) ۵۲۸ د) ۲۰۱۶ ه) ۱۰۵۶

به نام خدا

پاسخ تشریحی
مرحله اول بیست و یکمین دوره المپیاد کامپیوتر
سال ۱۳۸۹

(۱) گزینه ی (ج) درست است.

مجموعه ی اول: ۹، ۱۰، ۳+۸، ۵+۷ و ۶+۴+۲+۱ پس می شود.

مجموعه ی دوم: مجموع اعداد ۱ تا ۱۰ برابر ۵۵ است در حالیکه مجموع این اعداد ۵۶ است. پس نمی شود.

مجموعه ی سوم: ۵، ۹+۳، ۱۰+۴+۲+۱ و ۸+۷+۶ پس می شود.

مجموعه ی چهارم: برای ساختن عدد ۵ باید از اعداد کوچکتر یا مساوی ۵ استفاده کرد. از آنجا که مجموع همه ی این اعداد ۱۵ است پس برای ۳ تا ۵ باید ۴+۱، ۳+۲ و ۵ استفاده کنیم. حال اعداد ۶ تا ۱۰ باقیمانده اند که مجموع هردو تا از آنها بیشتر از ۱۰ است، پس نمی توان.

(۲) گزینه ی (ب) درست است.

۱۰ گلدان را طوری در نظر می گیریم که اولی و چهارمی و هفتمی و دهمی گل داشته باشند. در اینصورت بین هر دو گلدان پر، دو گلدان خالی وجود دارد. حال باید ۵ گلدان دیگر را در بین این گلدان ها قرار دهیم. که معادل با حل معادله ی زیر است:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$$

که در آن تمامی متغیرها نامنفی هستند. جواب این معادله نیز برابر با ۱۲۶ است.

(۳) گزینه ی (د) درست است.

۶ توپ لازم و کافی است.

- اثبات لزوم شرط: سه دایره ی داخلی را در نظر بگیرید. اگر هرکدام از آنها باقی بماند (مثلا دایره ی پایین راست)، باید ۴ تا از همسایه هایش حذف شوند (اگر هرکدام از دو دایره ی داخلی دیگر باقی بماند حداقل ۶ دایره حذف می شود). پس از حذف این رئوس ۴ راس با درجه ی سه باقی می ماند که باید حداقل دو راس دیگر حذف شوند که در نتیجه در مجموع ۶ دایره حذف شد. اگر همه ی رئوس میانی نیز حذف شوند ۶ راس درجه ی سه باقی مانده که با حذف هر راس حداکثر دو تا از آنها کم می شوند. در نتیجه حداقل باید سه راس دیگر حذف شوند.

- اثبات کافی بودن شرط: از مثلث داخلی (به طول دو) که برعکس است تمام رئوس آن را حذف کنید. در نتیجه سه مثلث به طول یک باقی می ماند که شرایط مسئله را دارند.

(۴) گزینه ی (ه) درست است.

برای بدست آوردن تعداد حالات رسیدن به هر عدد کافیت مقدار حالات قبل از آن را بدانیم. درواقع برای رسیدن به عدد k یا از $k-1$ و یا از $\frac{k}{2}$ (در صورت زوج بودن k) استفاده کرده ایم و تعداد حالات رسیدن به ۵ و ۱۰ نیز صفر است. پس جدول تعداد حالات رسیدن به اعداد بصورت زیر است:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۱	۱	۱	۲	۰	۱	۱	۳	۳	۰	۰	۱	۱	۲	۲	۵	۵	۸	۸	۸

(۵) گزینه ی (الف) درست است.

تعداد جدول هایی که شامل آن شکل هستند را می شماریم. این جدول ها یکی از سه حالت زیر را دارند:

تعداد حالات هر کدام 2^6 است، ولی تنها در یک حالت وضعیت اول و سوم یکسان خواهند شد. در نتیجه تعداد کل حالات نامطلوب برابر است با:
 $3 \times 2^6 - 1$. پس جواب مسئله برابر $(3 \times 2^6 - 1) - 2^{15}$ می باشد که ۳۲۵۷۷ می شود.

(۶) گزینه ی (د) درست است.

سه نقطه در بالا چپ و سه نقطه در پایین راست ناحیه ی هم رنگ تشکیل داده اند که رنگ آنها با یکدیگر فرق دارد. پس از این رنگ آمیزی دو نقطه باقی می ماند که یکی یک حالت و دیگری دو حالت دارد. در نتیجه در کل ۱۲ حالت خواهیم داشت.

(۷) گزینه ی (ج) درست است.

فرض کنید خانه های جدول ورودی را به ترتیب از چپ به راست و سپس از بالا به پایین شماره گذاری کرده ایم.
در شکل زیر در هر خانه از جدول شماره خانه هایی از جدول ورودی که در آن خانه از جدول خروجی مجموعشان بدست می آید نوشته شده است:

۲،۵	۱،۶،۳	۲،۷،۴	۳،۸
۱،۶،۹	۲،۵،۷،۱۰	۳،۶،۸،۱۱	۴،۷،۱۲
۵،۱۰،۱۲	۶،۹،۱۱،۱۴	۷،۱۰،۱۲،۱۵	۸،۱۱،۱۶
۹،۱۴	۱۰،۱۲،۱۵	۱۱،۱۴،۱۶	۱۲،۱۵

حالا با انتخاب خانه های تیره و جمع زدن اعداد داخل آنها در جدول خروجی هر عدد از جدول ورودی یک بار آمده است و مجموع این سه عدد مجموع کل را می دهد.

(۸) گزینه ی (الف) درست است.

این کشور با دو رنگ، قابل رنگ آمیزی است. اعدادی که مجموع ارقام آنها فرد هستند را به رنگ ۱ و بقیه اعداد (با مجموع ارقام زوج) را به رنگ ۲ رنگ آمیزی می کنیم. با این روش هر دو عدد مجاور (چون دقیقا در یک رنگ متفاوت اند) در دو دسته قرار دارند و ناهم رنگ هستند.

(۹) گزینه ی (ج) درست است.

چون درجه هر راس ۷ است پس جواب کمتر از ۷ نیست و با روش زیر با ۷ رنگ گراف را رنگ می کنیم پس ۷ رنگ لازم و کافی است. روش:

اگر دو عدد فقط در بیت ۱م متفاوت بودند با رنگ ۱ یال بین آنها را رنگ می کنیم و چون هر بیت دو حالت دارد هر عدد دقیقا با یک عدد دیگر فقط در بیت ۱م متفاوت است پس هر راس از هر رنگ دقیقا یک یال خواهد داشت.

(۱۰) گزینه ی (د) درست است.

جاده هایی که برای تفاوت بیت اول کشیده شده اند را گل کاری می کنیم. هر عدد با یک عدد دیگر در بیت اول متفاوت است پس همه ی شهرها پوشش داده می شوند. همچنین هر جاده می تواند دو شهر را پوشش دهد و در کل 2^{10} شهر داریم پس 2^9 جاده گل کاری شده لازم است.

(۱۱) گزینه ی (ه) درست است.

2^{11} شهر داریم که به هریک ۱۱ جاده متصل است. پس در کل 11×2^{10} جاده داریم و با چراغانی کردن هر شهر شرط برای ۱۱ جاده متصل به آن برقرار می شود. پس 2^{10} شهر چراغانی شده لازم است. حال اگر شهرهایی که شماره ی آنها تعداد زوجی یک دارد را چراغانی کنیم شرط سوال برای همه ی جاده ها برقرار می شود. زیرا هر جاده بین دو شهر کشیده شده است که شماره ی آنها به جز در یک بیت یکسان است. پس زوجیت تعداد یک های آنها با هم متفاوت است و یکی از آنها چراغانی شده است. بنابراین 2^{10} شهر چراغانی کافی است.

(۱۲) گزینه ی (ه) درست است.

همه ی سکه های با یک شماره می توانند در یک ردیف باشد. در نتیجه جواب برابر ۱۶ است.

(۱۳) گزینه ی (الف) درست است.

تمام سکه ها با عدد برابر پشت سر هم قرار دارند. برای اینکه دوتا از آنها در یک سطر باشند باید بین آنها ۱۵ سکه وجود داشته باشد که چون از هر عدد ۱۶ سکه داریم چنین چیزی ممکن نیست. پس در یک سطر هیچ دو سکه ی یکسانی وجود ندارد.

(۱۴) گزینه ی (د) درست است.

اگر در ۱۶ خانه ی اول، ۱۶ خانه ی دوم و ۱۶ خانه ی سوم ۵ سکه با شماره ی یک و در ۱۶ خانه ی چهارم یک سکه با شماره ی یک داشته باشیم در ردیف اول ۷ عدد سکه با شماره یک قرار می گیرد.

در یک قسمت 4×4 جدول اگر بخواهیم حداکثر تعداد سکه های یکسان در یک ردیف یک باشد حداقل یک سکه، اگر بخواهیم این مقدار ۲ باشد حداقل به ۵ سکه و در کل اگر بخواهیم این مقدار ۱ باشد به $4i - 3$ سکه یکسان نیاز داریم. حال اگر بخواهیم ۸ عدد سکه ی یکسان در یک ردیف داشته باشیم ابتدا در هر 4×4 یک سکه قرار می دهیم. از این به بعد برای اضافه کردن یک واحد به تعداد حداکثر سکه های موجود در یک سطر باید این مقدار را برای یکی از 4×4 ها زیاد کنیم. یعنی برای هر واحد زیاد کردن آن به ۴ سکه نیاز داریم و چون ۱۲ سکه دیگر داریم این مقدار به ۸ نمی رسد.

(۱۵) گزینه ی (الف) درست است.

اعداد ما حداکثر ۵ بیتی هستند. پس خروجی هم ۵ بیتی است. همچنین اگر دو عدد در تمام بیت ها متمایز باشند جمع آنها ۳۱ می شود (چرا؟). پس اعدادی که علی به دستگاه می دهد حداقل در یک بیت یکسان اند و در نتیجه عدد خروجی نمی تواند ۳۱ باشد. حال اگر اعداد ۱ و ۳۱ را به دستگاه بدهد عدد خروجی ۳۰ می شود. پس ۳۰ بیشترین مقدار خروجی است.

(۱۶) گزینه ی (ج) درست است.

مقدار S در هر مرحله این گونه بدست می آید:
می دانیم در صورتی که در XOR یک عدد دوبار ظاهر شود خنثی می شود و همانند آن است که ظاهر نشده است. در نتیجه در طی این عملیات تمامی اعداد به جز عدد آخر دوبار ظاهر می شوند و در نتیجه در انتها عدد نهایی یعنی ۱۳۹۰ باقی می ماند.

(۱۷) گزینه ی (ج) درست است.

این الگوریتم مجموع XOR زوج های متوالی از ۱ تا ۹۰ را حساب می کند.
کم ارزش ترین بیت دو عدد متوالی باهم متفاوت اند. پس XOR آنها حتما فرد است.
مقدار این XOR برای ۱ و ۲ برابر ۳ و برای سایر زوج اعداد نیز بزرگتر از صفر است. پس حاصل جمع XOR ها از ۹۰ بیشتر خواهد بود. چون همه ی این اعداد فرد هستند و تعداد آنها ۹۰ تا است مجموع آنها زوج می شود.
تنها گزینه ای که این شرایط را دارد گزینه ی (ج) است.

(۱۸) گزینه ی (ب) درست است.

برای دو ستون تعداد مکعب های ستون کوچکتر ۱، ۲ یا ۳ می باشد که تعداد حالات چیدن مکعب ها در این وضعیت ها به ترتیب ۷۲۰، ۷۲۰ و ۳۶۰ می باشد که مجموع آنها ۱۸۰۰ می باشد.
برای سه ستون تعداد مکعب های ستون ها ۲-۲-۲ یا ۳-۲-۱ و یا ۴-۱-۱ است.
تعداد حالات چیدن مکعب ها در حالت اول ۱۲۰، در حالت دوم ۷۲۰ و در حالت سوم ۳۶۰ است.
پس مجموع تعداد حالات برای سه ستون ۱۲۰۰ می باشد.

(۱۹) گزینه ی (د) درست است.

برای رساندن به حالت صعودی: مکعب ۵ باید از بالای ۱ خارج شود و برای این کار دو حرکت لازم است (جابجایی ۲ و ۵). سپس هر مکعب در طی یک حرکت می تواند سر جای خود قرار گیرد (۷ حرکت)
برای رساندن به حالت نزولی: مکعب ۴ باید از بالای ۶ و مکعب ۲ باید از بالای ۵ خارج شود. سپس هر مکعب در طی یک حرکت می تواند سر جای خود قرار گیرد (۷ حرکت).

(۲۰) گزینه ی (ب) درست است.

جواب ۱۰ حرکت است.

شرط لازم: اگر بخواهیم "۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶" را به "۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶" تبدیل کنیم به ۱۰ حرکت نیاز داریم. چون با ۵ حرکت مکعب ۱ روی میز قرار می گیرد و هیچ کدام از دیگر مکعب ها به درستی روی هم قرار نگرفته اند. پس ۵ حرکت دیگر لازم است تا همگی روی مکعب ۲ قرار گیرند.

شرط کافی: برای ساختن هر ترتیبی ابتدا با حداکثر ۵ حرکت ۶ ستون یک مکعبی می سازیم و سپس با ۵ حرکت مکعب ها را به ترتیب روی مکعبی که باید زیر باشد می چینیم.

(۲۱) گزینه ی (الف) درست است.

با یک شهر که ممکن نیست. چون باید هم جاده ی خاکی و هم آسفالت به خود شهر برود که در این صورت شهر نه می تواند استقلالی باشد نه پرسپولیسی. ولی برای دو شهر به سادگی می توان یک مثال ساخت که شامل یک شهر استقلالی و یک شهر پرسپولیسی باشد. کافیت که مسیر خاکی شهر را تغییر دهد و مسیر آسفالت به همان شهر برگردد.

(۲۲) گزینه ی (ب) درست است.

جواب ۱۳۸۹ است.

شرط لازم: در گراف، کوچکترین دوری را بیابید که شامل حداقل یک (خ) باشد. می دانیم تعداد (خ)های دور حداقل ۱۳۸۹ تا است در غیر اینصورت با هر مضربی از آن عدد نیز می توان به شهر استقلالی رسید. از طرفی چون کوچکترین دور را در نظر گرفتیم هیچ شهر تکراری نداریم، پس تعداد رئوس حداقل ۱۳۸۹ است
شرط کافی: ۱۳۸۹ راس در نظر بگیرید که با جاده های خاکی یک دور کامل ساخته اند. مسیرهای آسفالت هر شهر به خودش ختم می شود. بدین ترتیب شهر پایتخت استقلالی است و بقیه ی شهرها پرسپولیسی خواهند بود.

(۲۳) گزینه ی (ب) درست است.

وضعیت هر حالت باید در راسی که قرار دارد ذخیره شود در مجموع ۱۰ حالت برای راه آسفالت و ۲۰ حالت برای راه آسفالت وجود دارد. این دو حالت تنها در شهر مقصد با یکدیگر مشترک هستند. از طرفی یک حالت برای شروع وجود دارد (حالت صفر) و یک حالت هم باید وجود داشته باشد که در غیر حالات مورد نظر به آنها برود و بین حالات قبلی تکرار نشود. پس در مجموع حداقل ۳۱ شهر مورد نیاز است.
مثال: شهر پایتخت به شهر استقلالی دو مسیر دارد. یکی به طول ۲۰ که با راه های خاکی هر کدام به بعدی متصل است و دیگری به طول ۱۰ که با راه های آسفالت پشت سرهم قرار دارند. مسیرهای اشتباه نیز به حالت غیرمجاز می رود که از قبل یک راس برای آن در نظر می گیریم.

(۲۴) گزینه ی (ه) درست است.

فرض می کنیم جدول را شطرنجی رنگ کرده ایم. در جایگاه های فرد ربات ها در یک رنگ و در جایگاه های زوج در رنگ دیگر هستند. اگر تعداد یک های خانه های هم رنگ در یک گزینه با بقیه گزینه ها متفاوت باشد آن ربات دروغ گو خواهد بود:

الف: ۴ و ۲

ب: ۴ و ۲

ج: ۴ و ۲

د: ۴ و ۲

ه: ۳ و ۳

پس گزینه ی (ه) دروغ است.

(۲۵) گزینه ی (ب) درست است.

تعداد یک ها در گزینه ی ب با بقیه فرق دارد. در نتیجه گزینه ی ب دروغ است.

(۲۶) گزینه ی (الف) درست است.

همانند سوال ۲۶ عمل می کنیم. باز هم تعداد یک های جایگاه های فرد و زوج را با بقیه گزینه ها مقایسه می کنیم تا گزینه ی دروغ مشخص شود:

الف: ۳ و ۱

ب: ۰ و ۴

ج: ۴ و ۰

د: ۴ و ۰

ه: ۰ و ۴

پس گزینه ی (الف) دروغ است.

(۲۷) گزینه ی (ه) درست است.

این الگوریتم برای عدد X آن را بگونه ای به مبنای ۲ می برد که رقم سمت راست پرارزش ترین بیت باشد پس در واقع مقداری دودیی عدد را متقارن می کند.

(۲۸) گزینه ی (ه) درست است.

طبق ۲۷: ۴۴۴ در مبنای دو برابر با (۱۱۰۱۱۱۱۰۰) است که برعکس آن (۱۱۱۱۰۱۱) می شود که همان ۱۲۳ است.

(۲۹) گزینه ی (ج) درست است.

ابتدا اعدادی که یکانشان صفر هست را حذف می کنیم. چرا که در طی این عملیات تعداد ارقام کمتری دارند و در نتیجه عدد نهایی کمتر از قبل خواهد شد.

در بین بقیه ی اول، اعداد متقارن (عددی که $R(A) = A$) را حذف می کنیم. از باقی اعداد دقیقاً نصفشان زیبا هستند چرا که دو به دو با یکدیگر جفت هستند و پس از اعمال تغییر به دیگری تبدیل می شوند.

اعداد فرد: ۳۲ تا

اعداد متقارن فرد: رقم یکان این اعداد یک هست. در نتیجه باتوجه به اینکه طول عدد، بین ۱ تا ۶ باشد به ترتیب ۱، ۱، ۲، ۲، ۴ و ۴ تا عدد متقارن داریم. در نتیجه تعداد اعداد آنها ۱۴ تا است.

پس طبق نکات گفته شده تعداد اعداد زیبا برابر است با $9 = \frac{32-14}{2}$.

(۳۰) گزینه ی (ب) درست است.

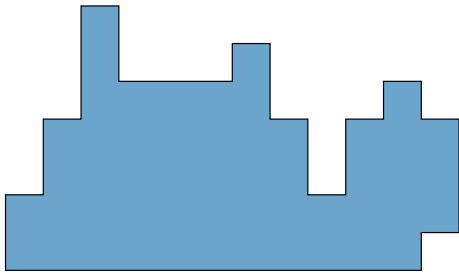
طبق نکاتی که در سوال ۲۹ گفته شد:

اعداد فرد: 2^{11} .

اعداد متقارن فرد: چون رقم سیزدهم این اعداد یک است پس ۱۱ رقم دیگر باقی می ماند که 2^6 عدد بدست می آید (۵ رقم دیگر بصورت یکتا مشخص می شوند).

در نتیجه تعداد اعداد زیبا برابر است با $992 = \frac{2^{11}-2^6}{2}$.

مرحله ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور



(۱) تعدادی دستمال مستطیل شکل، روی یک میز سفید افتاده اند. از بالا که به این دستمال ها نگاه می کنیم، شکلی شبیه شکل سمت چپ را تشکیل می دهند. حداقل تعداد دستمال ها چندتا است؟

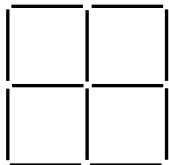
الف) ۴

ب) ۵

ج) ۶

د) ۷

ه) ۸



(۲) یک جدول 2×2 مانند شکل روبه رو داده شده است. این جدول با استفاده از ۱۲ چوب کبریت به طول واحد ساخته شده است. به چند طریق می توان ۲ چوب کبریت را رنگ کرد، به طوری که چوب کبریت های رنگ شده با هم برخورد نداشته باشند؟ دو چوب کبریت با هم برخورد دارند اگر رأس مشترک داشته باشند.

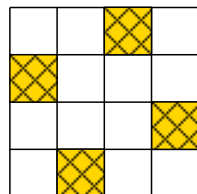
الف) ۴۸

ب) ۵۰

ج) ۵۲

د) ۵۴

ه) ۶۴



(۳) شکل زیر جزیره ای را نشان می دهد که ۱۶ خانه دارد. مساحت هر خانه هم یک واحد است. ۴ تا از این خانه ها در شکل مشخص شده اند حاوی معدن طلا هستند.

یک «مزرعه»، یک مستطیل روی این جزیره است که اضلاع آن دقیقاً روی مرزهای خانه ها قرار دارد و مساحت آن حداقل یک واحد است. ارزش یک مزرعه برابر تعداد معادن طلای داخل آن است. برای مثال، ارزش مزرعه ی شامل سه ستون سمت چپ و دو سطر بالایی (به مساحت ۶) برابر ۲ و ارزش مزرعه ای که شامل تمام خانه های جدول باشد، برابر ۴ است.

مجموع ارزش های تمام مزرعه های متفاوت این جزیره کدام است؟

الف) ۱۰۴

ب) ۲۴

ج) ۲۴۰

د) ۱۲۰

ه) ۹۶

(۴) سعید و حسام بازی زیر را انجام می دهند. ابتدا، سعید یک عدد طبیعی و دو رقمی n را نزد خودش انتخاب می کند. پس از آن و در هر مرحله، حسام یک عدد طبیعی یک رقمی مثل k به همراه یک بطری نوشابه به سعید می دهد و سعید در ازای آن، باقی مانده ی تقسیم عدد n (عدد خودش) بر عدد k را به حسام می گوید.

فرض کنید حسام به اندازه ی کافی باهوش است. او در ابتدای کار حداقل چند بطری نوشابه باید همراه داشته باشد تا مطمئن شود که با آن تعداد بطری، همواره می تواند عدد سعید را حدس بزند؟

الف) ۲ بطری

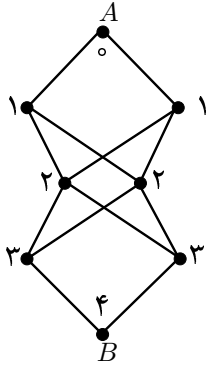
ب) ۳ بطری

ج) ۴ بطری

د) ۵ بطری

ه) ۹ بطری

مرحله ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور



(۵) در شکل روبه‌رو به چند طریق می‌توان از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B رفت به‌طوری که هریک از اعداد ۰ تا ۴ دقیقاً یک بار در طول مسیر در نقطه‌ها مشاهده شوند؟

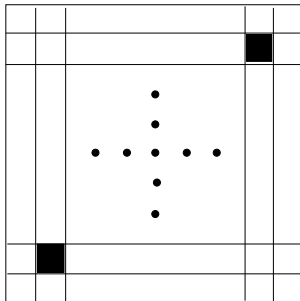
(ه) ۱۶

(د) ۱۵

(ج) ۸

(ب) ۷

(الف) ۴



(۶) خانه‌های $(2, 2)$ و $(99, 99)$ یک جدول 100×100 سیاه و بقیه خانه‌های آن سفید هستند. این جدول در شکل روبرو نشان داده شده است. بعد از گذشت ۱ ثانیه تمام خانه‌های مجاور یک خانه سیاه، سیاه می‌شوند. دو خانه مجاور هستند اگر و تنها اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. بعد از چند ثانیه تمام خانه‌های جدول سیاه خواهند شد؟

(ه) ۱۰۰

(د) ۹۹

(ج) ۹۸

(ب) ۹۷

(الف) ۹۶

(۷) الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

- عدد x را از ورودی بگیر.
- عدد a را برابر صفر قرار بده.
- تا زمانی که عدد x بزرگ‌تر از صفر است، کارهای زیر را انجام بده:
 - باقی‌مانده‌ی تقسیم x بر ۲ را در k بریز.
 - اگر k برابر صفر است، به مقدار a یک واحد اضافه کن.
 - x را برابر خارج‌قسمت تقسیم خودش بر ۲ قرار بده.
- مقدار a را به‌عنوان خروجی الگوریتم برگردان.

برای مثال، اگر به این الگوریتم عدد ۹ را بدهیم خروجی مقدار ۲ را برمی‌گرداند. اکنون فرض کنید اعداد ۱ تا ۱۳۸۸ را یکی یکی به این الگوریتم می‌دهیم و هر بار خروجی الگوریتم را یادداشت می‌کنیم. بزرگ‌ترین عددی که یادداشت می‌کنیم، چند است؟

(ه) ۶۹۴

(د) ۲۰

(ج) ۱۱

(ب) ۱۰

(الف) ۹

مرحله ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۸) یک جای گشت مرتبه ی n دنباله ای (ترتیبی) از اعداد ۱ تا n است. برای مثال $\langle ۳, ۱, ۴, ۲ \rangle$ یک جای گشت مرتبه ی ۴ است. جدول ضرب یک جای گشت $P = \langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ یک جدول $n \times n$ است که مقدار خانه ی سطر i اُم و ستون j اُم آن برابر $p_i \times p_j$ می باشد. برای مثال، جدول ضرب جای گشت $\langle ۳, ۱, ۲ \rangle$ به صورت شکل مقابل است.

۹	۳	۶
۳	۱	۲
۶	۲	۴

آیدا و آیدین بازی زیر را انجام می دهند. ابتدا آیدین از اتاق بیرون می رود و آیدا یک جای گشت مرتبه ۸ انتخاب می کند و جدول ضرب آن را می نویسد و بر روی هر کدام از ۶۴ خانه ی جدول یک سکه می گذارد.

آیدین به اتاق برمی گردد و k تا از خانه های جدول را انتخاب می کند و از آیدا می خواهد تا سکه های آن k خانه را همزمان از روی صفحه بردارد. بعد از انجام این کار، اگر آیدین بتواند جای گشت آیدا را دقیقاً تعیین کند، برنده می شود. کمترین مقدار k که آیدین بتواند همواره برنده بشود چند است؟

- الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

(۹) همان مسئله ی قبل را در نظر بگیرید، با این تفاوت که اولاً، مرتبه ی کار به جای ۸، برابر ۳ است. ثانیاً، آیدا به جای یک جای گشت، دو جای گشت مانند $P = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ و $Q = \langle q_1, q_2, q_3 \rangle$ را انتخاب می کند و عدد سطر i اُم و ستون j اُم جدول برابر $p_i \times q_j$ است. برای مثال، جدول ضرب دو جای گشت $P = \langle ۱, ۳, ۲ \rangle$ و $Q = \langle ۲, ۱, ۳ \rangle$ مطابق شکل مقابل است.

۲	۱	۳
۶	۳	۹
۴	۲	۶

آیدین در صورتی در این مسئله برنده می شود که بتواند هر دو جای گشت P و Q را حدس بزند. کمترین مقدار k که آیدین بتواند همواره برنده بشود چند است؟

- الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) ۶

(۱۰) دو چند جمله ای $x^{20} - x^{19} + x^{18} - \dots + x^2 - x^1 + 1$ و $x^{20} + x^{19} + x^{18} + \dots + x^2 + x^1 + 1$ را در یکدیگر ضرب می کنیم. اگر مجموع ضرایب چند جمله ای حاصل A باشد، باقی مانده ی A بر ۵ کدام است؟

- الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

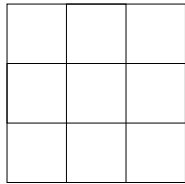
(۱۱) اعداد زوج را از چپ به راست پشت سر هم می نویسیم. ۱۳۸۸ اُمین رقم این دنباله چیست؟

- الف) ۲ (ب) ۴ (ج) ۶ (د) ۸ (ه) ۹

مرحله ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱۲) در یک زمستان سرد، خرس قطبی ۸۸ قطعه گوشت دقیقاً به اندازه های ۱، ۲، تا ۸۸ را در غاری ذخیره کرده است. او هر روز یکی از این قطعه گوشت ها را به صورت تصادفی (و با احتمال برابر) انتخاب می کند. اگر اندازه ی گوشت عدد فردی بود، آن را کاملاً می خورد. اگر زوج بود، آن را دقیقاً نصف می کند، یک نصف آن را می خورد و نصف دیگر را مجدداً در غار قرار می دهد. اگر گوشتی موجود نباشد، خرس می میرد. با این الگوریتم، خرس ما چند روز می تواند زنده بماند؟

الف) ۸۵ روز ب) ۸۷ روز ج) ۸۸ روز د) ۱۷۳ روز ه) ۱۷۵ روز



(۱۳) فرض کنید که در مربع 3×3 روبه رو اعداد ۱ تا ۹ را طوری قرار داده ایم که حاصل جمع اعداد هر سطر، هر ستون و هر قطر برابر شود. کدام یک از اعداد زیر نمی تواند در گوشه ی سمت چپ بالا قرار گیرد؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ ه) ۹

(۱۴) بین شهرهای یک کشور لوله های آب قرار داده ایم. میزان انتقال آب روی هر لوله هم مشخص است. «قدرت» یک شهر را برابر تفاوت میزان آب خروجی از آن شهر و میزان آب ورودی به آن تعریف می کنیم. قدرت یک شهر ممکن است عددی منفی یا مثبت باشد، بسته به این که آن شهر تولیدکننده ی آب باشد یا فقط مصرف کننده ی آب. مثلاً اگر قدرت یک شهر ۶- و میزان آب ورودی به آن شهر ۱۰۲ لیتر باشد میزان آب خروجی (از طریق لوله هایی که از آن شهر به شهرهای دیگر خارج شده است) ۹۶ لیتر خواهد بود.

در یک کشور با ۵ شهر، فرض کنید باقی مانده قدرت چهار شهر اول تقسیم بر ۱۱ به ترتیب اعداد ۳، ۹، ۷، ۱ باشد. کدام یک از اعداد زیر می تواند قدرت شهر پنجم باشد؟

الف) ۱۰۰۰ ب) ۳۰۰۰ ج) ۵۰۰۰ د) ۷۰۰۰ ه) ۹۰۰۰

(۱۵) رولت روسی یک بازی مرگ بار است که طی آن هر شرکت کننده یک یا چند گلوله در هفت تیر قرار می دهد و بعد از چرخاندن تصادفی خشاب، لوله ی هفت تیر را بر روی شقیقه خود قرار داده و ماشه را می کشد. خشاب این هفت تیر به صورت دایره است که جای ۷ گلوله دارد و بعد از کشیدن ماشه، خشاب به صورت ساعت گرد می چرخد. در یک بازی شخصی ۳ گلوله را به صورت تصادفی و با احتمال یکسان در خشاب با ظرفیت ۷ گلوله قرار می دهد و پس از چرخاندن خشاب، ۲ بار پیاپی شلیک می کند، احتمال زنده ماندنش چه قدر است؟

الف) $\frac{1}{7}$ ب) $\frac{2}{9}$ ج) $\frac{4}{7}$ د) $\frac{17}{9}$ ه) $\frac{2}{7}$

مرحله ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱۶) بر روی یک عدد ۱۶ بیتی $a_1 a_2 \dots a_7 a_8$ دو عمل زیر را می توانیم انجام دهیم:

- شیفت: تغییر آن به $a_1 a_8 a_7 \dots a_2 a_1$
- تبدیل: تغییر آن به $a_1 a_7 \dots a_2 a_8$ که $\bar{x}$ بیت x را اگر ۰ باشد به ۱ و اگر ۱ باشد به ۰ تغییر می دهد.

با چند تا از این دو عمل می توانیم 10000010 را به 11110000 تبدیل کنیم؟

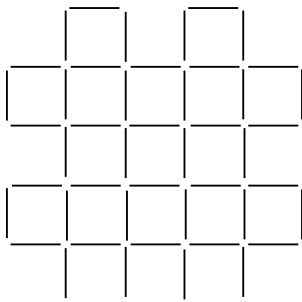
- الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۹

(۱۷) آرایه ی $A[1..8]$ داده شده است. بر روی آن الگوریتم زیر را اجرا می کنیم:

- (۱) در ابتدا i را برابر ۱ قرار بده و به خط ۲ برو
- (۲) اگر $A[i] = i$ به خط ۴ برو و اگر $A[i] \neq i$ به خط ۳ برو
- (۳) $A[i]$ را با $A[A[i]]$ تعویض کن و به خط ۲ برو
- (۴) i را یک واحد افزایش بده و اگر i کوچک تر یا مساوی ۸ است به خط ۲ برو. اگر i بزرگ تر از ۸ است به خط ۵ برو.
- (۵) آرایه ی A را چاپ کن

اگر $A[1..8] = \langle 8, 5, 3, 4, 6, 1, 2, 7 \rangle$ باشد، خروجی این الگوریتم چیست؟

- الف) $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$
 ب) $\langle 1, 2, 4, 3, 5, 6, 7, 8 \rangle$
 ج) $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 8 \rangle$
 د) $\langle 2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$
 ه) $\langle 8, 6, 3, 4, 6, 1, 2, 7 \rangle$



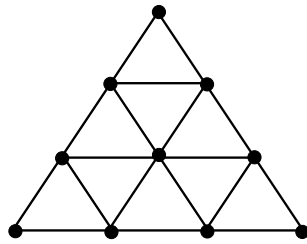
(۱۸) در شکل مقابل که با ۴۸ عدد چوب کبریت ساخته شده است، حداقل چند چوب کبریت باید برداشته شود تا هیچ مربعی دیده نشود؟

- الف) ۶ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) ۱۶

مرحله ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱۹) فرض کنید آرایه ای به طول ۱۰۰۰ از بیت های ۰ و ۱ داریم. می گوییم این آرایه «۰-غالب» است اگر دست کم ۹۰٪ اعداد آن ۰ باشد (و در نتیجه حداکثر ۱۰٪ آن ۱ باشد). هم چنین آرایه «۱-غالب» است اگر دست کم ۹۰٪ اعداد آن ۱ باشد (و در نتیجه حداکثر ۱۰٪ آن ۰ باشد). می دانیم که آرایه ۰-غالب است یا ۱-غالب، ولی نمی دانیم کدام یک. چند تا از درایه های این آرایه را باید بررسی کنیم تا به طور قطع بتوانیم بگوییم که آرایه ۰-غالب است یا ۱-غالب؟

الف) ۱۹۱ (ب) ۲۰۱ (ج) ۲۱۰ (د) ۵۰۱ (ه) ۹۰۱



(۲۰) حداکثر چند تا از نقطه های توپر در شکل مقابل را می توان با سفید رنگ کرد تا نقطه های سفید رئوس، یک مثلث متساوی الاضلاع را تشکیل ندهند.

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

(۲۱) ۶ عدد متفاوت داده شده است. با چند تا مقایسه بین این اعداد می توان کوچک ترین و بزرگ ترین این اعداد را یافت؟ بهترین جواب را مشخص کنید.

الف) ۷ (ب) ۸ (ج) ۹ (د) ۱۰ (ه) ۱۱

(۲۲) افراد با شماره های ۱ تا ۶ به ترتیب دور میز دایره ای شکل و در جهت ساعت گرد نشسته اند و هریک ورقه ای دارند که بر روی آن یک عدد نوشته شده است (عدد فرد شماره ی i را $A[i]$ می نامیم). الگوریتم زیر را ۱۳۸۸ مرحله تکرار می کنیم:

(۱) هر فرد با شماره ی فرد ورقه اش را با نفر کناری اش (در جهت ساعت گرد) مقایسه می کند. خود عدد کوچک تر و نفر کناری اش عدد بزرگ تر را برمی دارد.

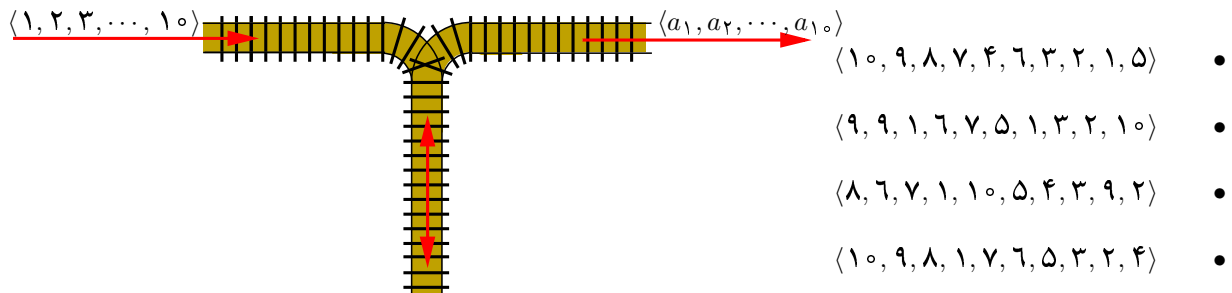
(۲) هر فرد با شماره ی زوج ورقه اش را با نفر کناری اش (در جهت ساعت گرد) مقایسه می کند. خود عدد کوچک تر و نفر کناری اش عدد بزرگ تر را برمی دارد.

اگر $A[۱..۶] = \langle ۲, ۴, ۵, ۶, ۸, ۹ \rangle$ باشد، بعد از اجرای ۱ مرحله $A[۱..۶] = \langle ۹, ۵, ۴, ۸, ۶, ۲ \rangle$ خواهد بود. بعد از اجرای ۱۳۸۸ مرحله ورقه ای که عدد ۲ روی آن نوشته شده است در دست کدام فرد خواهد بود؟

الف) شماره ی ۱ (ب) شماره ی ۲ (ج) شماره ی ۴ (د) شماره ی ۵ (ه) شماره ی ۶

مرحله ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۳) یک ردیف از قطار با شماره های ۱ تا ۱۰ پشت سر هم مطابق شکل زیر قرار دارند. این ردیف با با دنباله ی $\langle 1, 2, 3, \dots, 10 \rangle$ نمایش می دهیم. قطار ۱ آخرین قطار است. بین ریل ورودی و ریل خروجی ریلی به نام «پارکینگ» دقیقاً مطابق زیر قرار گرفته است. هر قطار برای آن که در ریل خروجی ظاهر شود باید ابتدا به پارکینگ وارد شود. همیشه هم آخرین قطار موجود در پارکینگ دنده عقب به خروجی منتقل می شود. با این ترتیب در خروجی یک دنباله از قطارها (به ترتیب از راست به چپ) ظاهر خواهد که با $\langle a_1, a_2, \dots, a_{10} \rangle$ نشان می دهیم و به آن دنباله ی «قابل تولید» می گوییم. دقت کنید که a_1 آخرین قطاری است که خارج می شود. چندتا از دنباله های زیر قابل تولید هستند؟



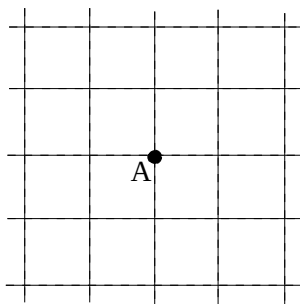
الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

(۲۴) بر روی یک جای گشت $\langle a_8 a_7 \dots a_2 a_1 \rangle$ می توانیم دو عمل زیر را انجام دهیم:

- عمل اول: تغییر آن به $\langle a_8 a_7 a_4 a_2 a_7 a_5 a_3 a_1 \rangle$
- عمل دوم: تغییر آن به $\langle a_8 a_4 a_7 a_3 a_7 a_2 a_5 a_1 \rangle$

فرض کنید جای گشت اولیه $\langle 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$ است. عدد i را طایی گوییم اگر با استفاده از دو عمل بالا بتوان جای گشتی تولید کرد که $a_i = 2$ باشد. تعداد اعداد طایی چندتا است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۸



(۲۵) همان طور که در شکل نشان داده شده است فردی در نقطه A قرار دارد. او در هر حرکت به احتمال ۰.۵ یک واحد به سمت راست و به احتمال ۰.۵ یک واحد به سمت چپ می رود. احتمال این که بعد از ۷ حرکت فاصله او از نقطه ی A بیش تر از ۳ باشد چه قدر است؟

الف) $\frac{1}{16}$ ب) $\frac{14}{128}$ ج) $\frac{58}{128}$ د) $\frac{1}{8}$ ه) $\frac{56}{128}$

«موفق باشید»

به نام خدا

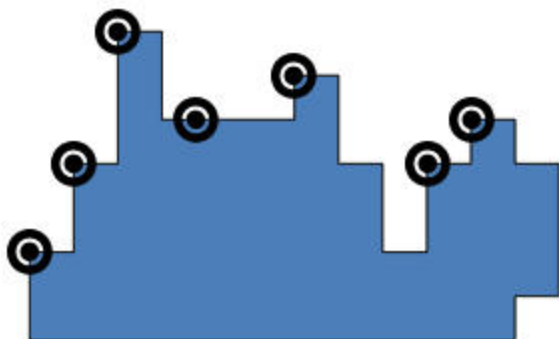
پاسخ تشریحی

مرحله اول بیستمین دوره المپیاد کامپیوتر

سال ۱۳۸۸

(۱) گزینه ی (د) درست است.

برای پر کردن شکل، باید نقاط مشکی نیز پر شوند. ولی هیچ دو نقطه ای از آنها نمی تواند در یک دستمال قرار گیرد. در نتیجه حداقل ۷ دستمال لازم است. از طرفی روشی وجود دارد که می توان با ۷ دستمال تمام شکل را پر کرد. پس در مجموع ۷ دستمال لازم و کافی است.



(۲) پاسخ درست در میان گزینه ها نیست.

برای هر کدام از چوب کبریت ها فرض می کنیم که رنگ شده باشد و تعداد حالاتی را می توان چوب کبریت دوم را انتخاب کرد بدست می آوریم. در نهایت چون هر حالت را دو بار شمردیم جواب را بر دو تقسیم می کنیم.

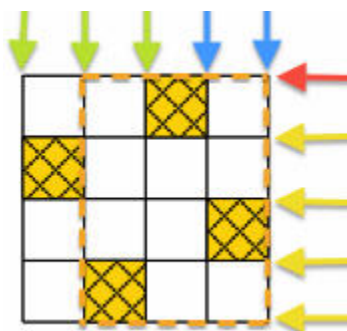
برای هر ۴ چوب کبریت وسطی ۶ حالت انتخاب و برای هر ۸ چوب کبریت محیطی ۸ حالت داریم که در کل می شود $6 \times 4 + 2 \times 8 = 44$. پس جواب مساله برابر نصف این عدد یعنی ۴۴ خواهد بود که در گزینه ها نیست.

(۳) گزینه ی (ه) درست است.

در یک روش می توان مسأله را به چند بخش تقسیم کنیم که در هر گام تعداد مزرعه ها با ۱ تا ۴ معدن را شمرده و در نهایت آنها را با ضربشان با هم جمع کنیم.

اگر از نگاهی دیگر به مسأله نگاه کنیم می توانیم برای هر معدن طلا تعداد مزارع مستطیلی شامل آن را بشماریم. به دلیل تقارن شکل کافی است فقط یکی از معادن را بدست آورده و در ۴ ضرب کنیم.

برای این کار تعداد مستطیل هایی را که معدن بالایی در آن قرار دارد را می خواهیم بشماریم. ۳ حالت برای بدست آوردن یکی از ضلع های عمودی و ۲ حالت برای انتخاب ضلع دیگر داریم که معدن در مستطیل قرار بگیرد. برای ضلع های افقی مستطیل هم ۱ حالت برای ضلع بالایی و ۴ حالت برای انتخاب ضلع پایینی داریم که در کل برابر است با $4 \times 1 \times 2 \times 3 = 24$ که ۲۴ حالت می شود. حال چون ۴ معدن داریم تعداد کل برابر $24 \times 4 = 96$ می باشد.



(۴) گزینه ی (ب) درست است.

طبق قضیه ی باقیمانده ی چینی اگر اعداد صحیح دو به دو نسبت به هم اول n_1 تا n_k برای دستگاه معادلات زیر وجود داشته باشند آنگاه جواب های x به پیمانه ی $N = \prod_1^k n_i$ با یکدیگر برابرند.

$$x \equiv a_1 \pmod{n_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{n_2}$$

$\vdots$

$$x \equiv a_k \pmod{n_k}$$

با این توضیح، باید ضرب اعداد اولیه بزرگتر از ۱۰۰ باشد. در غیر این صورت دو عدد با باقیمانده های یکسان یافت می شوند و در نتیجه تشخیص عدد ممکن نیست. چون تمامی اعداد تک رقمی هستند حداقل سه عدد لازم است و اعداد ۷، ۸ و ۹ ویژگی مورد نظر ما را دارند. در نتیجه پاسخ گزینه ی ب است.

(۵) گزینه ی (ج) درست است.

باید اعداد را به ترتیب صعودی طی کنیم زیرا در غیر این صورت از هر عدد دقیقاً یک بار نمی توانیم بگذریم و عدد تکراری خواهیم داشت. حال برای رفتن از هر عدد به عدد بعدی مستقل از اینکه در کدام راس قرار داریم (به جز رئوس ابتدا و انتها) دو راه داریم پس در کل 2^3 یعنی ۸ مسیر وجود دارد.

(۶) گزینه (د) درست است.

کافی است فاصله ی دورترین خانه را تا خانه های سیاه بدست آوریم. خانه های سیاه به مختصات (C, C) وجود دارند که $C = 2, 99$. حال اگر بخواهیم (X, Y) ای را بیابیم که $Y - C$ و $X - C$ بیشینه شوند و همه اعداد کوچکتر از ۱۰۰ باشند یکی از نقاط، نقطه ی $(1, 100)$ می باشد که برای رسیدن از هر کدام از نقاط سیاه به آن حداقل ۹۹ مرحله باید طی شود. در ضمن با ۹۹ مرحله تمامی خانه ها سیاه می شوند در نتیجه گزینه ی د درست است.

(۷) گزینه (ب) درست است.

اگر عدد x را در مبنای دو در نظر بگیریم گام های اول و دوم داخل حلقه باعث می شوند که اگر کم ارزش ترین رقم عدد x صفر بود یکی به a اضافه شود و گام سوم باعث می شود که رقم کم ارزش عدد در مبنای دو حذف شود. این سیکل در انتها تعداد رقم های صفر عدد را به عنوان خروجی می دهد. از بین اعداد ۱ تا ۱۳۸۸ عدد 2^{10} بیشترین تعداد یعنی ۱۰ صفر در مبنای دو دارد.

(۸) گزینه (ج) درست است.

۶ سوال لازم و کافی است.

مثال: فرض کنید ضرب عدد اول با اعداد سوم و چهارم را بپرسیم. همچنین ضرب عدد دوم با اعداد پنجم تا هفتم را بپرسیم و در نهایت ضرب اعداد هفتم و هشتم را نیز بپرسیم (در مجموع شش پرسش انجام داده ایم).

اگر چهار پرسش اول را در پرسش ششم ضرب کنیم و حاصل را P بنامیم، داریم:

$$P = p_1^2 \times p_2^2 \times p_3 \times \dots \times p_8$$

در نتیجه اگر عدد حاصل را بر $8!$ تقسیم کنیم حاصل برابر $p_1 \times p_2$ می شود. حال اگر هر سه پرسش با جایگشت متفاوت را در هم ضرب کنیم ضرب دو عنصر دیگر (همانند قبلی) بدست می آید. بدین ترتیب می توان ضرب اعداد سوم و چهارم با اعداد پنجم و ششم را متوجه شد.

به همین روند می توان ضرب عدد اول و هفتم را فهمید. در نتیجه چون ضرب هر دوتایی از اعداد اول و ششم و هفتم را داریم می توان هر کدام از آنها را بدست آورد. پس چون ضرب دوتایی این اعداد را داریم هر عدد نیز به صورت مستقل بدست خواهد آمد.

۹) گزینه ی (ب) درست است.

۳ پرسش لازم و کافی است.

- اثبات لزوم شرط: فرض کنید بتوان با دو پرسش بتوان این کار را انجام داد. در صورتی که هر دو در یک سطر یا ستون باشند، حداقل دو عنصر از یک جایگشت سوال نشده اند و در نتیجه مسئله کامل حل نشده است. اگر این دو اشتراکی نداشته باشند، فرض کنید عدد آنها ۲ و ۶ باشند. در این حالت نمی توان بقیه ی جدول را بصورت یکتا بدست آورد. پس حداقل سه پرسش لازم است.
- اثبات کافی بودن شرط: ابتدا دو خانه از سطر اول را بپرسید. باتوجه به این دو، عدد سوم سطر بصورت یکتا مشخص می شود (مجموعه ی حالات سطرها با یکدیگر در دو عضو اشتراک ندارند). در نتیجه یک جایگشت و یکی از اعداد یکی از جایگشت ها مشخص می شود. سپس با پرسیدن یک خانه ی دیگر می توان عدد دیگر جایگشت را فهمید و در نتیجه تنها عدد باقیمانده نیز بدست می آید.

۱۰) گزینه (ب) درست است.

چندجمله ای اول را به صورت جزء به جزء در چندجمله ای دوم ضرب می کنیم و مجموع ضرایب را بررسی می کنیم. با ضرب کردن x^0 به تمام ضرایب x^0 تا x^{20} یک واحد اضافه می شود که در مجموع به تمام ضرایب ۲۱ واحد اضافه می شود و با ضرب کردن x^1 از تمام ضرایب x^1 تا x^{21} یک واحد کم می شود پس در کل ۲۱ واحد از ضرایب کم می شود به همین روای هر دو ضریب متوالی مجموع ضرایب را ۰ نگه می دارند و x^{20} با ضرب شدنش در جمله ی دوم مجموع ضرایب را ۲۱ واحد اضافه می کند که باقیمانده ی این عدد بر ۵ برابر ۱ می باشد.

روش دوم: مجموع ضرایب یک چندجمله ای را می توان با قرار دادن $x = 1$ در آن بدست آورد. با این کار دوچندجمله ای برابر ۱ و ۲۱ می شوند و در نتیجه مجموع ضرایب برابر ۲۱ است که باقیمانده ی این عدد بر ۵ برابر ۱ می باشد.

۱۱) گزینه (ه) درست است.

تعداد تک رقمی های زوج ۴ تا، دو رقمی زوج ۹×۵ تا و سه رقمی زوج ۸۹×۵ تا می باشد. در مجموع تعداد کل ارقام تا اینجا برابر است با:

$$4 + 45 \times 2 + 445 \times 3 = 1429$$

که ۴۱ واحد بزرگتر از ۱۳۸۸ است. ۴۱ تقسیم بر سه برابر ۱۳ و باقیمانده اش ۲ می شود. یعنی باید ۱۳ عدد زوج از بزرگترین عدد سه رقمی عقب بیاوریم که فرمی به صورت $9**$ دارد و چون باقیمانده بر ۳ برابر ۲ شد و از آخر در حال پیشروی هستیم با ارزش ترین رقم اش را نگاه می کنیم که برابر ۹ می باشد.

(۱۲) گزینه (د) درست است.

مستقل از ترتیب انتخاب گوشت ها با تکه گوشت اولیه ای که بزرگترین توان K باشد $K + 1$ روز زنده می ماند. پس ترتیب خورده شدن گوشت ها هیچ تاثیری در تعداد روزهای زنده ماندن خرس ندارد.

شمارش را اینگونه انجام می دهیم: ۸۸ تکه گوشت اولیه داریم، به علاوه $\left\lfloor \frac{88}{2} \right\rfloor$ که تعداد گوشت های مضرب ۲ هستند که نصف آنها در ابتدا خورده و نصف آنها باقیمانده، به علاوه $\left\lfloor \frac{88}{4} \right\rfloor$ که تعداد گوشت های مضرب ۴ هستند که دوبار نصف شده اند و هنوز باقیمانده اند و به همین ترتیب تا تمامی گوشت ها تمام شوند که در نهایت برابر است با:

$$88 + 44 + 22 + 11 + 5 + 2 + 1 = 173$$

(۱۳) گزینه (ه) درست است.

مجموع اعداد ۱ تا ۹ برابر ۴۵ است. حال اگر بخواهیم مجموع سطرها برابر شوند جمع اعداد هر سطر باید ۱۵ شود. عددی که در گوشه ی بالا سمت چپ قرار می گیرد هم در یک سطر و هم یک ستون و هم یک قطر شمرده می شود که هیچکدام از خانه های شان جز همین خانه با یکدیگر اشتراک ندارند که در کل ۶ خانه هستند. اگر بخواهیم بیشینه ی جمع دودوی این ۶ خانه ی متفاوت کمینه شود به هرگونه که این ۶ خانه را پر کنیم مجموع کمینه ی ۳ جفت، ۷ می شود که چون مجموع هر سطر یا ستون یا قطر برابر ۱۵ می باشد تنها عددی که نمی تواند در جایگاه گفته شده قرار گیرد ۹ می باشد که جمعش با ۷ بیشتر از ۱۵ است.

	۱	۶
۳	۲	
۴		۵

(۱۴) گزینه (ه) درست است.

مجموع جریان در بین شهرها برای ایجاد پایداری باید صفر باشد. پس مجموع قدرت شهرها باید صفر شود و در نتیجه به پیمانه ی ۱۱ هم صفر خواهد شد. مجموع چهار شهر اولیه به پیمانه ی ۱۱ برابر ۹ می باشد. پس شهر آخر قدرت اش به پیمانه ۱۱ باید برابر ۹- یا ۲ باشد که مجموع صفر شود که از بین گزینه ها فقط ۹۰۰۰ باقی مانده اش بر ۱۱ برابر ۲ است.

(۱۵) گزینه (ه) درست است.

در شلیک اول به احتمال $\frac{3}{7}$ می میرد و به احتمال $\frac{4}{7}$ زنده می ماند. حال چون پیایی شلیک کرده است، خشاب یکی به جلو رفته است و ۳ گلوله و ۶ جای گلوله مانده و احتمال زنده ماندنش در شلیک دوم برابر $\frac{3}{6}$ می باشد. پس احتمال کل زنده ماندنش در این دو شلیک برابر $\frac{3}{6} \times \frac{4}{7}$ یعنی $\frac{2}{7}$ می باشد.

(۱۶) گزینه (الف) درست است.

به ترتیب مراحل زیر را طی می کنیم:

10000010 Not → 10000011 Shift → 11000001 Shift

→ 11100000 Not → 11100001 Shift → 11110000

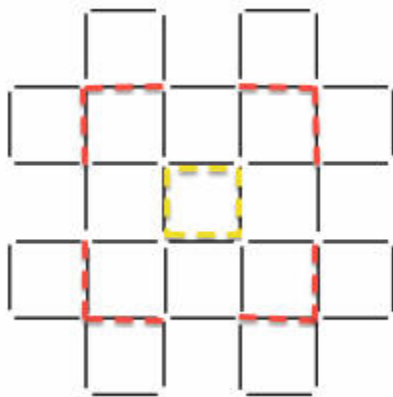
با ۵ بار انجام عملیات به خواسته ی خود رسیدیم و گزینه ی کمتر از آن هم وجود ندارد.

(۱۷) گزینه (الف) درست است.

این الگوریتم تا زمانی که $A[i]$ برابر i نشده است تمام اعضای آرایه را در گام های اول تا سوم به صورت دوری (به دلیل متفاوت بودن همه اعداد با شماره ی خانه هایشان) بر روی $A[i]$ قرار می دهد تا برابر i شود و در گام های چهارم و پنجم به سراغ خانه ی بعدی می رود و همین کار را تکرار می کند تا به آخرین خانه برسد و سپس آرایه را چاپ می کند که باعث می شود به ازای هر $1 \leq i \leq 8$ تساوی $A[i] = i$ برقرار شود. بنابراین آرایه به صورت $\langle 1, 2, \dots, 8 \rangle$ مرتب شده می باشد.

(۱۸) گزینه (ج) درست است.

برای دیده نشدن ۸ مربع محیطی برای هر کدام برداشتن حداقل یک چوب لازم است که بهتر است آن را از ضلعی که به سمت داخل شکل است برداریم تا مربع های داخلی هم خراب شوند. حال از شکل فقط ۵ مربع وسطی باقیمانده اند که برای خراب کردن آنها هم برداشتن ۴ چوب کفایت لازم است که در مجموع ۱۲ چوب کفایت باید برداشت.



(۱۹) گزینه (ب) درست است.

اگر آرایه صفر غالب باشد حداکثر ۱۰٪ آن یعنی ۱۰۰ تا یک و اگر ۱- غالب باشد حداکثر ۱۰۰ تا صفر دارد. حال چون می دانیم آرایه ۰- غالب است و یا ۱- غالب اگر در بررسی مان از هر کدام از صفرها یا یکها بیشتر از ۱۰۰ تا داشته باشیم می توانیم با قطعیت بگوییم که آن غالب است. پس در بدترین شرایط $100 + 100 + 1 = 201$ یعنی ۲۰۱ بررسی لازم داریم.

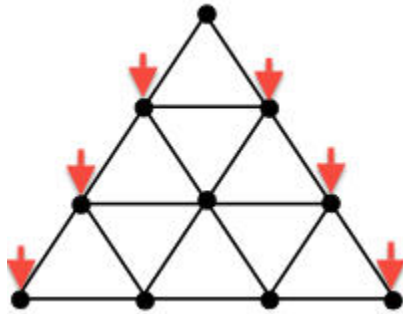
(۲۰) گزینه (ج) درست است.

توجه داشته باشید که مثلث متساوی الاضلاع می تواند به هر طول ضلعی و هر زاویه ای تشکیل شود و لزومی ندارد که موازی خطوط باشد.

می دانیم از هر مثلث به طول یک در گوشه های مثلث بزرگ، یک نقطه نباید انتخاب شود. در نتیجه جواب حداکثر ۷ خواهد بود.

ثابت می‌کنیم جواب برابر ۷ نیز نمی‌تواند باشد: فرض کنید ۷ نقطه انتخاب کرده‌ایم. طبق فرض بالا نقطه‌ی وسط مثلث انتخاب شده است. حال ۶ نقطه‌ی اطراف آن را در نظر بگیرید. اگر ۴ نقطه در بین آنها انتخاب شده باشد دو نقطه یافت می‌شود که مجاور باشند و با نقطه‌ی وسط تشکیل مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهند. پس حداکثر ۳ نقطه از بین آنها انتخاب شده است. حال از ۳ نقطه‌ی گوشه نیز باید حداکثر دو نقطه انتخاب شود. در نتیجه حداکثر ۶ نقطه انتخاب شد.

برای ۶ نقطه نیز مثال زیر وجود دارد:



(۲۱) گزینه (الف) درست است.

در ابتدا با ۳ مقایسه‌ی دودویی اعداد، سه عدد بزرگتر و سه عدد کوچکتر را تشخیص می‌دهیم و آنها را از هم جدا می‌کنیم. حال از بین ۳ عدد بزرگتر با دو مقایسه بزرگترین و از بین ۳ عدد کوچکتر نیز با دو مقایسه کوچکترین را پیدا می‌کنیم که در مجموع با ۷ مقایسه به هدفمان رسیدیم که کوچکترین عدد در بین گزینه‌ها است.

(۲۲) گزینه (ج) درست است.

می‌دانیم عدد ۲ کوچکترین عدد در بین اعداد است، در نتیجه همواره عنصر کوچکتر است. بدین ترتیب از مرحله‌ی اول به بعد همواره در جایگاه‌های زوج باقی خواهد ماند و همواره دو خانه نسبت به قبل عقب‌تر خواهد رفت. در مرحله‌ی اول در خانه‌ی ششم قرار دارد و باتوجه به اینکه ۱۳۸۸ باقیمانده‌اش بر ۳ برابر با ۲ است در آخرین مرحله در خانه‌ی چهارم قرار می‌گیرد (هر سه مرحله به جایگاه قبلیش برمی‌گردد).

(۲۳) گزینه (ب) درست است.

دنباله‌ی اول قابل تولید نیست. زیرا باید از قطار ۱۰ تا قطار ۵ وارد پارکینگ شوند و قطار ۵ خارج شود و سپس قطارهای ۴ تا ۱ وارد پارکینگ شوند و از آن طرف ۱ تا ۳ خارج شوند. ولی قطار ۴ هنوز خارج نشده است و قطار ۶ نمی‌تواند قبل از آن به خروجی رود.

دنباله‌ی دوم قابل تولید نیست زیرا قطار شماره‌ی ۴ ندارد و دوتا ۹ دارد.

دنباله‌ی سوم هم قابل تولید نیست. زیرا باید قطارهای ۱۰ تا ۲ به ترتیب وارد پارکینگ بشوند و سپس قطار ۲ خارج شود ولی بعد از آن قطار شماره ۹ نمی‌تواند خارج شود.

دنباله‌ی چهارم قابل تولید است. ابتدا قطارهای ۱۰ تا ۴ وارد پارکینگ می‌شوند. سپس قطار ۴ خارج می‌شود و قطارهای ۳ و ۲ وارد می‌شوند و قطار ۲ و ۳ خارج می‌شوند و بعد از آن قطار ۵ تا ۷ که از قبل در پارکینگ بودند خارج خواهند شد و بعد از آن قطار ۱ وارد و خارج می‌شود و در نهایت هم قطارهای ۸ تا ۱۰ خارج می‌شوند.

(۲۴) گزینه ی (الف) درست است.

گراف جایگشت متناسب با عملگرها را می کشیم و مکان هایی را که ۲ را بتوان به آنجا منتقل کرد می یابیم. اعداد طلایی برابر ۲ و ۳ و ۵ می باشند که با هم یک دور را تشکیل داده اند.

(۲۵) گزینه ی (د) درست است.

برای اینکه فاصله اش از نقطه A بیشتر از ۳ واحد شود یا باید بیشتر از ۵ حرکت راست رفته باشد یا باید بیشتر از ۵ حرکت چپ رفته باشد. در واقع احتمال حالتی را که ۶ یا ۷ یا صفر یا یک بار راست رفته را باید بدست آوریم تا احتمال کل را حساب کنیم.

$$\frac{1}{128} = \text{احتمال صفر بار راست رفتن}$$

$$\binom{7}{1} \times \frac{1}{128} = \text{احتمال یک بار راست رفتن}$$

$$\binom{7}{6} \times \frac{1}{128} = \text{احتمال شش بار راست رفتن}$$

$$\frac{1}{128} = \text{احتمال هفت بار راست رفتن}$$

$$\text{که در مجموع برابر } \frac{16}{128} \text{ یا } \frac{1}{8} \text{ می باشد.}$$

(۱) یک مکعب $7 \times 7 \times 7$ را که شامل 7^3 مکعب «کوچک» $1 \times 1 \times 1$ است در نظر بگیرید. هر مکعب کوچک آن را با رنگ سفید یا سیاه طوری رنگ می‌کنیم که هر دو مکعب کوچک مجاور هم‌رنگ نباشند. دو مکعب کوچک را مجاور می‌گوییم اگر در یک وجه (مربع) مشترک باشند. فرض کنید که رنگ‌آمیزی ما طوری است که ۸ مکعب کوچک واقع در گوشه‌های مکعب اصلی رنگ سفید دارند.

در مجموع چند مکعب کوچک سیاه وجود دارد که حداقل یک وجه آن دیده شود؟

الف) ۱۰۶ (ب) ۱۱۴ (ج) ۱۱۰ (د) ۱۰۲ (ه) ۱۰۸

(۲) به چند طریق می‌توان اعداد مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 20\}$ را با رنگ‌های قرمز و آبی رنگ آمیزی کرد به طوری که اگر اعداد متفاوت a و b هم‌رنگ باشند و $a + b \leq 20$ ، در این صورت عدد $a + b$ نیز از همان رنگ باشد؟

الف) ۲ (ب) ۴ (ج) ۶ (د) ۸ (ه) ۱۰

(۳) در یک بازی دو نفره با سعید شرکت کرده‌اید. سعید از شما می‌خواهد که یک عدد چند رقمی به نام x را انتخاب کنید؛ معکوس آن عدد (یا $\bar{x}$) را از روی x بسازید (مثلاً معکوس 10240 ، 4201 است) و سپس $a = x - \bar{x}$ را حساب کنید و علامت آن را نادیده بگیرید. شما باید یک رقم غیر صفر a به نام p را انتخاب کنید و آن را به خاطر بسپارید، و جمع بقیه‌ی ارقام a را به سعید اعلام کنید. سعید می‌تواند از این اطلاعات، p را به دست آورد! اگر مقدار اعلام شده ۳۱ باشد، p چه عددی است؟

الف) ۵ (ب) ۷ (ج) ۹ (د) ۱ (ه) ۳

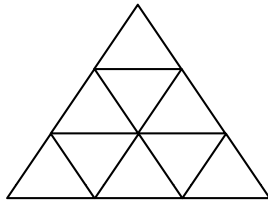
(۴) مجموعه‌ی $\{6, 7, 12, 13, 21, 25, 30, 31\}$ چند زیرمجموعه دارد که حاصل جمع اعداد آن زوج است؟

الف) ۱۶ (ب) ۳۲ (ج) ۶۴ (د) ۹۶ (ه) ۱۲۸

(۵) بازی k -اتل متل (که k عددی مثبت است) با حضور ۲۰ بازی‌کن انجام می‌شود. این بازی‌کنان با شماره‌های ۱ تا ۲۰ به ترتیب شماره‌شان و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دور یک دایره و به سمت داخل نشسته‌اند. نخست یک پرچم به دست فرد شماره‌ی ۱ می‌دهیم. در هر مرحله k بار پرچم دست به دست می‌شود. هر بار دست به دست شدن پرچم به این معنی است که فردی که پرچم را در دست دارد آن را به فرد سمت راستی خود می‌دهد. در پایان هر مرحله، فردی که پرچم را در دست دارد از بازی حذف و از دور دایره خارج می‌شود و پرچم را به فرد سمت راستی خود می‌دهد.

می‌خواهیم به ترتیب (از راست به چپ) افراد با شماره‌های ۳، ۱۹، ۱۷، ۲۰، ۱۶، ۸، ۱، ۱۱، ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۳، ۷، ۱۴، ۶، ۲، ۱۰، ۴، ۵ و ۱۸ حذف شوند. کم‌ترین k ای که به‌ازای آن بازی k -اتل متل موجب حذف افراد به ترتیب ذکر شده شود را k' می‌نامیم. باقی‌مانده‌ی k' بر ۵ چند خواهد بود؟

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴



۶) در شکل مقابل به چند طریق می توان سه مثلث با ضلع به طول ۱ انتخاب کرد به طوری که مثلث های انتخاب شده در رأس و ضلع با یکدیگر اشتراک نداشته باشند. فرض کنید مثلث اصلی دارای اضلاع به طول ۳ است و تمام خطوط رسم شده موازی اضلاع مثلث اصلی می باشند.

- الف) ۱ ب) ۳ ج) ۴ د) ۷ ه) ۸

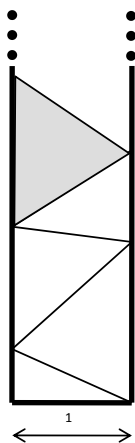
۷) در شکل مسئله ی شماره ی ۶، اگر به y طریق بتوان مثلث های به ضلع ۱ که در ضلع اشتراک ندارند (و می توانند در رأس اشتراک داشته باشند) را انتخاب کرد، باقی مانده ی y بر ۵ چند است؟

- الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۸) در یک جدول 3×3 ، یک اسب شطرنج در خانه ی وسط ستون سمت چپ قرار دارد. در هر مرحله، در یکی از ۸ خانه ی کناری جدول که اسب در آن جا نیست یک سرباز قرار می دهیم. سپس، اسب از خانه ای هست با کم ترین تعداد حرکت خود را به سرباز می رساند و آن را می خورد. یک حرکت اسب مانند حرف L است.

می خواهیم مرحله ی فوق را ۱۳۸۷ بار تکرار کنیم، و در هر مرحله سرباز را در جایی بگذاریم که اسب در مجموع بیش ترین تعداد حرکت را انجام دهد. اگر تعداد بیشینه ی حرکت اسب را x بنامیم، باقیمانده ی x بر ۵ چند خواهد بود؟

- الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴



۹) یک قاب به عرض ۱ واحد و ارتفاع نامحدود بر روی زمین قرار گرفته است. ما ۱۰ قطعه چوب بسیار باریک با طول های ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹ و تعداد زیادی لولا داریم. می خواهیم به ترتیبی قطعات چوب را با لولا از انتها به یکدیگر وصل کنیم تا زنجیره ای به دست آید و آن زنجیره را درون قاب قرار دهیم. نحوه ی قرار گرفتن زنجیره در قاب طوری است که دو سر هر قطعه چوب بر روی یکی از دو دیوار کناری قاب قرار گیرد. هم چنین، می دانیم که یک سر پایین ترین چوب بر ضلع افقی (کف) قاب قرار دارد. بدین ترتیب در شکل حاصل بین قطعات چوب و ضلع های قاب مثلث هایی (و یک ناحیه نامتناهی) پدید خواهد آمد.

هدف این است که به ترتیبی قطعات چوب را به هم وصل کنیم که جمع مساحت مثلث ها بیشینه شود. در این ترتیب طول بالاترین چوب کدام است؟ در شکل روبه رو چوب ها با خطوط نازک، قاب با خطوط کلفت و یکی از مثلث های حاصله به صورت خاکستری نمایش داده شده است.

- الف) ۲ ب) ۵ ج) ۱۱ د) ۱۷ ه) ۲۹



۱۰) در شکل روبه‌رو یک جدول کامل 8×1 نمایش داده شده است. با حذف دقیقاً یکی از اضلاع (افقی یا عمودی) به طول ۱ از یک جدول کامل، یک جدول ناقص به دست می‌آید. برای مثال، در این شکل ۲۵ ضلع وجود دارد که با حذف هر کدام، یک جدول ناقص تولید می‌شود.

قیمت یک جدول ناقص برابر است با تعداد مسیرهای به طول ۹ که از نقطه‌ی پایین سمت چپ به نقطه‌ی بالای سمت راست و فقط با عبور از ضلع‌ها به دست می‌آید. فرض کنید S مجموعه‌ی تمام قیمت‌های جداول ناقص است. باقی‌مانده‌ی تعداد اعضای S بر ۵ چند است؟

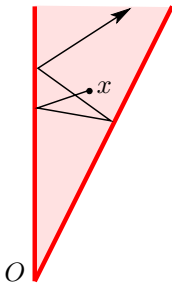
(ه) ۴

(د) ۳

(ج) ۲

(ب) ۱

(الف) ۰



۱۱) دو آینه‌ی متقاطع داریم که زاویه‌ی بین‌شان 30° درجه است. محل تقاطع را O می‌نامیم. این آینه‌ها از یک طرف تا بینهایت ادامه دارند. از یک نقطه‌ی x در داخل این آینه‌ها، شعاع نوری را طوری می‌تابانیم که از O نگذرد. این شعاع حداکثر چندبار با آینه‌ها می‌تواند برخورد کند؟

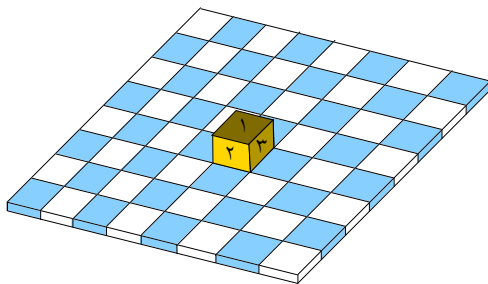
(ه) بینهایت

(د) ۳۰

(ج) ۱۲

(ب) ۶

(الف) ۵



۱۲) یک مکعب با وجه‌های شماره‌ی ۱ تا ۶ به شکل روبه‌رو بر صفحه‌ی شطرنج قرار گرفته است، به طوری که وجه ۴ روبه‌روی وجه ۱، وجه ۵ روبه‌روی وجه ۲ و وجه ۶ روبه‌روی وجه ۳ قرار دارد. در ابتدا وجه ۱ در بالا قرار دارد. در هر مرحله می‌توانیم مکعب را بر روی یکی از اضلاع آن بر خانه‌ی مجاور در صفحه‌ی شطرنج بغلطانیم. با چند بار انجام این کار مکعب را به خانه‌ی گوشه‌ی بالا و سمت راست صفحه رسانده‌ایم. در این وضعیت چند وجه می‌توانند در بالای مکعب قرار بگیرند؟

(ه) ۶

(د) ۴

(ج) ۳

(ب) ۲

(الف) ۱

۱۳) مجموعه‌ی همه‌ی انسان‌ها، از آغاز تاریخ تا کنون را M بنامید. اگر مجموع تعداد فرزندان اعضای M برابر n و مجموع تعداد نوه‌های اعضای M برابر n' باشد، به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

(ه) $\frac{1}{3}$

(د) ۱

(ج) $\frac{2}{3}$

(ب) ۲

(الف) ۴

(۱۴) علی و امیر هر کدام چهار عدد متمایز از بین اعداد $\{۴, ۵, ۷, ۸, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۲۳, ۲۴\}$ را انتخاب کرده است، به طوری که همه ی اعداد علی متفاوت از اعداد امیر هستند. مجموع اعداد انتخابی علی سه برابر مجموع اعداد انتخابی امیر است. عدد انتخاب نشده کدام است؟

الف) ۴ ب) ۷ ج) ۱۳ د) ۱۴ ه) ۲۳

(۱۵) شکل زیر نواری از خانه ها را نشان می دهد که تعدادی از آن ها که سیاه شده اند. مهره ای از خانه ی ابتدای سمت چپ نوار شروع به حرکت می کند و در هر گام به اندازه ی یک یا دو خانه به جلو می جهد، به شرطی که خانه ی مقصد سیاه نباشد. مهره به چند طریق می تواند به انتهای نوار برسد؟



الف) ۱۲۰ ب) ۱۳۰ ج) ۱۴۰ د) ۱۵۰ ه) ۱۶۰

(۱۶) شرکت ماشین سازی «محسن و دوستان» می خواهد قیمت ماشین خود را طوری تعیین کند که بیش ترین سود را در بازار ببرد. هزینه تولید یک ماشین برای این شرکت ۸ تومان است. در بازار، ۱۰ نفر وجود دارند که متقاضی خرید ماشین هستند و ارزش ماشین نزد آن ها به ترتیب ۳۰، ۲۶، ۲۳، ۲۰، ۱۸، ۱۶، ۱۴، ۱۲، ۱۰، ۷ تومان است. هر نفر در صورتی ماشین را می خرد که قیمت پیشنهادی از ارزش ماشین نزد او بیش تر نباشد. هم چنین هر نفر بیش از یک ماشین خریداری نمی کند.

در این شرایط شرکت «محسن و دوستان» می خواهد قیمتی برای فروش ماشین پیشنهاد کند که بیش ترین سود را ببرد. اگر هزینه ی تولید ماشین را از میزان پولی که شرکت از افراد دریافت می کند کم کنید، میزان سود شرکت به دست می آید. برای مثال اگر قیمت فروش ماشین ۱۳ تومان باشد، ۷ نفر آن را با قیمت ۱۳ تومان خریداری می کنند و سود شرکت برابر $۳۵ = ۸ \times ۷ - ۱۳ \times ۷$ تومان خواهد شد.

بهترین قیمت برای فروش ماشین کدام است؟

الف) ۱۲ ب) ۱۴ ج) ۱۶ د) ۱۸ ه) ۲۳

(۱۷) یک رشته به طول ۱۰ از حروف A, B, C را در نظر بگیرید. به دو حرف متوالی یک سان در این رشته «توالی یک سان» می گوییم. رشته ای که دقیقاً سه «توالی یک سان» داشته باشد یک رشته «خوب» است. برای مثال $AAAABCABCB$ و $CABBCCABCC$ دو رشته ی «خوب» هستند. تعداد رشته های «خوب» به طول ۱۰ چند تا است؟

الف) $۲۱ \times ۳ \times ۲^۸$ ب) $۳۵ \times ۳ \times ۲^۶$ ج) $۳۵ \times ۳ \times ۲^۷$ د) $۱۵ \times ۳ \times ۲^۸$ ه) $۲۱ \times ۳ \times ۲^۷$

۱۸) دو عدد ۱ روی تخته سیاه نوشته شده است. شما می توانید یکی از سه کار زیر را بر روی این اعداد انجام دهید.

- عملیات «دو برابر»: یکی از اعداد روی تخته سیاه را پاک کنید و دو برابر آن را بنویسید.
- عملیات «سه برابر»: یکی از اعداد روی تخته سیاه را پاک کنید و سه برابر آن را بنویسید.
- عملیات «جمع»: دو تا از اعداد روی تخته سیاه را پاک کنید و جمع آنها را بنویسید.

هدف این است با کمترین تعداد استفاده از عملیات «سه برابر»، عدد x روی تخته سیاه نوشته شود. این کمترین تعداد را n_x می نامیم. برای مثال، $n_3 = 0$ خواهد بود. چون بدون استفاده از عملیات «سه برابر» می توان عدد ۳ را با یک بار استفاده از عملیات «دو برابر» و یک بار استفاده از عملیات «جمع» نوشت.

n_3 و n_4 کدام هستند؟

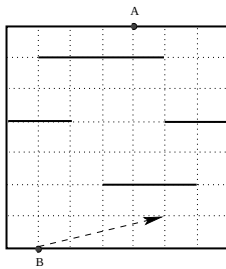
(ج) $n_3 = 0, n_4 = 1$

(ب) $n_3 = 1, n_4 = 1$

(الف) $n_3 = 2, n_4 = 0$

(ه) $n_3 = 1, n_4 = 0$

(د) $n_3 = 0, n_4 = 0$



۱۹) نوری دقیقاً با زاویه ای که در شکل مشخص شده و از نقطه ی B وارد یک اتاق می شود. خطوط افقی نشان داده شده در شکل و دیوارها مانع نور هستند. از شما خواسته شده است که تعدادی آینه با زاویه های دلخواه در داخل اتاق قرار دهید تا با استفاده از آنها نور به نقطه ی A تابانده شود. حداقل تعداد این آینه ها چند تا است؟

(ه) ۶

(د) ۵

(ج) ۴

(ب) ۳

(الف) ۲

۲۰) ۱۶ تیم در مسابقات جام حذفی و لیگ شرکت کرده اند. می دانیم که اگر تیم «الف» از تیم «ب» قوی تر باشد هر بار که تیم «الف» با تیم «ب» بازی کند برنده خواهد شد. هم چنین می دانیم اگر تیم «الف» از تیم «ب» قوی تر باشد و تیم «ب» از تیم «ج» قوی تر باشد در این صورت تیم «الف» نیز حتماً از تیم «ج» قوی تر خواهد بود. مسابقات جام حذفی و لیگ به صورت زیر برگزار می شوند:

- مسابقات جام حذفی: در این مسابقات در مرحله اول ۸ مسابقه انجام می شود و هر تیم در یک بازی شرکت می کند. تیم های بازنده از مسابقات حذف می شوند و ۸ تیم پیروز به مرحله بعد راه پیدا می کنند. در مرحله دوم، ۴ بازی انجام می شود و تیم های پیروز به مرحله بعد می روند. در مرحله سوم که مرحله نیمه نهایی است ۲ بازی انجام می شود و تیم های پیروز به فینال راه پیدا می کنند. تیم برنده ی فینال قهرمان جام حذفی و تیم بازنده ی فینال نایب قهرمان است.

- مسابقات لیگ: در این مسابقات هر دو تیم دقیقاً یک بار با هم بازی می کنند و به تیم برنده هر بازی ۳ امتیاز و به تیم بازنده ۰ امتیاز داده می شود. در انتها تیم ها را با توجه به امتیاز آنها مرتب کرده و رتبه هر تیم معلوم می شود.

دقت کنید که نتیجه ی مساوی در این مسابقات نداریم. پایین ترین (بدترین) رتبه ای که تیم نایب قهرمان مسابقات جام حذفی در مسابقات لیگ می تواند داشته باشد چه رتبه ای است؟

(ه) سیزدهم

(د) نهم

(ج) پنجم

(ب) سوم

(الف) دوم

(۲۱) به دلیل گرد بودن کره‌ی زمین، شهرهای مختلف آن با هم اختلاف ساعت دارند. به طور مثال تهران با پاریس ۲:۳۰ ساعت و با سئول ۵:۳۰ ساعت اختلاف زمانی دارد. سئول در شرق تهران و پاریس در غرب آن قرار دارد. توجه کنید که به علت گرد بودن زمین دو شهر نمی‌توانند بیش از ۱۲ ساعت اختلاف زمانی داشته باشند. فرض کنید شهر A با B ۵ ساعت، B با C ۴ ساعت، C با D ۳ ساعت و D با E ۷ ساعت اختلاف زمانی دارند. اختلاف زمانی شهر A با E کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

الف) ۱ ساعت ب) ۳ ساعت ج) ۵ ساعت د) ۷ ساعت ه) ۹ ساعت

(۲۲) عدد دو رقمی دهدهی AB با مقدار $10A + B$ مفروض است. مقادیر رقم A از مجموعه‌ی بدون صفر $\{1, 2, \dots, 5\}$ و مقادیر رقم B از مجموعه‌ی $\{-5, -4, \dots, -1, 1, 2, \dots, 5\}$ انتخاب می‌شوند. فرض کنید کمینه‌ی مقدار ممکن AB برابر X و بیشینه‌ی مقدار ممکن برای AB برابر Y باشد. مطلوب است تعداد اعداد متمایز بزرگ‌تر از X و کوچک‌تر از Y که AB نمی‌تواند برابر آن‌ها باشد.

الف) ۰ ب) ۲ ج) ۱۰ د) ۱۲ ه) ۱۴

(۲۳) در هر یک از ۹ خانه‌ی یک جدول 3×3 ، یکی از ۹ حرف اول انگلیسی (غیر تکراری) را به ترتیب دل‌خواهی نوشته‌ایم. روباتی از یک خانه جدول شروع و به صورت افقی یا عمودی در جدول حرکت می‌کند و در هر مرحله از خانه‌ای که هست به یکی از خانه‌های مجاورش می‌رود. دو خانه مجاورند اگر در یک ضلع مشترک باشند. روبات پس از ورود به هر خانه حرف نوشته‌شده در آن‌را اعلام می‌کند. اگر حروف اعلام شده (از چپ به راست) به صورت رشته‌ی CACIDEFIDHBEFEDAGACAGHBEFI باشد، حرف خانه وسط جدول کدام است؟

الف) A یا B ب) C یا D ج) E د) F یا G ه) H یا I

(۲۴) عمل ضرب یک رقم دهدهی a در یک عدد دهدهی n رقمی $X = x_{n-1}x_{n-2} \dots x_1x_0$ را به صورت زیر انجام می‌دهیم: ابتدا تمام حاصل ضرب‌های $10^i \times a \times x_i$ را برای $1 \leq i \leq n$ به دست می‌آوریم. سپس n حاصل ضرب به دست آمده را با هم جمع می‌کنیم. این عمل جمع برای کدام مقدار a هیچ‌گاه (یعنی به ازای تمام مقادیر X) ده بر یک (یا رقم نقلی) نخواهد داشت؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۹

(۲۵) یک حشره در خانه‌ی گوشه‌ی پایین و سمت چپ یک مربع 7×7 نشسته است. در هر جهش یکی از سه کار زیر را انجام می‌دهد:

- دو واحد به سمت راست می‌پرد،
- دو واحد به سمت بالا می‌پرد، یا
- با یک پرش ۴۵ درجه‌ای، یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا می‌پرد.

دقت کنید که این حشره با دقیقاً ۶ جهش به خانه‌ی گوشه‌ی بالا سمت راست مربع می‌رسد. تعداد دنباله‌های مختلف جهش که حشره را به خانه‌ی گوشه‌ی بالا سمت راست مربع می‌رسانند چند تاست؟

الف) ۳۶ ب) ۶۴ ج) ۲۷۶ د) ۱۰۱ ه) ۱۴۱

(۲۶) به ازای هر دو عدد صحیح بین 0 تا 10^{21} که اختلاف آن دو دقیقاً 2^6 است، یک پاره خط بین نقاط متناظر این دو عدد روی محور x ها رسم می کنیم. می خواهیم از این پاره خط ها زیر مجموعه ای مانند S انتخاب کنیم که هریک از نقاط محور حداکثر روی یکی از پاره خط های عضو S باشد. فرض می کنیم نقاط دو سر هر پاره خط روی آن قرارندارند. S حداکثر می تواند چند عضو داشته باشد؟

الف) ۴ (ب) ۸ (ج) ۳۲ (د) ۶۴ (ه) ۲۵۶

(۲۷) فرض کنید A کوچک ترین عدد بزرگ تر از ۱۳۸۷ است که بر ۷ بخش پذیر بوده و رقم های آن (در مبنای ۱۰) فقط از ۱ و ۲ تشکیل شده اند. تعداد رقم های A چند است؟

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

(۲۸) در یک ردیف ۱۳۸۷ میله ی موازی از راست به چپ با شماره های ۱ تا ۱۳۸۷ قرار دارند. در ابتدا ۱۳۸۷ مهره در میله ۱ قرار دارد. در هر حرکت از یک میله دلخواه ۳ مهره بر می داریم و یکی را دور انداخته، یکی را به همان میله بر می گردانیم و سومی را در میله سمت چپ می اندازیم. این کار را تا جایی تکرار می کنیم که در هیچ میله ای بیش از ۲ مهره نداشته باشیم. بیش ترین شماره ی یک میله ی حاوی مهره چند است؟

الف) ۸ (ب) ۹ (ج) ۱۰ (د) ۱۱ (ه) ۱۲

(۲۹) یک قورباغه در نقطه صفر روی محور x ها نشسته است. در اولین جهش، یک واحد به سمت چپ یا راست و در جهش i ام خود 3^{i-1} واحد به سمت چپ تا راست می جهد. این قورباغه به کدام نقطه از محور می تواند برسد؟

الف) ۳۰۹ (ب) ۳۱۰ (ج) ۳۱۱ (د) ۳۱۲ (ه) ۳۱۳

(۳۰) ۱۷ عدد مطابق شکل زیر در ۱۷ خانه به شماره های ۱ تا ۱۷ قرار گرفته اند. می گوئیم عدد موجود در خانه ی z «پدر» عدد موجود در خانه ی i است، اگر $z = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ باشد ($\lfloor x \rfloor$ برابر بزرگ ترین عدد صحیحی است که از x بزرگ تر نیست). روشن است که عدد موجود در خانه ی اول بی پدر است! اگر هر عدد از پدرش اکیداً کوچک تر باشد، این پدیده را مینیاتوری می نامیم. دقت کنید جدول زیر مینیاتوری است.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
۱۸	۱۶	۱۴	۱۵	۱۲	۱۰	۵	۴	۶	۷	۸	۹	۲	۳	۱	۳	۲

ما یکی از این اعداد را تغییر می دهیم. می خواهیم فقط با استفاده از تعدادی «عمل مجاز» دوباره اعداد را به صورت مینیاتوری در آوریم. عمل مجاز «جابه جایی یک عدد با پدرش» است.

اگر عدد ۱۸ (عدد اول) را به ۵ تغییر دهیم چند عمل مجاز لازم است؟

الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) ۶

«موفق باشید»

به نام خدا

پاسخ تشریحی

مرحله اول نوزدهمین دوره المپیاد کامپیوتر سال

۱۳۸۷

(۱) گزینه ی (ه) درست است.

ابتدا تعداد خانه های سیاه هر وجه را حساب می کنیم. در هر وجه $\left[\frac{7 \times 7}{2} \right]$ خانه ی سیاه وجود دارد که چون ۶ وجه وجود دارد در مجموع ۱۴۴ مکعب داریم. ولی مکعب هایی که روی ضلع مکعب اصلی هستند را دوباره شمرده ایم که تعداد آنها در هر ضلع ۳ تا است و چون ۱۲ ضلع داریم مجموعاً ۳۶ تا است. در نتیجه جواب مسئله برابر است با: $144 - 36 = 108$

(۲) گزینه ی (ج) درست است.

فرض کنید که عدد یک به رنگ آبی باشد. در اینصورت کوچکترین عدد آبی بجز یک را در نظر بگیرید. از این عدد تا ۲۰ تمامی اعداد باید آبی باشند (چون جمع هر کدام با یک عدد بعدی را می سازد). در نتیجه بقیه اعداد نیز باید به رنگ قرمز باشند.

اگر عدد دیگر آبی نداشته باشیم: یک حالت.

اگر کوچکترین عدد آبی بزرگتر یا مساوی با ۴ باشد: حداقل دو عدد قرمز داریم که می توانند با مجموع خود اعداد بزرگتر قرمز بسازند و در نتیجه همان حالت اول خواهد بود.

اگر کوچکترین عدد آبی برابر با ۲ یا ۳ باشد: هر کدام از این حالات، یک حالت درست هستند.

در مجموع سه حالت درست داریم، ولی چون فرض کرده بودیم عدد یک آبی است جواب مسئله دوبرابر آن یعنی ۶ است.

(۳) گزینه ی (الف) درست است.

چون هر دو عدد X و $\bar{X}$ ارقام یکسانی دارند (بجز تعداد صفرها)، پس مجموع ارقام و در نتیجه باقیمانده ی یکسانی به پیمانه ی ۹ دارند. پس تفریق آنها بر ۹ بخشپذیر است. در نتیجه تنها رقمی که می تواند عدد نهایی را بر ۹ بخشپذیر کند ۵ است: $31 + 5 = 36$

(۴) گزینه ی (ه) درست است.

عدد ۷ را از مجموعه حذف کنید. به ازای هر زیرمجموعه از مجموعه ی جدید دو حالت داریم:

- مجموع اعداد زوج باشد. در اینصورت اضافه کردن ۷ مجموع آن را فرد می کند.

- مجموع اعداد فرد باشد. در اینصورت اضافه کردن ۷ آن را زوج می کند.

در نتیجه در هر حالت یک زیرمجموعه با مجموع زوج داریم. پس جواب مسئله ۱۲۸ است.

(۵) گزینه ی (ج) درست است.

چون در ابتدا پرچم در دست نفر اول است و در انتهای مرحله اول به دست نفر سوم می رسد پس باقیمانده ی k بر ۲۰ و در نتیجه باقیمانده ی آن بر ۵ برابر ۲ است.

(۶) گزینه ی (ج) درست است.

از ۶ مثلث داخلی تنها می توان یکی از آنها را برداشت، چون در یک راس مشترک هستند.

دو حالت را بررسی می کنیم:

- دو مثلث از گوشه ها انتخاب شود: در اینصورت پس از انتخاب این دو، مثلث سوم بصورت یکتا از بین ۶ مثلث داخلی انتخاب می شود. در نتیجه تعداد حالات نهایی ۳ تا است.
- سه مثلث از گوشه ها انتخاب شود: یک حالت بصورت یکتا تعیین می شود.

با توجه به حالت بندی فوق مجموعاً ۴ حالت داریم.

(۷) گزینه ی (د) درست است.

همانند سوال قبلی براساس انتخاب تعداد مثلث های گوشه ای حالت بندی می کنیم:

- صفر مثلث از گوشه انتخاب شود: در این صورت باید سه مثلث از ۶ مثلث داخلی انتخاب شود که به دو حالت ممکن است.
- یک مثلث از گوشه انتخاب شود: ابتدا به سه حالت می توان مثلث گوشه ای را انتخاب کرد. سپس ۵ مثلث داخلی باقی خواهند ماند که باید دو عضو غیرمجاور انتخاب شود. اینکار به ۶ طریق ممکن است. پس مجموعاً ۱۸ حالت بدست آمد.
- دو مثلث از گوشه انتخاب شود: ابتدا به سه حالت می توان دو مثلث گوشه ای را انتخاب کرد. سپس چهار حالت برای انتخاب مثلث داخلی داریم. پس در مجموع ۱۲ حالت بدست می آید.
- سه مثلث از گوشه انتخاب شود: این کار به یک حالت ممکن است.

پس در کل ۳۳ حالت وجود دارد که باقیمانده ی آن بر ۵ برابر ۳ است.

(۸) گزینه ی (د) درست است.

حرکت اسب در این ۸ خانه همانند یک دور کامل است. پس در هر مرحله باید سرباز را در خانه ای قرار دهیم که تا اسب ۴ خانه فاصله داشته باشد. در نتیجه مجموعاً 4×1387 حرکت انجام می شود که باقیمانده اش بر ۵ برابر ۳ است.

(۹) گزینه ی (الف) درست است.

مجموع مثلث های حاصل تشکیل یک دوزنقه می دهند که نقطه ی بالایی آن مشخص است. در نتیجه هرچه نقطه ی متصل به آن بالاتر باشد مساحت دوزنقه بیشتر خواهد شد. در نتیجه باید قطعه چوب با کمترین طول را آنجا قرار دهیم. پس جواب ۲ است.

(۱۰) گزینه ی (د) درست است.

باتوجه به اینکه این ضلع عمودی یا افقی انتخاب شده باشد حالت بندی می کنیم:

- افقی: در اینصورت تنها همان مسیری که شامل آن ضلع باشد حذف می شود. پس قیمت همگی آنها ۸ است.
- عمودی: مجموعه ی قیمت حالاتی که از ضلع سمت چپ انتخاب شود با سمت راست برابر است. قیمت حالات حذف ضلع سمت چپ به ترتیب برابر است با ۱ تا ۸.

پس در نهایت قیمت جداول اعداد ۱ تا ۸ شدند که باقیمانده اش بر ۵ برابر ۳ است.

(۱۱) گزینه ی (ب) درست است.

فرض کنید در هر بار برخورد پرتو با آینه، بجای اینکه پرتو بازتاب شود، شکل را حول آینه‌ای که پرتو با آن برخورد کرده بچرخانیم. در نتیجه پرتو در همان جهت حرکت می‌کند ولی شکل حول مرکز خود ۳۰ درجه چرخیده است. در نتیجه در کل ۳۶۰ را به ۱۲ قطاع تقسیم کرده‌ایم که با ۶ خط تشکیل شده‌اند. پس هر پرتویی حداکثر ۶ بار با آینه‌ها برخورد می‌کند.

برای ارائه مثال نیز هر پرتویی که با این ۶ خط برخورد کند این ویژگی را داراست.

(۱۲) گزینه ی (ه) درست است.

در صورتی که به ترتیب به بالا، راست، پایین و چپ حرکت کنیم، وجه پایین آن به ۵ تغییر می‌کند. در نتیجه با این روند می‌توان هر عددی را در وجه پایین قرار داد.

حال روندی را ارائه می‌کنیم تا عددی که در ابتدا در پایین مکعب قرار دارد زمانی که به گوشه‌ی بالا راست رسیدیم به بالای آن منتقل شود: اگر به ترتیب ۲ بار راست، ۳ بار بالا، یکبار راست و یکبار بالا برویم در نهایت این اتفاق می‌افتد.

باتوجه به توضیحات بالا تمامی اعداد می‌توانند در بالای مکعب قرار گیرند.

(۱۳) گزینه ی (ب) درست است.

هر فردی از اعضای M دوبار (به ازای پدر و مادر خود) در فرزندان حساب می‌شود (بجز اولین آدمیزاد) ولی چهاربار (به ازای پدر و مادر پدر و پدر و مادر مادر خود) در نوه‌ها محاسبه می‌شود (بجز اولین آدمیزاد و فرزندانش). در نتیجه نسبت گفته شده بسیار نزدیک به ۲ خواهد بود.

(۱۴) گزینه ی (د) درست است.

مجموع اعدادی که آنها دارند باید بر ۴ بخشپذیر باشد: $x + 3x = 4x$

چون باقیمانده‌ی مجموع اعداد بر ۴ برابر ۲ است باید عددی حذف شود که باقیمانده‌اش بر ۴ برابر ۲ باشد و تنها عدد با این ویژگی ۱۴ است.

(۱۵) گزینه ی (ه) درست است.

در صورتی که هیچ خانه‌ای سیاه نباشد تعداد روش‌های رسیدن به خانه‌ی آخر از رابطه‌ی بازگشتی زیر تبعیت می‌کند:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad f_1 = f_2 = 1$$

برای اثبات این ادعا کافیهست حرکت نهایی را در نظر بگیریم. حرکت نهایی پرش به طول یک یا دو است که هر کدام از جملات بالا را می‌سازد.

از طرفی وقتی یک خانه‌ی سیاه وجود داشته باشد باید در آن حرکت دو خانه پرید. پس جواب مسئله را می‌توان به حاصلضرب قسمت‌هایی که خانه‌ی سیاه ندارند تجزیه کرد. در نتیجه جواب مسئله برابر است با $f_3 \times f_6 \times f_3 \times f_5$ که برابر با ۱۶۰ است.

(۱۶) گزینه ی (د) درست است.

بهترین قیمت حتما یکی از اعدادی است که مورد نظر خریداران هستند. چون در غیر اینصورت با افزایش یک واحد به آن، تعداد متقاضیان تغییری نمی کند ولی سود هر ماشین افزایش می یابد.

پس کافیت تنها به ازای همین اعداد نتیجه را بررسی کنیم. سود هر کدام به ترتیب برابر ۲۲، ۳۶، ۴۵، ۴۸، ۵۰، ۴۸، ۴۲، ۳۲، ۱۸ و ۱۰- است. در نتیجه بهترین قیمت ۱۸ است.

(۱۷) گزینه ی (الف) درست است.

برای یافتن تعداد رشته های خوب از ابتدای رشته شروع می کنیم:

حرف اول ۳ حالت دارد و پس از آن در جایگاه هایی که توالی یکسان وجود دارد ۱ حالت برای پر کردن آن خانه داریم و در غیر اینصورت ۲ حالت (متمایز با قبلی) داریم. از طرفی باید سه جایگاه را که در آنها توالی یکسان خواهیم داشت را انتخاب کنیم. بجز جایگاه اول بقیه می توانند انتخاب شوند. پس جواب نهایی برابر است با: $2^8 \times 3 \times 21 = 3 \times 2^6 \times \binom{9}{3}$

(۱۸) گزینه ی (ه) درست است.

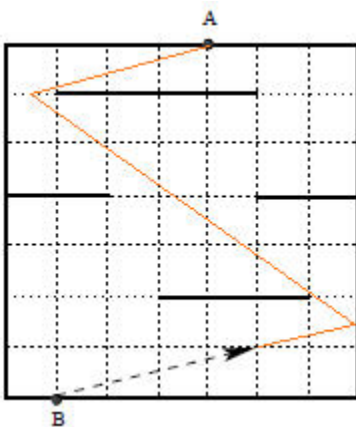
در صورتی که از عمل سه برابر استفاده نکنیم در نهایت دو عدد خواهیم داشت که توانی از ۲ هستند. پس تنها اعدادی را می توانیم بسازیم که در بسط مبنای ۲ خود حداکثر دو رقم یک داشته باشند. پس $n_{40} = 0$

باتوجه به اینکه عدد ۳۰ در بسط مبنای ۲ خود ۴ رقم یک دارد پس حداقل یک بار باید از عملیات سه برابر استفاده کند.

مثال: ابتدا اعداد ۸ و ۲ را می سازیم و آنها را با هم جمع می کنیم. حال عدد ۱۰ را با عملیات سه برابر به ۳۰ تبدیل می کنیم.

(۱۹) گزینه ی (الف) درست است.

به کمک دو آینه همانند شکل می توان پرتو را به نقطه ی A رساند. همچنین از روی مسیر اولیه ی پرتو واضح است که نمی توان با یک آینه این کار را انجام داد (چون ناحیه ی قابل دید از نقطه ی A با مسیر پرتو اشتراکی ندارند).



۲۰) گزینه ی (د) درست است.

باتوجه به شرایطی که مسئله توضیح داده است می توان تیم ها را به ترتیب قدرت مرتب کرد بطوری که هر تیمی رتبه اش بهتر باشد از تمامی تیم های با رتبه ی بالاتر قوی تر باشد و در بازی با آن برنده شود.

تیم نائب قهرمان از تمامی ۸ تیمی که از آنها (مستقیما یا با واسطه ی تیم دیگری) برده قوی تر است. پس رتبه ی این تیم حداکثر نهم است. از طرفی اگر تیم های نهم تا شانزدهم را بصورتی بچینیم که تا فینال با هم مسابقه دهند، مثالی را ارائه کرده ایم که تیم نائب قهرمان نهم بوده است. پس جواب مسئله نهم است.

۲۱) گزینه ی (د) درست است.

در صورتی که از شهر A شروع به حرکت کنیم، در هر مرحله در جهت مثبت یا منفی باید اختلاف ساعت را محاسبه کنیم و قدر مطلق عدد نهایی اختلاف شهر E با شهر A خواهد بود.

باتوجه به این نکات در بین گزینه ها تنها عدد ۷ قابل ساخت نیست:

$$-5 - 4 + 3 + 7 = 1$$

$$-5 + 4 - 3 + 7 = 3$$

$$+5 - 4 - 3 + 7 = 5$$

$$-5 + 4 + 3 + 7 = 9$$

۲۲) گزینه ی (ج) درست است.

دو مقدار X و Y به ترتیب برابرند با ۴۹- و ۶۰. حال بین این دو عدد، اعداد ۱ تا ۱۰ قابل ساخت نیستند، ولی بقیه ی اعداد را می توان بدست آورد.

۲۳) گزینه ی (ب) درست است.

اگر همسایه های هر حرف را بشماریم، حروف A, D, E, H, I سه همسایه و حروف B, C, F, G دو همسایه دارند. در نتیجه چهار حرفی که تنها دو همسایه دارند در گوشه های جدول هستند و همسایه های آنها نمی توانند خانه ی وسط جدول باشند.

با دقت در این موضوع حروف A, E, H, I حذف می شوند. پس حرف D در وسط جدول وجود دارد.

۲۴) گزینه ی (ج) درست است.

در صورتی که $a = 5$ باشد، در هر جمع عدد یکان صفر یا پنج خواهد بود و رقم دهگان دیگر حاصل ضرب عددی بین صفر تا چهار. در نتیجه هیچ گاه حاصل جمع بزرگتر از ۹ نخواهد شد و نیازی به ده بر یک نداریم.

(۲۵) گزینه ی (ه) درست است.

تنها شرطی که در این دنباله ی به طول ۶ داریم این است که تعداد حرکات شماره ی یک و دو باهم برابر باشند.

در نتیجه تعداد حالات ممکن در صورتی که تعداد حرکات شماره ی یک بین صفر تا سه باشد به ترتیب برابر است با:

$$\binom{6}{6}, \binom{6}{2,2,2}, \binom{6}{1,1,4}, \binom{6}{3} \text{ که جمع این اعداد برابر می شود با } ۱۴۱.$$

(۲۶) پاسخ در میان گزینه ها نیست.

باتوجه به اینکه مجموعاً ۱۰۲۴ نقطه داریم و هر خط روی حداقل ۶۲ نقطه قرار می گیرد حداکثر ۱۶ خط می توان رسم کرد. به عنوان مثال نیز می توان خطوط را پشت سرهم قرار داد تا شرایط را برقرار کنند.

(۲۷) گزینه ی (الف) درست است.

عدد ۲۱۲۱ بر ۷ بخش پذیر است و شرایط مسئله را نیز دارد. در نتیجه $A \leq 2121$ پس A ۴ رقمی است.

(۲۸) گزینه ی (ج) درست است.

اولین نکته ای که باید به آن دقت کنیم این است که ترتیب انجام عملیات در حالت نهایی تفاوتی ایجاد نمی کند (چرا؟). با این فرض از میله ی شماره ی یک شروع می کنیم تا اینکه دیگر نتوانیم حرکتی روی آن انجام دهیم.

بدین ترتیب پس از تعدادی مرحله در میله ی دوم $\frac{1387-1}{2} = 693$ مهره خواهیم داشت. همین کار را با میله ی بعدی انجام می دهیم. تعداد مهره های میله ها همانند زیر خواهند شد:

$$693 \rightarrow 346 \rightarrow 172 \rightarrow 85 \rightarrow 42 \rightarrow 20 \rightarrow 9 \rightarrow 4 \rightarrow 1$$

در نتیجه آخرین میله ی حاوی مهره، شماره ی دهم است.

(۲۹) گزینه ی (ب) درست است.

می دانیم در گام آخر باید به سمت راست حرکت کنیم (در غیر اینصورت عدد نهایی منفی خواهد شد). در نتیجه قورباغه باید $3^5 = 243$ واحد در جهت مثبت ببرد. قبل از این حرکت اعداد برابر با ۶۶ تا ۷۰ هستند. به همین ترتیب قورباغه در مرحله قبل از آن نیز ۸۱ واحد در جهت مثبت حرکت کرده بود، در نتیجه در گام قبلی اعداد برابر با ۱۵- تا ۱۱- بوده. به همین ترتیب باید ۲۷ واحد در جهت منفی حرکت می کرده که نتیجه اش اعدادی بین ۱۲ تا ۱۶ خواهند بود.

این اعداد را باید بتوانیم به کمک ۱، ۳ و ۹ بسازیم که واضح است تنها می توان عدد ۱۳ را ساخت که همان عدد ۳۱۰ در ابتدا است.

(۳۰) گزینه ی (ب) درست است.

برای جابجایی هر عدد دو انتخاب داریم (هر پدری دو فرزند دارد). اگر با فرزندی که کوچکتر است جابجا کنیم همچنان توازن برقرار نخواهد شد (چون فرزند کوچکتر از فرزند بزرگتر، کوچکتر است!). در نتیجه همواره باید با فرزند بزرگتر جابجایی صورت بگیرد.

در نتیجه باید در گام اول با ۱۶، سپس با ۱۵ و در نهایت با ۶ جابجا کنیم. پس سه حرکت لازم و کافی است.

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱) جدول 2×4 زیر را در نظر بگیرید. به تعدادی خانه از این جدول که محیط آن ها یک مستطیل تشکیل بدهد، یک زیرمستطیل گفته می شود. مثلاً هر خانه از این جدول، خود به تنهایی یک زیرمستطیل است؛ هم چنین کل جدول نیز یک زیرمستطیل است. برای هر زیرمستطیل از این جدول، اعداد درون آن زیرمستطیل را جمع کرده و روی یک کاغذ می نویسیم، سپس جمع تمام اعداد روی کاغذ را حساب می کنیم. حاصل این جمع چه قدر می شود؟

۱	۲	۰	۵
-۵	۰	-۲	۰

(ه) ۵۶

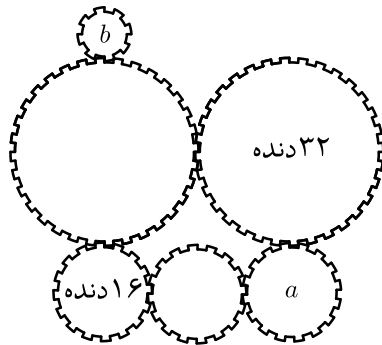
(د) ۴۸

(ج) ۱۲

(ب) ۸

(الف) -۸

(۲) طبق شکل زیر تعدادی چرخ دنده داریم که با هم درگیر هستند. چند دور و در کدام جهت باید چرخ دنده ی b را بچرخانیم تا چرخ دنده ی a دقیقاً یک دور ساعت گرد بچرخد؟ تعداد دنده های چرخ دنده ی کوچک ۸، چرخ دنده های متوسط ۱۶ و چرخ دنده های بزرگ ۳۲ است.



(الف) ۱ دور ساعت گرد

(ب) ۱ دور پادساعت گرد

(ج) ۲ دور ساعت گرد

(د) ۲ دور پادساعت گرد

(ه) نمی توان چرخ دنده ی a را چرخاند

(۳) کشور یک طرفه ها، پنج شهر به شماره های ۱ تا ۵ دارد. تنها در صورتی می توان از شهر i به شهر j یک جاده ی یک طرفه کشید، که $i < j$ باشد؛ در صورت ساخت چنین جاده ای، با استفاده از این جاده می توان از شهر i به شهر j رفت، ولی نه برعکس. به چند طریق می توان تعدادی جاده ی یک طرفه در این کشور ساخت به طوری که، از هر کدام از شهرهای ۱ تا ۴ دقیقاً یک مسیر (تشکیل شده از یک یا چند جاده ی یک طرفه ی پشت سر هم) به شهر ۵ وجود داشته باشد؟

(ه) ۵

(د) ۲۴

(ج) ۵۵

(ب) ۴۴

(الف) ۲۱۰

(۴) کشور یک طرفه های مسئله ی قبل (که شرط وجود جاده از شهر i به شهر j ، عبارت است از $i < j$) را در نظر بگیرید. حال تعداد روش های ساخت تعدادی جاده ی یک طرفه در این کشور را حساب کنید، به طوری که دو شرط زیر را داشته باشند:

- از هر کدام از شهرهای ۱ تا ۴، دقیقاً یک مسیر (شامل یک یا چند جاده ی یک طرفه) به شهر ۵ وجود داشته باشد (همان شرط مسئله ی قبل).
- به ازای هر شهر، مجموع تعداد جاده هایی که از آن شهر شروع می شوند، به علاوه ی تعداد جاده هایی که به آن شهر ختم می شوند، از سه تا بیشتر نباشد.

(ه) ۴

(د) ۱۸

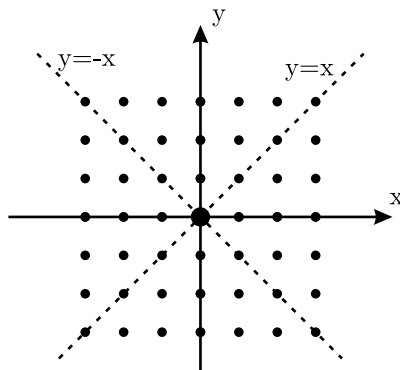
(ج) ۲۲

(ب) ۴۲

(الف) ۲۹

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

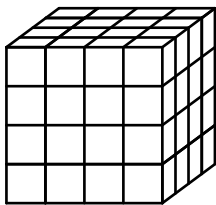
(۵) می خواهیم روباتی سفارش دهیم که قادر باشد از مبدأ مختصات صفحه (مانند شکل) به تمام نقاطی که مختصات صحیح دارند برود. برای این کار روبات باید دارای زیرمجموعه ای از قابلیت های زیر باشد. قیمت روبات برابر است با مجموع قیمت های قابلیت هایی که برای آن سفارش می دهیم. قیمت هر قابلیت نیز روبه روی آن در فهرست زیر درج شده است.



- یک واحد حرکت به راست، ۳۰۰۰۰ تومان
- یک واحد حرکت به بالا، ۳۰۰۰۰ تومان
- یک واحد حرکت به پایین، ۲۰۰۰۰ تومان
- یک واحد حرکت به چپ، ۲۰۰۰۰ تومان
- تقارن نسبت به محور x ، ۲۰۰۰۰ تومان $(x, y) \rightarrow (x, -y)$
- تقارن نسبت به محور y ، ۲۰۰۰۰ تومان $(x, y) \rightarrow (-x, y)$
- تقارن نسبت به خط $y=x$ ، ۱۰۰۰۰ تومان $(x, y) \rightarrow (y, x)$
- تقارن نسبت به خط $y=-x$ ، ۱۰۰۰۰ تومان $(x, y) \rightarrow (-y, -x)$

حداقل قیمت روبات را تعیین کنید.

الف) ۳۰۰۰۰ تومان ب) ۴۰۰۰۰ تومان ج) ۵۰۰۰۰ تومان د) ۶۰۰۰۰ تومان ه) ۷۰۰۰۰ تومان



(۶) یک کیک به شکل یک مکعب $4 \times 4 \times 4$ داریم. در هر مرحله می توانیم یک صفحه از فضا (موازی با یکی از وجه های کیک)، برای برش انتخاب کنیم. اگر صفحه ی برش از قطعه کیکی عبور کند، آن قطعه را به دو قسمت تقسیم می کند. بین هر دو مرحله، می توانیم بخش های مختلف کیک که از هم جدا شده اند، هر طوری که خواستیم (با انتقال و دوران) در فضا کنار هم قرار دهیم و دوباره عمل برش (مرحله ی بعد) را انجام دهیم.

ال قاده. لدنوشه میسقتت مسقود به بنامزمه ش ربك یاب، ل بق زا هدشه میسقتی ه عطقه لدنچت سنا كنمه هك دینكت قد لدوشه میسقت ۱ × ۱ × ۱ ب عكه ۴۶ بهك یكن یا اتم یراد م زلا له حرمدنچ

ه) ۹ د) ۸ ج) ۷ ب) ۶ ا) ۵

(۷) در مهمانی که علی آقا ترتیب داده است، ۱۲ نفر شرکت کرده اند. در موقع ورود مهمان ها، هر کدام یک شماره متمایز از اعداد ۱ تا ۱۲ می گیرند. مهمان ها دور یک میز دایره ای می نشینند. قرار است علی آقا یک ظرف شیرینی برای پذیرایی ببرد؛ اما موقع برداشتن شیرینی، هر کس به شماره خودش و نفر سمت راستش نگاه می کند و به تعداد شماره بیشتر، از ظرف شیرینی برمی دارد. علی آقا حداقل چند عدد شیرینی باید در ظرف قرار دهد به طوری که در هر نحوه نشستن، هر کس بتواند تعداد گفته شده در بالا را از آن بردارد؟

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۷۲ (هـ)

۱۵۶ (د)

۴۲ (ج)

۱۱۴ (ب)

۷۸ (الف)

1386/11/12

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱۳) روی یک دستگاه n عدد کلید و یک نمایش گر قرار دارد. در ابتدا هر کدام از کلیدها یا روشن است یا خاموش و نمایش گر همیشه تعداد کلیدهای روشن را نشان می دهد. ما از وضعیت روشن یا خاموش بودن کلیدها اطلاع نداریم و در هر مرحله تنها می توانیم یک کلید دلخواه را تغییر وضعیت دهیم. حداکثر در طی چند مرحله می توانیم تمام کلیدها را روشن کنیم؟

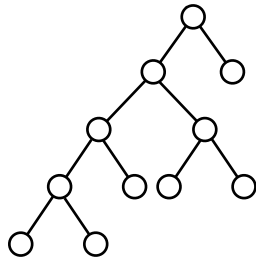
الف) $n - 1$

ب) n

ج) $2n - 1$

د) $2n$

ه) $2n + 1$



(۱۴) در شکل روبه رو، می خواهیم دایره ها را با ۳ رنگ آبی، قرمز و سبز رنگ آمیزی کنیم، به طوری که، رنگ هر دایره و دو دایره ی زیر آن، که به آن متصل اند (اگر وجود داشته باشد)، با هم برابر باشد و یا رنگ هر سه آن ها متفاوت باشد. به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد؟

الف) ۳۴۲

ب) ۸۲۷

ج) ۹۲۷

د) ۸۵۴۱

ه) ۸۴۰۲

(۱۵) عدد طبیعی a را در نظر بگیرید. در هر مرحله می توان یکی از ۲ عمل زیر را روی این عدد انجام داد:

- دَوَران: رقم سمت چپ a به سمت راست این عدد منتقل می کنیم. برای مثال، این عمل عدد ۱۲۳۴ را به عدد ۲۳۴۱ تبدیل می کند. پس از هر بار انجام دادن این عمل، صفرهای سمت چپ عدد (در صورت وجود)، حذف می شود. برای مثال، دوران عدد ۱۰۲۳ عدد ۲۳۱ را نتیجه می دهد.
- به علاوه ۲: ۲ واحد به a اضافه کنیم.

در چند تا از جفت های زیر می توان، با انجام دنباله ای از دو عمل فوق، عدد سمت چپ را به عدد سمت راست تبدیل کرد؟

• (۲۱۳۴, ۲۱۴۳)

• (۱۱۱۱, ۱۱۱)

• (۱۲۱۲۱, ۲۱۲۱۲)

• (۱۰۳, ۴۵)

الف) ۰

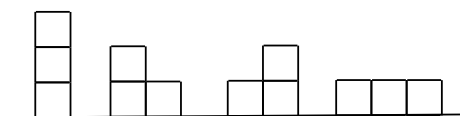
ب) ۱

ج) ۲

د) ۳

ه) ۴

(۱۶) به چند روش می توان ۸ جعبه را در تعدادی ستون چسبیده به هم، روی زمین قرار داد؟ حالات مختلف برای ۳ جعبه را در شکل می بینید.



الف) ۱۲۸

ب) ۶۴

ج) ۴۰

د) ۹

ه) هیچ کدام

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

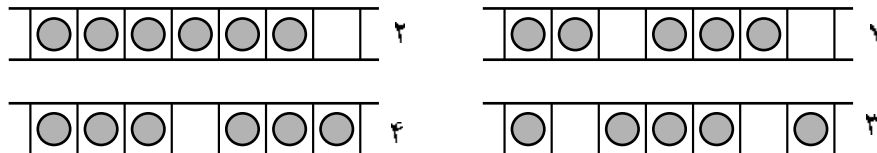
(۱۷) پس از امتحانات پایان نیم سال، نمرات فیزیک و ریاضی هر یک از ۳۰ دانش آموز کلاس «دوم ب» معلوم شد. آقای هاشمی که معلم فیزیک بود، رتبه های ۱ تا ۳۰ را در درس فیزیک اعلام کرد. آقای کاظمی، معلم ریاضی آن ها نیز رتبه های ۱ تا ۳۰ را در درس ریاضی اعلام کرد. هیچ دو دانش آموزی، در یک درس نمره ی یک سان نگرفته بودند. فردای آن روز قرار شد رتبه بندی کل را با استفاده از میانگین (نصف مجموع) دو رتبه ای که در دروس ریاضی و فیزیک کسب شده، اعلام کنند. در این رتبه بندی، رتبه ی کل دانش آموز x ، که میانگین دو رتبه اش در ریاضی و فیزیک S است، برابر است با: تعداد دانش آموزانی که میانگین دو رتبه شان از S اکیداً کم تر است، به اضافه یک. سروش در هر یک از دو درس رتبه ی ۹ آورده است (نهمین بالاترین نمره). بهترین و بدترین رتبه کلی که سروش ممکن است به دست بیاورد، کدام است؟

- الف) بهترین ۱ و بدترین ۱۶ ب) بهترین ۱ و بدترین ۱۷ ج) بهترین ۱ و بدترین ۱۸
د) بهترین ۹ و بدترین ۱۷ ه) بهترین ۹ و بدترین ۱۸

(۱۸) نردبانی به طول بی نهایت روی زمین قرار دارد. در شروع بازی یک توپ در یکی از خانه های نردبان مطابق شکل قرار دارد. در خارج نردبان نیز به تعداد کافی توپ وجود دارد.



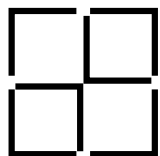
زاپوت و دسپس. مینکی، ج را بخارن آپوت و مینکی، م با ختنار h مانده پ پوتی و ا ب ی ه نا خ ک ی ت، ک ر ح ر ه ر د پوت ر ه. مینکی، م با ت ر پ ت سار ف ر ط ه ب ا ر ی ر گ ی د و پ، چ ف ر ط ه ب ا ر ی ک ی h ی ه نا خ ز ا و ه ت ش ا د ر ب ن ا ب د ر ن ز ا ج ر ا خ دوشی م ف ق و ت م ا ج ن ا م ه ر د و د س ر ب ی ل ا خ ی ه نا خ ن ی ل و ا ه ب ا ت دوشی م در پوتی ا ر ا د ی ه نا خ ی و ر ز ا، ه د ش ب ا ت ر پ؟ م ی س ر ی م ی ل و ت ی م ر ی ز ی ا ه ت ل ا ح ز ا ک ی م ا د ک ه ب، ه ل و خ ل د د ا ل د ع ت ه ب ت ک ر ح ن ی ا م ا ج ن ا ب



- الف) ۱ و ۲ ب) ۱ و ۴ ج) ۲ و ۳ د) ۳ و ۴ ه) ۱ و ۲ و ۳ و ۴

(۱۹) یک جدول 10×12 داریم. مختصات خانه ی بالا سمت چپ $(0, 0)$ ، و مختصات خانه ی پایین سمت راست $(9, 11)$ است. چند زیر جدول (زیرمستطیل از خانه ها)، شامل خانه ی $(7, 5)$ است؟ (بدیهی است که خانه ی $(7, 5)$ به تنهایی و کل جدول، هر کدام یک زیر جدول محسوب می شوند).

- الف) ۷۳۵ ب) ۱۱۲۰ ج) ۱۰۰۸ د) ۱۲۶۰ ه) ۱۲۰۰



(۲۰) به چند طریق می توان یک جدول 2×2 را با شش شکل ساخت؟ یکی از این روش ها در شکل روبه رو نشان داده شده است.

- الف) ۸ ب) ۶ ج) ۴ د) ۵ ه) ۷

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۱) ۱۰ لامپ خاموش در یک ردیف، به ترتیب پشت سر هم قرار دارند. در هر مرحله، یکی از لامپ های خاموش را روشن می کنیم. این کار را آن قدر انجام می دهیم تا تمام لامپ ها روشن شوند. می خواهیم به ترتیبی لامپ ها را روشن کنیم که هیچ گاه بین لامپ های روشن لامپ خاموش قرار نداشته باشد. به عنوان مثال، اگر لامپ های اول و سوم روشن باشند، لامپ دوم نیز باید حتماً روشن باشد. به چند طریق می توان ترتیبی برای روشن کردن لامپ ها ارائه داد، به طوری که شرط مذکور حفظ شود؟

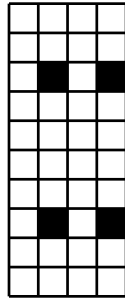
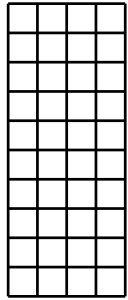
الف) ۱۲۰

ب) ۵۱۲

ج) ۱۰۲۴

د) ۵۰۴۰

ه) ۴۰۳۲۰



(۲۲) یک جدول 10×4 خالی مانند شکل سمت چپ داریم. به ۴ خانه ی سیاه که ۴ گوشه ی یک مستطیل قرار بگیرند، «چهارخونه» می گوییم (مانند شکل سمت راست). حداکثر چند خانه از جدول خالی سمت چپ را می توانیم سیاه کنیم به طوری که، در آن هیچ «چهارخونه» ای مشاهده نشود؟

الف) ۱۰

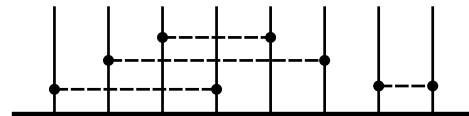
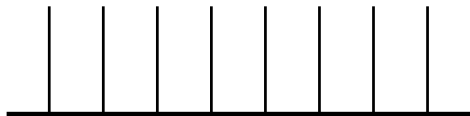
ب) ۱۳

ج) ۱۶

د) ۱۸

ه) ۲۰

(۲۳) ۸ میله ی عمودی مطابق شکل سمت چپ به ترتیب روی زمین چیده شده اند، به طوری که فاصله ی هر میله از میله ی بعدی اش، برابر ۱ واحد می باشد.



یک «جفت بندی»، این ۸ میله را با ۴ خط چین افقی به ۴ جفت تقسیم می کند. در شکل سمت راست یکی از راه های جفت بندی نمایش داده شده است. «طول» یک جفت بندی، برابر مجموع طول ۴ خط چین استفاده شده برای آن جفت بندی است. برای مثال طول جفت بندی شکل سمت راست برابر با ۱۰ می باشد. اکنون اگر همه ی جفت بندی های ممکن برای این ۸ نقطه را در نظر بگیریم، میانگین طول این جفت بندی ها چه قدر است؟

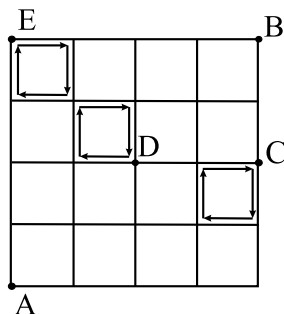
الف) ۸

ب) ۱۲

ج) ۷

د) ۱۶

ه) ۱۴



(۲۴) پلیس در صدد دستگیر کردن یک مجرم فراری است. این مجرم تحت تعقیب در نقطه ی A در شکل روبه رو قرار دارد و می خواهد در ۸ دقیقه به نقطه ی B برود. او می تواند در هر دقیقه روی یک ضلع یک خانه ی جدول حرکت کند. در لحظه ای که مجرم در نقطه ی A قرار دارد، سه پلیس در نقاط C و D و E هستند، و هر کدام، در یک مسیر دوری که در شکل با چهار پیکان نشان داده شده حرکت می کنند. جهت حرکت نیز مشخص شده است. پلیس ها نیز در هر دقیقه یک ضلع یک خانه ی جدول را طی می کنند. اگر مجرم و یکی از پلیس ها در یک نقطه ی تقاطع در جدول قرار بگیرند، پلیس مجرم را دستگیر می کند، ولی اگر روی یک ضلع یک خانه ی جدول از روبه روی هم بگذرند پلیس نمی تواند او را دستگیر کند. پلیس می خواهد بداند چند مسیر مختلف برای مجرم از نقطه ی A به نقطه ی B وجود دارد که اگر مجرم آن مسیرها را انتخاب کند، پلیس نمی تواند او را دستگیر کند.

۶۱) ف

۱۲) ب

۸۱) ج

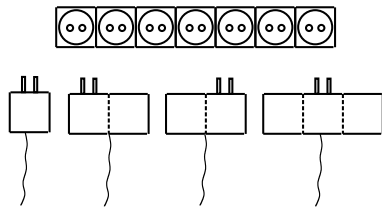
۴۲) د

۵۳) ه

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۵) با بررسی اطلاعات فروش در یک فروشگاه، می توان قاعده هایی برای پیش بینی خریدهای مشتریان پیدا کرد، مثل «{نان} $\Rightarrow$ {گردو، پنیر}» یا «{پاک کن، تراش} $\Rightarrow$ {مداد}». قاعده ی « $A \Rightarrow B$ » یعنی مشتری با خرید مجموعه ی A ، حتماً مجموعه ی B را نیز خریداری می کند. A و B مجموعه هایی ناتهی از اجناس فروشگاه هستند که اشتراک ندارند. اگر ۸ نوع جنس در فروشگاه داشته باشیم، در حالت کلی چند قاعده ی مختلف می توان تولید کرد؟

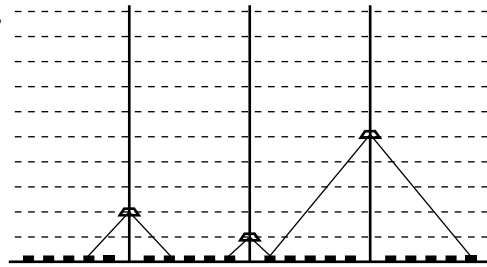
الف) ۶۰۵۰ (ب) ۶۰۴۹ (ج) ۶۳۰۵ (د) ۶۳۰۶ (ه) ۶۵۶۱



(۲۶) ۷ پریز برق با ابعاد 1×1 در یک ردیف، مطابق شکل روی دیوار نصب شده اند. ۴ وسیله ی برقی در اختیار داریم که می خواهیم از آن ها به صورت هم زمان استفاده کنیم. دوشاخه های این وسیله ها مانند شکل با اندازه های 1×3 ، 1×2 ، 1×2 و 1×1 هستند. به چند طریق می توان این دو شاخه ها را در پریزها قرار داد، به طوری که تمام وسیله ها روشن شوند؟ دقت کنید که مجاز به چرخاندن دوشاخه ها نیستیم.

م.دک.چ.ه) ۵ (۲۴) د (۲۴) ج (۰۳) ب (۴۲) ۲۱) فلا

(۲۷) به چند طریق می توان ارتفاع سه نورافکنی که در شکل مقابل نشان داده شده است را تنظیم کرد، به طوری که تمام 20° جعبه ی روی زمین، که با مستطیل سیاه نشان داده شده اند روشن شوند؟ ارتفاع هر کدام از نورافکن ها می تواند بین 1° تا 10° باشد. یک نورافکن در ارتفاع i° تا i° جعبه در سمت راست خود و i° جعبه در سمت چپ خود را روشن می کند.



۰۶۴) ه (۴۲۴) د (۰۵۲) ج (۵۲۳) ب (۰۱۱) فلا



(۲۸) یک نوار به طول n به صورت رو به رو و یک مهره موجود است.

دو نفر این بازی را روی نوار انجام می دهند: در ابتدا، مهره در سمت چپ ترین خانه ی نوار قرار دارد. هر بازی کن در نوبت خود باید یکی از دو حرکت زیر را انجام دهد:

(الف) به شرط این که تا آخر نوار (سمت راست ترین خانه) حداقل i خانه ی خالی وجود داشته باشد، مهره را به i خانه جلوتر انتقال دهد. البته i حتماً باید یکی از اعداد ۱، ۲ یا ۵ باشد.

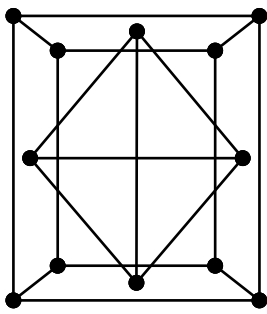
(ب) مهره را دست نزنند و نوبت را به نفر بعدی واگذار کنند.

اگر نفر قبلی در نوبت خود حرکت (ب) را انجام داده باشد، بازی کن فعلی حق ندارد حرکت (ب) را انجام دهد. به عبارت دیگر، هیچ گاه دو حرکت (ب) متوالی در بازی انجام نخواهد شد. برنده کسی است که در نوبت خود، مهره را به آخرین خانه ی نوار انتقال دهد.

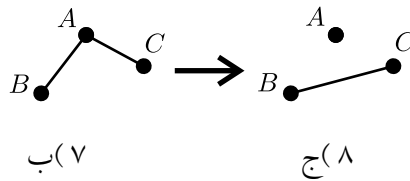
برای چه تعداد از مقادیر n از میان اعداد $\{10, 34, 51, 67, 81\}$ نفر اول برنده است؟

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۵

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



(۲۹) کامیوز شکل سمت چپ را روی کاغذ رسم کرده و به شاندیز داده است. این شکل از تعدادی «تکه خط» تشکیل شده است. تکه خط چیزی شبیه پاره خط است با این تفاوت که دو سر آن حتماً دو دایره ی کوچک سیاه قرار دارد. شاندیز در هر مرحله می تواند سه دایره ی سیاه A ، B و C که A به B و A به C با تکه خط متصل هستند ولی B به C متصل نیست را انتخاب کند، سپس تکه خط های AB و AC را حذف کرده و تکه خط BC را به جای آن دو رسم کند (مانند شکل پایین). با تکرار این عمل تا جای ممکن، حداقل چه تعداد «تکه خط» ممکن است باقی بماند؟ (دقت کنید که در شکل سمت چپ هیچ سه نقطه ای روی یک خط نیستند.)



(۱) فلا

(۷) ب

(۸) ج

(۰۱) د

(۴۱) هـ

(۳۰) ۱۳۸۶ وزنه با وزن های متفاوت و یک ترازو در اختیار داریم. در هر مرحله می توانیم وزن دو وزنه را با ترازو مقایسه کنیم. با حداقل چند بار مقایسه می توانیم با اطمینان اولین و دومین وزنه را از لحاظ سبکی پیدا کنیم؟

(هـ) ۲۷۶۹

(د) ۱۳۹۶

(ج) ۱۳۸۶

(ب) ۲۷۷۲

(الف) ۱۳۸۵

(۳۱) یک جدول از اعداد متمایز داده شده است. در هر سطر، دو خانه که حاوی بزرگ ترین اعداد آن سطر هستند را علامت می زنیم. همین کار را برای ستون ها انجام می دهیم. می خواهیم بدانیم در کل جدول، حداقل چند خانه علامت زده می شوند. اگر جدول ما ۱۰۰×۱۰۰ باشد، این «مقدار حداقل» چه قدر است؟ در مورد جدول ۱۰۱×۱۰۱ چه طور؟

(هـ) ۲۰۰ و ۲۰۲

(د) ۲۰۰ و ۲۰۰

(ج) ۳۰۰ و ۳۰۳

(ب) ۲۰۰ و ۲۰۴

(الف) ۴۰۰ و ۴۰۴

(۳۲) اعداد ۱ تا ۱۰۰ روی محیط یک دایره، با ترتیبی تصادفی چیده شده اند. ما از محل هیچ عددی اطلاع نداریم. دستگاهی در اختیار داریم که با تعیین مکان ۵۰ عدد متوالی روی دایره، کوچک ترین آن ها را به ما اعلام می کند. توجه کنید که دستگاه محل کوچک ترین عدد را به ما نشان نمی دهد، بلکه فقط مقدار کوچک ترین عدد را اعلام می کند. با حداکثر چند بار استفاده از این دستگاه، می توان محل عدد ۱ را پیدا کرد؟

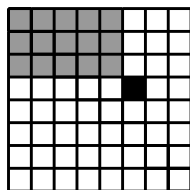
(هـ) ۵۰

(د) ۴۹

(ج) ۲۵

(ب) ۹

(الف) ۷



(۳۳) یک جدول ۸×۸ را در نظر بگیرید. مهره ی «نهنگ»، مهره ای است که اگر در یک خانه از این جدول ۸×۸ قرار بگیرد، مطابق شکل تمامی خانه هایی که ایکداً بالاتر و سمت چپ تر از خانه ی خودش هستند، را تهدید می کند. به چند طریق می توان یک مهره ی نهنگ سیاه و یک مهره ی نهنگ سفید را در این جدول قرار داد، به طوری که هیچ یک دیگری را تهدید نکند؟ (دقت کنید که نمی توان دو مهره نهنگ را در یک خانه قرار داد)

(فلا) ۱۲۶۴

(ب) ۷۸۴

(ج) ۱۵۶۸

(د) ۷۶۸

(هـ) ۵۱۲

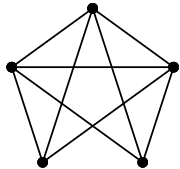
مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۳۴) می خواهیم کیکی درست کنیم که به ژله ی توت فرنگی، خامه ی شکلاتی، و ۲ ماده ی آرد، و شکر نیاز دارد. ژله ی توت فرنگی به ۳ ماده ی پودر ژله، توت فرنگی، و آب مقطر نیاز دارد. خامه ی شکلاتی نیز به ۲ ماده ی خامه و شکلات نیاز دارد. یخچالی داریم که مواد درون آن همواره از پایین به بالا، هر کدام روی قبلی، قرار می گیرند. در هر ساعت می توانیم یکی از مواد فوق را که خود به ماده دیگری نیاز ندارد، خریداری کنیم و در یخچال روی بقیه مواد قرار دهیم، یا تعدادی از مواد را از بالای یخچال (از روی بقیه ی مواد) برداریم و با استفاده از همه ی آنها ماده ی جدیدی بسازیم و آن را در یخچال روی بقیه ی مواد قرار دهیم.

برای مثال اگر مواد درون یخچال به ترتیب از پایین به بالا آب مقطر، توت فرنگی، پودر ژله، خامه و شکلات باشد، می توانیم خامه و شکلات را برداریم و با استفاده از آنها خامه ی شکلاتی درست کنیم، در حالی که نمی توانیم آب مقطر، توت فرنگی و پودر ژله را برداریم و ژله ی میوه ای درست کنیم چون این مواد بالای یخچال قرار ندارند.

اگر در ابتدا یخچال خالی باشد، به چند طریق می توان با استفاده از این یخچال کیک را درست کرد؟

الف) ۲۸۸ (ب) ۳۲۰ (ج) ۴۲۰ (د) ۵۱۲ (ه) ۴۸۰

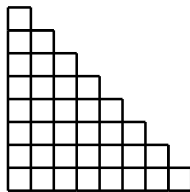


۳۵) در شکل روبه رو، ۵ عدد میخ مشاهده می کنید که با تعدادی کش به هم متصل شده اند. به چند طریق می توان ۵ تا از کش ها را انتخاب کرد، به طوری که هر میخ، دقیقاً به دو کش انتخاب شده وصل باشد؟

الف) ۸۱ (ب) ۸ (ج) ۴۲ (د) ۶ (ه) ۲۱

۳۶) دو عدد a و b را در مبنای ۲ در نظر بگیرید. عدد a را یکی یکی زیاد می کنیم. در هر بار زیاد کردن اگر رقم i ام عدد a در نمایش مبنای دوی آن تغییر کرد، 2^i تا به عدد b اضافه می کنیم (رقم سمت راست، رقم شماره ی ۰ محسوب می شود). در ابتدا دو عدد a و b صفر هستند. پس از تعدادی بار زیاد کردن عدد a ، عدد b برابر ۹۶ شده است. عدد a را چند بار زیاد کرده ایم؟

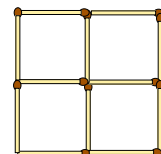
الف) ۱۵ (ب) ۱۸ (ج) ۲۲ (د) ۳۶ (ه) ۴۸



۳۷) مهره ی «رخ» در شطرنج، مهره ای است که تمامی خانه هایی که هم سطر، یا هم ستون با خودش باشند را تهدید می کند. جدول پلکانی روبه رو را در نظر بگیرید. به چند طریق می توان ۷ مهره ی «رخ» را در این جدول گذاشت، به طوری که هیچ دو مهره ای هم دیگر را تهدید نکنند؟

الف) ۹۸۴ (ب) ۲۵۵ (ج) ۶۴۰ (د) ۲۸۲ (ه) ۳۵

۳۸) شکل زیر از ۱۲ چوب کبریت تشکیل شده است. به چند طریق می توان ۸ تا از این چوب کبریت ها را برداشت، به طوری که هیچ دو چوب کبریتی از چهارتای باقی مانده به هم وصل نباشند (در هیچ نقطه ای اشتراک نداشته باشند)؟



الف) ۴۱ (ب) ۷۱ (ج) ۶ (د) ۸۱ (ه) ۵

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۳۹) یک عدد با تعداد دلخواهی عدد ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. می توان تعدادی از ارقام این عدد را از سمت چپ به سمت راست منتقل کرد (مثلاً $۱۱۲۲۲ \Leftarrow ۲۲۱۱۲$). با تکرار این عمل تعدادی عدد به دست می آیند. اگر عدد اولیه از همه آن ها کوچکتر بود آن را عددی خوب می نامیم.

چند عدد خوب ۵ رقمی وجود دارند؟

الف) ۳۲ ب) ۱۰ ج) ۸ د) ۶ ه) ۲۰

۴۰) ۴ زوج وارد رستورانی می شوند. درون رستوران یک میز مربعی وجود دارد که پشت هر ضلع آن ۲ صندلی وجود دارد. این ۴ زوج به چند طریق می توانند دور این میز بنشینند به طوری که، هر نفر کنار زوج خود باشد (یعنی با او در یک ضلع بنشیند) یا دقیقاً روبه روی او باشد؟ (دقت کنید که میز قابل چرخاندن نیست و هر دو نفری با هم متفاوت هستند).

الف) ۱۴۴ ب) ۵۷۶ ج) ۶۶۸ د) ۱۱۷۲ ه) ۱۵۳۶

«موفق باشید»

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

به نام خدا

پاسخ تشریحی

مرحله اول هجدهمین دوره المپیاد کامپیوتر

سال ۱۳۸۶

❖ این پاسخها با تلاش همیاران و اعضای کمیته ی ملی المپیاد کامپیوتر فراهم شده اند و دور از انتظار نیست که کمبودها و خطاهایی در آن وجود داشته باشد. هرگونه پیشنهاد اصلاح یا تکمیل این پاسخها را از طریق سامانه ی اینترنتی <http://www.inoi.ir> به اطلاع کمیته ی ملی المپیاد کامپیوتر برسانید.

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱) گزینه ی (ب) درست است.

برای محاسبه ی حاصل جمع خواسته شده تعداد دفعاتی که هر عدد در جمع بکار رفته را محاسبه می کنیم. این تعداد برابر است با تعداد زیرمستطیل هایی که آن عدد را شامل می شود.

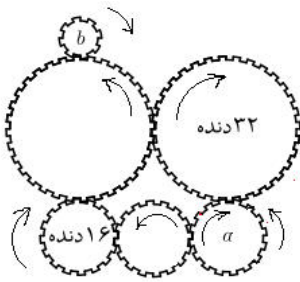
به علت تقارن موجود، تعداد زیرمستطیل هایی که ۵ را شامل می شوند با تعداد زیرمستطیل های دارای ۵- برابرند. پس این دو خانه روی هم تاثیری در حاصل جمع نهایی ندارند. برای ۲ و ۲- هم همین شرایط برقرار است. تعداد زیرمستطیل های شامل خانه ی ۱ برابر است با: $2 \times 4 = 8$ (۲ انتخاب برای ضلع پایین مستطیل و ۴ انتخاب برای ضلع راست آن وجود دارد).

پس حاصل جمع مورد نظر برابر ۸ است.

(۲) گزینه ی (ه) درست است.

اگر چرخ دنده ای را به اندازه ی X دنده در جهتی (ساعتگرد یا پادساعتگرد) بچرخانیم، چرخ دنده ی مجاور آن به اندازه X دنده در خلاف آن جهت می چرخد.

مطابق شکل، چرخ دنده a هم باید X دنده ساعتگرد بچرخد هم X دنده پادساعتگرد. پس هرگز نمی چرخد.



(۳) گزینه ی (د) درست است.

از شهر ۴ به ۵ تنها یک مسیر وجود دارد که همان جاده ی یک طرفه از ۴ به ۵ است. برای هر شهر $1 \leq i \leq 3$ باید بین i و دقیقن یکی از شهرها با شمارهای بزرگتر جاده رسم کرد. یعنی به $5-i$ طریق می توان جاده رسم کرد که دقیقن یک مسیر از i به ۵ وجود داشته باشد. پس تعداد کل حالت ها $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ است.

(۴) گزینه ی (ج) درست است.

با توجه به شرط ۱، از هر شهر دقیقن یک جاده ی یک طرفه خارج می شود. پس مجموع جاده های ورودی و خروجی شهر ۱ دقیقن ۱ است. مجموع جاده های ورودی و خروجی شهر ۲ حداکثر ۲، شهر ۳ حداکثر ۳ و شهر ۴ حداکثر ۴ است.

پس تنها در صورتی مجموع تعداد جاده های ورودی و خروجی شهر ۴ بیشتر از ۳ می شود که از شهرهای ۱ و ۲ و ۳ جاده هایی به سمت ۴ وجود داشته باشد و از ۴ یک جاده به ۵ و تنها در حالتی مجموع جاده های ورودی و خروجی شهر ۵ بیشتر از ۳ می شود که هر ۴ شهر با یک جاده ی یک طرفه مستقیم به آن متصل باشند.

پس این ۲ حالت را از ۲۴ حالت جواب مساله ی قبل کم می کنیم و جواب ۲۲ می شود.

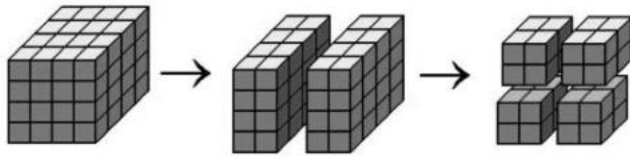
(۵) گزینه ی (ج) درست است.

اگر هیچ کدام از ۴ حرکت اول را انتخاب نکنیم (۴ جهت اصلی) روبات همیشه روی مبدا مختصات باقی می ماند و اگر فقط یکی از آن ها را انتخاب کنیم همیشه روی محورها حرکت خواهد کرد. کم ترین قیمت خریدن ۲ تا از ۴ جهت اصلی، ۴۰۰۰۰ تومان یعنی حرکت به چپ و پایین است.

با این ۲ حرکت روبات فقط می تواند ناحیه ی سوم را طی کند. از بین تقارن ها کمترین قیمت برابر ۱۰۰۰۰ تومان است که مربوط به تقارن نسبت به $y = -x$ است.

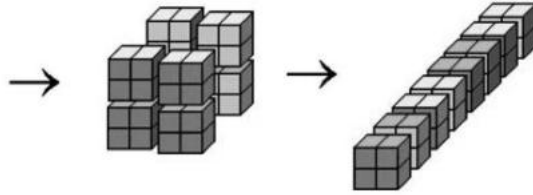
حالا با حرکت به چپ و پایین به هر مختصاتی که برسد به قرینه ی آن نسبت به $y = -x$ نیز می رسد و می تواند از آنجا خود را دوباره به مبدا مختصات برساند. به این ترتیب همه ی مختصات را می تواند طی کند. چون همه ی انتخاب حرکت ها کمینه بود کمترین قیمت روبات ۵۰۰۰۰ تومان می شود.

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

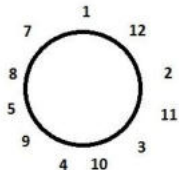


۶ گزینه ی (ب) درست است.

در این شکل مکعبی 1×1 وجود دارد که هیچ کدام از ۶ وجه آن دیده نمی شود. یعنی از هر ۶ وجه، به مکعب 1×1 دیگری اتصال دارد. برای جدا کردن چنین مکعبی به ۶ عمل برش نیاز است. پس دست کم ۶ برش لازم داریم. به ترتیب مقابل با ۶ برش به خواسته ی مساله می رسیم:



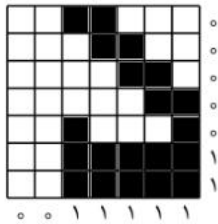
مشخص است که با دو برش نهایی می توان کار را تمام کرد.



۷ گزینه ی (ب) درست است.

به ازای هر عدد مانند a حداکثر ۲ نفر a تا شیرینی برمی دارند (خود شخص با شماره a و شخص سمت چپش). پس دست کم ۶ شماره وجود دارد که به تعداد آن ها شیرینی برداشته می شود.

در حالت نشستن مشخص شده، به ازای اعداد ۷ تا ۱۲ هر بار ۲ بار شیرینی برداشته می شود که با توجه به شرایط بالا حداکثر تعداد است: $2 \times (7 + 8 + \dots + 12) = 14$



۸ گزینه ی (ج) درست است.

در ۵ ستونی که به آنها ۱ نسبت داده شده، در هر ستون دست کم ۴ تا ۱ و در مجموع حداقل ۲۰ تا ۱ باید وجود داشته باشد. از طرفی برای ۵ سطری که به آنها ۰ نسبت داده شده باید در مجموع دست کم ۲۰ تا ۰ وجود داشته باشد یعنی حداکثر $29 = 49 - 20$ تا ۱ در جدول داریم.

(با چرخاندن جدول و تبدیل ۱ها به ۰ و برعکس به حالت حداکثر می رسیم)

۹ گزینه ی (ج) درست است.

تعداد تغییرات رقم یکان، دهگان و صدگان را بررسی کرده و سپس مجموع آنها را محاسبه می کنیم:

• یکان: $926 - 233 = 693$

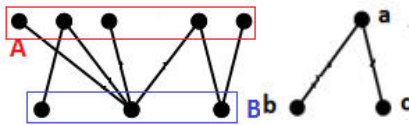
• دهگان: $92 - 23 = 69$

• صدگان: $9 - 2 = 7$

در نتیجه مجموع تغییرات برابر است با: $693 + 69 + 7 = 769$

۱۰ گزینه ی (ج) درست است.

شکل سوال به صورت روبرو قابل ترسیم است:



هیچ کدام از نقطه های بخش A نمی توانند با هیچ یک از نقطه های بخش B هم رنگ باشند. (چرا؟)

دو نقطه ی b و c را در بخش A و نقطه ی a را در بخش B می گذاریم. پس حداکثر اختلاف تعداد بخش (رنگ) ها $3 = 7 - 4$ می شود.

۱۱ گزینه ی (ه) درست است.

چون نفر دهم کلاس ۱۵ گرفته دست کم ۱۰ نفر نمره ی بالای ۱۰ دارند. نشان می دهیم ۲۰ نفر دیگر، همه می توانند نمره ی زیر ۱۰ گرفته باشند.

مجموع نمرات دانش آموزان $12 \times 30 = 360$ است و دست کم یک نفر نمره ی ۲۰، یک نفر ۵ و یک نفر ۱۵ گرفته است: $15 + 5 + 20 = 40$

فرض می کنیم ۱۹ نفر نمره ی ۹ گرفته باشند: $19 \times 9 = 171$

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

پس باید ۸ نفر دیگر با نمره ی بالای ۱۵ داشته باشیم که در مجموع $360 - (171 + 40) = 149$ نمره آورده باشند. حالتی که در آن ۵ نفر ۱۹ و ۳ نفر ۱۸ گرفته باشند این شرط را نیز تامین می کند.

(۱۲) گزینه ی (الف) درست است.

دایره ها به گونه ای تقسیم شده اند که یکی از کمان های کامل آنها مسیری با ۴ پاره خط دارد و کمان دیگر ۳ تا. از هر دایره مسیر ۳ خطی را انتخاب می کنیم. پس در کل ۱۱ جاده را می پیماییم. از ۷ تا از نقاط تقاطع دایره ها ۲ جاده برای انتخاب وجود دارد و از ۴ تای آنها ۳ جاده. پس طبق اصل ضرب تعداد روش های رسیدن از A به B با کمترین تعداد جاده $3^4 \times 2^7$ می شود.

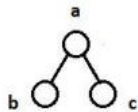
(۱۳) گزینه ی (ج) درست است.

اگر با فشردن یک کلید عدد نمایشگر زیاد شد، یعنی لامپ آن خاموش بوده و حالا روشن است و نیازی به فشردن دوباره ی آن کلید نیست و اگر عدد کم شد باید یک بار دیگر آن را فشار دهیم. بنابراین اگر X چراغ خاموش داشته باشیم، به ازای هر کدام یک بار باید کلیدی را فشار دهیم. همچنین $2(n - x)$ بار باید کلید لامپ های را فشار دهیم. تعداد کل حرکات $2(n - x) + x = 2n - x$ بار است. اگر $x = 0$ باشد همه ی لامپ ها روشن هستند و نیازی به هیچ تغییر وضعیتی نیست. پس حداکثر تعداد مرحله ها، به ازای $x = 1$ بدست می آید و $2n - 1$ است.

(۱۴) گزینه ی (ج) درست است.

به دایره هایی که هیچ دایره ای زیر آنها نیست "میوه" می گوئیم.

با تعیین وضعیت میوه ها، رنگ بقیه ی دایره ها منحصر به فرد تعیین می شود. (چرا؟)



شکل مقابل را در نظر بگیرید. برای b و c، ۳ رنگ وجود دارد. در صورتی که رنگ آنها یکی شود، a هم باید با آنها هم رنگ

باشد و در غیر این صورت باید به رنگ سوم در آید.

در شکل ۶ میوه داریم پس طبق اصل ضرب به 3^6 حالت می توان شکل را رنگ کرد.

(۱۵) گزینه ی (ه) درست است.

$2143 \rightarrow$ دوران $\rightarrow 3214 \rightarrow 540$ بار "به علاوه ۲" $\rightarrow 2134$

$1111 \rightarrow$ دوران $\rightarrow 10011 \rightarrow 4450$ بار "به علاوه ۲" $\rightarrow 1111$

$121212 \rightarrow 4550$ بار "به علاوه ۲" $\rightarrow 12112 \rightarrow$ دوران $\rightarrow 21211 \rightarrow$ دوران $\rightarrow 12121$

$103 \rightarrow$ دوران $\rightarrow 31 \rightarrow 7$ بار "به علاوه ۲" $\rightarrow 45$

(۱۶) گزینه ی (الف) درست است.

برای k جعبه، با استقرار روی k ثابت می کنیم با 2^{k-1} روش می توان آن ها را روی زمین قرار داد.

پایه ی استقرار برای ۱ جعبه برقرار است.

فرض کنیم حکم برای k جعبه صحیح باشد. برای $k+1$ جعبه، حالت های مختلف با k جعبه را می سازیم. برای هر کدام از این حالت ها، جعبه ی $k+1$ ام را می توان سمت راست همه، روی زمین گذاشت و یک ستون جدید ساخت یا روی سمت راست ترین ستون آن قرار داد. بدین ترتیب حالت تکراری نخواهیم داشت و تمامی حالات قابل ساخت هستند. (چرا؟)

پس به ازای هر روش چیدن k جعبه، ۲ روش برای چیدن $k+1$ جعبه به دست آوردیم. و تعداد روش ها $2^k \times 2^{k-1} = 2^{2k-1}$ است. در نتیجه جواب مساله برای $k=8$ ، ۱۲۸ می شود.

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱۷) گزینه ی (الف) درست است.

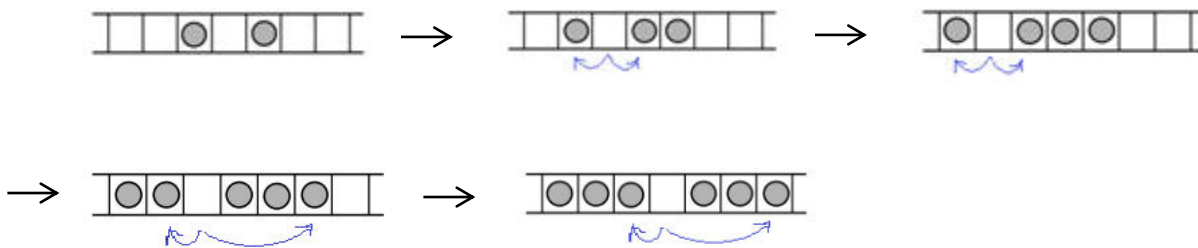
در این صورت میانگین رتبه ی همه ی دانش آموزان از ۹ بیشتر می شود و سروش اول می شود:

ریاضی	۱	۲	۳		۸	۳۰	۲۹		۲۲		۱۰
فیزیک	۳۰	۲۹	۲۸		۲۳	۱	۲		۲۲		۱۰

مجموع رتبه های سروش ۱۸ است. پس کسانی که رتبه ی آن ها از او بهتر می شود باید مجموع رتبه های شان حداکثر ۱۷ باشد. یعنی همه ی آن ها باید از بین کسانی باشند که در ریاضی و فیزیک رتبه ی کمتر یا مساوی ۱۶ آورده باشند. یکی از این افراد هم سروش است. یعنی از بین آن ها ۱۵ نفر هستند که می توانند رتبه ی بهتر از سروش بیاورند. پس رتبه ی سروش حداکثر ۱۶ است.

(۱۸) گزینه ی (ب) درست است.

شکل ۱ و ۴:



اگر در هر مرحله مجموعه ی خانه های دارای مهره را در نظر بگیریم بازه ای را تشکیل می دهند که یک خانه ی خالی در بین آنها است. با استقرا این ادعا را اثبات می کنیم:

پایه ی استقرا: پس از حرکت اول دو خانه داریم که از یکدیگر یک خانه فاصله دارند.

گام استقرا: هر خانه ای که در این مرحله انتخاب شود ابتدا دو خانه را اضافه می کند که با این کار بازه ای با طول بزرگتر تشکیل می شود که خانه ی خالی ندارد (در یکی از جهت ها خانه ی خالی پر می شود). سپس مهره ی خانه ی انتخاب شده حذف می گردد که چون این خانه در دو سر بازه ی جدید نیست همواره بازه ای با یک خانه ی خالی باقی می ماند.

با این نتیجه می توان دریافت که هیچ گاه به شکل های ۲ و ۳ نمی توان رسید.

(۱۹) گزینه ی (ج) درست است.

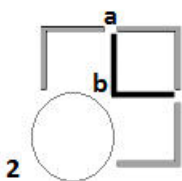
برای اینکه یک زیرمستطیل شامل خانه ی (5, 7) باشد هر ضلع آن در بازه ی مورد پذیرش خود انتخاب شود

در نتیجه برای ضلع سمت راست زیرمستطیل ۷ حالت، ضلع چپ ۶ حالت، ضلع بالا ۸ حالت و ضلع پایین ۳ حالت داریم. پس طبق اصل ضرب $1008 = 7 \times 6 \times 8 \times 3$ زیرمستطیل شامل خانه ی (5, 7) وجود دارد.

(۲۰) گزینه ی (الف) درست است.

ضلع ab به چهار حالت مختلف می تواند توسط شکلی که در مساله بیان شده پر شود. شکل زیر یکی از این حالات را نمایش می دهد که خط های طوسی نشان دهنده ی حالت هایی است که منحصر به فرد تعیین می شود و دایره ها نیز می توانند به ۲ حالت مختلف پر شوند.

۳ حالت دیگر نیز به همین ترتیب هر کدام به ۲ طریق می توانند جدول را پر کنند. در نتیجه تعداد حالات کل برابر

است با: $2 \times 4 = 8$ 

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۱) گزینه ی (ب) درست است.

با استقرا روی n ثابت می کنیم که به 2^{n-1} حالت می توان n لامپ را روشن کرد. لامپ ها را از چپ به راست از ۱ تا n شماره گذاری می کنیم. پایه ی استقرا: برای $n = 1$ برقرار است: تنها لامپ را روشن می کنیم.

گام استقرا: فرض کنیم برای $n - 1$ لامپ، 2^{n-1} طریق وجود داشته باشد. برای n لامپ، لامپ شماره ی n را در نظر نمی گیریم. به ازای هر روش در $n - 1$ ، ۲ حالت متناظر در n ارائه می دهیم. در هر روش، هرگاه لامپ $n - 1$ ام روشن شد، ۲ انتخاب داریم: یا اول لامپ n را روشن می کنیم بعد دنباله حرکت های $n - 1$ لامپ را ادامه می دهیم یا دنباله را ادامه داده و در نهایت به عنوان آخرین لامپ، لامپ n ام را روشن می کنیم.

در صورتی که هیچ لامپی با شماره ی کمتر از $n - 1$ خاموش نباشد، تنها یک انتخاب داریم (روشن کردن لامپ n ام) که متناظر با این دنباله حرکت است: $(1, 2, 3, \dots, n - 1, n)$. این دنباله را هم متناظر با دنباله ی جدید $(n, n - 1, n - 1, \dots, 2, 1)$ در نظر می گیریم. پس به ازای هر دنباله برای $n - 1$ لامپ، ۲ دنباله برای n لامپ معرفی کردیم. بنابراین با 2^{n-1} روش می توانیم n لامپ را روشن کنیم و جواب مساله ۵۱۲ می شود.

(۲۲) گزینه ی (ج) درست است.

تعداد روش های جفت کردن خانه های یک سطر و ساختن جفت ستون $\binom{4}{2} = 6$ است. اگر جفت ستون های دو سطر برابر باشند، یک چهارخونه تولید می شود. هر سطر حداقل یک خانه ی مشکی دارد (۱۰ خانه). هر خانه ی مشکی که به یک سطر اضافه کنیم، حداقل یک جفت ستون می سازد. پس حداکثر می توانیم ۶ خانه ی مشکی دیگر به جدول اضافه کنیم تا هیچ جفت تکراری و در نتیجه هیچ چهارخونه ای ساخته نشود (اگر در سطری ۳ خانه سیاه شود، ۳ جفت ستون ساخته می شود و تعداد خانه های سیاه را کم می کند). یعنی حداکثر ۱۶ خانه ی جدول سیاه می شود.

(۲۳) گزینه ی (ب) درست است.

$$\frac{\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{4!} = 105$$

تعداد دفعاتی که هر طول مجاز برای خط چین ها، در کل جفت بندی ها تکرار شده اند را محاسبه می کنیم.

به ازای مشخص شدن طول یک پاره خط جفت کننده، $\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!} = 15$ حالت برای کامل کردن جفت بندی وجود دارد.

می توان خط چین به طول ۱ را به ۷ حالت، به طول ۲ را به ۶ حالت و ... به طول ۷ را به ۱ حالت رسم



کرد (شکل روبرو)

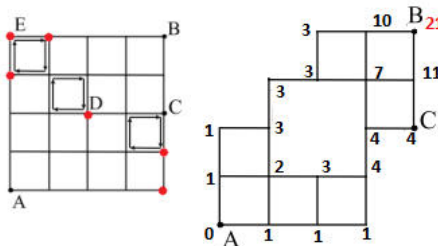
پس مجموع طول جفت بندی ها ۱۲۶۰ می شود که از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$(7 \times 1 + 6 \times 2 + 5 \times 3 + 4 \times 4 + 3 \times 5 + 2 \times 6 + 1 \times 7) \times \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!} = 84 \times 15$$

$$\frac{1260}{105} = 12$$

(۲۴) گزینه ی (ب) درست است.

دزد فقط مجاز به حرکت به سمت راست و بالا است. هر کدام از راس های مسیر پلیس ها که با تعداد دقایق حرکت دزد تا آن راس به پیمانته ی ۴ همپنهشت باشند، از جدول حذف می کنیم. به این ترتیب به جدول روبه رو می رسیم و تعداد روش های رسیدن به نقطه B در این شکل را با اصل جمع محاسبه می کنیم.



مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۵) گزینه ی (الف) درست است.

برای هر کدام از اجناس فروشگاه ۳ حالت در نظر می گیریم: در مجموعه ی A یا در مجموعه ی B یا خارج از قاعده ی پیش بینی.

هیچ کدام از دو مجموعه ی A و B هم نباید خالی باشند. پس طبق اصل شمول و عدم شمول داریم: $3^8 - 2^8 - 2^8 + 1 = 6050$

(۲۶) گزینه ی (د) درست است.

ابعاد مجموعه ی پریرها 1×7 و ابعاد دوشاخه ها 1×8 است. پس باید بخشی از یک دوشاخه بیرون بماند. حالت های زیر پیش می آید:

- فقط یک قسمت از یک دوشاخه بیرون بماند:



- از دو طرف پریرها ۲ قسمت از ۲ دوشاخه بیرون بزند:



با در نظر گرفتن حالت های متقارن (در مجموع ۷ حالت) جواب مساله $6 \times 7 = 42$ می شود.

(۲۷) گزینه ی (د) درست است.

- ارتفاع نورافکن وسط ۱۰ باشد: در اینصورت، این نورافکن همه ی جعبه ها را پوشش می دهد و ۲ نورافکن دیگر به $10 \times 10 = 100$

روش می توانند قرار گیرند.

- ارتفاع آن کمتر از ۱۰ باشد: جعبه های اول و آخر (۱ و ۲۰) در تاریکی می مانند پس ۲ نورافکن کناری باید ارتفاع حداقل ۵ داشته

باشند که در اینصورت تمام جعبه ها روشن می شوند. پس برای هر ارتفاع نورافکن وسط بین ۱ تا ۹، نورافکن های کناری $6 \times 6 = 36$ حالت دارند.

پس در مجموع $100 + 9 \times 36 = 424$ روش وجود دارد.

(۲۸) گزینه ی (ه) درست است.

ادعا می کنیم برای هر n نفر اول برنده ی بازی است.



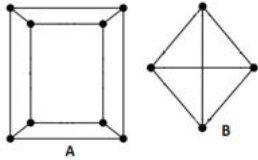
۶ خانه ی پایانی (سمت راست) نوار را (در صورت وجود) در نظر می گیریم. در صورتی که مهره

در هر کدام از خانه های سیاه قرار گرفت، نفر اول حرکت می کند و مهره را به خانه ی n ام

می برد. در غیر اینصورت نوبت را به نفر دوم واگذار می کند. چون نمی توانیم دوبار عمل واگذاری داشته باشیم نفر دوم مجبور به حرکت است و

بالاخره مهره را در یکی از خانه های سیاه قرار می دهد و نفر اول برنده می شود.

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



(۲۹) گزینه ی (د) درست است.

شکل سوال را به صورت روبه رو رسم می کنیم:

در شکل B شرایط لازم برای اجرای "عمل" وجود ندارد. پس هر ۶ تکه خط آن باقی می ماند.

تعداد تکه خط های متصل به هر نقطه را درجه ی آن نقطه می نامیم. این "عمل"، زوجیت درجه ی نقطه ها را



تغییر نمی دهد. درجه ی همه ی ۸ نقطه در شکل A فرد (۳) است. پس در پایان هم درجه ی آن ها فرد یعنی دست کم ۱

خواهد بود. بنابراین از این شکل هم دست کم ۴ خط باقی خواهد ماند.

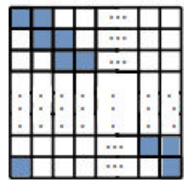
(۳۰) گزینه ی (د) درست است.

در هر مقایسه بین ۲ عدد، عدد بزرگتر قطعی کوچکترین عدد نیست. پس می توان در هر بار مقایسه یکی از اعداد را حذف کرد.

در هر مرحله اعداد را دو به دو با هم مقایسه می کنیم و نصف اعداد حذف می شوند. پس در $\lceil \log_2 1386 \rceil = 11$ مرحله به کوچکترین عدد می رسیم. با این روش، ۱۳۸۵ مقایسه انجام داده ایم (با استقرا ثابت کنید برای پیدا کردن کوچکترین عدد در بین n عدد $n-1$ مقایسه لازم و کافی است).

در اینصورت دومین کوچکترین عدد، در مقایسه با کوچکترین عدد حذف شده است. کوچکترین عدد، با ۱۱ عدد در ۱۱ مرحله مقایسه شده است. کوچکترین عدد از بین این ۱۱ عدد را با ۱۰ مقایسه پیدا می کنیم. در هر روش از مقایسه ها حداقل ۱۱ وزنه با کوچکترین وزنه مقایسه می شوند. (چرا؟)

پس در مجموع با $1385+10=1395$ مقایسه به دو عدد کوچکتر می رسیم. این عدد در گزینه ها وجود ندارد ولی نزدیکترین گزینه به آن (د) یعنی ۱۳۹۶ است.



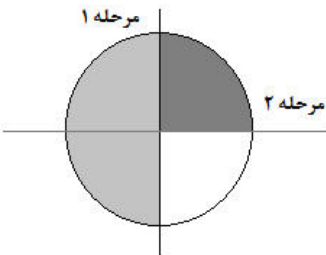
(۳۱) گزینه ی (ه) درست است.

$2n$ تا از بزرگترین اعدادی که قرار است در جدول قرار داده شود را در خانه های علامت دار جدول روبرو می گذاریم.

از طرفی چون از هر سطر باید ۲ خانه شامل بزرگترین اعداد را علامت بزنیم، حتمن دست کم $2n$ خانه علامت زده می شود. پس $2n$ خانه لازم و کافی است.

(۳۲) گزینه ی (الف) درست است.

با استفاده از الگوریتم جست و جوی دودویی پیش می رویم. ابتدا مکان ۱ تا ۵۰ را مورد سوال قرار می دهیم. در صورتی که عدد ۱ در بین این ۵۰ مکان بود، کار را با این نیمه ادامه می دهیم و در غیر اینصورت سراغ نیمه ی دیگر می رویم.



با این کار از نامطلوب بودن نیمی از مکان های دور دایره مطمئن می شویم. در ادامه هر سوالی که بپرسیم آن خانه ها تاثیری در جواب دستگاه ندارند. پس می توان از وجودشان صرف نظر کرد (نیمه ی سیاه).

در هر مرحله نیمی از خانه های سفید (و به تعداد مورد نیاز خانه ی سیاه) را می پرسیم و با اطمینان نیمی از سفیدها را کنار می گذاریم. با طی ۷ مرحله ی زیر به عدد ۱ می رسیم: (هر عدد، تعداد خانه های باقی مانده که یکی از آن ها مکان عدد ۱ است را نشان می دهد).

$$50 \rightarrow 25 \rightarrow 13 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

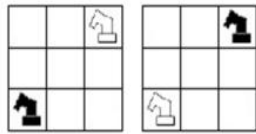
(۳۳) پاسخ در گزینه ها نیست.

وضعیت قرار گیری دو نهنگ نسبت به هم را به ۲ حالت زیر تقسیم می کنیم:

• هم سطر یا هم ستون باشند: در این صورت برای نهنگ سیاه ۶۴ حالت و برای نهنگ سفید ۱۴ انتخاب داریم: $64 \times 14 = 896$

مرحله ی اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

- در ۲ سر قطر یک مستطیل قرار گرفته باشند: تعداد زیرمستطیل های جدول 8×8 برابر است با $\binom{8}{2} \times \binom{8}{2}$ (انتخاب ۲ خط افقی برای ضلع بالا و پایین مستطیل و ۲ خط عمودی برای ضلع چپ و راست آن)



برای هر مستطیل، مهره ها فقط می توانند در ۲ سر قطر غیر اصلی آن (به شکل روبه رو) قرار بگیرند که البته می توانند با هم جابجا شوند. پس در این حالت $1568 = 2 \times \binom{8}{2} \times \binom{8}{2}$ روش برای آنها وجود دارد.

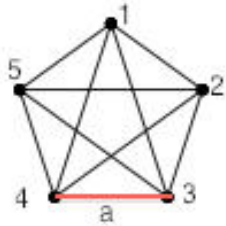
با این توضیحات جواب مساله 2464 می شود که متاسفانه در بین گزینه ها نیست.

(۳۴) گزینه ی (الف) درست است.

اگر یکی از مواد اولیه ی تولید ماده ی a را در یخچال قرار دهیم باید بقیه ی مواد اولیه ی آن را هم اضافه کنیم. پس می توانیم مواد اولیه ی ژله ی توت فرنگی و خامه ی شکلاتی را هر کدام در یک جعبه قرار دهیم و با تعیین کردن ترتیب مواد در جعبه ها، نحوه ی ورودشان را به صورت متوالی تعیین کنیم (۳! و ۲! روش). به ۴! روش می توان نحوه ی ورود جعبه ها به یخچال را تعیین کرد. پس در کل به $4! \times 3! \times 2! = 288$ طریق می توان کیک درست کرد.

(۳۵) گزینه ی (ب) درست است.

ابتدا کش a که رسم نشده است را اضافه می کنیم و در نهایت تعداد حالت هایی که شامل کش a هستند را از جواب کم می کنیم (متمم گیری). هر میخ باید به ۲ کش متصل باشد. برای انتخاب یکی از کش های میخ ۱، ۴ حالت داریم. فرض کنیم سر دیگر کش، میخ i باشد. از بین کش هایی که به i وصل اند یکی انتخاب شده پس ۳ انتخاب وجود دارد و برای میخ های دیگر به همین ترتیب ۲ و



۱ انتخاب داریم. ترتیب انتخاب کش ها اهمیتی ندارد پس کل حالت ها را تقسیم بر ۲ می کنیم. بنابراین $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 12$ حالت برای انتخاب کش ها وجود دارد.

کش a در $3 \times 2 = 6$ تا از حالت ها انتخاب شده است. (۳ انتخاب برای کش متصل به میخ ۳ و ۲ انتخاب برای کش متصل به ۴)

بنابراین به $12 - 6 = 6$ راه می توان کش انتخاب کرد.

(۳۶) گزینه ی (ج) درست است.

عدد a را در مبنای ۲ نمایش می دهیم و عدد b را در مبنای ۱۰: $(10110)_2 = 22$

a	1	10	11	100	111	1000	1111	10000	10011	10100	10110
b	1	4	5	12	17	32	49	80	85	92	96

(۳۷) گزینه ی (ب) درست است.

ادعا می کنیم $k-1$ مهره ی رخ را می توان به $2^k - 1$ روش در پلکانی با k ردیف پله چید. این ادعا را با استقرا ثابت می کنیم.

پایه ی استقرا: برای $k=1$ حکم برقرار است.

گام استقرا: فرض کنیم برای $k-1$ ردیف پله، $2^{k-1} - 1$ روش برای چیدن $k-2$ رخ وجود داشته باشد.

برای k ردیف، بالاترین پله را در نظر می گیریم، دو حالت پیش می آید:

- در این خانه رخ قرار دهیم. در این صورت ستون سمت چپ حذف می شود و طبق فرض استقرا $k-2$ رخ باقی مانده به $2^{k-1} - 1$ حالت چیده می شوند.

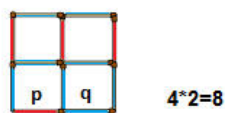
مرحله اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

- در این خانه رخ قرار ندهیم. در اینصورت در هر کدام از $k-1$ ردیف باقی مانده باید یک رخ وجود داشته باشد. چیدن آن ها را از ردیف بالا شروع می کنیم. گذاشتن یک رخ در این ردیف ۲ حالت دارد. برای هر کدام از ردیف های دیگر هم با قراردادن رخ های قبلی، ۲ حالت بیشتر باقی نمی ماند. پس طبق اصل ضرب 2^{k-1} حالت برای چیدن رخ ها وجود دارد.

بنابراین در مجموع $2^k - 1$ راه برای چیدن رخ ها داریم و حکم ثابت شد. پاسخ مساله به ازای $k=8$ ، ۲۵۵ می شود.

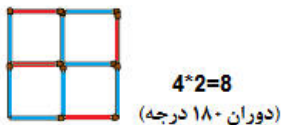
(۳۸) گزینه ی (د) درست است.

حالت های ممکن و تعداد روش هایی که می توان آن ها را دوران داد تا شکل های مجاز بدست آید در شکل های A و B و C نشان داده شده است:

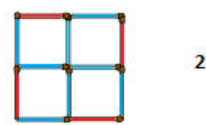


می توان به جای p ، q را انتخاب کرد.

"A"



"B"



"C"

پس در مجموع $18 = 8 + 8 + 2$ روش برای باقی گذاشتن ۴ کبریت مطابق خواسته ی مساله وجود دارد.

(۳۹) گزینه ی (د) درست است.

رقم اول از سمت چپ نمی تواند ۲ باشد. چون تمام اعداد بدست آمده از انتقال از آن کمتر یا مساویند. پس این رقم حتمن ۱ است. اگر ارقام "۱۲" به همین ترتیب در عدد ظاهر شوند بعد از آن همه باید "۱۲" یا "۲۲" باشند. چون اگر "۱۱" باشد $1211x$ با انتقال به $11x12$ تبدیل می شود و اگر "۲۱" باشد $1221x$ با انتقال به $1x122$ می رسد. اعداد زیر ویژگی خواسته شده را دارند:

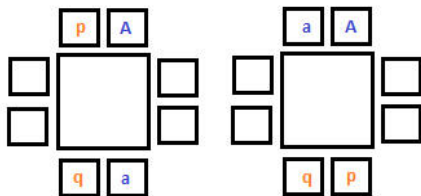
11112 11222 11212
11122 12222 12122

(۴۰) گزینه ی (ه) درست است.

نفر اولی که وارد می شود ۸ انتخاب دارد و همسر او ۲ انتخاب. در هر ۲ حالت یکی از زوجها باید صندلی های p و q را انتخاب کنند و به ۲ روش می توانند بنشینند که انتخاب زوج هم ۳ حالت دارد.

نفر بعدی که وارد شود ۴ انتخاب دارد و همسرش ۲ انتخاب. و تنها زوج باقی مانده هم در صندلی های باقی مانده به ۲ روش می توانند بنشینند.

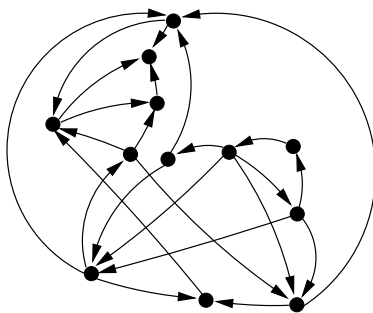
پس پاسخ برابر $1536 = 8 \times 2 \times 3 \times 2 \times 4 \times 2 \times 2$ است.



مرحله ی اول هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱) یک عدد را متفرقه می نامیم هرگاه تمام ارقامش متفاوت باشند و صفر در ارقامش ظاهر نشده باشد. اعداد ۱۲۴، ۴۸۲۱، ۵۹۶۷۸۳، ... مثال هایی از اعداد متفرقه اند. عمل «دوران» روی یک عدد متفرقه به این صورت است که رقم یکان آن عدد را برداشته و در سمت چپ آن عدد قرار می دهیم. مثلاً اعداد ۱۲۴، ۴۸۲۱ و ۵۹۶۷۸۳ با این عمل به ترتیب به اعداد ۴۱۲، ۱۴۸۲ و ۳۵۹۶۷۸ تبدیل می شوند. تمام اعداد سه رقمی متفرقه را روی یک تخته نوشته و سپس عمل «دوران» را روی همه ی این اعداد اعمال می کنیم. جمع اعداد حاصل چه قدر است؟

الف) ۵۵۵۰۰۰ (ب) ۴۰۴۵۹۵ (ج) ۴۹۸۹۴۵ (د) ۴۹۴۵۵۰ (ه) ۴۹۴۹۴۹



(۲) هر سال، هر نهنگی که متوجه شود هیچ نهنگ زنده ای را دوست ندارد، خودکشی می کند. شکل روبرو یک جامعه از نهنگ ها را نشان می دهد. اگر نهنگ A به B پیکان داشته باشد، یعنی A ، B را دوست دارد. چند سال طول می کشد تا همه ی این نهنگ ها خودکشی کنند؟

الف) ۸ (ب) ۹ (ج) ۱۰ (د) ۱۱ (ه) هیچ کدام

(۳) نمایندگان شرکت های تولید کننده ی گوشت، مورد بازجویی قرار گرفتند. اظهارات آنان بدین شرح است:

- شرکت A : شرکت B گوشت فاسد به مردم می دهد.
- شرکت B : شرکت A گوشت فاسد به مردم می دهد.
- شرکت C : شرکت های A و B ، هر دو گوشت فاسد به مردم می دهند.
- شرکت D : از بین شرکت ما و شرکت A حداقل یکی گوشت فاسد به مردم می دهد.

نماینده ی هر شرکتی که از گوشت فاسد استفاده می کند، از آنجا که آدم بدی است، همواره دروغ می گوید. همچنین، نماینده ی هر شرکتی که گوشت سالم به مردم می دهد، همواره راست می گوید. چند شرکت از گوشت فاسد استفاده می کنند؟

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) نمی توان با اطمینان پاسخ گفت.

(۴) می خواهیم در یک جعبه ی مکعبی $n \times n \times n$ ، یک جسم سه بُعدی نامعلوم را قرار بدهیم که:

- دقیقاً از تعداد صحیحی مکعب $1 \times 1 \times 1$ تشکیل شده باشد.
- یک تکه باشد؛ اگر یک نقطه از آن را گرفته و جسم را به سمت بالا بکشیم، به طور کامل بالا بیاید. فرض کنید دو مکعب کوچک $(1 \times 1 \times 1)$ حتی اگر در یک نقطه (مثلاً گوشه) با هم تماس داشته باشند، آن گاه به هم چسبیده اند.
- اگر در جعبه را ببندیم و جعبه را تکان بدهیم، جسم در داخل آن ثابت بماند. می توانید فرض کنید اتصالات جسم (حتی در گوشه ها) بسیار محکم هستند!

حداقل حجم چنین جسمی چند واحد مکعب است؟

الف) $3n - 2$ (ب) $3n - 3$ (ج) $2n$ (د) $2n - 1$ (ه) n

مرحله ی اول هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۵) دو نفر این بازی را انجام می دهند: آن ها در یک جدول $1 \times n$ (یک سطر با n خانه) به نوبت مهره می گذارند. هر خانه ی جدول گنجایش یک مهره را دارد و در ابتدا جدول خالی است. نفر اول در هر حرکت یک مهره سفید و نفر دوم در هر حرکت یک مهره سیاه در یک خانه خالی می گذارند. وقتی مهره ای — مثل A — در جدول قرار می گیرد، اگر مهره ای هم رنگ A — مثل B — در جدول باشد و تمام خانه های بین A و B با مهره هایی با رنگی مخالف رنگ A پر شده باشند، تمام مهره های بین A و B ، هم رنگ A می شوند. با اضافه کردن A به جدول ممکن است دو مهره مانند B در جدول (در دو طرف A) پیدا شوند که شرایط گفته شده را داشته باشند، که در این صورت عمل مذکور را در هر دو مورد انجام می دهیم.

بعد از n حرکت، تمام خانه های جدول پر می شوند و بازی تمام می شود. در این زمان اگر تعداد مهره های سفید درون جدول بیشتر باشد، نفر اول می برد، اگر تعداد مهره های سیاه بیشتر باشد، نفر دوم می برد، و گرنه مساوی می شوند. برای n های بزرگ تر از ۱۰، کدام جملات زیر درست اند؟

(۱) برای n های فرد نفر اول راهکار برد دارد.

(۲) برای n های فرد نفر دوم راهکار برد دارد.

(۳) برای n های زوج نفر اول راهکار برد دارد.

(۴) برای n های زوج نفر دوم راهکار برد دارد.

(۵) برای n های زوج نفر اول راهکار نباختن دارد.

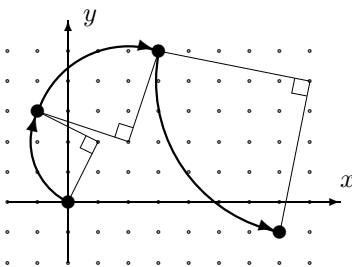
(۶) برای n های زوج نفر دوم راهکار نباختن دارد.

الف) ۱ و ۳ و ۵ ب) ۲ و ۴ و ۶ ج) ۱ و ۴ و ۶ د) ۲ و ۳ و ۵ ه) ۱ و ۵ و ۶

(۶) ۱۳۸۵ نفر روی محور اعداد صحیح ایستاده اند، به طوری که نفر i ام ($1 \leq i \leq 1385$) روی نقطه به طول i قرار گرفته است. هر کدام از این افراد یک سنگ دارد و در یک لحظه همه با هم سنگ شان را به طرف مثبت پرتاب می کنند. بُرد سنگ i ام را با $f(i)$ نشان می دهیم. بدین ترتیب، سنگ نفر i ام بعد از پرتاب در محل $i + f(i)$ قرار می گیرد. می دانیم به ازای هر x ، $f(x)$ برابر است با تعداد «صفر»ها در نمایش مبنای دوی x (سمت چپ ترین رقم در نمایش مبنای دو همواره یک است). به عنوان مثال، $f(13)$ برابر است با ۱، زیرا نمایش مبنای دوی ۱۳ به صورت «۱۱۰۱» می باشد که سه عدد «۱» و یک عدد «۰» دارد.

بعد از این که همه سنگ خود را پرتاب کردند، دورترین سنگ کجا می افتد؟ (بزرگ ترین مکانی که در آن حداقل یک سنگ قرار می گیرد کجاست؟)

الف) ۱۳۸۵ ب) ۱۳۸۶ ج) ۱۳۹۰ د) ۱۳۹۱ ه) ۱۳۹۵



(۷) یک میمون در نقطه ی $(0, 0)$ صفحه ی مختصات قرار دارد. این میمون در هر حرکت می تواند نقطه ای با مختصات صحیح را انتخاب کند که از نقطه ی فعلی اش، فاصله ای بیشتر از ۱۰ واحد نداشته باشد. سپس، حول آن 90° درجه دوران یافته و در نقطه ی جدید قرار بگیرد. نمونه ای از حرکت های میمون را در شکل مشاهده می کنید. این میمون به چند تا از نقطه های زیر می تواند برسد؟

(۲۱, ۳۳) (۱۳, ۲۱) (۵, ۱۳)
(۱۳۸۵, ۲۰۰۷) (۱۰۲۴, ۲۰۴۸) (۵۵, ۲۵۵)

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

مرحله ی اول هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

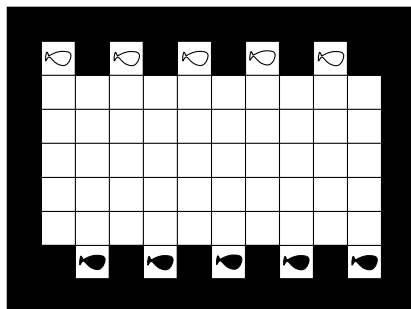
۸) یک جدول 5×5 داریم، که در هر خانه ی آن یک تخم مرغ قرار دارد. می خواهیم تعدادی از این تخم مرغ ها را برداریم. در هر خانه که قرار داشته باشیم یا از آن رد شویم، می توانیم تخم مرغ آن خانه را برداریم. در ابتدا از یکی از خانه های جدول شروع به حرکت می کنیم. در هر مرحله دقیقاً یک حرکت انجام می دهیم و در هر حرکت به یکی از خانه های مجاور (دارای ضلع مشترک با خانه ی فعلی) می رویم. اگر در مرحله ای جهت حرکت ما تغییر کند (از افقی به عمودی یا از عمودی به افقی)، باید ۱ تومان جریمه بدهیم. اگر ما ۵ تومان پول داشته باشیم، حداکثر چند تخم مرغ می توانیم برداریم؟

الف) ۲۰ (ب) ۲۱ (ج) ۲۲ (د) ۲۴ (ه) ۲۵

۹) ۱۲ نهنگ که قصد خودکشی دارند، در یک صف قرار گرفته اند. یک روز صبح نهنگ ها تصمیم گرفتند که از آن روز به بعد، صبح هر روز، اگر نهنگ زنده ای در صف وجود داشته باشد، تعدادی (ناصفر) از این نهنگ ها خودکشی کنند. در صورتی که بعد از خودکشی صبح یک روز، هنوز نهنگ زنده ای در صف وجود داشت، همان شب هم تعدادی (ناصفر) خودکشی می کنند. واضح است که نهنگ ها به همان ترتیبی که در صف ایستاده اند خودکشی می کنند. این ۱۲ نهنگ به چند طریق می توانند خودکشی کنند، به طوری که در پایان تعداد نهنگ هایی که در صف خودکشی کرده اند، با تعداد نهنگ هایی که در شب خودکشی کرده اند برابر باشد؟

الف) ۷۲۰ (ب) ۹۲۴ (ج) ۴۶۲ (د) ۳۶۰ (ه) ۱۴۴۰

۱۰) در شکل زیر هر کدام از مهره های داخل صفحه یک مهره ی ماهی است. مهره ی ماهی در صفحه شُر می خورد. یعنی در یکی از ۴ جهت حرکت می کند تا به یک خانه ی پُر برسد و در خانه ی خالی قبل از خانه ی پُر متوقف می شود. قوانین بازی به شرح زیر است:



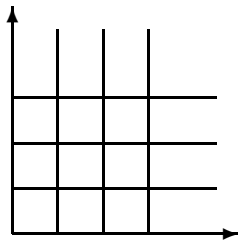
- سفید برنده است اگر یک مهره اش را به سطر آخر (پایین) برساند.
- سیاه برنده است اگر یک مهره اش را به سطر اوّل (بالا) برساند.
- خانه های سیاه و خانه هایی که مهره ای در آن ها هست، پر هستند.
- هر کس که نوبتش است، باید یکی از مهره هایش را جابه جا کند.
- کسی حق ندارد عکس حرکت قبش را انجام دهد.
- سفید اوّل بازی می کند.

اگر هر دو نفر به بهترین نحو بازی کنند، کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

- الف) سفید، با انجام حداکثر ۴ حرکت می برد.
- ب) سیاه، می تواند طوری بازی کند که سفید نتواند در چهار حرکت ببرد ولی سفید با حداکثر شش حرکت می برد.
- ج) سیاه، با انجام حداکثر ۴ حرکت می برد.
- د) سفید، می تواند طوری بازی کند که سیاه نتواند در چهار حرکت ببرد ولی سیاه با حداکثر شش حرکت می برد.
- ه) هیچ کدام

مرحله ی اول هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

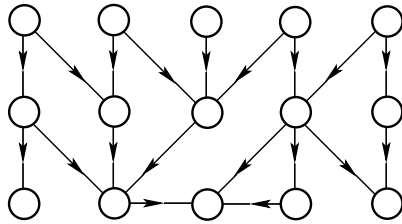
(۱۱) ربع اول صفحه ی مختصات را مطابق شکل به خانه های 1×1 تقسیم می کنیم. به چند طریق می توان اعداد ۱ تا ۱۴ را در ۱۴ تا از این خانه ها نوشت به طوری که شرایط زیر برقرار باشند:



- در خانه ی $(1, 1)$ (پایین ترین و سمت چپ ترین خانه) عدد ۱ نوشته شده باشد.
- اگر در خانه ای عددی نوشته شده بود، دقیقاً در یکی از دو خانه ی پایینی یا سمت چپی آن خانه، عددی نوشته شده باشد.
- اگر در خانه ی (x, y) یعنی خانه ی سطر x ام و ستون y ام، عدد $i < 1$ نوشته شده بود، هر یک از اعداد ۱ تا $i - 1$ ، در خانه ای مثل (x', y') قرار داشته باشند که $1 \leq x' \leq x$ و $1 \leq y' \leq y$.

الف) ۸۱۹۲ (ب) ۱۶۳۸۴ (ج) ۲۴۵۷۵ (د) ۲۴۵۷۶ (ه) هیچ کدام

(۱۲) در شکل روبرو، ۱۵ دفتر اداری یک سازمان نشان داده شده است. هر دفتر، تعدادی دفتر زیردست دارد. این ارتباط در شکل با پیکان هایی از دفترها به دفترهای زیردستشان نمایش داده شده است. هر دفتر، بدین صورت عمل می کند: هر نامه ای را که دریافت می کند، برای هر کدام از دفترهای زیردستش کپی می کند و می فرستد (دفترهای زیر دست هم همین کار را انجام می دهند). دفترهای ردیف بالا از چپ به راست به ترتیب شماره های ۰ تا ۴ را دارند. طی ۲۰۰۷ روز، این دفترها به این صورت کار کرده اند که در روز i ام $(1 \leq i \leq ۲۰۰۷)$ از بیرون سازمان به دفتر k ام ردیف بالا $(0 \leq k \leq ۴)$ ، $i + k$ نامه می رسد.

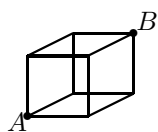


اگر پس از انجام همه ی این عملیات اداری طی این ۲۰۰۷ روز، مجموع تعداد نامه های دریافت شده توسط اداره های سطر پایینی، n باشد، باقی مانده ی تقسیم عدد n بر ۵ کدام است؟

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

(۱۳) یک جوجه در گوشه ی پایینی و سمت چپ مستطیلی به طول ۹۹ و عرض ۵۹ قرار گرفته است. این جوجه می خواهد با تعدادی «حرکت»، خود را به گوشه ی بالا سمت راست این مستطیل برساند. جوجه در هر حرکت می تواند به اندازه ی توانی از دو (یعنی ۱ یا ۲ یا ۴ یا ... واحد) به سمت راست یا بالا حرکت کند، به شرط آن که از جدول خارج نشود. او به چند طریق می تواند به مقصد برسد به طوری که کم ترین تعداد «حرکت» را انجام داده باشد؟

الف) ۵۷۶۰ (ب) ۱۲۶ (ج) ۲۸۸۰ (د) ۳۶۲۸۸۰ (ه) هیچ کدام



(۱۴) مورچه ای می خواهد در مکعب روبرو از رأس A ، با حرکت روی پاره خطها، به رأس B (رأس مقابل A) برود. فرض کنید در هر حرکت مورچه از یک سر پاره خط به سر دیگر آن می رود. می دانیم بعد از ۵ حرکت مورچه روی رأس B قرار دارد. او به چند طریق می تواند این مسیر را طی کرده باشد؟

الف) ۳۶ (ب) ۴۸ (ج) ۶۰ (د) ۹۰ (ه) ۱۲۰

مرحله ی اول هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱۵) در یک ردیف ۳۳ خانه قرار دارد، که با اعداد ۱ تا ۳۳ شماره گذاری شده اند. زبل خان در یک طرف این خانه ها قرار دارد (در کنار خانه ی شماره ی ۳۳). در هر صبح یک توپ در یکی از خانه ها قرار می دهیم. زبل خان هر روز ظهر اگر توپی دید به آن شلیک می کند و توپ می ترکد (حداکثر در هر روز به یک توپ شلیک می کند و فقط همان توپ می ترکد). اگر یک توپ در خانه ی i باشد، زبل خان خانه های پشت آن را نمی بیند (خانه های ۱ تا $i-1$). دود حاصل از ترکیدن یک توپ در خانه ی i باعث می شود که زبل خان تا بعد از ظهر روز بعد نیز خانه های پشت آن را نبیند و در نتیجه اگر روز بعد توپی در آن خانه ها گذاشته شود، زبل خان آن را نمی بیند و به آن تیراندازی نمی کند. ما ۳۳ روز وقت داریم تا ۳۳ توپ در این خانه ها بگذاریم و همچنین در هر خانه حداکثر می توانیم یک بار توپ قرار دهیم. در پایان ۳۳ روز، به اندازه ی مجموع شماره ی خانه هایی که توپ در آن ها قرار دارد به ما جایزه می دهند. بیشترین جایزه ی را که می توان به دست آورد چقدر است؟

الف) ۱۳۶ ب) ۲۴۰ ج) ۲۵۶ د) ۲۷۲ ه) ۲۸۹

(۱۶) چند جدول 3×3 از اعداد ۰ تا ۸ داریم که هر دو خانه ی مجاور (دارای یک ضلع مشترک) در آن دقیقاً یکی از دو خاصیت زیر را داشته باشند:

۰	۲	۱
۳	۵	۴
۶	۸	۷

- باقی مانده ی تقسیم اعداد آن دو خانه بر ۳ برابر باشد
- خارج قسمت تقسیم اعداد آن دو خانه بر ۳ برابر باشد

یکی از این جدول ها در شکل نشان داده شده است.

الف) ۶ ب) ۱۸ ج) ۳۶ د) ۷۲ ه) ۱۴۴

(۱۷) بازی «تنبل گش»، یک بازی یک نفره است که روی یک جدول 3×3 انجام می شود. در ابتدای بازی اعداد ۱ تا ۸ به ترتیب نامعینی در ۸ تا از خانه های جدول قرار گرفته اند و یکی از خانه های جدول خالی است. در هر حرکت می توان عدد یکی از خانه های مجاور ضلعی خانه ی خالی را به خانه ی خالی انتقال داد. هدف بازی این است که با حداقل تعداد انتقال، اعداد جدول به صورت شکل زیر، مرتب شوند.

آقای «تنبل»، قصد دارد بدون انجام دادن بازی، حدس بزند که حداقل تعداد انتقال های لازم برای مرتب کردن یک جدول چند حرکت است. از این رو، وی برای هر یک از اعداد ۱ تا ۸، تعداد حرکت های لازم برای انتقال آن عدد به مکان مطلوب در جدول نهایی (با فرض خالی بودن تمام خانه های دیگر) را محاسبه کرده و مجموع این اعداد (K) را به عنوان حدس خود در نظر می گیرد.

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	

اگر حداقل تعداد انتقال های لازم برای مرتب کردن جدول و رسیدن به جدول نهایی را A بنامیم، کدام یک از گزینه های زیر درست است؟ فرض کنید جدول های ابتدایی مورد بحث، همواره پس از متناهی حرکت مرتب می شوند.

- الف) برای تمامی جدول های اولیه $K \leq \frac{4}{3}$
- ب) برای تمامی جدول های اولیه $\frac{4}{3} \leq K \leq A$
- ج) برای تمامی جدول های اولیه $K \leq A$ و جدولی اولیه وجود دارد که $K < \frac{4}{3}$
- د) برای تمامی جدول های اولیه $A \leq K \leq 2A$
- ه) هیچ کدام

مرحله ی اول هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۸) در بازی خرگوش گُشی یک جدول 1385×1385 داریم که در هر خانه ی آن یک خرگوش قرار دارد. «مرد چکش زن» بازی را شروع می کند. او در ابتدا یک خرگوش را به دلخواه خود با چکش می کشد. سپس در هر مرحله، اگر در سطر یا ستونی که خرگوش قبلی را کشته، خرگوش زنده ای باشد، مجبور است یکی از خرگوش های آن سطر یا آن ستون را بکشد (به دلخواه یکی از آنها را بکشد). در غیر این صورت، خرگوش زنده ای را از هر کجای جدول به دلخواه می کشد و بازی ادامه پیدا می کند. هدف ما پیدا کردن تعداد روش هایی است که مرد چکش زن می تواند همه ی خرگوش ها را بکشد. باقیمانده ی این عدد بر ۲۳ چند است؟

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۲۱ (ه) ۲۲

۱۹) در بازی خرگوش گُشی که در سؤال قبل گفته شد، هر بار که مرد خرگوشی را بکشد که نه در سطر آن و نه در ستون آن، خرگوش زنده ی دیگری نباشد، یک امتیاز می گیرد (دقت کنید که پس از کشتن خرگوش آخر نیز امتیاز می گیرد). او حداکثر چند امتیاز می تواند بگیرد؟

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۱۳۸۴ (د) ۱۳۸۵ (ه) ۱۳۸۶

۲۰) یک رشته به طول ۱۳ حرف، متشکل از حروف w و b را در نظر بگیرید. عمل به روز رسانی رشته بر حسب عدد i ($1 \leq i \leq 13$) را به این ترتیب تعریف می کنیم: از حرف i ام از سمت چپ شروع به کار می کنیم. آن حرف را تغییر می دهیم (یعنی w را به b و b را به w تغییر می دهیم). در صورتی که با این تغییر، حرف i ام از b به w تبدیل شود به سراغ حرف بعدی یعنی حرف سمت راستیش (در صورت وجود) رفته و همین کار را انجام می دهیم. به عنوان مثال رشته bwbbbbwwbbwww بعد از انجام عمل به روز رسانی روی حرف چهارم، به رشته bwbbwwbbwwww تبدیل می شود. فرض کنید روی رشته yyyyyyyyyyyyyy عملیات زیر را به ترتیب انجام می دهیم:

۱) یک بار عمل به روز رسانی روی حرف دوم.

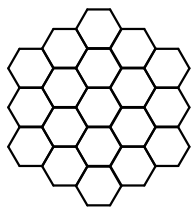
۲) یک بار عمل به روز رسانی روی حرف پنجم.

۳) هشت بار عمل به روز رسانی روی حرف یکم.

۴) بیست بار عمل به روز رسانی روی حرف ششم.

شما باید مشخص کنید که در نهایت تعداد b ها در رشته ی حاصل از مراحل بالا چند تاست.

الف) ۹ (ب) ۱۰ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) ۳



شکل ۱



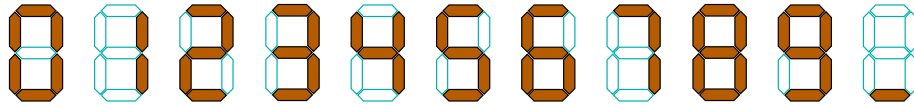
شکل ۲

۲۱) عباس می خواهد شکل ۱ را با ۶ قطعه از قطعاتی که در شکل ۲ نشان داده شده بپوشاند، به طوری که درست یک شش ضلعی پوشیده نشده در آن باقی بماند. او به چند طریق می تواند این کار را انجام دهد؟

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۴ (د) ۳ (ه) ۸

مرحله ی اول هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۲) آیدین یک ماشین حساب یک رقمی دارد که با ۷ لامپ باریک و دراز، هر یک از ارقام ۰ تا ۹ و علامت « - » (به معنای خطای محاسبه) را مطابق شکل زیر نشان می دهد.



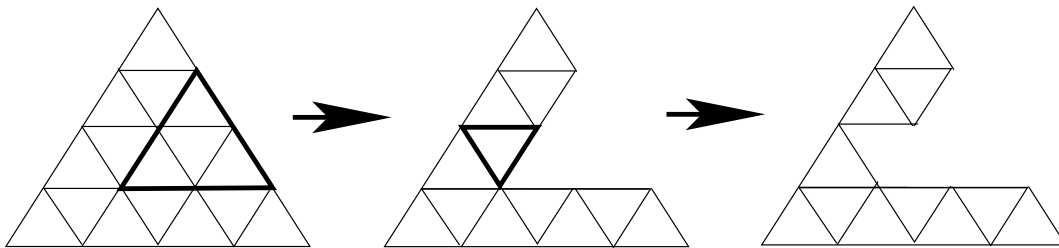
متأسفانه به دلیل فرسودگی ماشین حساب، همه ی ۷ لامپ آن هم زمان سوخته اند. اکنون آیدین می خواهد k تا از این لامپ ها را طوری با لامپ های سالم عوض کند که بتواند با دیدن روشن یا خاموش بودن لامپ های سالم، پی به مقدار دقیق ماشین حساب ببرد. دقت کنید که اگر یک لامپ سالم در ماشین حساب قرار داده شود، دیگر نمی توان جای آن را تغییر داد. حداقل مقدار k برای این منظور چند است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

(۲۳) در ابتدا یک مثلث متساوی الاضلاع داریم که طول اضلاعش برابر ۴ است (مانند شکل سمت چپ). در هر مرحله می توانیم یک تکه از شکل باقی مانده که شروط زیر را دارد بکنیم و دور بریزیم.

- تکه باید یک مثلث متساوی الاضلاع باشد.
- اضلاع تکه باید روی خطوط کشیده شده در شکل باشد.
- با حذف کردن این تکه از شکل نباید هیچ سوراخی در آن ایجاد شود. (یعنی باید حداقل یکی از اضلاع تکه ای که می خواهیم حذف کنیم، کاملاً مجاور ناحیه ی بیرونی باشد).

بدیهی است در صورتی که شکل باقی مانده یک مثلث متساوی الاضلاع باشد می توان در یک مرحله همه ی آن را دور ریخت. در شکل زیر یک مثال تا دو مرحله نشان داده شده است.



می خواهیم در k مرحله کل شکل اولیه را دور بریزیم. این کار به ازای چند تا از مقادیر زیر به عنوان مقدار k ، امکان پذیر است؟

۴ ۵ ۷ ۱۰ ۱۴

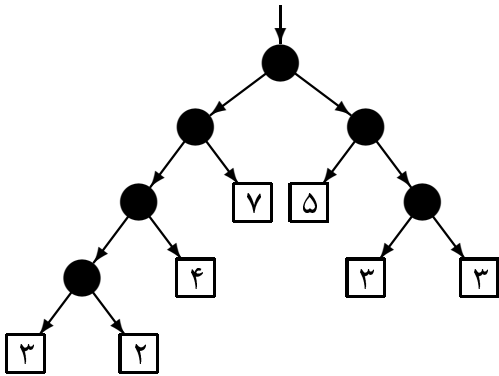
الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

(۲۴) چند عدد طبیعی را می توان به صورت حاصل جمع چهار عدد متمایز از مجموعه ی $\{۱۵, ۱۹, ۲۳, ۲۷, ۳۱, ۳۵, ۳۹\}$ نوشت؟

الف) ۳۵ ب) ۲۱ ج) ۱۳ د) ۱۲ ه) ۷

مرحله ی اول هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۵) در شکل زیر ۲۷ نخود از بالا به سمت پایین انداخته می شود. نخودها به سمت پایین حرکت می کنند تا درون یکی از مربع ها قرار بگیرند. درون هر دایره یک علامت $\backslash$ یا $/$ قرار دارد که در حالت عادی دیده نمی شود. با توجه به جهت علامت یک دایره، نخود پس از ورود به آن دایره به سمت «پایین سمت راست» یا «پایین سمت چپ» حرکت می کند. ما نمی توانیم در حالت عادی جهت علامت های دایره ها یا تعداد نخودهای موجود در مربع ها و دایره ها را ببینیم.



عمل «تغییر جهت» به این صورت تعریف می شود: به یکی از دایره ها از نزدیک نگاه می کنیم و علامت قرار داده شده در آن را می بینیم و اگر خواستیم آن را تغییر می دهیم.

ما می توانیم هر موقع که خواستیم انداختن نخودها را متوقف کنیم و عمل «تغییر جهت» را به تعداد دلخواه انجام دهیم و دوباره انداختن نخودها را ادامه دهیم.

می خواهیم تعدادی عمل «تغییر جهت» انجام دهیم، به طوری که وقتی همه ی ۲۷ نخود افتادند، در هر مربع دقیقاً به تعداد عددی که روی آن نوشته شده نخود قرار بگیرد. حداقل چند عمل «تغییر جهت» نیاز داریم به طوری که به هر نحوی که علامت ها در ابتدا جهت دهی شده باشند، بتوانیم این کار را انجام دهیم؟

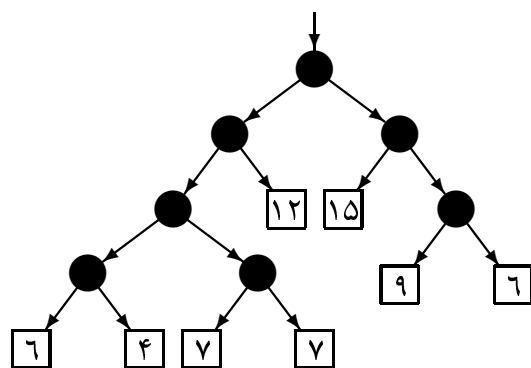
۱۴ (هـ)

۱۲ (د)

۱۱ (ج)

۷ (ب)

۶ (الف)



(۲۶) در مسئله ی قبل، فرض کنید وقتی در یک مربع به تعداد عددی که روی آن نوشته شده نخود قرار بگیرد، از پُر شدن آن جعبه مطلع می شویم. حال با توجه به داشتن این امکان اضافی بگویید، در شکل روبه رو، حداقل چند عمل «تغییر جهت» لازم است، تا جهت اولیه ی علامت ها هر چه که باشد، بتوانیم به هر مربع دقیقاً به تعداد عددی که رویش نوشته شده نخود بفرستیم؟

۱۴ (هـ)

۱۳ (د)

۱۲ (ج)

۸ (ب)

۷ (الف)

(۲۷) ده شرکت تولید کننده ی کنسرو مورد آزمایش کیفیت قرار گرفتند. می دانیم که دقیقاً یکی از شرکت ها از گوشت فاسد استفاده می کند. آزمایش به این صورت بود که به هر داوطلب، دو کنسرو از دو شرکت مختلف داده شد و به هیچ دو نفری جفت کنسروهای یکسانی داده نشد. می دانیم اگر کسی کنسرو فاسد بخورد، می میرد. پس از این که داوطلب ها کنسروهایشان را خوردند، اطلاعات بدست آمده از مرگ داوطلبان برای یافتن شرکت متخلف کافی نبود. تعداد داوطلب ها حداکثر چند نفر بوده است؟

۴۵ (هـ)

۳۶ (د)

۲۹ (ج)

۲۸ (ب)

۲۰ (الف)

مرحله ی اول هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۸) پینوکیو برای یافتن پدر ژیتو وارد شکم نهنگ شد. شکم نهنگ به شکل مجموعه ای از سهراهی ها است که هر کدام به سه سهراهی دیگر متصل است. فاصله ی دو سهراهی متصل ۱ متر است. پدر ژیتو در یکی از سهراهی هاست. در هر سهراهی تابلویی وجود دارد که رویش فاصله ی آن سهراهی تا پدر ژیتو نوشته شده است. پینوکیو در یکی از این سهراهی هاست که تابلوی آن ۱۳۸۵ را نشان می دهد. با این فرض که پینوکیو به اندازه ی کافی باهوش است، در بدترین حالت، چند متر باید راه برود تا به پدر ژیتو برسد؟

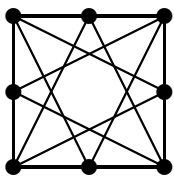
۶۹۲۵ (ه)

۴۱۵۷ (د)

۴۱۵۵ (ج)

۲۷۷۱ (ب)

۱۳۸۵ (الف)



(۲۹) در شکل روبرو ۸ شهر و راه های ارتباطی آن ها نمایش داده شده است. نیلوفر و لی لی می خواهند این شهرها را ببینند و با هم قرار گذاشته اند که عوارض ورود به شهرها را یکی در میان بپردازند. نیلوفر یکی از شهرها را برای شروع مسافرت انتخاب می کند و عوارض ورود به آن را می پردازد. از این به بعد، ابتدا لی لی و سپس نیلوفر، هر کدام در نوبت خود شهر مجاور (شهری که به شهر فعلی راه مستقیم دارد) که هنوز ندیده اند را انتخاب می کند. سپس آن ها به آن شهر مسافرت می کنند و کسی که شهر جدید را انتخاب کرده، عوارض آن را پرداخت می کند. آن ها این کار را تا دیده شدن همه ی شهرها ادامه می دهند. هر کدام از این دو نفر می خواهد هزینه ی کمتری از دیگری بپردازد.

نیلوفر و لی لی قبل از آن که مقادیر عوارض شهرها را در کتابچه ی راهنمای سفر خود ببینند، حرف های زیر را زده اند. کدام یک از این گفته ها به ازای مقادیر مختلفی که ممکن است در دفترچه ی راهنما نوشته شده باشد همواره درست است؟

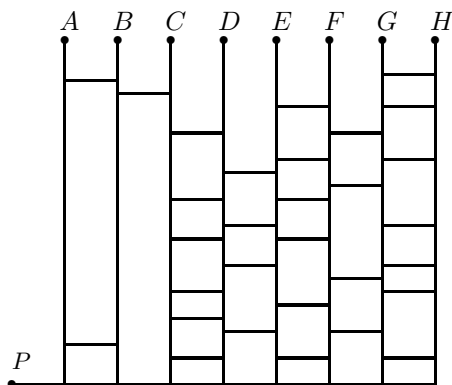
(الف) نیلوفر: من کمتر خرج خواهم کرد.

(ب) لی لی: من کمتر خرج خواهم کرد.

(ج) نیلوفر: ممکن است مقادیر دفترچه ی راهنما طوری باشد که من مجبور شوم بیشتر خرج کنم.

(د) لی لی: مجبور نیستم بیشتر خرج کنم.

(ه) نیلوفر: مجبور نیستم بیشتر خرج کنم.



(۳۰) نقشه ی خیابان های یک شهر مانند شکل روبرو است. خیابان های عمودی به سمت بالا یک طرفه و خیابان های افقی دوطرفه هستند. در هر یک از نقاط A تا H یک پارکینگ قرار دارد. شخصی با اتومبیل خود از نقطه ی P به حرکت در می آید. با فرض این که این شخص از هیچ نقطه ای بیش از یک بار عبور نمی کند، تعداد راه های رسیدن او به هر یک از نقاط A تا H را به ترتیب W_A تا W_H می نامیم. مقدار $W_A - W_B - W_C + W_D + W_E - W_F - W_G + W_H$ کدام یک از گزینه های زیر است؟

هیچ کدام (ه)

۲ (د)

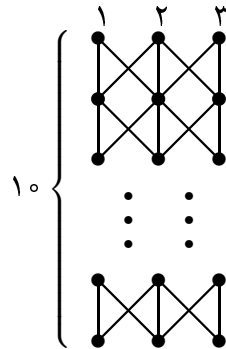
۰ (ج)

-۱ (ب)

-۲ (الف)

مرحله ی اول هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۳۱) ۱۰ ردیف ۳ تایی از لامپ‌ها داریم. هر لامپ، مطابق شکل به تعدادی از لامپ‌های ردیف پایینی‌اش وصل شده است. در ابتدا همه‌ی لامپ‌ها خاموش‌اند. هر بار می‌توان یکی از لامپ‌های ردیف اول را تغییر وضعیت داد (لامپ روشن را خاموش کنیم یا برعکس). اگر لامپی تغییر وضعیت بدهد، تمامی لامپ‌های متصل به آن لامپ در ردیف پایینی‌اش، تغییر وضعیت می‌دهند. برای مثال، اگر وضعیت لامپ اول از طبقه اول را تغییر دهیم، وضعیت لامپ‌های اول و دوم ردیف دوم عوض می‌شوند. سپس وضعیت لامپ سوم از طبقه سوم تغییر خواهد کرد، ولی وضعیت‌های لامپ‌های اول و دوم از طبقه سوم، تغییری نخواهند کرد زیرا یک بار به وسیله‌ی لامپ اول طبقه‌ی دوم و یک بار به وسیله‌ی لامپ دوم طبقه‌ی دوم تغییر می‌کنند. چند تا از دنباله‌های زیر می‌توانند وضعیت لامپ‌های ردیف ۱۰م پس از اعمال تغییراتی در ردیف اول باشند؟



- لامپ اول روشن، لامپ دوم روشن، لامپ سوم روشن.
- لامپ اول خاموش، لامپ دوم روشن، لامپ سوم روشن.
- لامپ اول خاموش، لامپ دوم روشن، لامپ سوم خاموش.
- لامپ اول روشن، لامپ دوم روشن، لامپ سوم خاموش.

(ه) ۴

(د) ۳

(ج) ۲

(ب) ۱

(الف) ۰

(۳۲) ۶ نفر دور یک میز نشسته‌اند. ابتدا هر کس دقیقاً یکی از چشمان خود را می‌بندد. اگر کسی چشم راست خود را ببندد، همه‌ی سایر افراد به جز دو نفر سمت راستش را می‌تواند ببیند، و به طور مشابه، اگر چشم چپ خود را ببندد، دیگر افراد به جز دو نفر سمت چپش را می‌بیند. میزان «هم‌بینی» افراد دور یک میز، برابر تعداد جفت افرادی است که بتوانند هم‌دیگر را ببینند. در بین تمامی حالت‌های چشم‌بستن این ۶ نفر، حداکثر میزان «هم‌بینی» چه قدر است؟

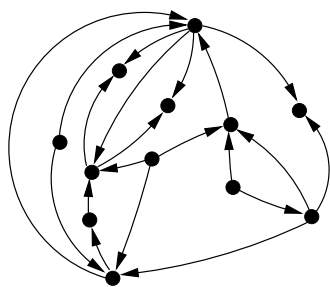
(ه) ۱۰

(د) ۸

(ج) ۷

(ب) ۶

(الف) ۴



(۳۳) هر سال، هر نهنگی که متوجه شود یکی از نهنگ‌هایی که او دوست داشته، سال گذشته مرده، خودکشی می‌کند. شکل روبرو یک جامعه از نهنگ‌ها را نشان می‌دهد. اگر نهنگ A به B پیکان داشته باشد، یعنی A، B را دوست دارد. حداقل چند پیکان جدید باید رسم کنیم تا نهنگی وجود داشته باشد که با گشتن آن، همه‌ی نهنگ‌ها از بین بروند؟

(ه) هیچ کدام

(د) ۵

(ج) ۴

(ب) ۳

(الف) ۲

(۳۴) بین شهرهای A و B یک جاده‌ی باریک وجود دارد. در این جاده ۱۰ تانکر بنزین، به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۱۰ پشت سر هم و با سرعت‌های متفاوت از A به سمت B در حرکت‌اند. در ابتدا هیچ دو تایی از تانکرها روی یک نقطه از جاده نیستند. راننده‌های این تانکرها خواب هستند و بنابراین از ترمز خبری نیست. اگر دو تانکر به هم برسند، هر دو منفجر و متلاشی می‌شوند به طوری که اثری از آن‌ها باقی نمی‌ماند. به این ترتیب تانکرهای بعدی می‌توانند از محل تصادف عبور کنند. اگر بدانیم که هیچ وقت بیشتر از دو تانکر در یک لحظه تصادف نمی‌کنند، مجموعه تانکرهایی که به شهر B می‌رسند، چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

(ه) ۱۰۲۴

(د) ۵۱۲

(ج) ۱۴۴

(ب) ۸۹

(الف) ۵۵

مرحله ی اول هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۳۵) افشین روی نقطه ی $\circ$ محور اعداد حقیقی ایستاده است. او در هر حرکت، باتوجه به شرایط زیر مقداری به سمت راست حرکت می کند.

- او در حرکت اول خود حداقل ۱ واحد و حداکثر ۸۵ واحد به سمت راست حرکت می کند.
 - در صورتی که افشین در حرکت i ام خود، a واحد به سمت راست رفته باشد،
 -- اگر a زوج باشد، او در حرکت $i + 1$ ام، $\frac{a}{2}$ واحد به سمت راست خواهد رفت.
 -- اگر a فرد باشد، او در حرکت $i + 1$ ام، $\frac{a-1}{2} + 512$ واحد به سمت راست خواهد رفت.
- پس از انجام ۱۰ حرکت، بیشترین مقداری که افشین می تواند به سمت راست رفته باشد چه قدر است؟

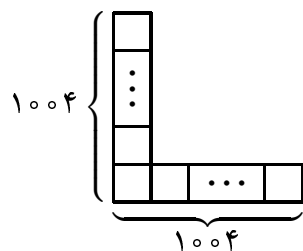
الف) ۶۱۳۸ (ب) ۳۰۶۶ (ج) ۵۱۱۵ (د) ۶۱۴۴ (ه) ۳۰۶۹

(۳۶) ۴ نهنگ سفید و ۴ نهنگ سیاه به طور دسته جمعی تصمیم به خودکشی گرفته اند. در هر مرحله یک نهنگ، یکی از نهنگ های ناهم رنگ خود را انتخاب کرده و به قتل می رساند! می دانیم پس از ۷ مرحله، دقیقاً یک نهنگ، زنده مانده است. نهنگ ها از روی دنباله قتل ها، لیستی به نام «لیست سیاه» ساخته اند، به این ترتیب که پس از هر قتل، ابتدا رنگ قاتل، و سپس رنگ مقتول را به انتهای لیست اضافه می کنند. در پایان هم تنها نهنگ باقی مانده، رنگ خود را به انتهای لیست اضافه می کند. چند لیست سیاه متفاوت می تواند وجود داشته باشد؟

الف) ۱۲۸ (ب) ۴۰ (ج) ۷۰ (د) ۱۴۰ (ه) ۳۲

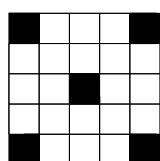
(۳۷) در سؤال قبل اگر به جای رنگ هر نهنگ، نام او (هم نام قاتل و هم نام مقتول) در لیست نوشته شود، چند لیست سیاه متفاوت می تواند وجود داشته باشد؟ (می دانیم هر نهنگ نامی دارد که با نام نهنگ های دیگر متفاوت است)

الف) ۱۰۴۸۵۷۶ (ب) ۱۶۷۷۷۲۱۶ (ج) ۴۰۳۲۰ (د) ۲۳۰۴۰ (ه) ۲۷۸۳۲۳۲



(۳۸) دو هزار و هفت عدد را در ۲۰۰۷ خانه ی شکل روبرو قرار داده ایم. در هر حرکت می توان ۱۰۰۴ عدد موجود در ستون را از بالا به پایین و یا ۱۰۰۴ عدد موجود در سطر را از چپ به راست، به صورت صعودی مرتب کرد. به یک جدول «پایدار» می گوییم اگر وضعیت آن جدول در صورت انجام هیچ یک از این مرتب سازی ها تغییر نکند. حداقل تعداد حرکاتی که می توان با آن ها هر جدولی را پایدار کرد چقدر است؟

الف) ۱۰۰۵ (ب) ۱۰۰۷ (ج) ۲۰۰۶ (د) ۳۰۰۹ (ه) ۲۰۰۷



(۳۹) به چند طریق می توان خانه های سفید شکل روبرو را با ۱۰ تا از قطعه های (۱) و (۲) به طور کامل پوشاند؟

الف) ۶ (ب) ۱۲ (ج) ۱۸ (د) ۱۶ (ه) هیچ کدام

مرحله ی اول هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۴۰) استاد بزرگِ معبد شائولین، ۵ تن از بهترین شاگردانش را برای مبارزه به داخل معبد می فرستد تا با مبارزه با یکدیگر، رتبه بندی شوند. این ۵ تن بعد از چند شبانه روز مبارزه، یکی یکی از معبد خارج می شوند. اولین مبارزی که خارج می شود می گوید: «من اوّل شدم»؛ دومی می گوید: «من اوّل نشدم»؛ سومی می گوید: «من آخر نشدم»؛ چهارمی می گوید: «من نه اوّل شدم و نه آخر» و بالاخره آخرین مبارزی که از معبد خارج می شود می گوید: «من یا اوّل شدم یا آخر». استاد بزرگ نام همه ی مبارزان را می داند. همچنین می داند که یکی از ۵ مبارز به نام شائو همواره دروغ می گوید و بقیه همواره راستگو هستند. همین موقع استاد بزرگ می گوید: «لی! تو که باز آخر شدی!» با توجه به اینکه استاد بزرگ هیچ گاه اشتباه نمی کند، بگویید لی چندمین نفری بوده که از معبد خارج شده است؟ (توجه کنید که استاد بزرگ با توجه به اطلاعاتی که گفته شد، می توانسته مطمئن شود که لی آخر شده است).

الف) اول ب) دوم ج) سوم د) چهارم ه) پنجم

«موفق باشید»

به نام خدا

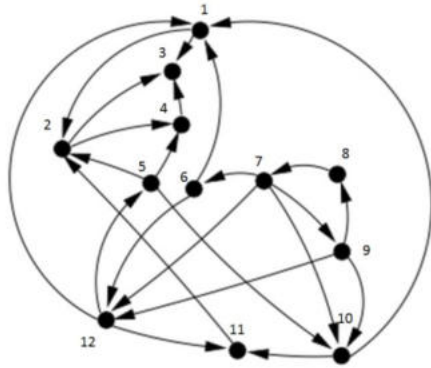
پاسخ تشریحی

مرحله اول هفدهمین دوره المپیاد کامپیوتر سال

۱۳۸۵

(۱) این سوال حذف شده است.

(۲) گزینه ی (ه) درست است.



نهنگ ۳ در سال اول خودکشی می کند زیرا هیچ یالی به بیرون ندارد (هیچ کسی را دوست ندارد). سال دوم نهنگ ۴ خودکشی می کند و ... اما هیچگاه همه نهنگ ها خودکشی نخواهند کرد. زیرا نهنگ های ۸ و ۹ و ۷ به صورت یک دور هستند و به دلیل اینکه رابطه دوست داشتن این سه نهنگ به صورت متوالی و به هم پیوسته است هیچ گاه هیچ کدام از آنها خودکشی نخواهد کرد. (زیرا همیشه کسی وجود دارد که مورد علاقه آنها باشد) در نتیجه گزینه ه جواب صحیح است.

(۳) گزینه ی (ب) درست است.

شرکت D ادعا می کند که از بین شرکت آنها و شرکت A حداقل یکی گوشت فاسد می دهد. اگر خود شرکت D گوشت فاسد عرضه کرده باشد پس ادعایی که کرده درست بوده و به همین دلیل به تناقض می رسیم. پس شرکت D راستگو است. در نتیجه طبق ادعای او شرکت A دروغگو است. به همین دلیل ادعای او نیز رد شده و شرکت B راستگو خواهد بود. شرکت C هر دو شرکت A و B را دروغگو خوانده که ادعایی دروغ است بنابراین شرکت C نیز دروغگو است. پس دو شرکت B و D راستگو هستند. و گزینه ب صحیح است.

(۴) گزینه ی (ه) درست است.

از آنجایی که می توانیم فرض کنیم مکعب ها در گوشه ها نیز اتصالات قوی برقرار خواهند کرد با در نظر گرفتن قطر اصلی مکعب که از n مکعب $1 \times 1 \times 1$ تشکیل شده است، می توانیم جسم مورد نظر را بسازیم. پس جواب صحیح گزینه ه خواهد بود.

(۵) گزینه ی (ه) درست است.

برای n های فرد نفر اول راهکار برد دارد به این صورت که هر دفعه در نوبت خود سمت راست ترین خانه ی خالی جدول را پر می کند ثابت می کنیم نفر دوم هیچ وقت نمی تواند مهره های سفید را سیاه کند زیرا هیچ وقت یک مهره ی سیاه در سمت راست یک مهره ی سفید قرار نمی گیرد چون همیشه سمت راست ترین خانه ی خالی را پر می کنیم. پس اگر یک مهره ی سیاه در سمت راست مهره ای که الان قرار می دهیم باشد آن مهره هم سفید می شود (زیرا سمت راست مهره های سیاه حتمن مهره ی سفید است) نفر دوم بهترین عملکرد خود را داشته باشد نفر اول حداقل یک مهره بیشتر از او می گذارد.

برای n های زوج هر کدام از بازیکن ها راهکار نباختن دارد. هر دو به روش مشابه بالا سفید از سمت راست و سیاه از سمت چپ شروع به پر کردن می کند در نتیجه هر کدام حداقل به اندازه ی $n/2$ از جدول را می پوشانند و نفر مقابل نمی تواند ببرد. در نتیجه گزینه ه درست است.

(۶) گزینه ی (ج) درست است.

عدد ۱۳۸۵ در مبنای دو معادل 10101101001 است. از آنجایی که این عدد ۱۱ رقمی است و ۵ رقم صفر دارد کفایت ۵ عدد کوچکتر از آن را بررسی کنیم که از مقدار $1385 + 5$ بیشتر خواهند شد یا خیر. زیرا تنها در صورتی که یکی از این ۵ عدد تعداد صفرهای بیشتری نسبت به ۱۳۸۵ داشته باشد و اختلافش از ۱۳۸۵ کمتر از تعداد صفرهای بیشتر آن باشد، مقدار $K + f(K)$ بیشتر خواهد بود. برای چک کردن این ۵

عدد نیز با استفاده از تفریق باینری به راحتی می توان دریافت که ۱۳۹۰ بزرگترین عددی است که می تواند وجود داشته باشد و جواب گزینه ج خواهد بود.

(۷) گزینه ی (ه) درست است.

اگر فاصله ی نقطه مبدا تا نقطه مرکز دوران (a, b) باشد آنگاه نقطه مقصد نسبت به نقطه مبدا در مختصات $(a - b, a + b)$ قرار خواهد داشت. پس اگر بخواهیم نقطه مقصد (x, y) باشد باید دستگاه معادله زیر را حل کرده و a و b را بیابیم.

$$a + b = x$$

$$a - b = y$$

$$a = \frac{(x + y)}{2}$$

$$b = \frac{(x - y)}{2}$$

برای اینکه a و b مقادیری صحیح داشته باشند کفایت x و y به پیمانه ۲ هم نهشت باشند. این نکته در همه گزینه های داده شده صادق است. در نتیجه گزینه ه جواب صحیح است.

(۸) گزینه ی (ب) درست است.

در صورتی که مطابق اعداد وارد شده در جدول زیر حرکت کنیم فقط لازم است در نقاط ۵، ۹، ۱۳، ۱۶ و ۱۹ یک ریال هزینه کنیم. از آنجایی که این شیوه بیشترین تعداد حرکت به ازای هر یک ریال را خواهد داشت، ۲۱ جواب بیشینه برای این سوال خواهد بود و جواب گزینه ب است.

1	2	3	4	5
16	17	18	19	6
15			20	7
14			21	8
13	12	11	10	9

(۹) گزینه ی (ج) درست است.

می دانیم که تعداد روزها یا مساوی شبهاست و یا یکی بیشتر از آن است. روی تعداد روزها و شبها حالت بندی می کنیم :

روزها		۱		۲		۳		۴		۵		۶	
شبها	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵	۵	۶	۶
تعداد حالتها	۰	۱	۵	۲۵	۵۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۵۰	۲۵	۵	۱	۱

که جمع کل این اعداد برابر با ۴۶۲ است.

(۱۰) گزینه ی (ب) درست است.

حالات مختلف را در این مسئله بررسی می‌کنیم تا استراتژی برد بدست آید:

فرض کنید که ستون‌ها را از سمت چپ و سطرها را از بالا شماره‌گذاری کرده و همچنین هر گروه از نهنگ‌ها را از سمت چپ با ۱ تا ۵ شماره‌گذاری کرده‌ایم.

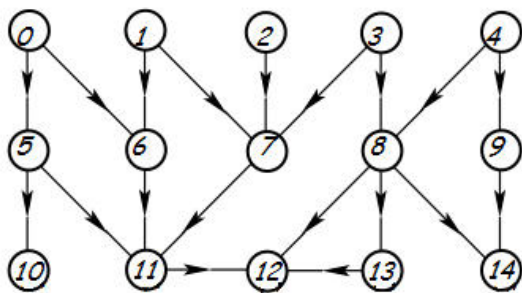
نفر اول مهره‌ی ۵ خود را به پایین سر می‌دهد. نفر دوم اگر مهره‌ی ۵ خود را سر دهد در دو مرحله‌ی بعد خواهد باخت. اگر مهره‌ی ۲، ۳ یا ۴ خود را سر دهد در مرحله‌ی بعد نفر اول همان مهره را به پایین سر می‌دهد و در دو مرحله‌ی بعد خواهد باخت. پس بهترین حرکت، سر دادن مهره‌ی ۱ به بالا خواهد بود. در اینصورت نفر اول مهره‌ی ۲ خود را به پایین سر می‌دهد.

در این وضعیت نفر دوم اگر مهره‌ی ۲ تا ۵ خود را سر دهد، نفر اول در دو مرحله می‌تواند برنده شود. در نتیجه تنها می‌تواند مهره‌ی ۱ را به چپ یا راست سر دهد (نمی‌تواند به پایین سر دهد چون حرکت تکراری است). حال نفر اول مهره‌ی ۲ خود را به چپ سر می‌دهد و سپس در دو مرحله‌ی بعدی می‌تواند برنده‌ی بازی شود.

پس نفر اول می‌تواند در شش مرحله برنده بازی باشد.

(۱۱) گزینه‌ی (الف) درست است.

برای گذاشتن عدد ۱ فقط یک راه داریم. برای گذاشتن عدد ۲ دو انتخاب خواهیم داشت یکی بالای خانه اول و یکی سمت راست آن. بعد از قرار دادن عدد ۲ در یکی از این دو خانه برای قرار دادن عدد ۳ نیز ۲ انتخاب داریم چرا که اگر عدد دو را در خانه (۲, ۱) قرار داده باشیم دیگر ۳ در خانه (۱, ۲) نمی‌تواند قرار بگیرد و مجبور است در یکی از دو خانه (۲, ۲) یا (۳, ۱) قرار بگیرد. در نتیجه برای هر کدام از اعداد به جز یک دو حالت انتخاب داریم و به این ترتیب جواب مورد نظر 2^{13} خواهد بود که گزینه الف است.



(۱۲) گزینه‌ی (د) درست است.

در بالا ۱۵ دفتر را به صورت شماره‌گذاری شده مشاهده می‌کنید. برای اینکه محاسبه کنیم در نهایت به هر کدام از دفاتر ۱۰ تا ۱۴ چند نامه می‌رسد کافی است که تعداد نامه‌های آنها را بر حسب تعداد نامه‌های دفاتر ۰ تا ۴ محاسبه کنیم.

$$10 = 0$$

$$11 = 0 + (0 + 1) + (1 + 2 + 3)$$

$$12 = (0 + (0 + 1) + (1 + 2 + 3)) + (3 + 4) + ((3 + 4))$$

$$13 = (3 + 4)$$

$$14 = (3 + 4) + 4$$

$$\text{جمع کل} = 5 \times 4 + 6 \times 3 + 2 \times 2 + 4 \times 1 + 5 \times 0 =$$

به دفتر k ام در کل به مقدار زیر نامه خواهد رسید:

$$K \times 2007 + \frac{(2007 \times 2008)}{2} = 2 * k + 3 \pmod{5}$$

در نتیجه در کل جمع کل به پیمانه ۵ برابر با ۳ خواهد بود و گزینه د صحیح است.

(۱۳) گزینه ی (د) درست است.

این جوجه در صورتی کمترین تعداد حرکت را خواهد داشت که حرکت تکراری انجام ندهد. زیرا در صورت تکرار به جای اینکه یکبار از دو برابر آن عدد که جز انتخابهایش نیز بوده است استفاده کند دوبار از آن عدد استفاده کرده است. در نتیجه باید از حرکتهای زیر استفاده کند:

$$99 = 64 + 32 + 2 + 1$$

$$59 = 32 + 16 + 8 + 2 + 1$$

اگر اندازه حرکات یکسان بود به تعداد $\binom{9}{4}$ انتخاب برای رسیدن به نقطه نهایی داشتیم. چون همه حرکات یکسان نیستند این عدد باید مقدار زیر باشد:

$$\binom{9}{4} \times 5! \times 4! = 362880$$

(۱۴) گزینه ی (ج) درست است.

می دانیم که برای رسیدن از A به B دقیقاً باید یک عمل بالا، یک راست و یک عقب انجام شود. در نتیجه باید جایگشتی از RUB را داشته باشیم. برای اینکه در حرکت پنجم در نقطه B باشیم باید دقیقاً یک حرکت به صورت رفت و برگشت اضافه انجام شود. حالت اول فرض می کنیم دو حرکت اضافه شده حرکت به راست و چپ است. در نتیجه باید جایگشتی از رشته $RRLUB$ به عنوان دنباله حرکات انتخاب شود. پس تعداد روشها برای این حالت $5!$ است ولی باید این نکته را در نظر داشت که حرکت به سمت راست و چپ قابلیت جابجایی ندارند. یعنی نمی توانیم ابتدا به سمت چپ حرکت کرده و سپس دو بار به سمت راست حرکت کنیم زیرا از مکعب خارج خواهیم شد. برای حل این مشکل فرض کنیم سه حرف RRL با یکدیگر فرقی ندارند و در عوض باید به ترتیب RLR در دنباله بیایند. در نتیجه برای حالت اول به اندازه $\frac{5!}{3!}$ روش وجود دارد. حالت دوم به صورتی است که به جای اضافه شدن دو حرکت راست و چپ اضافه دو حرکت بالا و پایین اضافه داشته باشیم یعنی رشته به صورت $RUDUB$ در بیاید. و برای حالت سوم نیز رشته باید به صورت $RUBFB$ باشد. دو حالت فوق همانند حالت اول محاسبه خواهند شد و در کل $20 \times 3 = 60$ روش داریم که همان گزینه ج است.

(۱۵) گزینه ی (د) درست است.

برای این که یک توپ در آخر سالم باقی بماند باید حداقل یک توپ در یکی از خانه های جلوی آن بترکد (یعنی خانه های بزرگترش) از طرفی یک توپ که منفجر شود فقط می تواند یک توپ به تعداد توپ هایی که قرار است آخرش بماند اضافه کند. از آنجا که حداقل نصف روزها داریم توپ می ترکانیم پس حداکثر ۱۶ تا توپ داریم که برای هر توپ حتمن یک توپ در خانه ای با عدد بیشتر ترکیده بوده پس جمع اعداد خانه هایی که در آخر در آنها توپ است نمی تواند از نصف بیشتر باشد.

حال اگر روز اول توپ را در خانه‌ی یک بگذاریم و از این به بعد روز $2i$ توپ را در خانه $2i+1$ بگذاریم و روز بعدش توپ را در خانه‌ی $2i$ بگذاریم در این صورت توپ خانه‌های 1 تا $2i$ نمی‌ترکد و در آخر توپ در خانه‌های زوج است که جمع آنها می‌شود 272 .

(۱۶) گزینه‌ی (د) درست است.

اگر عدد وسط $3k + x$ باشد ۴ خانه مجاور آن $3k' + x, 3k'' + x, 3k + x', 3k + x''$ است. $3k + x'$ و $3k + x''$ به جز همین $3k + x$ همسایه مشترک دیگری نمی‌توانند داشته باشند (چرا؟) همینطور $3k' + x$ و $3k'' + x$ همسایه مشترک دیگری ندارند. $3k + x'$ و $3k + x''$ دو همسایه دارند که یکی همان $3k + x$ و دیگری $3k' + x'$ است. به همین ترتیب ۳ جفت دیگر فقط یک همسایه مشترک دیگر دارند. پس به ۴ حالت $3k + x'$ را در یکی از ۴ خانه مجاور خانه وسط می‌گذاریم و $3k + x''$ را به اجبار در خانه‌ی مقابل آن می‌گذاریم و برای دو عدد دیگر ۲ حالت داریم. اعداد ۴ گوشه نیز یکتا تعیین می‌شوند.

پس به ازای هر عددی که وسط باشد 2×4 حالت وجود دارد و در کل ۷۲ حالت داریم.

(۱۷) گزینه‌ی (ج) درست است.

واضح است که تعداد حرکات واقعی از تعداد حرکات تخمین زده شده بیشتر است. زیرا میزان تخمین برای زمانی است که بتوان به صورت مستقیم خانه‌ها را جابه‌جا کرد ولی می‌دانیم برای جابه‌جا شدن یک خانه ممکن است مجبور به جابه‌جایی خانه‌های دیگر نیز بشویم که این باعث بروز حرکتی بیشتر از مقدار تخمین زده شده خواهد شد. از طرفی برای برخی جدولها این مقدار بیش از ۲ برابر مقدار تخمین زده شده خواهد بود. شکل زیر را در نظر بگیرید:

1	2	3
4	5	6
8	7	

گزینه ج صحیح خواهد بود.

(۱۸) گزینه‌ی (الف) درست است.

می‌خواهیم ثابت کنیم تعداد حالات بر 1385 بخش‌پذیر است. فرض کنید برای هر سطر اولین زمانی که خرگوشی را در آن کشتیم شماره‌ی آن سطر را روی تخته می‌نویسیم. بدین ترتیب یک جایگشت از سطرها روی تخته نوشته می‌شود. حال در نظر داشته باشید که تعداد حالاتی که یک جایگشت را می‌سازند با یکدیگر برابرند چون با جایگزین کردن سطرها قوانین مسئله حفظ می‌شود و در نتیجه به ازای هر حالتی از یک جایگشت، یک حالت متناظر برای جایگشت‌های دیگر نیز وجود دارد (می‌توان همین روند را برای ستون‌ها نیز بیان کرد). در نتیجه پاسخ مسئله بر 1385 بخش‌پذیر است و باقیمانده‌ی آن بر 23 صفر خواهد بود.

(۱۹) گزینه‌ی (د) درست است.

برای اینکه یک امتیاز بگیریم باید حداقل یک سطر و یک ستون را به صورت کامل پر کرده باشیم. همچنین از هیچ سطر و ستونی برای گرفتن امتیاز نمی‌توان استفاده کرد (یعنی هیچ گاه نمی‌توان در یک سطر یا ستون دو بار امتیاز گرفت زیرا در این صورت فرض سوال نقض می‌شود). در نتیجه حداکثر امتیازی که می‌توان کسب کرد به تعداد سطرها (یا ستونها) است. برای رسیدن به این مقدار ابتدا همه خرگوش‌های داخل

جدول به جز قطر اصلی را می کشیم (این کار به دلیل پیوسته بودن مجاورت قابل اعمال است) سپس با کشتن هر یک از خرگوش های روی قطر یک امتیاز خواهیم گرفت. پس جواب صحیح گزینه د است.

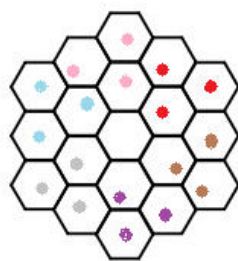
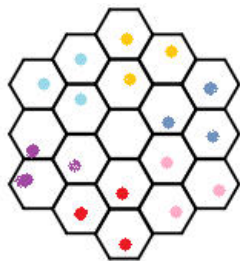
(۲۰) گزینه ی (د) درست است.

هر w را با صفر و هر b را با یک متناظر می کنیم تا به یک رشته ی باینری برسیم با این تفاوت که در این رشته کم ارزشترین رقم، رقم سمت چپ است.

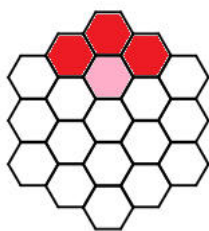
هر عمل به روزرسانی روی حرف Δ رشته مشابه اضافه کردن عدد 2^{i-1} به عدد باینری آن است.

پس با انجام عملیات گفته شده در سوال به عدد ۶۶۶ می رسیم که تعداد ارقام یک باینری آن ۵ تاست.

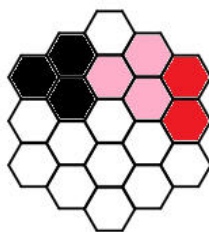
(۲۱) گزینه ی (ب) درست است.



دو حالت زیر تنها حالت های مطلوب ما هستند زیرا تنها خانه ای که می تواند خالی بماند خانه وسط است (در ادامه اثبات می کنیم).



خانه صورتی نمی تواند خالی بماند زیرا در آن صورت خانه های قرمز دچار مشکل شده و نمی توانند همزمان پر شوند.



در صورتی که بخواهیم گوشه خالی بماند خانه های قرمز رنگ مشخص شده دچار مشکل خواهند شد.



در شکل زیر نیز خانه سفید خالی مانده است ولی خانه های قرمز راهی برای پر شدن ندارند.

به این ترتیب جواب گزینه ب خواهد بود و تنها حالت های مطلوب همان حالت های پیشین خواهد بود.

(۲۲) گزینه ی (ج) درست است.

تفاوت ۸ و ۹ تنها در خانه چپ پایین است در نتیجه این خانه باید سالم باشد.

تفاوت یک و هفت تنها در خانه بالا است که این خانه نیز باید سالم بماند.

تفاوت ۸ و ۰ نیز تنها در خانه وسط است.

تفاوت ۶ و ۸ نیز تنها در خانه راست بالا است.

۲ و ۸ نیز در دو خانه تفاوت دارند که هیچکدام از آنها در تفاوت های پیشین نبود. با انتخاب لامپ سالم برای راست پایین این مشکل نیز رفع خواهد شد. در نتیجه گزینه ج جواب صحیح است.

(۲۳) گزینه ی (ج) درست است.

به ازای ۴ و ۷ و ۱۰ می توان با انتخاب های زیر مثلث را پاک کرد:

۴: چهار تا مثلث ۴ تایی

۷: سه تا مثلث ۴ تایی و ۴ تا مثلث واحد

۱۰: دو تا مثلث ۴ تایی و ۸ تا مثلث واحد.

به طور کلی فقط اعداد زیر را می توان انتخاب کرد:

یک ۹ تایی و ۷ تا یکی، چهار ۴ تایی، سه ۴ تایی و ۴ تا یکی، دو ۴ تایی و ۸ تا یکی، یک ۴ تایی و ۱۲ تا یکی و ۱۶ تا یکی.

(۲۴) گزینه ی (ج) درست است.

بدیهی است اگر از همه اعداد مجموعه ۱۵ را کم کنیم تغییری در کلیت مسئله داده نمی شود و مجموعه به صورت زیر درمی آید:

$\{0,4,8,12,16,20,24\}$

با توجه به اینکه همه اعداد بر ۴ بخشپذیر هستند می توانیم همه اعداد را بر ۴ تقسیم کنیم و هم چنان در کلیت مسئله تفاوتی ایجاد نخواهد شد. مجموعه جدید تبدیل خواهد شد به:

$\{0,1,2,3,4,5,6\}$

این مجموعه ۱۳ عدد متمایز تولید می کند زیرا جمع کوچکترین ها ۶ و جمع بزرگترین ها ۱۸ خواهد بود که همه اعداد بین این دو نیز توسط ۴ عدد متمایز مجموعه ساخته خواهند شد (این رخداد به دلیل پیوستگی مجموعه و وجود صفر در آن است). هر کدام از مجموعه هایی که بدست می آیند با ضرب در ۴ و جمع با ۱۵ به یکی از مجموع های مجموعه ی اولیه تبدیل خواهند شد. پس جواب گزینه ج خواهد بود.

(۲۵) گزینه ی (ج) درست است.

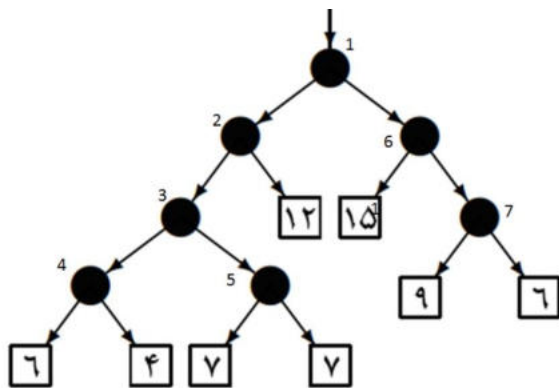
از آنجایی که از هر دو جهت دایره باید نخود عبور کند پس هر دایره حداقل یکبار تغییر جهت نیاز دارد.

از طرفی نخودهایی که از هر دو جهت هر دایره (به جز دایره ی سمت راست پایین) باید عبور کنند متفاوتند، پس باید قبل از تغییر جهت بدانیم نخود ها در چه جهتی می رفتند. در نتیجه در کل به $5+6$ عمل تغییر جهت نیاز داریم.

ابتدا با ۵ حرکت جهت همه ی دایره ها را می فهمیم به جز دایره ی سمت راست پایین که مهم نیست در چه جهتی باشد. سپس هر کیسه که پر شد به ترتیب از پایین دایره ها را تغییر می دهیم تا همه ی کیسه ها پر شود.

(۲۶) گزینه ی (الف) درست است.

شروع به انداختن نخودها می کنیم تا زمانی که یکی از خانه ها پر شود. در اینصورت جهت پدر آن گره را متوجه می شویم. با تغییر جهت آن دایره مربع دیگری شروع به پر شدن می کند. پس از اینکه آن خانه نیز پر شود جهت پدر آن را تغییر می دهیم تا زمانی که همه مربع ها پر شوند. هر دایره نهایتاً یک بار تغییر جهت می دهد. در نتیجه به تعداد خانه های دایره ای احتیاج به تغییر داریم. به مثال زیر توجه کنید:



فرض کنید شروع به ریختن نخود می کنیم و پس از تعدادی حرکت مربع ۱۵ تایی پر می شود. جهت دایره ۶ را عوض می کنیم و خانه ۹ تایی شروع به پر شدن می کند سپس با عوض کردن دایره ۷ مربع ۶ تایی شروع به پر شدن می کند. پس از آن دایره شماره ۱ را تغییر جهت می دهیم و به همین ترتیب تا همه مربع ها پر شوند. واضح است که با ۷ حرکت همه مربع ها پر خواهند شد.

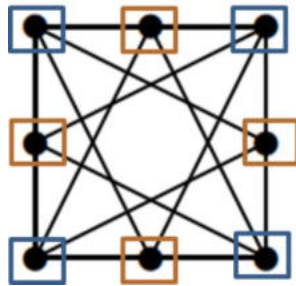
(۲۷) گزینه ی (ج) درست است.

می دانیم اگر فردی بمیرد مشخص می شود که یکی از دو شرکت سازنده کنسرو او کنسرو فاسد تولید می کنند. در نتیجه این دو شرکت در غذای هر کدام از افراد دیگر آمده باشند شرکت فاسد مشخص خواهد شد (اگر شرکت سالم در غذای فردی بیاید او نخواهد مرد زیرا فقط یک شرکت فاسد داریم و در این صورت شرکت فاسد مشخص می شود و در صورتی که شرکت فاسد در غذای فردی دیگر بیاید او خواهد مرد و در این صورت نیز شرکت فاسد شناسایی خواهد شد). پس تنها حالت ممکن این است که شرکت فاسد و شرکتی که با شرکت فاسد آمده است دیگر در هیچ گروهی نیایند که در این صورت بقیه شرکت ها $\binom{8}{2} = 28$ حالت امکان تشکیل گروه را دارند. پس در کل ۲۹ دسته می توانند تشکیل شوند که باعث کشته شدن فقط یک نفر خواهند شد و شرکت فاسد نیز مشخص نخواهد شد.

(۲۸) گزینه ی (د) درست است.

پینوکیو به جز مرحله ی اول همواره از یک مسیر وارد سهراهی شده و در نتیجه تنها دو مسیر پیشرو دارد. پس هر بار در بدترین حالت مجبور است یکی از سهراهی ها را برود و برگردد و سپس وارد مسیر درست شود. در نتیجه هر بار ۳ متر را طی می کند و در ازای آن یک متر از فاصله او با پدر ژپتو کاسته خواهد شد. البته در مرحله ی اول باید ۵ متر طی کند. پس در کل $4157 = 1385 \times 3 + 2$ متر باید بپیماید.

(۲۹) گزینه ی (ه) درست است.



همانطور که در شکل نشان داده شده این گراف دوبخشی است و به همین دلیل هر کدام از دسته های نارنجی و آبی مربوط به یکی از دو نفر خواهند بود. در صورتی که نیلوفر شروع کننده بازی باشد با نگاه کردن به دفترچه و جمع زدن عوارض نارنجی و جمع زدن عوارض آبی می تواند بفهمد کدام دسته مجموع قیمت های کمتری دارد و آن را انتخاب کند و در نهایت نیلوفر قیمت کمتری خواهد پرداخت. در نتیجه مقداری که نیلوفر خرج می کند کمتر مساوی مقداری است که لیلی خرج می کند.

(۳۰) گزینه ی (الف) درست است.

ثابت می کنیم:

$$W_A = W_B, W_C = W_D + 2, W_E = W_F, W_G = W_H$$

برای دو نقطه مثل A, B اگر بالاترین خیابان هر کدام از این ستون ها، خیابان بین این دو باشد تناظری یک به یک بین مسیرهای منتهی به این نقاط وجود دارد. چرا که برای رسیدن به این نقاط باید به ارتفاع خیابان بین این دو برسیم و در این حالت به ازای هر مسیر به A یک مسیر نیز به B وجود دارد. در نتیجه تعداد مسیرهای منتهی به این نقاط با یکدیگر برابرند. این استدلال برای زوج نقاط E, F و G, H نیز درست است.

ولی برای نقاط C, D شرایط فرق می کند. اگر فرض کنیم خیابان بین B و C وجود ندارد بقیه مسیرها با هم متناظر هستند. پس کافیت که تنها مسیرهایی را محاسبه کنیم که از این خیابان استفاده می کنند و به C ختم می شوند. با توجه به اینکه تنها می توان به سمت بالا، چپ و راست حرکت کرد تنها دو مسیر با این ویژگی وجود دارد. پس مجموع یاد شده در مساله برابر با (۲-) است.

(۳۱) گزینه ی (ه) درست است.

در صورتی که وضعیت لامپ های ردیف اول را مشخص کنیم، بقیه ردیف ها وضعیت یکتایی خواهند داشت که از یک الگو تبعیت می کند. کافیت که به ازای حالات مختلف الگوها را بیابیم.

به ازای هر ردیف هشت حالت مختلف از تغییرات وجود دارد. دنباله ی تغییرات لامپ ها در طبقات مختلف چهار حالت مختلف هستند.

در هر الگو پس از رسیدن به حالت نهایی، الگو دوباره تکرار می شود (نقطه نماد خاموشی و عدد نماد روشنی است).

الگوی اول:

1 . .

1 2 .

. . 3

. 2 3

1 . .

الگوی دوم:

. 2 .

1 2 3

. 2 .

الگوی سوم:

. . .

الگوی چهارم:

1 . 3

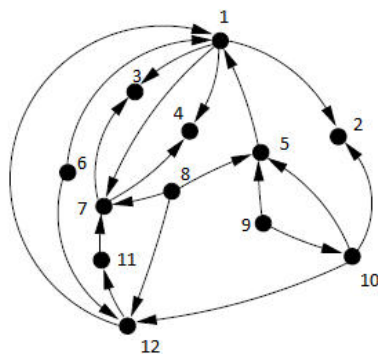
با این روند تمام حالات برای ردیف دهم ممکن خواهد بود. پس پاسخ برابر هر چهار حالت داده شده است.

(۳۲) گزینه ی (ج) درست است.

در صورتی که افراد دور دایره را شماره گذاری کنیم، در صورتی که نفر اول و نفر چهارم چشم راست و بقیه چشم چپ خود را ببندند، ۷ جفت آدم یکدیگر را می بینند.

حال ثابت می کنیم این تعداد بیشترین تعداد جفت آدم ممکن است. در کل تعداد هم بینی های ممکن $\binom{6}{2} = 15$ است. از طرفی می دانیم از این تعداد حداقل $\frac{2 \times 6}{2}$ هم بینی به دلیل ندیدن افراد مجاور حذف خواهد شد. در نتیجه حداکثر ۹ هم بینی می ماند. همچنین سه نفر مجاور که هم بینی ندارند را در نظر بگیرید، نفر سمت چپ چشم سمت راست خود را بسته است و نفر سمت راست چشم سمت چپ خود. این ناهم بینی ها در کسر فوق محاسبه شده اند ولی نفر وسط به هر طریقی که چشم خود را ببندد یکی دیگر به جز دو نفر مجاور خود را نخواهد دید در نتیجه یک واحد به کسر بالا اضافه خواهد شد. به ازای هر سه نفر که هم بینی ندارند و مجاور هستند یکی به کسر فوق اضافه می شود چون تعداد افراد ۶ است در کل ۸ هم بینی از بین می روند. در نتیجه بیشتر از ۷ هم بینی امکان پذیر نیست.

(۳۳) گزینه ی (الف) درست است.



نهنگ هایی که کسی را دوست ندارند (به کسی یال ندارند) در هر صورت خودکشی نمی کنند، پس هر کدام از این نهنگ ها باید یک نهنگ دیگر را دوست داشته باشد. نهنگ های ۲، ۳ و ۴ به هیچ نهنگی پیکان ندارند پس حتی اگر یکی از این نهنگ ها را نیز در ابتدا بکشیم دو نهنگ دیگر باید یک پیکان خروجی داشته باشند تا خودکشی کنند.

اگر دو پیکان از نهنگ های ۳ و ۴ به نهنگ ۲ بکشیم، بعد از کشتن نهنگ ۲، همه ی نهنگ ها بعد از چند مرحله خودکشی می کنند .

(۳۴) گزینه ی (ب) درست است.

$f(n)$: تعداد حالت‌هایی که تانکرها به مقصد می‌رسند اگر در آغاز n تانکر داشته باشیم (و هر تانکر تنها با تانکرهایی تصادف کند که دارای عددهای متوالی هستند).

روی اولین تانکر حالت‌بندی می‌کنیم:

۱- به مقصد می‌رسد:

در اینصورت تانکر اول با هیچ تانکری برخورد نکرده است پس تعداد حالت‌ها برابر است با $f(n-1)$.

۲- به مقصد نمی‌رسد:

در این حالت تانکر اول با تانکر دوم برخورد کرده است. پس ۲ تانکر اول حذف می‌شوند و تعداد حالت‌ها برابر است با $f(n-2)$.

در نتیجه $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$. که با توجه به حالت‌های اولیه داریم: $f(10) = 89$

(۳۵) گزینه ی (الف) درست است.

برای اینکه بیشترین تعداد حرکات را داشته باشیم باید به بیشترین عدد فرد برسیم.

اعداد را در مبنای ۲ در نظر می‌گیریم در هر مرحله اگر عدد زوج باشد صفر جلوی عدد را برمی‌داریم و اگر عدد فرد باشد، ۱ جلوی عدد را برداشته و به آن ۵۱۲ تا اضافه می‌کنیم.

پس بیشترین تعداد دفعاتی که می‌توانیم عدد فرد داشته باشیم حالتی است که بیشترین تعداد ۱ ممکن را در مبنای ۲ عدد ابتدایی داشته باشیم.

در نتیجه عدد ابتدایی باید ۶۳ باشد که تعداد حرکات ممکن با انتخاب ۶۳ برابر است با ۶۱۳۸.

(۳۶) گزینه ی (ب) درست است.

از آنجایی که با دانستن رنگ قاتل می‌توان رنگ مقتول را فهمید، دنباله‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن فقط رنگ قاتل‌ها را نوشته‌ایم.

آخرین قاتل همان نهنگ بازمانده است پس آخرین نهنگ مقتول از رنگ مخالف آن است. در نتیجه از مرحله‌ی اول تا قبل از مرحله‌ی آخر از هر دو رنگ حتمن حداقل یک نهنگ داریم. پس قاتل‌ها به هر ترتیبی می‌توانند باشند.

فرض می‌کنیم نهنگ آخر سفید باشد (چون حالت‌ها متقارن‌اند). در نتیجه قاتل آخر نیز سفید است. در دنباله ۶ جای خالی داریم که با ۳ سیاه و ۳ سفید پر می‌شوند که تعداد حالت‌ها برابر ۲۰ می‌باشد.

در نتیجه کل حالت‌ها ۴۰ تا است.

(۳۷) گزینه ی (د) درست است.

پس از اینکه در سوال قبل تعداد روش‌ها را یافتیم باید نام نهنگ‌ها را در لیست بنویسیم. برای اینکار می‌توانیم تعداد روش‌ها را در $4! \times 4!$ ضرب کنیم که در نهایت عدد ۲۳۰۴۰ بدست خواهد آمد.

(۳۸) گزینه ی (ه) درست است.

ثابت می کنیم حداکثر تعداد حرکات لازم ۲۰۰۷ تاست. می توانیم هر جدول را با ۲۰۰۷ حرکت طوری مرتب کنیم که به ترتیب در خانه های ۱ تا ۲۰۰۷ قرار بگیرند.

در هر مرحله کمترین عضوی (کمتر از ۱۰۰۴) که در جای خود نباشد را پیدا کرده و با حداکثر ۲ حرکت در جای خود قرار می دهیم (اگر این عدد در ستون بود با یک بار مرتب سازی ستون و اگر در سطر بود ابتدا سطر را مرتب کرده چون کوچکترین عدد است به ابتدای سطر می آید سپس ستون را مرتب می کنیم).

پس ستون جدول را با ۲۰۰۶ حرکت پر می کنیم، سپس با یک حرکت سطر جدول را که شامل ۱۰۰۴ عدد بزرگتر است مرتب می کنیم.

حال مثالی ارائه می دهیم که دقیقن ۲۰۰۷ حرکت لازم داشته باشد.

در این جدول حرکات یکتا هستند (دو حرکت مشابه پشت هم بیهوده است از طرفی اولین حرکت باید روی سطر باشد)

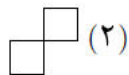
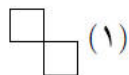
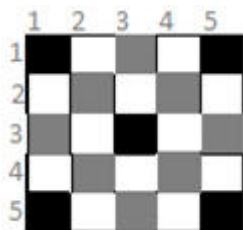
در هر ۲ حرکت دقیقن یک عدد در ستون سر جای خود قرار می گیرد.

1004				
⋮				
2006				
2007	1	...		1003

(۳۹) گزینه ی (د) درست است.

جدول را به صورت روبرو شطرنجی رنگ می کنیم.

چون هر قطعه دو خانه از یک رنگ را پر می کند، پس پر کردن خانه های سفید و خانه های خاکستری مستقل از هم هستند.



برای پر کردن خانه های خاکستری تنها ۲ حالت داریم (خانه ی (3, 1) با چه خانه ای جفت شود).

برای خانه های سفید روی جهت قطعه های (1, 2) و (1, 4) و (5, 2) و (5, 4) حالت بندی می کنیم:

- ۱- در همه ی این خانه ها قطعه اول را بگذاریم (بقیه خانه ها یکتا تعیین می شوند).
- ۲- در همه ی این خانه ها قطعه دوم را بگذاریم (بقیه خانه ها یکتا تعیین می شوند).
- ۳- در خانه های (5, 4) و (1, 2) قطعه ی اول و در دو خانه ی دیگر قطعه ی دوم را قرار دهیم در اینصورت بقیه خانه ها دو حالت دارند.
- ۴- در قسمت بالا برای دقیقن یک خانه از این ۴ خانه جهت قطعه را عوض کنیم در اینصورت بقیه خانه ها یکتا تعیین می شوند.

پس در کل ۸ حالت برای چینش خانه های سفید داریم. در نتیجه برای کل جدول ۱۶ حالت داریم.

(۴۰) گزینه ی (ب) درست است.

از آنجایی که لی، شائو نیست! پس دروغگو آخر نشده.

نفر دوم نمی تواند دروغگو باشد چون در اینصورت دو نفر اول شده اند.

نفر سوم نمی تواند دروغگو باشد چون در اینصورت نفر پنجم و نفر اول، اول شده اند.

نفر چهارم دروغگو نیست چون اگر دروغگو باشد یا اول شده یا آخر و چون نفر اول، اول شده پس او آخر شده در حالی که دروغگو نباید آخر شده باشد!

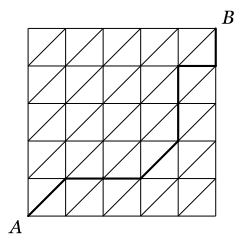
نفر اول هم دروغگو نیست چون در اینصورت هم نفر دوم هم نفر پنجم می توانند اول شده باشند (که استاد نمی توانسته مطمئن باشد چه کسی اول می شود).

در نتیجه نفر پنجم دروغگوست و نفر دوم آخر شده است.

مرحله ی اول شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱) در دبیرستان «هجرت نو» یک آزمون هماهنگ بین تمامی دانش آموزان برگزار شده است. این آزمون شامل دو درس فیزیک و ریاضی است و رتبه ی کل هر داوطلب، با توجه به حاصل جمع نمره ی ریاضی و نمره ی فیزیک وی نسبت به سایر دانش آموزان محاسبه می شود. اگر امین در درس ریاضی رتبه ی هفتم و در درس فیزیک رتبه ی یازدهم را کسب کند، بدترین رتبه ی کلی که می تواند داشته باشد کدام است؟ (توجه: در هیچ درسی دو نفر نمره ی مساوی نگرفته اند.)

الف) نوزدهم ب) یازدهم ج) هجدهم د) شانزدهم ه) هفدهم



(۲) در شکل مقابل اگر از هر نقطه بتوان به نقطه ی بالایی، راستی و بالا راستی رفت، چند مسیر به طول ۸ واحد از A به B وجود دارد؟ یکی از این مسیرها در شکل نشان داده شده است.

الف) ۲۰۰ ب) ۲۱۰ ج) ۲۳۰ د) ۵۶۰ ه) ۳۱۵۰

(۳) یک جدول 5×5 را «منظم» می گوئیم اگر و فقط اگر در هر خانه اش یک عدد نوشته شده باشد و در ۲۵ خانه اش همه ی اعداد ۱ تا ۲۵ آمده باشند. یک جدول 5×5 را «خوش سطر» می گوئیم اگر و فقط اگر حاصل ضرب ۵ عدد واقع در هر سطرش نه بر ۳۴ بخش پذیر باشد و نه بر ۳۸. به همین صورت یک جدول 5×5 را «خوش ستون» می گوئیم اگر و فقط اگر حاصل ضرب ۵ عدد واقع در هر ستونش نه بر ۳۴ بخش پذیر باشد و نه بر ۳۸. چند جدول مختلف 5×5 منظم داریم که هم خوش سطر باشد و هم خوش ستون؟

الف) $11! \times 12! \times 200$ ب) $25!$ ج) 10 د) $5!$ ه) $12 \times 10! \times 13!$

(۴) عدد $x_5 + 16x_4 + 8x_3 + 4x_2 + 2x_1 + 2x_0 = x$ را در نظر بگیرید که در آن رقم های $x_0, \dots, x_5$ صفر یا یک هستند. معین کنید که برای چند مقدار مختلف x بیش از یک ۶-تایی $(x_0, x_1, \dots, x_5)$ وجود دارد به طوری که در معادله ی فوق صدق کند.

الف) ۱۶ ب) ۲۴ ج) ۳۰ د) ۳۲ ه) ۳۴

(۵) محمدحسین می خواهد یک نمایشگاه وسایل خانگی را برق کشی کند. متأسفانه در کل این نمایشگاه تنها یک پریز برق وجود دارد. البته محمدحسین فکر این جا را کرده و با خود تعداد زیادی n راهی آورده است. به یک n -راهی می توان n تا دوشاخه ی برق وصل کرد و یک دوشاخه دارد که باید به طریقی (مستقیم به پریز یا توسط n -راهی های دیگر) به برق وصل شود تا دوشاخه هایی که بدان وصلند را برق دار کند. اگر محمدحسین ده تا ۱۰ راهی، هفت تا ۷ راهی، پنج تا ۴ راهی، چهار تا ۲ راهی و صد تا ۱ راهی داشته باشد، حداکثر چند وسیله ی خانگی را می تواند به برق متصل کند؟

الف) ۱۵۰ ب) ۱۵۲ ج) ۱۲۶ د) ۱۲۷ ه) هیچ کدام

مرحله ی اول شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۰	۱	۱
۱	۱	۰
۱	۰	۱

۶) جدول 3×3 روبه‌رو داده شده است. در هر حرکت می‌توانیم جای دو سطر یا جای دو ستون از این جدول را با هم عوض کنیم. با این حرکات به چند جدول مختلف می‌توان رسید؟

۳۶ (هـ)

۶ (د)

۸۴ (ج)

۴۲ (ب)

۱۲ (الف)

۷) بازی سه‌نفره ی «عددسازی» به این صورت انجام می‌شود: ۳ نفر دور یک میز گرد می‌نشینند و به هر یک از آن‌ها یک کارت داده می‌شود که روی آن ۰ یا ۱۰ نوشته شده است. در ابتدا بازی‌کنی که از دیگران بزرگ‌تر است یک رقم دل‌خواه ۰ یا ۱ روی میز می‌نویسد و سپس به ترتیب ساعت‌گرد نوبت عوض می‌شود. هر کس در نوبت خود آخرین رقمی که روی میز نوشته شده را بررسی می‌کند. اگر ۰ بود رقم سمت راست کارتش و اگر ۱ بود رقم سمت چپ کارتش را در سمت راست عدد روی میز می‌نویسد. بازی آن‌قدر ادامه پیدا می‌کند تا کوچک‌ترین بازی‌کن خسته شود. تعیین کنید در بازی عددسازی چند تا از اعداد زیر ممکن است تولید شوند؟

۰۰۰۰۱۱۱۱۰۰۰۰

۰۱۱۱۰۰۰۱۱۱۰

۰۰۱۱۱۰۰۱۱۱۰۰

۰۰۱۱۰۰۱۱۰۰

۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰

۵ (هـ)

۴ (د)

۳ (ج)

۲ (ب)

۱ (الف)

۸) فرض کنید $100 = 64x_1 + 16x_2 + 4x_3 + x_4$ باشد. اگر هر یک از x_4 تا x_3 از مجموعه ی $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ انتخاب شده باشد، کمینه ی مقدار $x_4 + x_3 + x_2 + x_1$ کدام است؟

۱ (هـ)

۰ (د)

۵ (ج)

-۱ (ب)

۲ (الف)

۹) بهروز، سیامک و علی هر یک مالک یک دستگاه خودرو هستند. مدل این خودروها پراید، پژو و دوو می‌باشد. رنگ یکی از این ماشین‌ها سیاه، دیگری سفید و سومی طوسی است. می‌دانیم که ماشین علی جلوی پراید و ماشین سفید پشت پراید پارک است، دوو طوسی رنگ است و نیز ماشین سیامک سیاه نیست. نوع و رنگ ماشین متعلق به هر یک از این افراد کدام است؟

الف) (بهروز، پراید سفید)، (علی، پژو سیاه) و (سیامک، دوو طوسی)

ب) (بهروز، پژو سفید)، (علی، پراید سیاه) و (سیامک، دوو طوسی)

ج) (بهروز، پژو سیاه)، (علی، دوو طوسی) و (سیامک، پراید سفید)

د) (بهروز، پراید سیاه)، (علی، دوو طوسی) و (سیامک، پژو سفید)

هـ) (بهروز، پراید سیاه)، (علی، پژو طوسی) و (سیامک، دوو سفید)

۱۰) یک جدول 8×8 داریم که ۳۲ خانه ی ۴ ستون اولش سیاه و ۳۲ خانه ی دیگرش سفید هستند. در هر حرکت می‌توانیم رنگ دو خانه ی مجاور را با هم عوض می‌کنیم (در صورتی که هم‌رنگ باشند تغییری در رنگشان رخ نمی‌دهد). دو خانه مجاورند اگر و فقط اگر ضلع مشترک داشته باشند. کم‌ترین تعداد حرکت لازم برای شطرنجی کردن جدول چند است؟ جدولی شطرنجی است که رنگ هیچ دو خانه ی مجاوری در آن یکی نباشد.

۶۴ (هـ)

۱۲۸ (د)

۳۲ (ج)

۴۸ (ب)

۱۰۰ (الف)

مرحله ی اول شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱۱) شایان دوستانش را برای جشن تولدش به پارک دعوت کرده است. او قصد دارد تعدادی پیتزا برای آن‌ها بخرد. بعضی از دوستان او عادت به خوردن یک پیتزای کامل ندارند به همین دلیل او از قبل از دوستانش پرسیده که هر کدام چه اندازه‌ای از یک پیتزا را می‌خورد. ۱۱ نفر از آن‌ها گفته‌اند که هر کدام یک پیتزای کامل می‌خورند، ۹ نفر هر کدام $\frac{2}{3}$ پیتزا می‌خورند، ۱۳ نفر هر کدام $\frac{1}{3}$ پیتزا و ۵ نفر هر کدام $\frac{1}{6}$ پیتزا می‌خورند. در ضمن هر یک از دوستانش علاقه دارد پیتزای خواسته شده‌اش، در یک قطعه‌ی به هم چسبیده به او داده شود. شایان می‌خواهد حداقل تعداد پیتزا را از پیتزا فروشی بخرد. به نظر شما شایان چند تا پیتزای کامل باید بخرد تا بتواند به هر نفر مطابق میلش غذا بدهد؟

الف) ۲۵ (ب) ۲۸ (ج) ۲۷ (د) ۲۶ (ه) ۳۰

(۱۲) ۱۰ نفر دور یک میز دایره‌ای نشسته‌اند. هر نفر یا دروغ‌گوست یا راست‌گو؛ دروغ‌گو همیشه دروغ می‌گوید و راست‌گو همیشه راست است. هر نفر گفته است که شخص سمت راستش دروغ‌گوست یا راست‌گو. ما می‌خواهیم به این ۱۰ نفر صفت راست‌گویی و دروغ‌گویی نسبت دهیم به‌طوری‌که با گفته‌هایشان مطابقت داشته باشد. حداکثر چند طریق برای صفت نسبت دادن به این ۱۰ نفر وجود دارد؟

الف) ۱ (ب) ۲۱۰ (ج) ۲۵ (د) ۲ (ه) ۴

(۱۳) عدد $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$ ($a_1 \neq 0$) را عدد «خالی‌بند» می‌گوییم اگر به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$ عدد $\overline{a_1 a_2 \dots a_i}$ بر عدد i بخش‌پذیر باشد. مثلاً ۱۲۹ خالی‌بند است. به‌ازای چند تا از مقادیر ۵، ۷، ۸ و ۹ برای n عدد خالی‌بند n رقمی وجود دارد؟

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

(۱۴) رشته‌ای از حروف الفبای انگلیسی داده شده است. در هر مرحله، می‌توان یکی از دو عمل زیر را انجام داد:

- جای دو حرف را در رشته به‌دل‌خواه تغییر داد؛
- دو حرف الفبا را (مانند c_1 و c_2) انتخاب کرده، و سپس تمام حروف c_1 در رشته‌ی مورد نظر را به c_2 تغییر داده و بالعکس.

دو نمونه در این جا ذکر می‌کنیم: با انجام عمل اول می‌توان از SALAM به رشته‌ی SALMA رسید. با انجام عمل دوم می‌توان از SALAM به ASLSM و BALAM رسید. در کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌توان با انجام تعدادی از حرکات فوق‌الذکر، از رشته‌ی اول به رشته‌ی دوم رسید؟

الف) SALAM $\leftarrow$ MASWQ (ب) ABCDDDEFF $\leftarrow$ ZYXXWWQPP (ج) HHIJJJJKKHOL $\leftarrow$ UDHQOYQOYOY (د) IDKLMLJMJM $\leftarrow$ UOOQWERPPP (ه) IDJKER $\leftarrow$ QWKIOPX

(۱۵) اعداد ۱ تا n را به‌ترتیب لغت‌نامه‌ای مرتب کرده‌ایم. جای‌گاه عدد k ($1 \leq k \leq n$) را با $Q_{n,k}$ نمایش می‌دهیم. به‌عنوان نمونه n را برابر ۱۳ قرار می‌دهیم و اعداد به‌صورت زیر مرتب می‌شوند (از چپ به راست):

۱, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹

لذا $Q_{13,10} = ۲$ و $Q_{13,2} = ۶$ می‌باشد. کوچک‌ترین n را بیابید که $Q_{n,123} = ۲۰۰$ شود.

الف) ۱۱۶۹ (ب) ۱۱۷۱ (ج) ۱۱۷۳ (د) ۱۱۷۵ (ه) امکان‌پذیر نیست

مرحله ی اول شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۶) نظام عددی مبنای $۱۰-$ ، مفروض است. وزن هر رقم در این جا نیز هم چون نظام دهمی، بسته به جای گاهش توانی از ۱۰ می باشد؛ با این تفاوت که وزن ارقامی که توان فردی از ۱۰ است، منفی می باشد. مثلاً ارزش عدد سه رقمی ۱۲۳ در این نظام برابر $۸۳ = ۳ \times ۱۰^۱ - ۲ \times ۱۰^۲ + ۱ \times ۱۰^۳$ است. عدد ده رقمی $x = ۱۹۹۹۹۹۹۹$ در این نظام مفروض است. مطلوب است مجموع ارقام عدد y در این نظام، به طوری که $y = -x$.

الف) ۱ (ب) ۳ (ج) ۱۷ (د) ۴۵ (ه) ۸۲

۱۷) روی تخته تعدادی عدد طبیعی نوشته شده است. در هر مرحله یک عدد روی تخته مانند a ($a > ۱$) را پاک می کنیم و به جای آن $\lfloor a/۲ \rfloor$ و $\lceil a/۲ \rceil$ را می نویسیم. این کار را آن قدر ادامه می دهیم تا همه ی اعداد روی تخته برابر با ۱ شوند. حال فرض کنید در ابتدا فقط عدد n روی تخته نوشته شده باشد. تعداد اعداد متفاوتی که در طول عملیات فوق روی تخته نوشته می شود را $f(n)$ بنامید. مثلاً $f(۷) = ۵$ ، زیرا ابتدا به جای ۷، دو عدد ۳ و ۴ را می نویسیم. سپس به جای ۴، ۲ تا ۲ و به جای ۳، ۱ و ۲ را می نویسیم. در پایان نیز به جای هر ۲، دو تا ۱ می نویسیم. بنابراین ۵ عدد مختلف ۱، ۲، ۳، ۴ و ۷ در طول این عملیات روی تخته نوشته می شوند. بزرگ ترین مقدار $f(n)$ به ازای $۱ \leq n \leq ۴۰۰۰$ چند است؟

الف) ۲۳ (ب) ۳۱ (ج) ۲۱ (د) ۱۹ (ه) ۲۰۰۰

۱۸) ۳ عدد a ، b و c روی تخته نوشته شده اند. آرش و ایمان به این ترتیب با این سه عدد بازی می کنند که هر کس در نوبت خود دو عدد دلخواه از این سه عدد، مثلاً a و b را از روی تخته پاک می کند و دو عدد $a+b$ و $a-b$ را به جای آن ها می نویسد. آرش بازی را شروع می کند. آرش و ایمان به طور یک در میان بازی می کنند. آرش می خواهد کار را به جایی برساند که هر سه عدد نوشته شده روی تخته بر ۳ بخش پذیر باشند و ایمان می خواهد جلوی این کار را بگیرد. به ازای چند تا از سه تایی های زیر به عنوان مقادیر اولیه ی (a, b, c) ، آرش می تواند به هدف خودش برسد.

$(۱, ۲, ۱۰), (۲, ۳, ۶), (۳, ۱, ۴), (۵, ۶, ۷), (۱۰۰, ۱۰۰۰, ۱۰۰۰۰)$

الف) ۱ (ب) ۴ (ج) ۲ (د) ۰ (ه) ۵

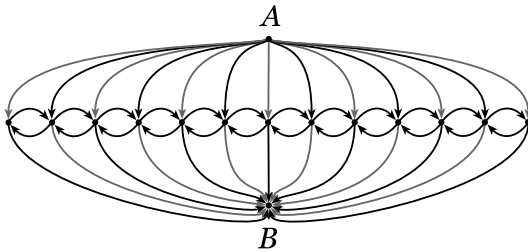
۱۹) عدد r رقمی $\overline{a_r a_{r-1} \dots a_2 a_1}$ مفروض است (a_1 کم ارزش ترین رقم است). اگر $۴ \times \overline{a_r a_{r-1} \dots a_2 a_1} = \overline{a_1 a_r a_{r-1} \dots a_2 a_1}$ و $a_1 = ۸$ باشد، مقدار a_{r-1} چیست؟

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۹ (د) ۷ (ه) ۴

۲۰) آیدین و محمد روی یک جدول $k \times k$ ($k \geq ۵$) بازی «بایوب» را انجام می دهند. بازی به این صورت است که هر کس در نوبت خودش یک عدد گویا در یکی از خانه های خالی جدول قرار می دهد تا تمام خانه های جدول پر شود. اگر پس از پر شدن جدول، حاصل جمع خانه های یک سطر یا حاصل جمع خانه های یک ستون برابر شود، محمد، و در غیر این صورت، آیدین برنده است. اگر در دور اول، آیدین شروع کننده ی بازی باشد و در دور دوم، محمد بازی را آغاز کند و نیز هر بازی کن در هر حرکت به ترین بازی اش را ارائه دهد، تعیین کنید به ترتیب چه کسی برنده ی دور اول و دور دوم خواهد شد؟

الف) محمد، آیدین (ب) محمد، محمد (ج) آیدین، آیدین (د) آیدین، محمد (ه) به مقدار k بستگی دارد

مرحله ی اول شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



(۲۱) در شکل مقابل، هر کدام از ۱۵ نقطه نشان‌دهنده ی یک شهر و هر کدام از ۵۰ پاره خط فلش دار، نشان‌دهنده ی یک جاده ی یک طرفه می باشد.

یک مسیر، دنباله ای از جاده های متوالی است که از شهر A شروع شده و به شهر B برسد و هر شهر، حداکثر یک بار در آن ظاهر شود. طول یک مسیر برابر تعداد جاده هایی است که در آن مسیر قرار دارند. تعداد مسیرهای به طول فرد منهای تعداد مسیرهای به طول زوج برابر است با:

الف) ۱۳- ب) ۱۳ ج) ۱ د) ۰ ه) ۱-

(۲۲) ماشین «قارقوری» که برای نمایش اعداد طبیعی به کار می رود، از ۹ کلید و ۹ کارت خوان تشکیل شده است. برای کار با «قارقوری»، ابتدا باید ۹ عدد صحیح مثبت روی ۹ کارت تمیز نوشته و در کارت خوان های ماشین قرار دهیم، سپس با روشن و خاموش کردن کلیدهای آن، به عدد مورد نظر برسیم. می دانیم عددی که «قارقوری» به عنوان خروجی نمایش می دهد برابر است با: $n = s_1 \times v_1 + s_2 \times v_2 + \dots + s_9 \times v_9$ که v_i عدد نوشته شده روی کارت i ام بوده و مقدار s_i در صورتی که کلید i ام روشن باشد برابر یک و در صورتی که خاموش باشد، برابر منفی یک است.

وهاب قصد دارد از این ماشین برای نمایش اعداد طبیعی مختلف استفاده کند. می دانیم وهاب، مقادیر اولیه ی کارت ها را تنها یک بار و آن هم در آغاز کار با دستگاه می تواند تعیین کند و از آن به بعد صرفاً با تغییر وضعیت کلیدها قادر به تغییر مقدار خروجی خواهد بود. حداکثر مقدار k را بیابید که وهاب بتواند طوری مقادیر کارت ها را در ابتدا تعیین کند که تنها با تغییر دادن حالت کلیدها قادر به نمایش تمام اعداد ۱ تا k باشد.

الف) ۹ ب) ۸۱ ج) ۵۱۱ د) ۱۹۶۸۲ ه) هیچ کدام

(۲۳) آقای «ب» به تازگی یک کیف سامسونگ خریده است که رمز آن از سه گردونه ی ارقام تشکیل شده است که اعداد ۰ تا ۹ به ترتیب روی هر کدام از آن ها نوشته شده اند. آقای «ب» در هر حرکت می تواند یک، دو یا سه گردونه را هم زمان یک واحد به جلو یا عقب بچرخاند؛ در این صورت اعداد روی گردونه های چرخانده شده به ترتیب یک واحد زیاد یا یک واحد کم می شوند. دقت کنید که اگر گردونه ای مقدار ۹ را داشته باشد و یک واحد به جلو چرخانده شود، مقدار آن صفر شده و نیز اگر گردونه ای مقدار صفر را داشته باشد و یک واحد به عقب چرخانده شود، مقدار آن ۹ می شود. برای مثال، آقای «ب» می تواند مطابق شکل زیر، رمز کیفش را در ۴ حرکت از ۳۲۴ به صفر تبدیل کند:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{چرخاندن هر سه گردونه} & & \text{چرخاندن هر سه گردونه} & & \text{چرخاندن دو گردونه ی} & & \text{چرخاندن گردونه ی} \\ \text{به عقب} & \xrightarrow{\quad} & \text{به عقب} & \xrightarrow{\quad} & \text{چپ و راست به عقب} & \xrightarrow{\quad} & \text{سمت راست به عقب} \\ 324 & \xrightarrow{\quad} & 213 & \xrightarrow{\quad} & 102 & \xrightarrow{\quad} & 001 & \xrightarrow{\quad} & 000 \end{array}$$

اگر حداقل تعداد حرکات لازم برای تبدیل عدد سه رقمی x به سه رقم صفر را $f(x)$ بنامیم، حداکثر مقدار $f(x)$ برای تمام مقادیر $999 \geq x \geq 100$ ، برابر است با:

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۵

مرحله ی اول شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۴) اعداد ۰ تا ۶۴ به جز عدد ۳۲ در خانه های یک جدول که دارای ۲ سطر و ۳۲ ستون است به نحوی نوشته شده اند که اعداد ۰ تا ۳۱ در سطر پایین قرار دارد و مجموع دو عدد هر ستون نیز برابر ۶۴ است. در هر مرحله می توانیم یک ستون را انتخاب کرده و از عدد خانه ی بالایی آن ستون، عدد 2^k ($k \geq 0$) را کم کرده و به عدد پایینی همان ستون اضافه کنیم. هدف این است که پس از تعدادی مرحله به جدولی برسیم که جای اعداد هر ستون آن نسبت به جدول اولیه تعویض شده باشد. برای مثال، در ستونی که اعداد ۴۷ و ۱۷ روبه روی هم نوشته شده اند، می توان پس از ۴ حرکت مطابق شکل زیر جای دو عدد را عوض کرد:

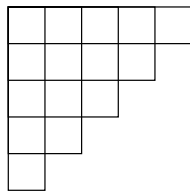
۴۷	۲۱	۴۵	۲۲	۴۱	۲۳	۳۳	۲۴	۱۷
۱۷		۱۹		۲۳		۳۱		۴۷

حداقل تعداد مراحل لازم برای تعویض دو عدد تمام ستون ها با هم دیگر و رسیدن به جدولی که نسبت به جدول ابتدایی قرینه شده باشد، برابر است با:

الف) ۳۳ (ب) ۷۹ (ج) ۸۰ (د) ۸۱ (ه) ۱۹۳

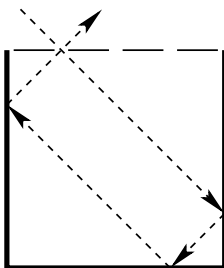
(۲۵) همان مسئله ی قبل را در حالتی در نظر بگیرید که به جای ۳۲ ستون، ۳ ستون که به ترتیب در آن ها اعداد «۶۳ و ۱» و «۴۷ و ۱۷» و «۵۵ و ۹» نوشته شده است، داشته باشیم و بتوان از عدد پایینی هم عدد 2^k ($k \geq 0$) را کم کرده و به عدد بالایی اضافه کرد. در این حالت حداقل تعداد مراحل برای تعویض دو عدد هر ۳ ستون، برابر است با:

الف) ۶ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) ۹ (ه) ۱۲



(۲۶) با روی هم چیدن تعدادی مکعب واحد یک حجم سه بعدی را ایجاد کرده ایم. تنها می دانیم که اگر از هر یک از شش جهت پایین، بالا، راست، چپ، جلو و عقب از این حجم عکس بگیریم، دوران ها و تقارن هایی از شکل روبرو ایجاد می شوند. به نظر شما در ساخت این حجم حداکثر از چند مکعب استفاده شده است؟

الف) ۴۸ (ب) ۳۲ (ج) ۵۱ (د) ۴۲ (ه) ۳۵



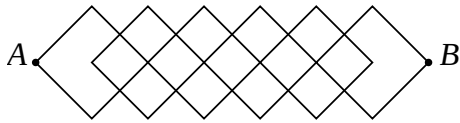
(۲۷) شکل روبه رو یک مستطیل آینه ای به ابعاد 4×4 آینه ای را نشان می دهد که روی سطح بالایی آن ۵ سوراخ (با احتساب گوشه ها) با فواصل مساوی از هم تعبیه شده اند. یک سوراخ را طلایی می گوئیم اگر پس از تاباندن یک پرتو نور از آن سوراخ با زاویه ی ۴۵ یا ۱۳۵ درجه نسبت به ضلع بالایی مستطیل آن پرتو بعد از دقیقاً یک بار برخورد به ضلع پایین مستطیل دقیقاً از همان سوراخ ورودی، خارج شود. دقت کنید که اگر یک پرتو به یکی از دو کنج پایینی برسد، چون بازتابش روی خودش می افتد، نابود می شود ولی اگر به یکی از دیواره ها یا کف برخورد کند، با ۹۰ درجه چرخش، بازتاب یافته و مسیرش را ادامه می دهد. مجموع تعداد سوراخ های طلایی در سه جدول « 1384×1384 »، « 2006×1384 » و « 4152×1384 » چند است؟ بدیهی است که یک جدول « $n \times m$ »، $m + 1$ سوراخ (با احتساب گوشه ها) دارد.

الف) صفر (ب) ۱۳۸۳ (ج) ۲۷۶۶ (د) ۴۱۴۹ (ه) هیچ کدام

مرحله ی اول شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۸) مهدی و مرتضی روی یک جدول 5×5 «فوزبازی» می کنند. این بازی به این صورت است که در ابتدا در خانه ی وسط جدول یک لوبیا قرار دارد و هر کس در نوبت خودش در یکی از خانه های خالی جدول یک لوبیا قرار می دهد. اولین کسی که کاری کند که سه لوبیا در سه خانه ی متوالی روی یک سطر، ستون یا قطر قرار بگیرند، برنده ی بازی می شود. از آن جا که این بازی بسیار پرهیجان است، حسن برای این بازی ۱۰۰ تومان جایزه تعیین کرده است که در صورتی که در پایان بازی، k لوبیا در خانه های جدول قرار داشته باشد، k تومان به بازنده و $100 - k$ تومان به برنده می دهد! اگر مهدی اولین لوبیا را (بعد از لوبیای اولیه ی وسط) روی جدول قرار بدهد و هر دو بازی کن به ترین بازی شان را انجام بدهند، برنده و حداکثر جایزه ی وی کدام گزینه است؟

الف) مرتضی، ۸۹ (ب) مهدی، ۹۲ (ج) مهدی، ۹۴ (د) مرتضی، ۹۳ (ه) هیچ کدام



(۲۹) در شکل مقابل، اگر بتوان از روی خطوط فقط در جهت چپ به راست حرکت کرد، تعداد مسیرهای مختلف بین A و B برابر است با:

الف) ۵۴ (ب) ۸۱ (ج) ۱۶۲ (د) ۲۴۳ (ه) ۴۸۶

(۳۰) ۲۴ نفر با شماره های ۱ تا ۲۴ در یک ردیف کنار هم ایستاده اند (شماره ی فرد سمت چپ ۱ است). در دست هر کدام یک عدد کارت قرار دارد که روی آن یکی از دو شماره ی ۰ یا ۱ نوشته شده است. شماره ی روی کارت ها از چپ به راست به صورت زیر است:

$$\underbrace{00 \dots 00}_8 \underbrace{10101010}_8 \underbrace{00 \dots 00}_8$$

تعدادی سوت (با شماره های ۱، ۲، ...) زده می شود. به محض شنیدن سوت شماره ی s ، نفر شماره ی i ($1 \leq i \leq 24$) دقیقاً به صورت زیر عمل می کند:

- اگر s فرد باشد: اگر i فرد است، او کارت خود را به نفر بعدی (شماره ی $i + 1$) و اگر i زوج است کارت خود را به نفر قبلی (شماره ی $i - 1$) نشان می دهد.
- اگر s زوج باشد: اگر i زوج است، او کارت خود را به نفر بعدی در صورت وجود (شماره ی $i + 1$) و اگر i فرد است کارت خود را به نفر قبلی در صورت وجود (شماره ی $i - 1$) نشان می دهد.
- دو نفر که کارت های خود را به هم نشان می دهند، اگر سمت راستی مقدار ۰ و سمت چپی مقدار ۱ داشته باشند، این دو نفر کارت های خود را با هم عوض می کنند.

دقیقاً پس از چندمین سوت کارت ها به صورت مرتب $11 \dots 11 00 \dots 00$ در می آید؟

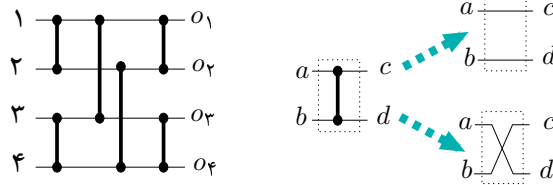
الف) ۱۶ (ب) ۱۲ (ج) ۸ (د) ۷ (ه) ۱۵

(۳۱) تعداد زیرمجموعه های مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ که مجموع اعضای هر یک از آن ها بر ۳ بخش پذیر باشد چند تاست؟ (مجموع اعضای مجموعه ی تهی صفر است.)

الف) ۴۴ (ب) ۳۹ (ج) ۴۰ (د) ۴۹ (ه) ۳۶

مرحله ی اول شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۳۲) مدار زیر با چهار ورودی و ۶ «سویچ» را در نظر بگیرید. هر سویچ می تواند مستقل از بقیه ی سویچ ها در دو حالت «مستقیم» یا «ضربدری» قرار گیرد. چنانچه در شکل نشان داده شده است، اگر سویچ در حالت مستقیم باشد دو سر ورودی اش را مستقیماً به دو سر خروجی اش وصل می کند. در حالت ضربدری، سویچ این کار را به صورت ضربدری انجام می دهد.



اگر ورودی از بالا به پایین ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد، با قرار دادن سویچ ها در حالات مختلف در نهایت خروجی از بالا یک جای گشت خاص از اعداد ۱ تا ۴ خواهد شد.

در مدار شکل بالا کدامیک از جای گشت های زیر (از بالا به پایین) قابل تولید نیست؟

(الف) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (ه) هیچ کدام، همه ی این موارد را می توان تولید کرد

۳۳) یک جدول 1×7 خالی داریم که به خانه های آن از سمت چپ به راست، شماره های ۰ تا ۶ را نسبت داده ایم. می خواهیم عناصر a, b, c, d, e, f, g را به آن اضافه کنیم و برای هر کدام، یک مکان اولیه مطابق جدول روبه رو در نظر گرفته ایم.

مکان اولیه	عنصر
۳	a
۵	b
۳	c
۴	d
۵	e
۶	f
۳	g

عناصر مذکور به ترتیب دل خواه برای درج به جدول وارد می شوند. اگر مکان اولیه ی عنصر x برابر k باشد (مثلاً برای a این مقدار برابر ۳ است)، به ترتیب مکان های $k, (k+1) \bmod 7, (k+2) \bmod 7, \dots, (k+6) \bmod 7$ را بررسی می کنیم و x را در اولین مکان خالی قرار می دهیم. می دانیم $i \bmod 7$ باقی مانده ی تقسیم صحیح عدد i بر عدد ۷ است. به ازای ترتیب های مختلف اضافه کردن عناصر $a, b, \dots, g$ به جدول، کدام یک از حالت های زیر نمی تواند حاصل شود؟

c	e	b	g	f	d	a
c	g	b	a	d	e	f

e	f	g	a	c	b	d
b	d	f	a	c	e	g

(ه) هیچ کدام، تمام موارد می توانند باشند

۳۴) در جریان یک مذاکره دو گروه ۱۰ نفری در دو طرف یک میز نشسته اند. هر نفر از هر کدام از گروه ها دقیقاً روبه روی یک نفر از گروه دیگر قرار دارد. در این مذاکره رأس هر ساعت به افراد مذاکره کننده جای تعارف می شود. سر هر ساعت هر مذاکره کننده به افراد گروه دیگر به جز کسی که روبه روی او نشسته است (۹ نفر) نگاه می کند. اگر از این تعداد فردی از این افراد در ساعت قبل جای نوشیده بودند این فرد در این ساعت جای خواهد نوشید ولی اگر تعداد زوجی از آن ها در ساعت قبل جای نوشیده بودند وی جای نخواهد نوشید. می دانیم که رأس ساعت اول، ۱۳ نفر از مجموع ۲۰ نفر جای خورده اند، چند نفر از این ۲۰ نفر در ساعت ۲۵۷۳ ام جای خواهند خورد؟

(الف) ۱۳ (ب) ۱۰ (ج) ۲۰ (د) ۶ (ه) ۷

مرحله ی اول شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

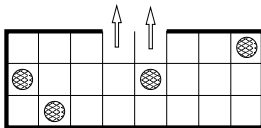
۳۵) ماشیننی داریم که با فشار دادن دکمه ی «نمایش» آن، همه ی اعدادی که در خود دارد را یک به یک و بدون ترتیب خاصی به ما نشان می دهد و این کار را اگر بخواهیم تکرار می کند، ولی ممکن است همان ترتیب قبلی نباشد. ما فقط یک ماشین حساب معمولی (با امکان ضرب، تقسیم، جمع و تفریق و نیز تعداد ۱۰ تا حافظه ی کمکی) در دست داریم و اجازه نداریم عددی که ماشین نشان می دهد را بر روی برگه یادداشت کنیم یا به خاطر بسپاریم.

این را نیز می دانیم که ماشین همه ی اعداد ۱ تا n را نشان می دهد، به جز دو عدد x و y . ما از قبل مقدار x و y را نمی دانیم.

با چند بار فشار دادن دکمه ی «نمایش»، می توانیم مقدارهای x و y را پیدا کنیم. فرض کنید که $n \leq 10000$ و ماشین حساب تا اعداد 10^{10} را می تواند در خود ذخیره کند و بر روی آن ها عملیات ساده ی حسابی گفته شده را انجام دهد.

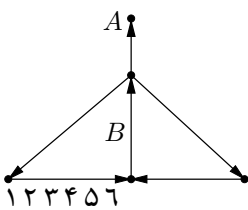
الف) ۱ ب) ۲ ج) $n - 2$ د) $n - 1$ ه) n

۳۶) تعدادی صابون در جدول روبه رو قرار دارند. در هر حرکت می توان به یک صابون در جهت افقی یا عمودی ضربه ای زد. در اثر این ضربه صابون در آن جهت شروع به حرکت می کند تا به مانعی (دیوارهای اطراف شکل یا صابون های دیگر) برسد. در این صورت در خانه قبل از آن مانع متوقف می شود. اگر صابون از یکی از سوراخ هایی نشان داده شده در شکل عبور کند از جدول خارج می شود. کم ترین تعداد حرکات برای خارج کردن همه صابون ها از جدول چه قدر است؟



الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۰ ه) ۱۱

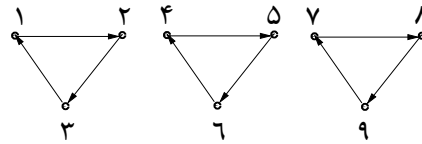
۳۷) شکل روبه رو نشان دهنده ی تعدادی خیابان و تقاطع های بین آنهاست. خیابان ها در جهت فلش ها یک طرفه هستند. عرض هر خیابان هم به اندازه یک ماشین است؛ یعنی ماشین ها نمی توانند از یکدیگر سبقت بگیرند. هم چنین ماشین ها نمی توانند در محل تقاطع ها بایستند. در نتیجه در هر لحظه هر ماشین فقط می تواند در یک خیابان قرار بگیرد. می دانیم که یک ایستگاه عوارضی در خیابان B قرار دارد و از هر ماشین که عبور می کند مبلغ ۱۰ تومان دریافت می کند. نقطه ی A که در شکل دیده می شود یک پارکینگ است. ماشین های با شماره ی ۱ تا ۶ پشت سر هم به ترتیبی که نشان داده شده است و در جهت چپ به راست در خیابان پایین قرار دارند. می خواهیم این ماشین ها را به پارکینگ A منتقل کنیم. کم ترین مجموع مقدار عوارض پرداختی چه قدر است تا این ماشین ها به ترتیب شماره هایشان (اول ۱ بعد ۲، ...) وارد پارکینگ شوند؟



الف) ۱۲۰ ب) ۱۳۰ ج) ۱۴۰ د) ۱۵۰ ه) ۱۶۰

مرحله ی اول شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۳۸) یک کشور با ۹ شهر داریم. همان طور که در شکل می بینید، تعدادی جاده ی یک طرفه بعضی از شهرها را به هم وصل کرده است. یک شهر، مثل a ، را «خطرناک» می گوئیم هرگاه شهر دیگری مثل b وجود داشته باشد، به صورتی که بتوان از a به b رفت، اما نتوان از b به a بازگشت. دولت قصد دارد ۲ جاده ی یک طرفه ی جدید احداث کند، به نحوی که در نهایت دقیقاً ۳ شهر غیر خطرناک در آن کشور باقی بماند.



دولت به چند طریق مختلف می تواند این جاده ها را احداث کند؟

- الف) ۹ ب) ۸۱ ج) ۲۷ د) ۴۸۶ ه) ۷۲۹

۳۹) تعداد زیادی از هر کدام از وزنه های ۱، ۲، ۵، ۱۰، و ۲۰ کیلوگرمی روی میز داریم. یک جسم با وزن نامشخص در یک کفه ی ترازوی ساده ی دو کفه ای قرار می دهیم. در هر «توزین» فقط می توانیم یک وزنه را از روی میز در کفه ی دوم قرار دهیم یا یک وزنه را از روی کفه بر روی میز بگذاریم. توجه کنید که مجاز به گذاردن وزنه در کفه ای که جسم قرار دارد نیستیم.

برای مشخص کردن وزن دقیق جسم مطابق الگوریتم زیر عمل می کنیم:

- تعدادی وزنه ی ۲۰ کیلوگرمی را یک به یک در کفه ی دوم قرار می دهیم تا کفه ی دوم سنگین تر از جسم شود. سپس آخرین وزنه را بر می داریم.
- کار فوق را به ترتیب با وزنه های ۱۰، ۵، ۲ و ۱ انجام می دهیم تا ترازو کاملاً متوازن شود، که در آن صورت کار را متوقف می کنیم.

دقت کنید که در انجام این مراحل به محض این که ترازو کاملاً متوازن شود، الگوریتم پایان می یابد. اگر وزن جسم حداکثر ۱۰۰ کیلوگرم باشد، الگوریتم فوق حداکثر پس از چند توزین پایان می یابد؟

- الف) ۱۶ ب) ۱۵ ج) ۱۸ د) ۶ ه) ۲۰

۴۰) کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

- الف) ب ب) د ج) الف د) ج ه) هیچ کدام

این سوال نمره ی منفی ندارد ولی شما در این سوال به شرطی نمره می گیرید که گزینه ای را انتخاب کنید که از داوطلبانی که به این سوال جواب داده اند کم ترین تعدادشان همین گزینه را انتخاب کرده باشند.



«موفق باشید»

پاسخ تشریحی

شانزدهمین المپیاد کامپیوتر

۱. حاصل عبارت داده شده به ازای مقادیر مختلف برای x_1 ها از 0 تا 33 متغیر است. تنها در 4 مورد 0 ، 1 ، 32 و 33 متغیرهای از x_1 تا x_8 شبیه هم هستند (در مورد 0 و 1 هر پنج متغیر برابر 0 و در مورد 32 و 33 هر پنج متغیر برابر 1 هستند). در سایر موارد اگر دو متغیر x_1 و x_2 نابرابر باشند می توان مقادیر آنها را با هم عوض کرد که در این صورت یک 6 -تایی جدید پدید می آید ولی x تغییر نمی کند. اگر x_1 و x_2 با هم مشابه بوده ولی با x_3 مشابه نباشند می توان مقادیر x_1 و x_2 را با مقدار x_3 جابه جا کرد. اگر x_1 و x_2 با هم مشابه بوده ولی با x_3 مشابه نباشند می توان مقادیر مشابه آن سه را با x_4 تعویض کرد و بالاخره اگر x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 مشابه بوده ولی با x_5 مشابه نباشند می توان مقادیر آن چهار متغیر مشابه را با x_6 تعویض کرد بدون آنکه در مقدار x تغییری حاصل شود.

۲. هر n راهی یک دو شاخه دارد که باید به یکی از راه های یک m راهی وصل شود، بنابراین هر n راهی یک راه را از بین برده و n راه جدید ایجاد می کند که براینند آن تولید $1 - n$ راه می شود، در نتیجه تعداد کل راه های موجود با احتساب پریز اولیه به شکل زیر به دست می آید:

$$x = 1 + 10 \times (10 - 1) + 7 \times (7 - 1) + 5 \times (4 - 1) + 4 \times (2 - 1) + 100 \times (1 - 0) = 152$$

۳. افرادی که می توانند از امین رتبه بهتری کسب کنند کسانی هستند که در یکی از دو درس ریاضی و یا فیزیک (و یا هر دو) نمره بهتری از امین به دست می آورند. تعداد این افراد حداکثر می تواند $(11 - 1) + (7 - 1)$ یعنی 16 باشد که در این صورت امین رتبه هفدهم را کسب خواهد کرد.

۴. حرکت به سمت راست را با r ، حرکت به سمت بالا با u و حرکت به سمت بالا راستی را با o نمایش می دهیم. برای آنکه مسیر طی شده از A به B به طول ۸ باشد، لازم است دو واحد از حرکات، بالا راستی، سه واحد از آن حرکات، به سمت راست و بالاخره سه واحد باقی مانده از ۸ حرکت به سمت بالا باشد. هر مسیری متناظر به خود دنباله ای متشکل از دو تا o ، سه تا r و سه تا u دارد و برعکس. به عنوان مثال دنباله متناظر به مسیر مشخص شده در شکل به صورت $orrouuru$ می باشد. تعداد دنباله های یاد شده (شامل دو حرف o ، سه حرف r و سه حرف u) برابر $\frac{8!}{2! \times 3! \times 3!}$ یعنی 560 می باشد، بنابراین تعداد مسیرهای یاد شده نیز برابر همین می باشد.

۵. عددی بر ۳۴ بخش پذیر است که بر ۱۷ و ۲ بخش پذیر باشد و نیز عددی بر ۳۸ بخش پذیر است که بر ۱۹ و ۲ بخش پذیر باشد. اگر در جدول 5×5 ، دو عدد ۱۷ و ۱۹ هم سطر و یا هم ستون نباشند، آنگاه منظم کردن آن جدول غیر ممکن است زیرا مجموع تعداد کل خانه هایی که حداقل با یکی از آن دو عدد هم سطر و یا هم ستون هستند برابر ۱۴ می باشد که برای منظم شدن آن جدول لازم است هر یک از آن ۱۴ خانه عددی فرد باشد، در حالی که تعداد اعداد فرد باقی مانده برابر ۱۱ می باشد. و اما اگر در جدول 5×5 ، دو عدد ۱۷ و ۱۹ هم سطر و هم ستون باشند (که این کار به 200 طریق ممکن است، زیرا عدد ۱۷، ۲۵ انتخاب و سپس عدد ۱۹، ۸ انتخاب در پیش روی خود دارند)، آنگاه مجموع تعداد کل خانه هایی که حداقل با یکی از آن دو عدد هم سطر و یا هم ستون هستند برابر ۱۱ می باشد (در جدول مقابل آن خانه ها با $\bigcirc$ نشان داده شده اند) که پر کردن آن ۱۱ خانه با ۱۱ عدد فرد به $11!$ طریق ممکن است. پر کردن ۱۲ خانه باقی مانده با ۱۲ عدد زوج نیز به $12!$ طریق انجام می شود که در کل جواب مورد نظر $12! \times 11! \times 25 \times 8$ به دست می آید.

	$\bigcirc$		$\bigcirc$	
$\bigcirc$	۱۷	$\bigcirc$	۱۹	$\bigcirc$
	$\bigcirc$		$\bigcirc$	
	$\bigcirc$		$\bigcirc$	
	$\bigcirc$		$\bigcirc$	

۶.

$$x_0 = 100 - 4(x_1 + 4x_2 + 16x_3) \Rightarrow x_0 = 4k \Rightarrow x_0 = 0$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow x_1 + 4x_2 + 16x_3 = 25 \Rightarrow x_1 = 4L + 1 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 + 4x_3 = 6 \Rightarrow (x_2, x_3) = (2, 1) \text{ یا } (-2, 2)$$

$$\Rightarrow x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 4 \text{ یا } 1$$

۷. ماشین سفید پشت پراید است، بنابراین پراید سفید نیست. از طرف دیگر پراید طوسی نیز نیست چون دوو طوسی است، پس پراید سیاه بوده و به ناچار پژو نیز سفید خواهد بود. ماشین علی پراید نیست چون جلوی پراید پارک شده است، همچنین ماشین سیامک نیز پراید (سیاه) نیست، بنابراین پراید متعلق به بهروز است. ماشین علی جلوی پراید و ماشین سفید پشت پراید پارک است به این معنا که ماشین علی سفید نیست، بنابراین ماشین علی دوو بوده و ماشین سیامک نیز پژو است.

۸. مسأله مانند آن است که بعضی خانه های سیاه موجود در چهار ستون اول را چنان منتقل کنیم که در نهایت صفحه شطرنجی شود. در هر انتقال هر خانه سیاه فقط قادر است به خانه سفید مجاورش (در

	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

صورت وجود) منتقل شود. هر انتقال یک حرکت محسوب می شود. بهترین حالت آن است که سیاه های موجود در ستون چهارم به ستون های هشتم و هفتم، سیاه های موجود در ستون سوم به ستون های ششم و پنجم، سیاه های موجود در ستون دوم به ستون های چهارم و سوم و بالاخره سیاه های موجود در ستون اول به ستون های دوم و اول منتقل شوند. تعداد

حرکات در این مورد در جدول مقابل نشان داده شده اند که در مجموع برابر ۶۴ می شود.

۹. به سادگی قابل درک است که هرگز با تعویض های یاد شده، دو عدد «۰» در یک سطر و یا در یک ستون قرار نخواهد گرفت. بنابراین در هر سطر و یا ستون دقیقاً یک عدد «۰» و دو عدد «۱» وجود دارد. قرار دادن یک عدد «۰» در ستون اول به ۳ طریق ممکن است. قرار دادن یک عدد «۰» در ستون دوم به شرطی که با «۰» موجود در ستون اول هم سطر نباشد به ۲ طریق ممکن است و بالاخره این که قرار دادن یک عدد «۰» در ستون سوم به شرطی که با هیچ یک از «۰» های قبلی هم سطر نباشد برابر ۱ می باشد که طبق اصل ضرب جواب مورد نظر $3 \times 2 \times 1$ یعنی ۶ می شود.

۱۰. فرض می کنیم ابتدا a، سپس b و در نهایت نیز c به همین ترتیب بازی را انجام دهند. با بررسی ارقام دوم، سوم و چهارم از سمت چپ دنباله های داده شده، کارت افراد b، c و a در هر یک از پنج دنباله داده شده به ترتیب از چپ به راست به صورت $(10, 10, 10)$ ، $(10, 10, 01)$ ، $(10, 01, 10)$ ، $(10, 01, 01)$ و $(01, 10, 01)$ در می آید که در ادامه بازی دنباله های دوم و پنجم از سمت چپ با کارت های به دست آمده سازگاری دارند ولی مابقی دنباله ها این سازگاری را ندارند.

۱۱. به سادگی معلوم می شود که کوچکترین n برای رسیدن به منظور، عددی است چهار رقمی. تا قبل از ۱۲۳ باید ۱۹۹ عدد قرار گیرد. در بین اعداد یک رقمی فقط یک عدد (عدد ۱)، در بین اعداد دو رقمی فقط سه عدد (اعداد ۱۰، ۱۱ و ۱۲) و بالاخره در بین اعداد سه رقمی فقط بیست و سه عدد (اعداد ۱۰۰ تا ۱۲۲) قبل از ۱۲۳ قرار می گیرند که تعداد کل آنها ۲۷ می شود. بنابراین باید عدد چهار رقمی n چنان باشد که قبل از ۱۲۳ به تعداد ۲۷-۱۹۹ یعنی ۱۷۲ عدد قرار گیرد. معلوم است که همه اعداد از ۱۰۰۰ تا ۱۲۲۹ که تعداد آنها ۲۳۰ تا می باشد قبل از ۱۲۳ قرار می گیرند که یکصد و هفتاد و دومین آنها ۱۱۷۱ می باشد. بنابراین اگر n را برابر ۱۱۷۱ قرار دهیم به جواب خواهیم رسید.

۱۲. برای ۱۱ نفری که هر کدام یک پیتزای کامل می خورند مجموعاً ۱۱ پیتزا خریداری می شود. برای ۹ نفری که هر کدام $\frac{3}{4}$ پیتزا را می خورند مجموعاً ۹ پیتزای کامل خریداری کرده و از هر یک از پیتزاها به اندازه $\frac{1}{4}$ برش خورده و ۵ تا از آنها را به پنج نفری که هر کدام $\frac{1}{4}$ پیتزا را می خورند می دهیم و ۴ تای دیگر را به ناچار دور می ریزیم.

برای ۱۳ نفری که هر کدام $\frac{1}{2}$ پیتزا را می خورند مجموعاً ۷ پیتزای کامل خریداری کرده و پس از تبدیل آنها به ۱۴ پیتزای نصفه، ۱۳ تای از آنها را به ۱۳ نفر مورد نظر می دهیم و یکی از آن نصفه ها را به ناچار دور می ریزیم. بنابراین حداقل پیتزاهای خریداری شده برابر $7 + 9 + 11$ یعنی ۲۷ می باشد.

۱۳. در بین آن ۱۰ نفر هیچ فردی نمی تواند دروغگو باشد چون جمله «شخص سمت راست من دروغگوست یا راستگو» جمله ای است درست. بنابراین همه افراد راستگو هستند.

۱۴. برای همه مقادیر از ۱ تا ۱۰ برای n عدد خالی بند n رقمی وجود دارد. اگر عدد $n-1$ رقمی $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ خالی بند باشد، آنگاه باقی مانده عدد n رقمی $a_1 a_2 \dots a_{n-1} 0$ را پیدا می کنیم. چون $n \leq 10$ بنابراین باقی مانده به دست آمده یکی از اعداد ۰ تا ۹ می باشد که می توان با تبدیل رقم ۰ به رقمی که باقی مانده مورد نظر است عدد n رقمی به دست آمده را مضرب n کرد.

۱۵. اگر در رشته ای حرفی وجود داشته باشد که n بار تکرار شده باشد، آنگاه در رشته نهایی نیز باید

حرفی وجود داشته باشد که n بار تکرار شده باشد چون هیچ یک از دو عمل یاد شده تکرار حرفی در یک رشته به تعداد n بار را تغییر نمی دهد. همچنین شرط لازم برای آنکه رشته ای بتواند از روی رشته دیگر به وجود آید آن است که تعداد حروف آنها یکسان باشد. بنابراین اگر تعداد حروف تکراری دو رشته را به صورت دنباله ای مثلاً نزولی بنویسیم باید دنباله های متناظر به دو رشته کاملاً یکسان باشد. دنباله های متناظر به کلمات داده شده در گزینه ها به شکل زیر می باشند:

$$\begin{array}{lll} \text{الف)} & (1, 1, 1, 1, 1, 1) & \text{ب)} & (3, 2, 1, 1, 1, 1) & \text{ج)} & (4, 3, 2, 1, 1, 1) \\ & (1, 1, 1, 1, 1, 1) & & (2, 2, 2, 1, 1, 1) & & (4, 3, 2, 1, 1, 1) \\ \text{د)} & (2, 1, 1, 1) & \text{ه)} & (3, 2, 2, 1, 1, 1) \\ & (1, 1, 1, 1, 1) & & (3, 2, 1, 1, 1, 1, 1) \end{array}$$

همان طور که مشاهده می شود فقط در مورد گزینه ج دو دنباله به دست با هم یکسان هستند.

$$\begin{aligned} \overline{a_r a_{r-1} \dots a_7 8} \times 4 &= \overline{8 a_r a_{r-1} \dots a_7} \Rightarrow a_7 = 2 \\ \Rightarrow \overline{a_r a_{r-1} \dots a_7 2 8} \times 4 &= \overline{8 a_r \dots a_7 2} \Rightarrow a_7 = 1 \\ \Rightarrow \overline{a_r \dots a_7 1 2 8} \times 4 &= \overline{8 a_r \dots a_7 1 2} \Rightarrow a_7 = 5 \\ \Rightarrow \overline{a_r a_5 5 1 2 8} \times 4 &= \overline{8 a_r \dots a_5 5 1 2} \Rightarrow a_5 = 0 \\ \Rightarrow \overline{a_r \dots a_6 0 5 1 2 8} \times 4 &= \overline{8 a_r \dots a_6 0 5 1 2} \Rightarrow a_6 = 2 \\ \Rightarrow \overline{a_r \dots a_7 2 0 5 1 2 8} \times 4 &= \overline{8 a_r \dots a_7 2 0 5 1 2} \Rightarrow a_7, a_8, \dots = \text{وجود خارجی ندارد} \\ \Rightarrow 205128 &= \text{عدد مورد نظر} \Rightarrow a_{r-1} = a_5 = 0 \end{aligned}$$

۱۷. اگر حرکت آخر با محمد باشد آنگاه او می تواند یکی از سطریهایی که قبلاً پر شده است را در نظر گرفته و مجموع اعداد موجود در آن سطر را به دست آورد، سپس اختلاف بین این مجموع با مجموع اعداد ستونی که تنها خانه خالی در آن است، را به دست آورده و آن عدد را در خانه خالی قرار می دهد و برنده می شود. و اما اگر حرکت ماقبل آخر با محمد باشد یقیناً آن خانه تنها خانه خالی در سطر (و یا ستون) خود می باشد که او می تواند مجموع اعداد یکی از ستون ها (و یا سطر ها) ی پر را حساب کرده و با توجه به آن مجموع، خانه خالی را چنان پر می کند که برنده شود.

۱۸.

$$\begin{aligned}
 (x \text{ ارزش}) &= -1 \times 10^9 + 9 \times 10^8 - 9 \times 10^7 + 9 \times 10^6 - 9 \times 10^5 - 9 \times 10^4 - 9 \times 10^3 + 9 \times 10^2 - 9 \times 10^1 + 9 \\
 (y \text{ ارزش}) &= 1 \times 10^9 - 9 \times 10^8 + 9 \times 10^7 - 9 \times 10^6 + 9 \times 10^5 - 9 \times 10^4 + 9 \times 10^3 - 9 \times 10^2 + 9 \times 10^1 - 9 \\
 &= (10 - 9) \times 10^9 - (10 - 1) \times 10^8 + \dots + (10 - 1) \times 10^1 - (10 - 1) \\
 &= 1 \times 10^{10} - 10 \times 10^9 + 2 \times 10^8 - 2 \times 10^7 + 2 \times 10^6 - 2 \times 10^5 + 2 \times 10^4 - 2 \times 10^3 + 2 \times 10^2 - 2 \times 10^1 + 1 \\
 &= 222222221 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 17
 \end{aligned}$$

۱۹. اگر عدد k فرد باشد، آنگاه یکی از دو عدد $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ و $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ زوج و دیگری فرد می باشد. اگر عدد فرد را α و عدد زوج را β در نظر بگیریم، چون دو عدد α و β متوالی می باشند، بنابراین در شمردن $f(\beta)$ تمام اعداد تولید شده، در شمردن $f(\alpha)$ نیز به کار رفته اند. در این حالت می توان تساوی $f(k) = f(\alpha) + 2$ را نتیجه گرفت چون در محاسبه $f(k)$ دو عدد k و β نسبت به اعداد تولید شده در محاسبه $f(\alpha)$ بیشتر می باشند. اگر عدد k زوج باشد، آنگاه دو عدد $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ و $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ با هم برابر می باشند که آن را θ می نامیم. در این حالت نیز با کمی دقت به تساوی $f(k) = f(\theta) + 1$ خواهد رسید.

از طرف دیگر معلوم می شود که اگر عدد k در بازه $[2^n, 2^{n+1}-1]$ در نظر گرفته شود، آنگاه عدد α و یا θ تعریف شده در فوق، در بازه $[2^{n-1}, 2^n-1]$ قرار خواهد گرفت، به این معنا که اگر ماکزیمم مقدار f در بازه $[2^{n-1}, 2^n-1]$ برابر m باشد، آنگاه ماکزیمم مقدار f در بازه $[2^n, 2^{n+1}-1]$ برابر $m+2$ خواهد شد. ماکزیمم مقدار در بازه $[4, 7]$ برابر ۵ می باشد. بنابراین ماکزیمم مقدار در بازه های $[8, 15]$ ، $[16, 31]$ ، $[32, 63]$ ، ...، $[1024, 2047]$ ، $[2048, 4095]$ به ترتیب برابر ۷، ۹، ۱۱، ...، ۲۱ و ۲۳ خواهد شد. در مورد عدد ۳۹۹۹ مقدار f به شکل زیر برابر ۲۳ می شود:

$$\begin{aligned}
 3999 &\rightarrow 2000, 1999 \rightarrow 1000, 999 \rightarrow 500, 499 \rightarrow 250, 249 \rightarrow 125, 124 \\
 &\rightarrow 62, 63 \rightarrow 31, 32 \rightarrow 16, 15 \rightarrow 8, 7 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 2, 1
 \end{aligned}$$

۲۰. اگر آرشی از سه تایی (x, y, z) سه تایی $(x+y, x-y, z)$ را چنان بسازد که هر سه عدد $x+y$ و $x-y$ و z بر ۳ بخش پذیر باشند، آنگاه خواهیم داشت:

$$z \equiv 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x-y \equiv 0 \\ x+y \equiv 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 0$$

بنابراین معلوم می شود شرط لازم برای آنکه آرشی بتواند برنده شود آن است که سه تایی ماقبل آخر باید چنان باشد که هر سه عدد موجود در آن سه تایی بر ۳ بخش پذیر باشند. و اگر این روند را به قبل ادامه دهیم معلوم خواهد شد که سه تایی اولیه نیز باید هر سه عددش بر ۳ بخش پذیر باشد تا آرشی بتواند برنده شود که در بین سه تایی های داده شده هیچ سه تایی چنین خاصیتی را ندارد.

۲۱. با تغییر یکی از ضرایب s_i ها از ۱ به -۱ و یا از -۱ به ۱ زوجیت عدد n تغییر نخواهد کرد، بنابراین اگر عددی مانند α توسط ماشین قابل نمایش باشد عدد $\alpha + 1$ قابل نمایش نخواهد بود.

۲۲. اگر هر سه رقم در بازه $[0, 7]$ و یا در بازه $[3, 9]$ باشند، آنگاه با حداکثر ۷ مرحله، به صفر خواهیم رسید (در مورد اول گردونه مربوط به بزرگترین رقم را آنقدر به عقب می چرخانیم تا با عدد متوسط برابر باشد، سپس گردونه های مربوط به آن دو رقم را آنقدر به عقب می چرخانیم تا با عدد کوچک برابر باشند و در نهایت نیز هر سه گردونه را با هم می چرخانیم تا به سه تا صفر برسیم. در مورد دوم نیز کار را با چرخاندن گردونه مربوط به کوچکترین رقم به سمت جلو ادامه می دهیم.

اگر دو رقم در بازه $[0, 5]$ و رقم دیگر در بازه $[8, 9]$ باشد نیز حداکثر مراحل کار برابر با ۷ می باشد، به این ترتیب که ابتدا عدد بزرگتر در بازه $[0, 5]$ را آنقدر به عقب می چرخانیم تا با عدد دیگر برابر باشند، سپس آن دو گردونه را با هم آنقدر می چرخانیم تا به صفر برسند (معلوم است که این مراحل حداکثر برابر ۵ می باشد)، در نهایت نیز گردونه سوم را که عددش ۸ و یا ۹ می باشد به جلو می چرخانیم تا به صفر برسد (در این مورد نظر حداکثر مراحل برابر ۲ می باشد).

اگر دو رقم در بازه $[5, 9]$ و رقم دیگر در بازه $[1, 2]$ باشد نیز همانند بند قبلی عمل می کنیم.

۳۴۰

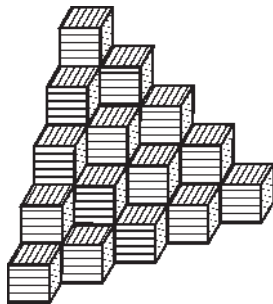
المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)

۲۳. تعداد مسیرهای به طول i ($2 \leq i \leq 14$) در جدول زیر مشخص شده است:

طول مسیر	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
تعداد مسیر	۱۳	۲۴	۲۲	۲۰	۱۸	۱۶	۱۴	۱۲	۱۰	۸	۶	۴	۲

۲۴. حجم مورد نظر به شکل مقابل می باشد که

دارای ۳۵ مکعب واحد می باشد:

۲۵. شرط لازم و کافی برای آنکه سوراخ های یک مستطیل $n \times m$ ، طلایی باشد آن است که n مضربی از m باشد. این موضوع در شکل مقابل نشان داده شده است.فرض می کنیم مستطیل $n \times m$ مطابق شکل مقابل دارای سوراخطلایی باشد، آنگاه پرتوهای ورودی و خروجی از تلاقی با یکدیگر k عددمستطیل $a \times b$ ایجاد می کنند که طول مستطیل اولیه $(a+b)$ و $\frac{\sqrt{2}k}{2}$ عرض آن مستطیل برابر $(a+b) \frac{\sqrt{2}}{2}$ می شود، به این معنا که طول مستطیل باید k برابر عرض آن باشد $(k$ عددی است صحیح). بنابراین شرط لازم و کافی برای آنکه سوراخ های مستطیلی $n \times m$ ، طلایی باشدآن است که n مضرب صحیحی از m باشد. معلوم است که در این حالت به غیر از دو سوراخ گوشه ای، مابقی۱- m سوراخ همگی طلایی خواهند بود.در بین مستطیل های داده شده، سوراخ های غیر واقع بر گوشه های 1384×1384 و 4152×1384 همگی طلایی اند که تعداد کل آنها $1383 + 1383$ یعنی ۲۷۶۶ می شود.

۲۶. ابتدا باید اعداد را به مبنای ۲ تبدیل کرده و آن دو را به طوری در دو سطر بنویسیم که ارقام هم مرتبه

در زیر هم قرار گیرند. چون مجموع هر دو عدد موجود در یک ستون برابر ۶۴ (که در مبنای ۲ به صورت

۱۰۰۰۰۰ قابل نمایش است) می باشد، بنابراین دو عدد موجود در یک ستون چنانند که به ازای اولین

«۱» از سمت راست در عدد پایینی، رقم متناظرش در عدد بالایی نیز ۱ است. از آن رقم به قبل هر دو رقم متناظر، در آن دو عدد تا جایگاه ششم از سمت راست، باید متفاوت باشد تا مجموع به صورت ۱۰۰۰۰۰ در بیاید. به عنوان مثال در مورد دو عدد ۴۷ و ۱۷ که در صورت سؤال اشاره شده است وضعیت، به قرار زیر می باشد:

$$\begin{array}{rcccccc} 47 & \longrightarrow & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 17 & \longrightarrow & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \text{جایگاه} & \longrightarrow & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ & & 1 & & & & & \end{array}$$

برای تبدیل اعداد بالایی به پایینی و برعکس، کافی است در مورد ستون های به شکل « $\begin{smallmatrix} 0 \\ \pi \end{smallmatrix}$ » که جایگاه سمت راست آن به شکل « $\begin{smallmatrix} 0 \\ \pi \end{smallmatrix}$ » نمی باشد دقیقاً 2^i واحد از عدد بالایی برداشته و به عدد پایینی اضافه کنیم و در مورد ستون های به شکل « $\begin{smallmatrix} 0 \\ \pi \end{smallmatrix}$ » که یک یا چند ستون بلافاصله بعد از آن به شکل « $\begin{smallmatrix} 0 \\ \pi \end{smallmatrix}$ » می باشند، کافی است به اندازه 2^i از عدد بالایی برداشته و به عدد پایینی اضافه کنیم که 2^i جایگاه سمت راست ترین ستون به شکل « $\begin{smallmatrix} 0 \\ \pi \end{smallmatrix}$ » می باشد که در آن دو عدد وجود دارد. در مورد اعداد ۴۷ و ۱۷ مقادیر اضافه شده به ترتیب به صورت $2^1, 2^2, 2^3$ و 2^4 می باشد که از قاعده بالا پیروی می کنند.

بنابراین معلوم می شود که تعداد اعداد اضافه شده، برای تبدیل اعداد بالایی به اعداد پایینی یک واحد کمتر از تعداد «۱» های موجود در عدد بالایی می باشد. اعداد از ۳۳ تا ۶۳ مجموعاً ۱۱۱ تا ۱ دارند که اگر به ازای هر یک از عدد «۱» کم کنیم معلوم می شود که تعداد مراحل لازم برابر $31 - 111$ یعنی ۸۰ می شود. در مورد ستون مربوطه به دو عدد ۰ و ۶۴ نیز یک مرحله تعویض نیاز است. بنابراین جواب مورد نظر ۸۱ می شود.

۲۷. در هر مورد بهترین تبدیل مطابق الگوریتم زی می باشد:

$$\begin{array}{l} \boxed{\frac{63}{1}} \xrightarrow{2^0} \boxed{\frac{64}{0}} \xrightarrow{2^6} \boxed{\frac{0}{64}} \xrightarrow{2^0} \boxed{\frac{1}{63}} \\ \boxed{\frac{47}{17}} \xrightarrow{2^5} \boxed{\frac{15}{49}} \xrightarrow{2^1} \boxed{\frac{17}{47}} \\ \boxed{\frac{55}{9}} \xrightarrow{2^5} \boxed{\frac{23}{41}} \xrightarrow{2^4} \boxed{\frac{7}{57}} \xrightarrow{2^1} \boxed{\frac{9}{55}} \end{array}$$

۲۸. بعد از سوتِ i ام شماره روی کارت‌ها به شکلی در می‌آید که در جدول زیر نمایش داده شده‌اند:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
$i=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$i=1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$i=2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$i=3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
$i=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
$i=5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
$i=6$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
$i=7$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
$i=8$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$i=9$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
$i=10$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
$i=11$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
$i=12$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

۲۹. مجموعه داده شده را به شکل زیر به سه مجموعه A ، B و C افراز می‌کنیم، مجموعه A مجموعه

اعدادی است که مضرب ۳ هستند، مجموعه B مجموعه اعدادی است که در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده ۱ می‌آورند و مجموعه C مجموعه اعدادی است که در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده ۲ می‌آورند:

$$A = \{3, 6\}$$

$$B = \{1, 4, 7\}$$

$$C = \{2, 5\}$$

برای تشکیل زیرمجموعه مورد نظر باید i عضو A ، j عضو B و k عضو C انتخاب شود که تمامی

حالات ممکن در ستون‌های جدول زیر مشخص شده‌اند:

i	۰	۱	۲	۰	۱	۲	۰	۱	۲	۰	۱	۲
j	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳	۳
k	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۰	۰	۰
تعداد حالات ممکن	۱	۲	۱	۶	۱۲	۶	۳	۶	۳	۱	۲	۱

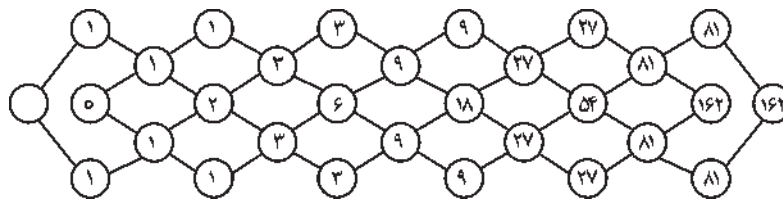
۴۴ = مجموع

۱	۲	۳	۴	۵
۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	●	۱۴	۱۵
۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵

۳۰. اگر خانه‌های جدول را مطابق شکل مقابل از ۱ تا ۲۵ شماره‌گذاری کنیم، آنگاه با وجود یک لوبیا در خانه شماره ۱۳ فقط خانه‌های ۲، ۴، ۶، ۱۰، ۱۶، ۲۰، ۲۲ و ۲۴ امن هستند؛ یعنی اگر فردی در خانه‌ای غیر از شماره‌های فوق لوبیایی را قرار دهد فرد دیگر برنده خواهد شد. در بین شماره‌های فوق نیز دو شماره ۲ و ۴ با

یکدیگر، ۶ و ۱۶ با یکدیگر، ۱۰ و ۲۰ با یکدیگر و بالاخره ۲۲ و ۲۴ با یکدیگر وابستگی دارند، به این صورت که اگر هر دو شماره وابسته به هم لوبیایی اختصاص داده شود، نفر بعدی می‌تواند با اختصاص دادن لوبیایی به خانه واقع در بین آن دو خانه وابسته، برنده می‌شود. بنابراین بهترین حرکات ممکن آن است که مهدی خانه ۱۰، مرتضی خانه ۴، مهدی خانه ۶ و بالاخره مرتضی خانه ۲۲ را انتخاب کند. در حرکت بعدی مهدی هر حرکتی را انجام دهد حداقل با یک لوبیا در یک ردیف ستونی، سطری و یا قطری قرار خواهد گرفت که مرتضی را در وضعیت بُرد قرار می‌دهد. در حرکت آخر مرتضی با قرار دادن لوبیا در خانه مورد نظر برنده می‌شود.

۳۱. در سمت چپ هر گره‌ای مانند m ، حداکثر دو گره مانند n و k وجود دارد. تعداد راه‌های رسیدن به گره m با مجموع تعداد راه‌های رسیدن به دو گره n و k برابر است، بنابراین تعداد راه‌های رسیدن به هر گره مطابق شکل زیر می‌باشد:



۳۲. در مورد گزینه ب، چون a در مکان ۶ قرار گرفته است معلوم می‌شود که قبل از آن مکان‌های ۳، ۴ و ۵ پر بوده است که یکی از آنها یعنی مکان ۴ توسط f پر شده است، بنابراین f قبل از a وارد جدول شده است. از طرف دیگر مکان اولیه f خانه ۶ می‌باشد که هنگام ورود به جدول در صورت پر بودن آن خانه به یک خانه دیگر می‌رود. لحظه ورود عنصر f به جدول، خانه ۶ خالی بوده است و لزومی نداشت که به خانه دیگر برود.

ترتیب ورود حروف به جدول در مورد گزینه های الف، ج و د به ترتیب به شکل زیر می تواند باشد:

الف: $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow g$

ج: $a \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow g \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow f$

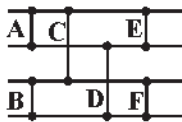
د: $a \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow c \rightarrow g \rightarrow b$

۳۳. تعداد افرادی از ردیف اول که در انتهای ساعت اول چای خورده اند را α و مابقی را β و این تعداد را در ردیف دوم به ترتیب γ و θ می نامیم، خواهیم داشت:

$$\alpha + \beta = \gamma + \theta = ۱۰$$

$$\alpha + \beta = ۱۳, \beta + \theta = ۷$$

معلوم است که از بین دو عدد α و γ یکی زوج و دیگری فرد است. بدون آنکه به کلیت مسأله لطمه ای وارد شود α را زوج و γ را فرد در نظر می گیریم که در این صورت در انتهای ساعت دوم تعداد افرادی از ردیف اول که چایی می خورند برابر θ و مابقی برابر γ و نیز این تعداد در ردیف دوم به ترتیب برابر α و β به دست می آید. در انتهای ساعت سوم و بنابراین در انتهای ساعات فرد وضعیت افراد چایی خورده همانند انتهای ساعت اول می شود.



۳۴. اگر سوئیچ ها را مطابق شکل مقابل با A, B, C, D, E و F نام گذاری کنیم، آنگاه اگر وضعیت آنها را به ترتیب مطابق جدول زیر در نظر بگیریم، آنگاه به هر یک از خروجی های موجود در گزینه ها خواهیم رسید (علامت $\times$

نشان گر ضربداری بودن سوئیچ و علامت $\rightarrow$ نشان گر مستقیم بودن آن سوئیچ می باشد):

گزینه	A	B	C	D	E	F
الف	$\rightarrow$	$\times$	$\times$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
ب	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\times$	$\rightarrow$	$\times$	$\times$
ج	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
د	$\times$	$\rightarrow$	$\times$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\times$

۳۵. اگر صابون های موجود در شکل را به ترتیب از چپ به راست با A، B، C و D نام گذاری کنیم، آنگاه بهترین حرکات به شکل زیر می باشد:

۱) راست: A	۲) پایین: C	۳) راست: B
۴) بالا: C	۵) پایین: D	۶) چپ: D
۷) بالا: A	۸) بالا: B	۹) بالا: D

۳۶. بهترین الگوریتم برای حرکت ماشین ها به شکل زیر می باشد:

● همه ماشین ها از عوارضی رد شده و ماشین های ۴ و ۲ در خیابان سمت راست و ماشین های ۶، ۵ و ۳ در خیابان سمت چپ ردیف شده و ماشین ۱ به خروجی می رود که در این حالت مجموعاً ۶۰ تومان عوارض پرداخت می شود.

● ماشین ۴ از عوارضی رد شده و در پشت آخرین ماشین سمت چپ یعنی ماشین ۳ قرار می گیرد که در این حالت نیز ۱۰ تومان عوارض پرداخت می شود.

● تنها ماشین موجود در سمت راست یعنی ماشین ۲ از عوارضی رد شده و وارد پارکینگ می شود که ۱۰ تومان عوارض پرداخت می شود.

● ماشین های ۶ و ۵ از عوارضی رد شده و ماشین ۶ به خیابان سمت راست و ماشین ۵ به خیابان سمت چپ و به پشت ماشین ۴ منتقل می شوند و در این مجموعاً ۲۰ تومان به عوارضی پرداخت می شود.

● ماشین های ۳، ۴ و ۵ که در خیابان سمت چپ و به همین ترتیب قرار دارند از عوارضی رد شده و به ترتیب در پارکینگ قرار می گیرند و بعد از آنها ماشین شماره ۶ از خیابان سمت راست به عوارضی رفته و از آن جا به پارکینگ منتقل می شود. در این حالت نیز مجموع عوارض پرداخت شده برابر ۴۰ تومان می باشد. با توجه به حالت بندی فوق مجموع کل عوارض برابر $40 + 20 + 10 + 10 + 60 = 140$ یعنی ۱۴۰ تومان به دست می آید.

۳۷. ابتدا با یک بار فشار دادن دکمه نمایش، اعداد نشان داده شده را وارد ماشین حساب کرده و آنها را با هم جمع می کنیم، معلوم است که حاصل این جمع برابر $(x+y) - \frac{n(n+1)}{2}$ خواهد بود. از آن جا که مقدار $x+y$ حداقل برابر ۳ و حداکثر برابر $2n-1$ می باشد. بنابراین حاصل عدد به دست آمده بین

$\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ و $\frac{(n-2)(n+3)}{2}$ خواهد شد. فرض می‌کنیم آن حاصل جمع برابر α باشد. در این صورت در نابرابری $\frac{(n-2)(n-1)}{2} \leq \alpha \leq \frac{(n-2)(n+3)}{2}$ برای n بیش از دو جواب به دست نخواهد آمد. بار دیگر با فشار دادن دکمه نمایش، هر یک از اعداد نشان داده شده را به توان ۲ رسانده و با هم جمع می‌کنیم. می‌دانیم مجموع مربع اعداد از ۱ تا n برابر $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ می‌باشد، بنابراین با توجه به محدودیت به دست آمده برای n در حالت قبلی، برای $x^2 + y^2$ دو مقدار یافت می‌شود که با تشکیل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، مقادیر x و y به صورت منحصر به فرد پیدا می‌شود. به عنوان مثال فرض می‌کنیم مجموع داده‌ها برابر ۱۰۰۰ و مجموع مربع داده‌ها برابر ۳۰۴۷۰ باشد در آن صورت:

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2} \leq 1000 \leq \frac{(n-2)(n+3)}{2} \Rightarrow n=45 \text{ یا } n=46$$

$$1+2+3+\dots+45 = \frac{45 \times 46}{2} = 1035 \Rightarrow x+y=35 \quad \text{اگر } n=45 \text{ آنگاه:}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+45^2 = \frac{45 \times 46 \times 91}{6} = 31395 \Rightarrow x^2+y^2=925$$

در این حالت برای x و y جواب منحصر به فرد ۳۰ و ۵۰ به دست می‌آید.

$$1+2+3+\dots+46 = \frac{46 \times 47}{2} = 1081 \Rightarrow x+y=81 \quad \text{و اما اگر } n=46 \text{ آنگاه:}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+46^2 = \frac{46 \times 47 \times 93}{6} = 33511 \Rightarrow x^2+y^2=3041$$

در این حالت برای x و y جواب‌های صحیحی در محدوده از ۱ تا ۴۶ به دست نمی‌آید.

۳۸. اگر x نمایشگر آن باشد که وزنه x را در کفه دوم قرار دهیم و نیز y نمایشگر آن باشد که وزنه x را از آن کفه برداریم، آنگاه الگوریتم توزین به شکل زیر خواهد بود:

$$20, 20, \dots, 20, 10, 10, \dots, 10, 5, 5, \dots, 5, 2, 2, \dots, 2, 1$$

چون وزنه ۲۰ کیلویی آخر برداشته می‌شود. بنابراین تعداد ۱۰ ها نمی‌تواند بیش از ۲ باشد، به همین دلیل تعداد ۵ ها و ۲ ها نیز نمی‌تواند بیش از ۲ باشد. بنابراین الگوریتم بیشترین توزین به شکل زیر می‌باشد:

$$20, 20, 20, 20, 20, 10, 10, 10, 5, 5, 5, 2, 2, 1$$

۳۹. شکل داده شده از سه مؤلفه a ، b و c تشکیل شده است. برای ساختن شبکه مطلوب باید به یکی از دو شکل $a \rightarrow b \rightarrow c$ و یا $a \rightarrow b \leftarrow c$ برسیم که تعداد کل حالات رسیدن به هر یک از آنها به ترتیب به شکل زیر به دست می آید:

$$a \rightarrow b \rightarrow c \quad (I)$$

- انتخاب یک مؤلفه از سه مؤلفه برای آنکه نقش a را بازی کند (این کار به ۳ طریق ممکن است).
- انتخاب یک رأس از رئوس آن برای آنکه از آن رأس فلشی خارج شود (این کار نیز به ۳ طریق ممکن است).
- انتخاب یک مؤلفه از دو مؤلفه باقی مانده برای آنکه نقش b را بازی کند (این کار به ۲ طریق ممکن است).

- انتخاب یک رأس از رئوس b برای آنکه فلشی به آن وارد شود (به ۳ طریق).
 - انتخاب یک رأس از رئوس b برای آنکه فلشی از آن خارج شود (به ۳ طریق).
 - انتخاب یک رأس از رئوس c برای آنکه فلش خارج شده از b به آن وارد شود (به ۳ طریق).
- طبق اصل ضرب تعداد کل طرق در این حالت برابر $3 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ یعنی ۴۸۶ می شود.

$$a \rightarrow b \leftarrow c \quad (II)$$

- انتخاب یک مؤلفه از سه مؤلفه برای آنکه نقش b را بازی کند (به ۳ طریق). [البته مشخص است که دو مؤلفه a و c هم نقشند].
 - انتخاب یک رأس از رئوس a و یک رأس از رئوس c برای آنکه فلش هایی از آنها خارج شود (3×3 طریق).
 - انتخاب یک رأس از رئوس b برای وارد شدن فلش خارج شده از a و یک رأس (نه لزوماً متمایز از قبلی) از رئوس b برای وارد شدن فلش خارج شده از c (3×3 طریق).
- در این حالت نیز مجموع کل طرق برابر $3 \times 3^2 \times 3^2 \times 3$ یعنی ۲۴۳ می شود.
- با توجه به حالت بندی فوق جواب مورد نظر $486 + 243$ یعنی ۷۲۹ به دست می آید.

مرحله ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱) ۱۰۰ کار قرار است توسط ۱۰ نفر اجرا شوند. زمان اجرای هر کار از قبل مشخص است. می خواهیم کارهایی که هر مجری باید انجام دهد را مشخص کنیم. فرض کنید افراد مجری دقیقاً مثل هم عمل می کنند. مثلاً اگر در زمان صفر دو کار به ترتیب با زمان های ۱۰ دقیقه و ۲۰ دقیقه را به یک مجری دهیم، او کار اول را دقیقاً در زمان ۱۰ دقیقه و دومی را در زمان ۳۰ دقیقه تمام می کند. الگوریتم زیر را برای تخصیص کارها به مجریان در نظر می گیریم. فرض می کنیم در ابتدا (زمان صفر) همه ی مجریان بی کار و آماده ی اجرای کارهای تخصیص داده شده اند.

(۱) همه ی کارها را به ترتیب زمان های اجرایشان به صورت صعودی مرتب کن و به همین ترتیب مورد بررسی قرار بده،

(۲) کار مورد بررسی را به مجری ای بده که کارهایی که قرار است انجام دهد زودتر از بقیه تمام می شود.

فرض کنید که مجموع زمان های اجرای همه ی کارها ۱۰,۰۰۰ دقیقه و زمان اجرای طولانی ترین کار ۲۰۰ دقیقه است. بیش ترین زمانی که همه ی کارها تمام می شود حداکثر چند دقیقه است؟

الف) ۱,۱۸۰ (ب) ۱,۵۰۰ (ج) ۹۸۰ (د) ۲,۰۰۰ (ه) ۱,۰۰۰

(۲) دو شیشه ی موازی با هم داده شده اند. از سمت چپ به این دو ۱۰۰ واحد نور می تابانیم. می دانیم هر یک از این شیشه ها اگر ۱۰۰ واحد نور دریافت کند، ۲۰ واحد آن را در جهت عکس تابش بر می گرداند، ۱۰ واحد را جذب می کند و ۷۰ واحد دیگر را در همان جهت تابش از خود عبور می دهد. چند واحد نور به سمت راست شیشه ها منتقل می شود؟

الف) ۴۹ (ب) $49 + \frac{49}{3}$ (ج) $49 + \frac{4 \times 49}{100}$ (د) ۷۰ (ه) $49 + \frac{4 \times 49}{99}$

(۳) به چند طریق عدد ۸ را می توان به صورت $a + 2 \times b + 4 \times c + 8 \times d$ نوشت که در آن a, b, c و d دارای مقادیر صفر، ۱ یا ۲ هستند؟

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۸

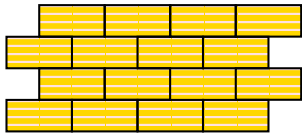
(۴) مهره ای بر روی نقطه ی مبدأ صفحه ی مختصات قرار دارد. در هر حرکت می توانیم مهره را از نقطه ی (x, y) به نقطه ی $(x+1, y+1)$ یا به نقطه ی $(x, y-1)$ ببریم. به چند طریق می توانیم این مهره را به نقطه ی $(4, 0)$ برسانیم؟

الف) ۳۵ (ب) ۱۶ (ج) ۲۵۶ (د) ۷۰ (ه) به نامتناهی روش

(۵) ۵ گونی شکر به وزن های ۲، ۳، ۴، ۴ و ۶ و یک گونی خالی داده شده اند. می خواهیم همه ی شکرها را در یک گونی بریزیم. هر بار می توانیم یک عمل «ادغام» انجام دهیم. هر ادغام یعنی انتخاب دو عدد از گونی های شکر، مثلاً با وزن های a و b ، و یک گونی خالی، و ریختن کامل شکرهای دو گونی در گونی خالی. فرض کنید که هزینه ی انجام این ادغام برابر $a+b$ باشد. کم ترین هزینه ی کل انجام این کار چه قدر است؟

الف) ۱۹ (ب) ۴۳ (ج) ۴۶ (د) ۵۱ (ه) ۶۰

مرحله ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



(۶) به چند طریق می توان آجرهای شکل مقابل را با ۳ رنگ رنگ آمیزی کرد به طوری که هیچ دو آجر مجاوری هم رنگ نباشند.

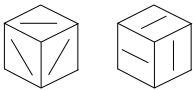
۶ (هـ)

۳۴ × ۲۱۲ (د)

۳ (ج)

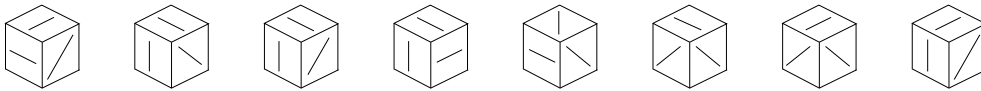
۳ × ۲۱۵ (ب)

۳۴ (الف)



(۷) بر روی هر یک از وجه های یک مکعب پاره خطی رسم کرده ایم، به طوری که هیچ دو پاره خطی در فضا موازی نیستند. این مکعب از دو گوشه (با مقداری دوران) به شکل های روبرو دیده می شود:

چند تا از شکل های زیر ممکن است، با مقداری دوران این مکعب، از گوشه ای از آن دیده شوند؟



۶ (هـ)

۵ (د)

۴ (ج)

۳ (ب)

۲ (الف)

(۸) آرش و آرمین با هم این بازی را انجام می دهند: آرش یک عدد x بین ۱ و ۱۳۸۴ انتخاب می کند و آرمین سعی می کند این عدد را حدس بزند. در هر مرحله آرمین یک عدد می گوید و آرش رابطه ی این عدد را نسبت به x (بزرگ تر، کوچک تر یا مساوی) را مشخص می کند. اگر عدد آرمین از $2x$ کوچک تر و بزرگ تر یا مساوی x باشد، آرمین برنده است. می خواهیم بدانیم کم ترین تعداد مرحله ی بازی که آرمین مطمئن است x هر چه باشد، در این تعداد مرحله او بازی را خواهد برد، چند تا است؟

۳ (هـ)

۴ (د)

۹ (ج)

۱۰ (ب)

۶۹۲ (الف)

(۹) دنباله ای از اعداد ۱ تا ۱۳۸۳ را از چپ به راست نوشته ایم:

۱, ۲, ۳, ۴, ..., ۱۰, ۱۱, ۱۲, ..., ۱۳۸۲, ۱۳۸۳

از سمت چپ شروع می کنیم و به تعداد رقم یکان عدد فعلی جلو می رویم. بنابراین اعدادی که به آنها بر می خوریم، عبارتند از ۱, ۲, ۴, ۸, ... تعداد این اعداد چند تا است؟

۲۷۸ (هـ)

۲۷۷ (د)

۳۴۵ (ج)

۳۴۶ (ب)

۲۳۱ (الف)

(۱۰) دو نفر این بازی را انجام می دهند: هر نفر در نوبت خود، یک رقم از مجموعه ی $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ را بر روی کاغذ می نویسد و بازی پس از نوشتن رقم n ام خاتمه می یابد. نفر دوم قصد دارد کاری کند که در انتها مجموع ارقام نوشته شده بر ۹ بخش پذیر باشد. ولی نفر اول می خواهد از این کار جلوگیری کند. به ازای چه مقدار n نفر دوم می تواند حتماً به هدف خود برسد؟

۱۳۸۸ (هـ)

۱۳۸۶ (د)

۱۳۸۴ (ج)

۱۳۸۳ (ب)

۱۳۸۲ (الف)

مرحله ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱۱) N یک عدد ۱۳۸۳ رقمی با رقم سمت چپ ۶ است. اگر هر دو رقم متوالی N را به عنوان یک عدد دو رقمی در نظر بگیریم، این عدد یا مضرب ۱۷ است یا مضرب ۲۳. کدام گزینه زیر می تواند رقم سمت راست N باشد؟

- الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ ه) ۹

(۱۲) در بازی «سیب زمینی داغ»، ۵ بازی گر هستند با یک سیب زمینی داغ. زیر پای هر بازی گر یک شماره است. هر بازی گر مجبور است سیب زمینی داغ را یک ثانیه نگه دارد و سپس آن را به بازی گری که شماره اش زیر پای اوست بدهد. در این بازی شما با شماره ی ۱ شرکت کرده اید و در ابتدا سیب زمینی نزد شماست. برای چندان از حالت های زیر ممکن است شماره ی زیر پای شما طوری باشد که دیگر سیب زمینی به دست شما برنگردد؟

- ۳ زیر پای ۲، ۴ زیر پای ۳، ۱ زیر پای ۴ و ۱ زیر پای ۵
- ۳ زیر پای ۲، ۴ زیر پای ۳، ۱ زیر پای ۴ و ۴ زیر پای ۵
- ۳ زیر پای ۲، ۱ زیر پای ۳، ۵ زیر پای ۴ و ۴ زیر پای ۵
- ۱ زیر پای ۲، ۲ زیر پای ۳، ۲ زیر پای ۴ و ۳ زیر پای ۵

- الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

(۱۳) به چند طریق می توان خانه های یک جدول ۱۰×۳ (۱۰ سطر و ۳ ستون) را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کرد، به طوری که:

- رنگ خانه ها نسبت به ستون وسط متقارن باشد.
- از هر دو سطر متوالی حداقل یک خانه سیاه شده باشد.
- هیچ دو خانه ی سیاه مجاور هم نباشند. دو خانه مجاورند اگر یک ضلع مشترک داشته باشند.

- الف) ۱,۰۲۴ ب) ۲,۰۴۸ ج) ۳,۰۷۳ د) ۱,۵۳۶ ه) ۷۶۸

(۱۴) عدد ۸۴ رقمی دودویی $x = x_{82}x_{81} \dots x_1x_0$ مفروض است. از x عدد ۴۲ رقمی مبنای ۴ خاص $y = y_{41}y_{40} \dots y_1y_0$ را به شرح زیر می سازیم.

$$\begin{cases} y_0 &= x_0 - 2x_1 \\ y_i &= x_{2i-1} + x_{2i} - 2x_{2i+1} \\ y_{41} &= x_{81} + x_{82} \end{cases}$$

به طوری که هر y_i می تواند یکی از رقم های مجموعه ی $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ را اختیار کند. چه رابطه ای بین $y = \sum_{i=0}^{41} y_i 4^i$ و $x = \sum_{i=0}^{82} x_i 2^i$ برقرار است؟

- الف) $y = 2x$ ب) $x = 2y$ ج) $x = y$ د) $y = 4x$ ه) $y = -x$

(۱۵) دنباله ی $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ جای گشتی از اعداد ۱ تا n است به طوری که برای $1 \leq i \leq n-1$ یا $a_i = a_{i+1} + 5$ یا $a_i = a_{i+1} - 8$. بزرگ ترین مقدار n چند است؟

- الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) ۱۴

مرحله ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۶) جای گشت n عضو $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ از اعداد ۱ تا n را در نظر بگیرید. برنامه ی زیر این دنباله را مرتب می کند:

دستورهای زیر را برای هر یک از مقادیر i از ۱ تا n تکرار کن:
 $\leq$ تا وقتی که a_i برابر i نیست، مقدار خانه ی i را با مقدار خانه ی a_i تعویض کن.

مثلاً اگر ورودی $\langle 5, 2, 3, 1, 4 \rangle$ باشد،

$$\langle 5, 2, 3, 1, 4 \rangle \xrightarrow{\text{تعویض ۵ و ۴}} \langle 4, 3, 2, 1, 5 \rangle \xrightarrow{\text{تعویض ۱ و ۴}} \langle 1, 3, 2, 4, 5 \rangle \xrightarrow{\text{تعویض ۳ و ۲}} \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$$

حداکثر تعداد تعویض ها برای تمام جای گشت های 2005 عضوی را در نظر بگیرید. باقی مانده ی این عدد بر ۵ چند است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۷) ۸ خانواده به یک مهمانی دعوت شده اند. تعداد اعضای خانواده ها به ترتیب برابر ۴، ۴، ۴، ۴، ۵، ۵، ۵ و ۵ نفرند. میزبان برای شام تعدادی میز در نظر گرفته است که هرکدام دقیقاً ۷ جای صندلی دارد. میزبان می خواهد جای نشستن هر فرد را از قبل تعیین کند به طوری که هیچ دو نفر از اعضای یک خانواده دور یک میز نشینند. حداقل تعداد میزهای مورد نیاز چند تا است؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

۱۸) عدد N داده شده است. N را می توانیم هر بار در یک عدد صحیح دل خواه ضرب کنیم و سپس کلیه ی صفرهای عدد حاصل را از بین ببریم. هدف این است که با تکرار این کار در نهایت عدد حاصل تک رقمی شود. مثلاً ۲۱ را

$$\text{می توان با دو بار به ۶ تبدیل کرد: } 21 \xrightarrow{\times 5} 105 \xrightarrow{\times 4} 420 \xrightarrow{\div 10} 42 \xrightarrow{\div 10} 4$$

۱۱ را با حداقل چند بار تکرار این عمل می توان به یک عدد یک رقمی تبدیل کرد؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

۱۹) یک لامپ سالم در زیرزمین فقط به یکی از ۱۰ کلید مشابه در حال طبقه ی بالا وصل است. ۹ کلید دیگر به هیچ لامپی وصل نیستند. کلید متصل به لامپ، اگر در وضعیت روبه بالا قرار گیرد لامپ را روشن و اگر روبه پایین باشد آن را خاموش می کند. می خواهیم با حداقل تعداد پایین رفتن به زیرزمین، مشخص کنیم کدام یک از کلیدها به لامپ زیرزمین وصل است. می دانیم که لامپ با ۵ بار خاموش و روشن کردن متوالی حتماً می سوزد، و لامپ سوخته از سالم قابل تشخیص است. توجه کنید که فقط همان یک لامپ را در اختیار داریم و سوختن آن هم برای ما مهم نیست. با حداقل چند بار پایین رفتن می توان جواب مسئله را پیدا کرد؟ (توجه کنید که بالا رفتن ها را نمی شماریم.)

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۲۰) یک مکعب $3 \times 3 \times 3$ را به چند طریق می توان با مکعب مستطیل $1 \times 1 \times 3$ به طور کامل پر کرد؟

الف) ۱ ب) ۸ ج) ۲۴ د) ۲۷ ه) ۲۱

مرحله ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۱) یک عدد صد رقمی دهدهی با ارقام ۱ تا ۹ مفروض است. آنرا از چپ به راست به ترتیب زیر می خوانیم و عدد جدیدی می سازیم: اولین رقم سمت چپ را می خوانیم و به همان تعداد جلو می رویم، رقمی که به آن می رسیم را در عدد جدید قرار می دهیم و در عدد فعلی یک رقم جلو می رویم. این کار را تکرار می کنیم تا به انتهای عدد فعلی برسیم. سپس همین کار را با عدد جدید انجام می دهیم و عدد جدیدتری می سازیم تا وقتی نتوان عدد جدیدتری ساخت. مثال:

عدد ساخته شده ی دوم $\xrightarrow{\text{عدد ساخته شده ی اول}}$ $۱۲۳۴۵۶۷۸۹۲۴۵۶۷ \dots \xrightarrow{\text{(عدد اصلی)}}$ $۷ \dots$

اگر عدد اولیه ی صد رقمی به گونه ای باشد که آخرین عدد ساخته شده ۹ رقمی شود، تعداد عددهای ساخته شده حداقل و حداکثر چند تا ست؟

- (الف) حداقل ۱ و حداکثر ۴ (ب) حداقل ۳ و حداکثر ۳ (ج) حداقل ۲ و حداکثر ۲
(د) حداقل ۱ و حداکثر ۲ (ه) حداقل ۲ و حداکثر ۳

(۲۲) عدد N را «متوازن» می گوئیم اگر مجموع تعداد ارقام ۱ در همه ی اعداد ۱ تا N برابر N باشد. مثلاً ۱ متوازن است. ۱۱ متوازن نیست چون مجموع تعداد ارقام ۱ آن (فقط در عددهای ۱، ۱۰ و ۱۱) برابر ۴ است. می دانیم که اولین عدد متوازن بزرگتر از ۱ عدد ۱۹۹,۹۸۱ است. تعداد عددهای متوازن بین (و شامل) ۱۹۹,۹۸۱ تا ۲۰۰,۰۰۰ چند تا ست؟

- (الف) ۱ (ب) ۱۱ (ج) ۱۲ (د) ۱۹ (ه) ۲۰

(۲۳) یک مربع ۱۰۰×۱۰۰ را به صورت شطرنجی رنگ کرده ایم. شخصی در گوشه ی بالا و سمت چپ این مربع که خانه ای سفید است ایستاده است. این شخص می خواهد با حرکت در این مربع پد هر کدام از خانه ها حداقل یکبار ایستاده باشد. هزینه ی رفت و آمد برای حرکت او به این صورت است:

• از هر خانه به هر کدام خانه های مجاور (حداکثر ۴ خانه)، ۱ تومان.

• از هر خانه ی سیاه به هر خانه ی سیاه دیگر، رایگان است.

حرکت به غیر از دو صورت گفته شده در بالا ممکن نیست. حداقل هزینه ای که این شخص باید بپردازد چه قدر است؟

- (الف) ۹,۹۹۹ (ب) ۵,۰۰۰ (ج) ۴,۹۹۹ (د) ۵,۰۰۱ (ه) ۹,۹۹۸

(۲۴) اعداد ۰ تا ۱۲۷ را به ترتیب پشت سر هم نوشته ایم. حالا بین هر دو عدد XOR (یا $\oplus$) آن دو را می نویسیم. سپس اعداد اولیه را پاک می کنیم. این کار را آن قدر تکرار می کنیم تا تنها یک عدد باقی بماند. آن عدد چند است؟

$C = A \oplus B$ را به این صورت تعریف می کنیم: اگر a_i, b_i و c_i به ترتیب رقم های i ام (از سمت راست) A , B و C در مبنای دو باشند، در این صورت $c_i = \begin{cases} 0 & a_i = b_i \\ 1 & a_i \neq b_i \end{cases}$. مثلاً $۵ \oplus ۷ = (۱۰۱)_2 \oplus (۱۱۱)_2 = ۲$.

- (الف) ۰ (ب) ۱۲۷ (ج) ۱ (د) ۶۴ (ه) ۶۳

(۲۵) چند عدد ۱۳ رقمی از ارقام $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ وجود دارد که مجموع هر سه رقم متوالی در آن زوج باشد؟

- (الف) ۲۱۳ (ب) ۲۱۵ (ج) ۲۱۱ (د) ۳×۲^{۱۱} (ه) ۴×۳^{۱۱}

مرحله ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۶) ۳۲ لامپ موجود است و هر کدام به یک کلید متصل است. در ابتدا بعضی از لامپ ها روشن و بعضی خاموش اند. ناگهان یک سیم متصل به یکی از لامپ ها اتصال کوتاه می کند خراب شده و باعث سوختن فیوز و در نتیجه قطع کل برق می شود. فیوز سوخته قابل استفاده ی مجدد نیست و باید تعویض شود. اگر کلید لامپی که اتصالی دارد در وضعیت روشن قرار داشته باشد و فیوز سالمی را جایگزین کنیم فیوز جدید نیز خواهد سوخت. برای پیدا کردن کلید متصل به اتصال کوتاه چند عدد فیوز سالم جدید لازم است؟

الف) ۵ (ب) ۱ (ج) ۶ (د) ۴ (ه) ۳۱

(۲۷) یک چراغ چشمک زن با سرعت (a, b) چراغی است که به طور متناوب، a ثانیه ی متوالی خاموش است و سپس برای b ثانیه ی متوالی روشن می ماند، و مدام این چرخه را تکرار می کند. (a) و b اعداد طبیعی هستند. در مورد یک چراغ چشمک زن می دانیم:

- (۱) در ثانیه ی دهم خاموش بوده است. (۲) در ثانیه ی دوازدهم روشن بوده است.
(۳) در ثانیه ی چهاردهم خاموش بوده است. (۴) در ثانیه ی شانزدهم روشن بوده است.

با این فرض که نمی دانیم چراغ از چه ثانیه ای شروع به کار کرده است، چند حالت ممکن (a, b) برای سرعت این چراغ وجود دارد؟

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

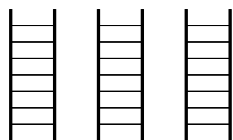
(۲۸) دنباله ی $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ را در نظر بگیرید که $a_i \in \{+1, -1, +5, -5\}$. S_j را مجموع j عنصر اول دنباله تعریف می کنیم. می دانیم که هیچ $1 \leq j \leq n$ وجود ندارد که S_j مضرب ۵ باشد. در هر گزینه یک زوج مرتب (n, S_n) داده شده است. کدام گزینه ی زیر امکان پذیر است؟

الف) $(67, 333)$ (ب) $(83, 334)$ (ج) $(77, -256)$ (د) $(93, -288)$ (ه) $(105, 519)$

(۲۹) یک جدول 2005×2005 در اختیار داریم که تمام خانه های آن سفید هستند. شخصی ۱۳۸۳ بار، یک سطر و یک ستون را انتخاب و رنگ همه ی خانه های آن سطر و آن ستون را بر عکس می کند. توجه کنید که رنگ خانه ی مشترک در سطر و ستون تغییر نمی کند. تعداد خانه های سیاه باقی مانده در جدول در انتها، کدام یک از گزینه های زیر می تواند باشد؟

الف) ۰ (ب) $2,772,915$ (ج) $196,078$ (د) $3,044,854$ (ه) $2,124$

(۳۰) آقای ملکی می خواهد از سه نردبان ۷ پله ای هواپیما که مانند شکل مقابل در کنار هم قرار دارند بالا برود و در بالاترین سطح قرار بگیرد. او در هر حرکت می تواند به یک پله بالاتر در یکی از نردبان های مجاور یا نردبانی که اکنون بر روی آن قرار دارد برود، ولی نمی تواند در یک حرکت از نردبان اول به نردبان سوم یا برعکس برود. اگر او در ابتدا بر روی اولین پله نردبان سمت راست باشد، به چند طریق می تواند خود را به یکی از پله های هفتم برساند؟



الف) ۷۰ (ب) ۱۲۸ (ج) ۱۶۹ (د) ۱۸۲ (ه) ۲۳۹

مرحله ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۳۱) در ۳۰ کیسه ۳۲ کارت با شماره های ۱ تا ۳۲ ریخته ایم، به طوری که هیچ کیسه ای خالی نیست و نیز اگر کارت i در کیسه ی k باشد، کارت $i + 1$ در کیسه ای با شماره ی کوچک تر از k نیست. در ابتدا در کیسه ها بسته است و وقتی در یکی را باز می کنیم شماره ی کارت های آن را می بینیم. دست کم در چند کیسه را باید باز کنیم تا حتماً بتوانیم کارت ۱۳ را ببینیم؟

الف) ۲ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۱۳ (ه) ۳۲



(۳۲) حداقل چند مستطیل 2×3 را باید در صفحه قرار دهیم به طوری که هم پوشانی نداشته باشند و بتوان آن ها را با موزائیک های به شکل مقابل کاملاً پوشاند؟ بدیهی است که دوران و تقارن مجاز است.

الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۶ (ه) هرگز نمی شود.

(۳۳) دنباله ی ۵ عضوی $\langle 3, 1, 4, 5, 2 \rangle$ را در نظر بگیرید که عضو اول آن ۳ است. هر عمل «وارون» یعنی انتخاب یک i و وارون کردن عضوهای اول تا i ام. مثلاً $\langle 5, 4, 1, 3, 2 \rangle$ دنباله را پس از یک وارون نشان می دهد. با چندتا عمل وارون می توان دنباله ی ورودی را از چپ به راست به صورت صعودی مرتب کرد؟ کم ترین گزینه ی ممکن را انتخاب کنید.

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

(۳۴) یک مکعب بزرگ $n \times n \times n$ را در نظر بگیرید. این مکعب را به n^3 مکعب واحد تقسیم کرده ایم. دو نفر این بازی را روی مکعب بزرگ انجام می دهند: هر نفر در نوبت خود یک مکعب مستطیل $1 \times 1 \times n$ ، $1 \times n \times 1$ و یا $n \times 1 \times 1$ از مکعب بزرگ، که هیچ یک از مکعب های واحد آن رنگ نشده اند، را انتخاب کرده و مکعب های واحد آن را رنگ می کند. در ابتدا هیچ یک از مکعب های واحد رنگ نشده اند. هر کس نتواند در نوبت خود مکعب مستطیلی به شرح فوق انتخاب و رنگ کند بازنده خواهد بود. برای کدام یک از حالت های $n = 10$ ، $n = 11$ و $n = 12$ نفر اول می تواند طوری بازی کند که حتماً برنده شود؟

الف) همه ی حالات (ب) هیچ یک از حالات (ج) حالات $n = 11$ و $n = 13$ (د) حالت $n = 11$ (ه) حالات $n = 10$ و $n = 12$

(۳۵) n نفر دور میزی دایره ای شکل نشسته اند. هر نفر یا راستگوست یا دروغگو (راستگو همیشه راست و دروغگو همیشه دروغ می گوید). هر کدام از این n نفر این جمله را می گوید: «بین من و دو نفر سمت راست و دو نفر سمت چپ من، دقیقاً k نفر دروغگو هستند.» کدام یک از گزاره های زیر در مورد n تعداد حالات دروغگو و راستگو بودن این افراد، درست است؟

الف) اگر $n = 51$ و $k = 4$ ، آن گاه $r = 4$ (ب) اگر $n = 50$ و $k = 0$ ، آن گاه $r = 0$ (ج) اگر $n = 51$ و $k = 5$ ، آن گاه $r = 1$ (د) اگر $n = 50$ و $k = 1$ ، آن گاه $r = 6$ (ه) اگر $n = 52$ و $k = 1$ ، آن گاه $r = 6$

مرحله ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۳۶) دنباله ای از اعداد $1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots; 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1$ به شکل زیر مفروض است که هر عدد را به ترتیب از راست به چپ x_0 تا x_{83} نام گذاری می کنیم. دقت کنید که دنباله بعد از '؛' تکرار می شود.

$$1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots; 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1$$

معادل دودویی عدد $\sum_{i=0}^{83} x_i 2^i$ چند رقم صفر دارد؟

الف) ۸۳ (ب) ۸۲ (ج) ۴۲ (د) ۴۱ (ه) ۴۰

(۳۷) تعدادی کارت داریم که روی هریک، یک عدد نوشته شده است. دستگاه کارت برگردان دستگاهی است که اگر دو کارت با عددهای a و b به آن بدهیم، آن ها را نابود کرده و یک کارت با عدد $2a + 2b$ تولید می کند. (یعنی دو کارت را به یک کارت تبدیل می کند.) ۷ تا کارت با شماره ی ۱ داریم. می خواهیم با چند بار استفاده از دستگاه کارت برگردان بیش ترین عدد ممکن را تولید کنیم. این عدد چند است؟

الف) ۲۵۶ (ب) ۱۹۰ (ج) ۹۴ (د) ۸۲ (ه) ۵۲

(۳۸) در پارکینگ مشتی ممدعلی سیستم عجیبی برای پارک کردن ماشین ها برقرار است. این پارکینگ هفت جای پارک دارد که به ترتیب با شماره های صفر تا شش مشخص شده اند. هر ماشینی که به پارکینگ وارد می شود ابتدا سراغ جای پارکی می رود که شماره ی آن برابر باقی مانده ی تقسیم شماره ی پلاک ماشین بر عدد هفت است. اگر این جای پارک پر بود به سراغ بعدی می رود (اگر جای پارک شماره شش پر بود به سراغ شماره صفر می رود) و همین طور ادامه می دهد تا به اولین جای پارک خالی برسد و آن جا پارک می کند و سپس ماشین بعدی وارد پارکینگ می شود. اگر در انتها ماشین ها در پارکینگ به ترتیب ۴۶، ۶۸، ۳۹، ۹۳، ۲۳، ۷۰، ۹۸ ایستاده باشند (پلاک شماره ی ۹۸ در جای پارک شماره ی صفر و پلاک ۴۶ در پارکینگ شماره ی ۶)، چند ترتیب ممکن اولیه برای ورود آن ها ممکن است؟

الف) ۵۰۴۰ (ب) ۲۱۰ (ج) ۳۰۵ (د) ۴۲۰ (ه) ۷۲۰

(۳۹) آرش برای فرستادن تقاضای استخدام برای هر یک از ده شرکت مختلف مورد نظرش باید سه توصیه نامه از سه استاد مختلف خود (مجموعاً ۳۰ عدد) داشته باشد. چهار نفر از اساتید او به نام های دکتر قدسی، دکتر توسرکانی، دکتر جابری پور و دکتر اکبری برای او توصیه نامه خواهند نوشت. دکتر قدسی ۹ عدد، دکتر توسرکانی ۸ عدد، دکتر جابری پور ۷ عدد و دکتر اکبری ۶ عدد. آرش چند راه مختلف برای فرستادن این توصیه نامه ها دارد؟

الف) ۱۲,۶۰۰ (ب) $(\frac{1}{4})$ (ج) ۴۱۰ (د) ۳۱۰ (ه) ۳,۰۲۴

(۴۰) یک مکعب $1 \times 1 \times 1$ را به 630 مکعب با ابعاد $\frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7}$ تقسیم می کنیم. اگر خطی که قطر اصلی این مکعب است را رسم کنیم، از داخل چند مکعب می گذرد؟

الف) ۸۵ (ب) ۸۴ (ج) ۲۵ (د) ۲۴ (ه) ۱۰

موفق باشید!

پاسخ تشریحی

پانزهمین المپیاد کامپیوتر

۱. اگر سه گونی به اوزان a, b, c و چنان باشند که $a \leq b \leq c$ ، آنگاه با توجه به ادغام های گوناگون به یکی از هزینه های $2a + 2b + c$ ، $a + 2b + 2c$ ، یا $2a + b + 2c$ خواهیم رسید که در بین آن هزینه ها $2a + 2b + c$ کمترین مقدار ممکن را دارد. بنابراین بهتر آن است که در ابتدا گونی های سبک تر را با هم ادغام کرده و حاصل را با بعدی و به همین ترتیب تا آخر پیش رویم:

$$\left. \begin{array}{ll} 2 + 3 = 5 & (\text{هزینه} = 5) \\ 4 + 4 = 8 & (\text{هزینه} = 8) \\ 5 + 6 = 11 & (\text{هزینه} = 11) \\ 8 + 11 = 19 & (\text{هزینه} = 19) \end{array} \right\} \longrightarrow \text{مجموع هزینه ها} = 43$$

۲. مجموع کل کارها به غیر از کار ۲۰۰ دقیقه ای برابر ۹۸۰۰ می باشد که اگر آن را به ۱۰ یعنی تعداد نفرات تقسیم کنیم ۹۸۰ به دست می آید به این معنا که حداقل یکی از افراد قبل از رسیدن به لحظه ۹۸۰ و یا در همان لحظه کارش تمام می شود و در آن لحظه به غیر از کار ۲۰۰ دقیقه ای هیچ کار دیگری باقی نمانده است که اگر کار ۲۰۰ دقیقه ای را به او بسپاریم قبل از لحظه ۱۱۸۰ کل کار به اتمام خواهد رسید. اگر زمان هر یک از ۹۹ کار دیگر را چنان تنظیم کنید که به هر یک از ۱۰ نفر دقیقاً ۹۸۰ دقیقه کار برسد آنگاه با اختصاص کار ۲۰۰ دقیقه ای به یکی از آن ده نفر، دقیقاً در لحظه ۱۱۸۰ کل پروژه به اتمام خواهد رسید.

۳. اگر شیشه سمت چپ را A و شیشه سمت راست را B بنامیم و عبور نور از شیشه X را با X و برگشت نور از آن شیشه را با x نمایش دهیم، آنگاه نورهای رد شده به سمت راست به یکی از شکل های زیر خواهد بود:

I) AB

II) AbaB

III) AbabaB

⋮

Aba...baB

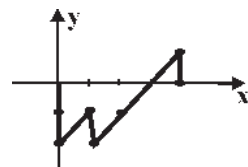
⋮

در هر یک از حالات فوق به ترتیب ۴۹ واحد، $۴۹ \times \frac{۴}{۱۰۰}$ واحد، $۴۹ \times (\frac{۴}{۱۰۰})^۲$ واحد و ... نور به سمت

راست منتقل می شود که مجموع کل آنها برابر $۴۹ \times \frac{۱}{۱ - \frac{۴}{۱۰۰}}$ یا $۴۹ + \frac{۴ \times ۴۹}{۹۶}$ می شود.

۴. مقدار d نمی تواند ۲ باشد. اگر d برابر ۱ باشد، آنگاه هر یک از مقادیر سایر متغیرها باید صفر باشند. اگر d برابر ۰ باشد آنگاه مقادیر c، b و a به ترتیب به صورت ۲، ۰، ۰ یا ۱، ۱، ۲ و یا ۱، ۱، ۲ می تواند باشد.

۵. حرکت از نوع دوم مهره را به سمت راست منتقل نمی کند. بنابراین باید دقیقاً ۴ بار از حرکت نوع اول استفاده کرد. چون حرکت نوع اول یک واحد مهره را به سمت بالا منتقل می کند باید برای خنثی کردن آن جهت یک بار نیز از حرکت دوم استفاده شود، در نتیجه در مجمع ۸ حرکت استفاده خواهد شد که چهار تا از آنها از نوع اول و چهار تا از آنها از نوع دوم می باشد. تعداد جای گشت های ۸ شی که چهار تا از



آنها، شبیه هم و چهار تای دیگر نیز شبیه هم هستند برابر $\frac{۸!}{۴!۴!}$ یا ۷۰

می باشد به عنوان مثال مسیر متناظر به جای گشت ۲، ۱، ۱، ۱، ۲، ۱، ۲، ۲

مطابق شکل مقابل می باشد.

۶. شکل های دوم، چهارم و ششم از سمت راست قابل دیده شدن هستند ولی سایر شکل ها را نمی توان تولید کرد. در واقع دو گوشه نشان داده شده در شکل دو گوشه مقابل مکعب می باشند، بنابراین می توانید مکعب یاد شده را به صورت منحصر به فرد ساخته و از گوشه های مختلف به آن نگاه کنید.

۷. ابتدا اعداد از ۱ تا ۱۳۸۴ را به ۱۱ بازه مطابق تقسیم بندی زیر افراز می کنیم:

$$[1, 2), [2, 3), [3, 6), [6, 11), [11, 22), [22, 44), [44, 87), [87, 174), [174, 347), [347, 693), [693, 1384)$$

ابتدا آرمین عدد ۲۲ را پیشنهاد می دهد که اگر رمز در بازه مربوط به آن باشد برنده می شود و اگر رمز در آن بازه نبوده و بزرگتر از ۲۲ و یا کوچکتر از آن باشد توسط آرش اعلام می شود. در سمت راست بازه مربوط به ۲۲ فقط ۵ بازه در سمت چپ آن نیز ۵ بازه وجود دارد به این معنا که اگر عدد مورد نظر آرش بزرگتر از ۲۲ و در خارج بازه مربوطه به آن بوده با این که کمتر از ۲۲ باشد برای اطمینان از یافتن جواب مراحل یکسانی لازم است. بنابراین فرض می کنیم جواب آرش بزرگتر باشد.

آرمین عدد ۱۷۴ را به عنوان دومین عدد پیشنهاد می دهد که اگر برنده نشود متناسب با بزرگتر و یا کوچکتر گفتن آرش به ترتیب یکی از دو عدد ۳۴۷ و یا ۴۴ را به عنوان عدد سوم پیشنهاد خواهد داد که اگر در این مرحله نیز برنده نشود در مورد اول عدد ۶۹۳ و در مورد دوم عدد ۸۷ را پیشنهاد داده و یقیناً برنده خواهد شد.

۸. دنباله مربوط به رقم یکان به شکل زیر می باشد که دارای دوره تناوب ۴ می باشد:

$$1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \dots$$

بنابراین دنباله اعدادی که به آنها بر می خوریم به شکل زیر خواهند بود:

$$1, 2, 4, 8, 16, 22, 24, 28, 36, 44, 48, 56, \dots, 1382$$

به این ترتیب که در هر بازه $[2^k, 2^{k+1})$ دقیقاً به ۴ عدد بر می خوریم (به غیر از اولین بازه به صورت فوق که به ۵ عدد بر می خوریم). از عدد ۰ تا ۱۳۷۹ به ۶۹ بازه ۲۰ تایی قابل افراز است. بنابراین در کل این ۶۹ بازه به تعداد $5 \times 1 + 4 \times 68$ یعنی ۲۷۷ عدد قابل برخورد وجود دارد که با احتساب عدد ۱۳۸۲ تعداد کل اعداد قابل برخورد به ۲۷۸ خواهد رسید.

۹. برای آنکه نفر دوم در مرحله n ام برنده شود باید در مرحله $n-1$ نفر اول به یکی از باقی مانده های ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ رسیده باشد، زیرا اگر در آن مرحله، نفر اول به یکی از باقی مانده های ۰، ۱، ۲ و ۳ رسیده باشد، نفر دوم مکملی برای آن باقی مانده (از بین اعداد مجموعه داده شده) نخواهد یافت.

● برای آنکه در مرحله $n-1$ نفر اول به ناچار به یکی از باقی مانده های ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ برسد باید نفر دوم در مرحله $n-2$ به باقی مانده ۳ برسد.

● برای آنکه در مرحله $n-2$ نفر دوم بتواند به باقی مانده ۳ برسد باید نفر اول در مرحله $n-3$ به یکی از باقی مانده های ۱، ۲، ۸ و ۷ رسیده باشد که او بتواند ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ اضافه کرده و باقی مانده عدد حاصل بر ۹ را برابر ۳ کند.

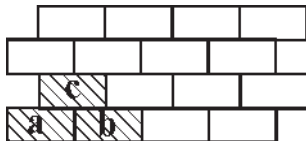
● برای آنکه در مرحله $n-3$ نفر اول به ناچار به یکی از باقی مانده های ۱، ۲، ۸ و ۷ برسد باید نفر دوم در مرحله $n-4$ به باقی مانده ۶ برسد.

● برای آنکه در مرحله $n-4$ نفر دوم بتواند به باقی مانده ۶ برسد لازم است نفر اول در مرحله $n-5$ به یکی از باقی مانده های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ رسیده باشد.

● برای آنکه در مرحله $n-5$ نفر اول به یکی از باقی مانده های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ برسد لازم است نفر دوم در مرحله $n-6$ به باقی مانده صفر برسد.

با توجه به توضیحات فوق معلوم می شود که شرط لازم و کافی برای آنکه نفر دوم بتواند در مرحله n ام برنده شود، آن است که بتواند در مرحله $(n-6)$ ام برنده شود. و چون عدد صفر مضرب ۹ است؛ یعنی در مرحله صفرام نفر دوم برنده است او می تواند در مراحل ۶، ۱۲، ۱۸، ...، ۱۳۸۰، ۱۳۸۶، ... برنده شود.

۱۰. اگر سه آجر مشخص شده در شکل را با a ، b و c رنگ آمیزی کنیم، مابقی آجرها به صورت منحصر به فرد رنگ آمیزی خواهند شد. پس کافی است رنگ سه آجر مشخص شده را تعیین کنیم تا رنگ مابقی آجرها نیز معلوم شود. اختصاص ۳ رنگ متمایز به



۳ آجر مشخص شده به $3!$ یعنی ۶ ممکن است.

۱۱. مضارب دو رقمی اعداد ۱۷ و ۲۳ به شکل زیر می باشند:

۱۷: ۱۷، ۳۴، ۵۱، ۶۸، ۸۵

۲۳: ۲۳، ۴۶، ۶۹، ۹۲

همان طور که مشخص است هیچ عدد دو رقمی که رقم دهگانش ۷ باشد وجود ندارد که مضرب ۱۷ یا ۲۳ باشد، بنابراین اگر در نوشتن عدد رقم ۷ به کار رود به بن بست خواهیم رسید. چون رقم ۷ استفاده

نمی‌کنیم بنابراین رقم ۱ نیز نباید استفاده کرد زیرا تنها رقمی که می‌تواند بعد از ۱ بیاید تا عدد دو رقمی حاصل مضرب ۱۷ و یا ۲۳ باشد، رقم غیر مجاز ۷ می‌باشد. به همین دلیل مجاز به استفاده از ارقام ۵ و ۸ نیز نیستیم، در نتیجه ۱۳۸۰ رقم اول اعداد خواسته شده به شکل زیر می‌باشد که ارقام آن دوره تناوبی به طول ۵ دارد:

۶۹۲۳۴۶۹۲۳۴۶...۴۶۹۲۳۴

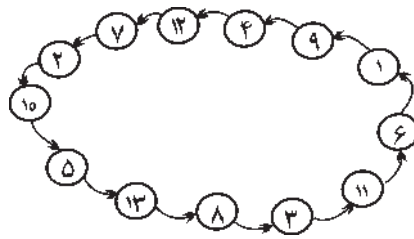
اما در نوشتن سه رقم آخر اگر به بن بست نیز برسیم اشکالی ندارد، زیرا نوشتن عدد به اتمام می‌رسد. بنابراین سه رقم آخر عدد به یکی از دو شکل ۶۹۲ یا ۶۸۵ می‌باشد.

۱۲. هر سطر به یکی از ۳ شکل ،  و یا  می‌تواند باشد به شرطی که اگر سطر i ام به یکی از آن سه شکل بود سطر (i+1) ام نیز نمی‌تواند به همان شکل باشد، بنابراین سطر اول ۳ حالت و مابقی سطرها وابسته به نوع شکل سطر قبل از خود، به یکی از دو شکل دیگر می‌تواند باشد، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر 3×2^9 یعنی ۱۵۳۶ می‌باشد.

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=0}^{41} y_i \times 4^i = y_0 \times 4^0 + y_1 \times 4^1 + y_2 \times 4^2 + \dots + y_{40} \times 4^{40} + y_{41} \times 4^{41} \\ &= (x_0 - 2x_1) \times 4^0 + (x_1 + x_2 - 2x_3) \times 4^1 + (x_2 + x_4 - 2x_5) \times 4^2 + \dots + (x_{39} + x_{40} - 2x_{41}) \times 4^{40} \\ &\quad + (x_{41} + x_{42}) \times 4^{41} \\ &= x_0 \times 2^0 + x_1 \times 2^1 + x_2 \times 2^2 + x_3 \times 2^3 + \dots + x_{41} \times 2^{41} + x_{42} \times 2^{42} = \sum_{i=0}^{42} x_i \times 2^i = x \end{aligned} \quad ۱۳$$

۱۴. اعداد قبل و بعد از اعداد از ۱ تا ۸ به صورت منحصر به فرد به شکل زیر یافت می‌شوند:

$$\begin{aligned} 6 &\longrightarrow 1 \longrightarrow 9 \\ 7 &\longrightarrow 2 \longrightarrow 10 \\ 8 &\longrightarrow 3 \longrightarrow 11 \\ 9 &\longrightarrow 4 \longrightarrow 12 \\ 10 &\longrightarrow 5 \longrightarrow 13 \\ 11 &\longrightarrow 6 \longrightarrow 1 \\ 12 &\longrightarrow 7 \longrightarrow 2 \\ 13 &\longrightarrow 8 \longrightarrow 3 \end{aligned}$$



معلوم است که در این صورت دور بسته ای به شکل مقابل یافت می شود:

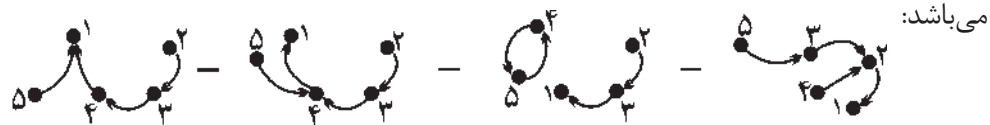
حلقه مقابل باید از یک نقطه بریده شود که اگر این عمل بین ۱ و ۶ باشد، آنگاه عدد ۱۴ می تواند بعد از ۶ وارد شود که در این صورت به جای گشت زیر خواهیم رسید:

۱۴ - ۶ - ۱۱ - ۳ - ۸ - ۱۳ - ۵ - ۱۰ - ۲ - ۷ - ۱۲ - ۴ - ۹ - ۱

و اگر آن حلقه بین ۱ و ۹ بریده شود باز عدد ۱۴ می تواند قبل از عدد ۹ وارد شود که در این صورت نیز به جای گشتی خواهیم رسید که به شکل زیر می باشد:

۱۴ - ۹ - ۴ - ۱۲ - ۷ - ۲ - ۱۰ - ۵ - ۱۳ - ۸ - ۳ - ۱۱ - ۶ - ۱

۱۵. گراف های جهت دار متناظر به هر یک از حالات داده شده به ترتیب از چپ به راست به شکل زیر



می باشد:

با توجه به گراف های فوق معلوم می شود که عدد زیر پای ۱ هر چه باشد در حالت اول، دوم و چهارم سیب زمینی به شماره ۱ برخورد گشت ولی در حالت سوم این چنین نیست. در حالت سوم اگر عدد زیر پای ۱ یکی از دو عدد ۴ و ۵ باشد، آنگاه سیب زمینی بین آن دو نفر خواهد چرخید و هرگز به خود ۱ بر نمی گردد.

۱۶. تعداد کل افراد آن ۸ خانواده برابر $4 \times 4 + 4 \times 5$ یعنی ۳۶ می شود. معلوم است که جا دادن ۳۶ نفر در دور میزهای ۷ نفره به طوری که تعداد آنها ۵ یا کمتر باشد، امکان ناپذیر است (۵ میز ۷ نفره حداکثر ۳۵ نفر در خود جای می دهند). جا دادن افراد در دور ۶ میز با شرط اشاره شده امکان پذیر است، کافی است خانواده ها به ترتیب با a, b, c, d, e, f, g, h نام گذاری کرده و دور هر میز دقیقاً ۶ نفر قرار دهید؛ یعنی دور هر میز دقیقاً از دو تا از خانواده ها موجود نباشد که حالت بندی آن به شکل زیر می شود:

(a-b) (a-c) (b-c) (d-e) (d-f) (g-h)

۱۷. مراحل انجام کار به شکل زیر می باشد:

$$۵۶ \rightarrow ۵۰۶ = ۴۶ \times ۱۱$$

$$۷ \rightarrow ۷۰۰۰ = ۱۲۵ \times ۵۶$$

۱۸. در ابتدا کلیدها را به دو دسته پنج تایی تقسیم می کنیم و پنج تای اول را رو به بالا (در حالت U) و پنج تای دوم را رو به پایین (در حالت D) قرار می دهیم، سپس به زیرزمین رفته و لامپ را نگاه می کنیم اگر روشن باشد می فهمیم که کلید در دسته اول قرار دارد، در غیر این صورت کلید در دسته دوم قرار خواهد داشت. بعد از شناسایی دسته مورد نظر، ۳ تا از کلیدها را در وضعیت U و ۲ تای دیگر را در وضعیت D قرار می دهیم و برای بار دوم به زیرزمین می رویم که اگر لامپ روشن باشد، کلید مورد نظر در دسته ۳ تایی و در غیر این صورت در دسته ۲ تایی خواهد بود. پس از شناسایی دسته مورد نظر (در بدترین حالت سه تایی)، دو تا از آنها را در وضعیت U و یکی دیگر را در وضعیت D قرار داده و برای بار سوم به زیرزمین می رویم که اگر لامپ روشن بود کلید مطلوب در دسته ۲ تایی بوده و در غیر این صورت آن کلید، کلید سوم است. بدترین حالت این است که لامپ روشن بوده و دو کلید مجهول باقی مانده باشد که در این صورت یکی از آن دو کلید را در وضعیت U و دیگری را در وضعیت D قرار داده و برای بار چهارم (آخرین بار) به زیرزمین رفته و با توجه به روشن و یا خاموش بودن لامپ، کلید مورد نظر را شناسایی می کنیم.

۱۹. حالات بندی زیر را در نظر می گیریم:

I (تعداد مکعب های عمودی «۰» باشد. در این حالت هر طبقه از سه طبقه مورد نظر به دو طریق متمایز (به صورت طولی و یا عرضی) می توانند پر شوند که طبق اصل ضرب، ۸ طریق متمایز به دست می آید.

II (تعداد مکعب های عمودی «۳» باشد. (ابتدا یادآوری می شود که اگر یکی از مکعب ها عمودی باشد باید همه مکعب های در عرض آن و یا همه مکعب های در طول آن نیز به صورت عمودی چیده شوند.) در این حالت بستگی به این که کدام ردیف ۳ تایی از ردیف های عرضی و یا کدام ردیف ۳ تایی از ردیف های طولی به صورت عمودی چیده شوند به ۶ طریق متمایز خواهیم رسید که بقیه مکعب ها به صورت منحصر به فرد قابل چیدن خواهند بود.

(II) تعداد مکعب های عمودی «۶» باشد. در این حالت بستگی به این که کدام دو ردیف از ۳ ردیف عرضی و یا کدام دو ردیف از ۳ ردیف طولی به صورت عمودی چیده شوند به ۶ طریق متمایز خواهیم رسید که در این حالت نیز بقیه مکعب ها به صورت منحصر به فرد چیده می شوند.

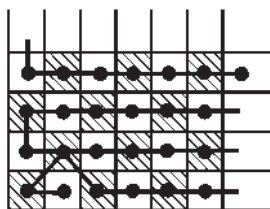
(IV) تعداد مکعب های عمودی «۹» باشد. معلوم است که در این حالت چیدن مکعب ها فقط به یک طریق ممکن است. با توجه به حالت بندی فوق معلوم می شود که تعداد کل طرق چیدن به $۸ + ۶ + ۶ + ۱$ یعنی ۲۱ طریق متفاوت ممکن شود.

۲۰. معلوم است که در هر تعویضی حداقل یک عدد در جای خود قرار می گیرد و با توجه به این که در تعویض آخر دو عدد در جای خود قرار می گیرند، بنابراین تعداد تعویض ها حداکثر ۲۰۰۴ خواهد شد. برای جای گشت زیر تعداد تعویض ها برابر ۲۰۰۴ خواهد شد.

$۲۰۰۵, ۱, ۲, ۳, ۴, \dots, ۲۰۰۳, ۲۰۰۴$

۲۱. چون عدد ۱۹۹۹۸۱ متوازن است بنابراین اعداد $۱۹۹۹۸۲, ۱۹۹۹۸۳, \dots, ۱۹۹۹۹۰$ نیز همگی متوازن هستند زیرا در هر یک از آن اعداد فقط یک رقم ۱ وجود دارد و از عددی به عدد دیگر فقط یک واحد به مجموع ارقام مورد اشاره اضافه می شود. عدد ۱۹۹۹۹۱ متوازن نیست چون ۲ واحد به مجموع مورد نظر اضافه می شود، به این معنا که به ازای هر یک از اعداد ۱۹۹۹۹۱ تا ۱۹۹۹۹۹ مجموع مورد اشاره ۱ واحد از خود عدد بیشتر خواهد بود و در نتیجه در مورد عدد ۲۰۰۰۰۰ که رقم «۱» ندارد، آن مجموع با خود عدد ۲۰۰۰۰۰ یکسان خواهد بود به این معنا که عدد ۲۰۰۰۰۰ نیز متوازن است.

۲۲. اولاً باید توجه داشت که برای ورود و خروج هر مربع سفیدی مجموعاً ۲ تومان هزینه می شود و ثانیاً



به غیر از خانه های اول و آخر، ورود و خروج لازم دارند. واضح است که خانه اول ورود ندارد و نیز می توان حرکات آخر را چنان چید (مطابق شکل) که آخرین خانه سفید باشد و خروجی لازم نداشته باشد که در این صورت هزینه انجام شده برابر $۲ - ۲ \times ۵۰۰۰$ یعنی ۹۹۹۸ خواهد شد.

۲۳. $F(i)$ را برابر با برابند XOR تمام اعداد قبل از i و خود i تعریف می کنیم. معلوم است که $F(1) = 1$ ،
 $F(2) = 3$ ، $F(3) = 0$ ، $F(4) = 4$ ، ...

تساوی های زیر به شیوه استقرای ریاضی به راحتی قابل اثبات هستند:

$$F(4k - 1) = 0$$

$$F(4k) = 4k$$

$$F(4k + 1) = 1$$

$$F(4k + 2) = 4k + 3$$

به عنوان مثال برای اثبات درستی $F(4k - 1) = 0$ به شیوه زیر عمل می کنیم:

$$F(4k - 1) = (4k - 1) \oplus F(4k - 2) = (4k - 1) \oplus (4k - 1) = 0$$

چون 127 به شکل $4k - 1$ می باشد، بنابراین $F(127) = 0$.

۲۴. هر یک از ارقام یکان و دهگان از آن اعداد، مستقل از یکدیگر ۴ حالت می توانند داشته باشند، رقم صدگان با توجه به وضعیت ارقام یکان و دهگان، زوج و یا فرد بودنش مشخص می شود؛ یعنی ۲ حالت می تواند داشته باشد «۲ یا ۴» و یا «۱ یا ۳». رقم هزارگان نیز با توجه به وضعیت ارقام دهگان و صدگان، وضعیت مشابه خواهد داشت و ... بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر $2^{11} \times 4^2$ یعنی 2^{15} می شود.

۲۵. اولاً مشخص است که از هر ده رقم متوالی حداقل یک رقم در عدد جدید نوشته می شود، بنابراین عددی که از یک عدد صد رقمی ساخته می شود حداقل ده رقمی می شود و نمی تواند نه رقمی شود بنابراین تعداد اعداد ساخته شده حداقل برابر ۲ است. اگر عدد صد رقمی اولیه از ۹ دسته ۵۱۱۱۱، از ۸ دسته ۴۱۱۱۱ و ۱ دسته ۵۱۱۱۱۹ (که دسته دوم از چپ می باشد) آنگاه عدد دوم به صورت ۹۱۱۱۱۱۱۱۱ و عدد سوم به صورت ۹۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱ در می آید.

ثانیاً با کمی توجه مشخص است که اولین عدد ساخته شده حداکثر ۵۰ رقمی، دومین عدد ساخته شده حداکثر ۲۵ رقمی، سومین عدد ساخته شده حداکثر ۱۲ رقمی و بالاخره چهارمین عدد ساخته شده حداکثر ۶ رقمی می توانند باشند. بنابراین با توجه به این که عدد نهایی ۹ رقمی است معلوم می شود که اعداد ساخته شده نمی تواند ۴ تا باشد. اگر عدد اولیه چنان باشد که از ۱۳ بسته ۱۲۱۱۱۱ و یک بسته

۱۲۱۱۱۹ (بسته دوم) و یک بسته ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱ (بسته آخر) تشکیل شود، آنگاه تعداد اعداد ساخته شده برابر ۳ خواهد شد.

۲۶. چون خانه های ۱۲ و ۱۶ هر دو روشن هستند بنابراین تعداد خانه های خاموش متوالی حداکثر ۳ می تواند باشد.

اگر $a = 1$ آنگاه b برابر ۳ می شود که شکل مربوطه به صورت زیر می شود:



اگر $a = 2$ آنگاه b برابر ۲ یا ۳ می شود که در این حالت نیز اشکال مربوطه به صورت زیر خواهند بود:



اگر $a = 3$ آنگاه b برابر ۱ یا ۲ می شود که در این حالت نیز اشکال مربوطه به صورت زیر خواهند بود:



۲۷. برای زوج مرتب $(519, 105)$ دنباله به شکل زیر وجود دارد:

$$-1, \underbrace{5, 5, 5, \dots, 5}_{104 \text{ تا}}, 5$$

۲۸. معلوم است که برایند کار مانند آن است که در نهایت i سطر متمایز و j ستون متمایز انتخاب شده باشند (ستون و یا سطری که زوج بار، انتخاب شده باشند، مانند آن است که اصلاً انتخاب نشده اند و ستون و یا سطری که فرد بار انتخاب شده باشند مانند آن است که دقیقاً یک بار انتخاب شده اند). از طرف دیگر چون ۱۳۸۳ فرد است بنابراین هر دو عدد i و j فرد هستند. تعداد خانه های سیاه در سطری i گانه برابر $j - 2005$ و در سایر سطرها برابر j می باشد، بنابراین تعداد خانه های سیاه برابر است با:

$$x = i \times (2005 - j) + (2005 - i) \times j = 2005(i + j) - 2ij$$

حداقل مقدار x به ازای $i = j = 1$ برابر با ۴۰۰۸ و حداکثر مقدار x به ازای $i = j = 1383$ برابر ۱,۷۲۰,۴۵۲ می آید که در بین گزینه ها فقط عدد موجود در گزینه «ج» در این محدوده است.

۲۹. حرکت بر روی سه نردبان از سمت راست به چپ را به ترتیب با a ، b و c نمایش می دهیم. هدف مسأله نوشتن دنباله ای ۷ حرفی با استفاده از سه حرف a ، b و c می باشد به طوری که شروع دنباله با حرف a و نیز هیچ a و c ای مجاور نباشند.

اگر تعداد دنباله های موجود در مرحله i ام را برابر x_i در نظر بگیریم به طوری که a_i تا از آنها ختم به a ، b_i تا از آنها ختم به b و بالاخره c_i تا از آنها ختم به c باشند، آنگاه در مرحله بعدی به ازای هر دنباله ای که به b ختم می شود، ۳ دنباله جدید و نیز به ازای هر دنباله ای که به a و یا c ختم می شود ۲ دنباله جدید می توان نوشت، بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} a_{i+1} = a_i + b_i \\ c_{i+1} = c_i + b_i \\ b_{i+1} = a_i + b_i + c_i \end{array} \right\} \Rightarrow x_{i+1} = 2(a_i + b_i + c_i) + b_i = 2x_i + b_i$$

جدول a_i ، b_i ، c_i و x_i به ازای i از ۱ تا ۸ در جدول زیر آمده است:

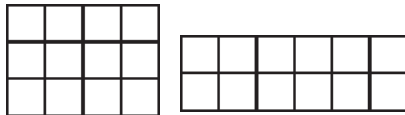
i	a_i	b_i	c_i	x_i
۱	۱	۰	۰	۱
۲	۱	۱	۰	۲
۳	۲	۲	۱	۵
۴	۴	۵	۳	۱۲
۵	۹	۱۲	۸	۲۹
۶	۲۱	۲۹	۲۰	۷۰
۷	۵۰	۷۰	۴۹	۱۶۹
۸	۱۲۰	۱۶۹	۱۱۹	۴۰۸

۳۰. ابتدا یک عدد فیوز می بندیم که اگر نسوزد معلوم می شود کلید مورد نظر متصل به یکی از لامپ های خاموش می باشد. با عوض کردن وضعیت کلید لامپ های خاموش به صورت متوالی، به محض سوختن فیوز می فهمیم که کلید مورد نظر آخرین کلیدی است که وضعیت آن را تغییر داده ایم. و اما اگر فیوز بسته شده بسوزد می فهمیم که کلید مطلوب به یکی از لامپ های روشن متصل است، در این حالت کل لامپ ها

را به دو دسته ۱۶ تایی تقسیم می کنیم و وضعیت کلید تمام ۱۶ لامپ دسته اول را تغییر داده و فیوز دوم را می بندیم که باز اگر فیوز بسوزد متوجه می شویم که کلید مطلوب در دسته ۱۶ تایی دوم قرار دارد و اگر فیوز دوم نسوزد می فهمیم که آن کلید در دسته ۱۶ تایی اول قرار دارد.

اگر به همین ترتیب دسته شناسایی شده را به دو دسته ۸ تایی و سپس ۴ تایی، ... تقسیم کنیم به جواب مورد نظر خواهیم رسید.

۳۱. باید توجه داشت که تعداد خانه های شبکه مورد نظر هم مضرب ۴ است و هم مضرب ۶. بنابراین



تعداد خانه های آن شبکه مضرب ۱۲ (ک.م.م دو عدد

۴ و ۶) است. شبکه ۱۲ خانه ای به یکی از دو صورت

مقابل می باشد که قابل پوشش با موزائیک داده شده

نمی باشند ولی شبکه ۲۴ خانه ای را که از قرار دادن ۴ مستطیل 3×2 به شکل زیر به دست می آید، قابل



پوشش می باشد:

۳۲. کوچکترین عدد داده شده برابر با ۴ می باشد. با ۴ بار وارون کردن به شکل مقابل می توان به دنباله

صعودی رسید:

۳, ۱, ۴, ۵, ۲

۵, ۴, ۱, ۳, ۲

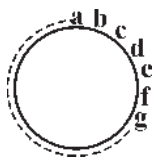
۲, ۳, ۱, ۴, ۵

۳, ۲, ۱, ۴, ۵

۱, ۲, ۳, ۴, ۵

۳۳. اگر n فرد باشد، آنگاه سه مکعب با ابعاد ۱، ۱ و n به صورت عمودی، طولی و عرضی در وسط مکعب وجود دارد که قرینه آن مکعب ها نسبت مرکز اصلی مکعب خود آن مکعب ها می شود. در بقیه حالت ها قرینه هر مکعب با ابعاد ۱، ۱ و n مکعب دیگری با همین ابعاد می شود. بنابراین اگر n زوج باشد، بازیکن دوم برنده می شود به این صورت که بازیکن اول هر حرکتی را انجام دهد او قرینه همان حرکت نسبت به

مرکز اصلی مکعب را انجام می دهد و اگر n فرد باشد، بازیکن اول برنده می شود به این صورت که در ابتدا یکی از سه مکعب با ابعاد ۱، ۱ و n که از مرکز مکعب می گذرد را بر می دارد و سپس بازیکن دوم هر حرکتی را انجام دهد بازیکن اول قرینه حرکت او نسبت به مرکز مکعب را انجام می دهد. بنابراین به ازای n های فرد بازیکن اول و به ازای n های زوج بازیکن دوم برنده می شود.



۳۴. الف) $n = 51$ و $k = 4$ اگر هیچ یک از افراد راستگو نباشند و همه افراد دروغگو باشند، آنگاه جمله مورد نظر در مورد همه افراد مصداق پیدا می کند.

اگر فردی مانند d راستگو باشد، آنگاه برای آنکه جمله داده شده مصداق داشته

باشد باید هر چهار نفر b, c, e و f دروغگو باشند که در این صورت نیز برای آنکه جمله مورد نظر در مورد دروغگوها مانند e مصداق داشته باشد، باید g راستگو باشد. بنابراین در این حالت از هر سه نفر متوالی دو نفر دروغگو و یک نفر راستگوست (یعنی به صورت ... ر د ر د ر د ...) و تعداد جای گشت ها در این مورد برابر ۳ است. با توجه به حالت بندی فوق در این قسمت r برابر ۴ به دست می آید که در صورت مسأله نیز ۴ داده شده است.

ب) $n = 50$ و $k = 0$. اگر همه 50 نفر راستگو باشند این حالت اتفاق می افتد بنابراین در این قسمت مقدار r برابر ۱ در می آید در حالی که برابر ۰ داده شده است.

ج) $n = 51$ و $k = 5$. معلوم است که این حالت هرگز اتفاق نخواهد افتاد زیرا اگر حتی یک نفر راستگو در بین افراد باشد جمله داده شده در مورد او مصداق نخواهد داشت و اگر همه دروغگو باشند نیز جمله یاد شده در مورد آنها مصداق نخواهد داشت. بنابراین در این قسمت مقدار r برابر ۰ می شود در حالی که در صورت مسأله این عدد برابر ۱ داده شده است.

د) $n = 50$ و $k = 1$. تنها حالت ممکن آن است که همه دروغگو باشند، بنابراین $r = 1$ در حالی که در صورت مسأله r برابر ۶ داده شده است.

ه) $n = 52$ و $k = 1$. در این قسمت نیز تنها حالت ممکن آن است که همه دروغگو باشند، بنابراین $r = 1$ و در حالی که در صورت مسأله r برابر ۶ داده شده است.

۳۵. اولاً معلوم می شود که کارت شماره i نمی تواند در کیسه $i + 1$ یا به بعد باشد زیرا در این صورت

کارت های $i+1$ و بزرگتر نیز در هیچ یک از کیسه های i و قبل از i قرار نخواهد گرفت که در چنین صورتی کیسه ای از کیسه های از 1 تا i خالی می ماند. به همین دلیل کارت شماره i در کیسه های $3-i$ و به قبل نیز نمی تواند باشد. بنابراین کارت شماره 13 در یکی از کیسه های $11, 12$ و یا 13 قرار دارد. ابتدا کیسه 12 را نگاه می کنیم که اگر کارت 13 در آن بود، آن کارت پیدا شده است و اگر کارت 12 در آن بود آنگاه کارت 13 در کیسه 13 قرار دارد و اگر کارت 14 در آن باشد آنگاه کارت 13 در کیسه 11 قرار خواهد داشت.

۳۶. اگر اعداد $a \leq b \leq c \leq d$ مفروض باشند معلوم است بعد از سه مرحله به یک عدد خواهیم رسید که در بین همه ترکیب های قابل ساخت، ترکیب $2a + 4b + 8d + 8c$ از همه بزرگتر است (در عدد حاصل ابتدا دو عدد d و c با هم ترکیب شده اند و سپس عدد حاصل با b و در نهایت عدد جدید با a ترکیب شده اند). بنابراین الگوریتم مناسب برای ساختن بزرگترین عدد ممکن به شکل زیر می باشد:

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \longrightarrow 1, 1, 1, 1, 1, 4 \longrightarrow 1, 1, 1, 1, 10 \longrightarrow 1, 1, 1, 22 \\ \longrightarrow 1, 1, 46 \longrightarrow 1, 94 \longrightarrow 190$$

۳۷. باقی مانده اعداد داده شده بر 7 از چپ به راست به ترتیب برابر $0, 0, 2, 4, 5$ و 4 می باشد. اگر ماشین ها را از چپ به راست به ترتیب با a, b, c, d, e, f, g نام گذاری کنیم آنگاه باید a قبل از b, c قبل از d و بالاخره g بعد از دو ماشین f و e به پارکینگ وارد شوند که تعداد جای گشت های مورد نظر با شرط فوق برابر $\frac{7!}{3 \times 3 \times 3}$ یعنی 420 به دست می آید.

۳۸. توصیه نامه های چهار استاد را به ترتیب با t, g, a, z نام گذاری می کنیم، بنابراین 9 عدد $g, 8$ عدد $t, 7$ عدد z و 6 عدد a وجود دارد که قرار است با آنها 10 سری 3 تایی بسازیم. تعداد g ها 9 تا می باشد. بنابراین فقط یکی از 3 تایی ها g ندارد که آن 3 تایی به شکل tja می باشد. فقط دو سری از 3 تایی ها t ندارند که آن 3 تایی ها به شکل gza می باشند. فقط سه سری از 3 تایی ها z ندارند که آن 3 تایی ها به شکل gta می باشند و بالاخره فقط چهار سری از 3 تایی ها a ندارند که آن 3 تایی ها به شکل gtz می باشند. تعداد جای گشت های 10 سری به دست آمده (که 4 تا از آنها با هم، 3 تا از آنها با هم و بالاخره 2 تا از آنها نیز با هم مشابه هستند) برابر $\frac{10!}{4! \times 3! \times 2! \times 1!}$ یعنی 12600 می باشد.

۳۹. در کل شبکه سه نوع صفحه وجود دارد: صفحات افقی، صفحات عمودی از نوع ۱، صفحات عمودی از نوع ۲.

خط مورد نظر به ازای هر تلاقی با یکی از صفحات مورد اشاره، وارد یک مکعب جدید می شود. از طرف دیگر چون بزرگترین مقسوم علیه مشترک دوه دوی اعداد ۱۰، ۹ و ۷ برابر ۱ می باشد، بنابراین خط مورد نظر هیچ دو صفحه ای را مشترکاً در یک نقطه قطع نمی کند. تعداد صفحات افقی، عمودی از نوع ۱ و عمودی از نوع ۲ (بدون احتساب صفحات اول و آخر) به ترتیب برابر ۹، ۸ و ۶ می باشد که مجموعاً ۲۳ صفحه می شود و خط مورد نظر هر یک از آن ۲۳ صفحه را دقیقاً در یک نقطه قطع می کند که با نقطه شروع مجموعاً ۲۴ نقطه می شوند (از بین دو نقطه شروع و پایان باید یکی از آن دو را شمرد). چون تعداد مکعب های مورد نظر با تعداد نقاط تلاقی برابر است، بنابراین جواب مورد نظر ۲۴ می شود.

$$\sum_{i=0}^{13} x_i 2^i = \sum_{i=0}^{13} (1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 - 1 \times 2^3 - 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 - 1 \times 2^0) \times 2^{6i} \quad ۴۰$$

$$= \sum_{i=0}^{13} (1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0) \times 2^{6i}$$

$$= (1001001, 1001001, \dots, 1001001)_2$$

عدد حاصل که از ۱۴ سری متوالی از «۱۰۰۱۰۱» تشکیل شده است دارای ۴۲ عدد «۰» می باشد.

مرحله ی اول چهاردهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱) در استانی ۱۰ شهر و ۴۰ جاده بین تعدادی از شهرها وجود دارد (هر جاده دو شهر را به هم وصل می کند). یک شهر «مرکز» نامیده می شود اگر مستقیماً به همه ی شهرها وصل باشد. در این استان حداکثر چندتا «مرکز» می توان داشت؟

- الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

(۲) در یک جدول نامتناهی دو نفر با نام های X و O با هم یک بازی $X-O$ انجام می دهند. اول X بازی می کند. او یک x در یک خانه ی جدول می نویسد. سپس O یک o در یک خانه ی دلخواه دیگری می نویسد و این کار تکرار می شود. X برنده است اگر موفق شود ۳ تا x در یک ستون یا در یک سطر پشت سرهم ردیف کند. به همین ترتیب، O برنده است اگر ۳ تا o را بتواند در یک سطر یا در یک ستون پشت سرهم بنویسد. می دانیم که X می تواند طوری بازی کند که برنده شود. اگر O بهترین بازی خود را انجام دهد، X چند حرکت نیاز دارد تا حتماً برنده شود؟

- الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۷

(۳) برای کدام یک از مقادیر n می توان اعداد ۱ تا n را به دو دسته تقسیم کرد که مجموع اعداد هر دسته برابر باشد؟

- الف) ۲۰۰۳ (ب) ۲۰۰۲ (ج) ۱۳۸۲ (د) ۱۰ (ه) ۹

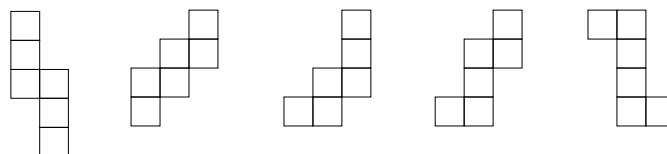
(۴) یک گروه «انسان نما» شامل ۵ میمون است که بین هر دو میمون رابطه ی «دوستی» یا «دشمنی» برقرار است. این رابطه دوطرفه است، یعنی اگر a با b دوست (یا دشمن) باشد، b هم با a دوست (یا دشمن) است. هم چنین می دانیم که دوست دوست یک میمون و نیز دشمن دشمن او حتماً دوست اوست. چند گروه انسان نمای مختلف موجود است؟ توجه کنید که میمون های این گروه از هم متفاوت نیستند!

- الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۸

(۵) ۱۰ نفر با نام های a_1 تا a_{10} داریم که هر کدام یا راست گوشت و یا دروغ گو. راست گو همیشه راست و دروغ گو همیشه دروغ می گوید. به چند طریق می توان دروغ گو یا راست گو بودن a_1 تا a_{10} را تعیین کرد به طوری که هر نفر بتواند این جمله را بگوید که «از ۹ نفر دیگر، دقیقاً ۳ نفر راست گو و بقیه دروغ گو هستند.»

- الف) ۱ (ب) ۱۰ (ج) ۱۲۰ (د) ۱۲۱ (ه) ۲۱۱

(۶) چه تعداد از این شکل ها را می توان با تا کردن از روی خطوط به یک مکعب واحد تبدیل کرد؟



- الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۵

مرحله ی اول چهاردهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۷) اگر بتوانیم اعداد ۱، ۲، ... و k را طوری با هم جمع و تفریق کنیم که حاصل بر ۱۱ بخش پذیر شود، می گوییم k عددی «خوب» است. برای مثال اعداد ۵ و ۳ هر دو عدد خوب هستند، زیرا $۱ + ۲ - ۳ = ۰$ و $۱۱ = ۱ - ۲ + ۳ + ۴ + ۵$. کدام یک از گزینه های زیر در مورد اعداد خوب درست است؟

(الف) همه ی اعداد فرد بزرگ تر از ۱۰ خوب هستند.

(ب) همه ی اعداد خوب بزرگ تر از ۱۰ فرد هستند.

(ج) همه ی اعداد زوج بزرگ تر از ۱۰ خوب هستند.

(د) از هر ۵ عدد متوالی بزرگ تر از ۱۰ حداکثر ۳ تا خوب هستند.

(ه) گزینه های الف و ج هر دو صحیح هستند.

(۸) ۲۰۰۴ خانه ی خالی با شماره های ۱ تا ۲۰۰۴ به ترتیب و در جهت ساعت گرد دور دایره ای قرار دارند. در خانه ی شماره ی ۱، یک مهره قرار می دهیم. امین و شایان شروع به بازی می کنند. در ابتدا امین مهره را یک خانه به جلو می برد و در خانه ی شماره ی ۲ قرار می دهد. از این به بعد، هر نفر در نوبت خود مهره را در جهت ساعت گرد تعدادی خانه به جلو می برد، به این ترتیب که اگر یک نفر در نوبت خود مهره را i خانه به جلو حرکت دهد، نفر بعد باید مهره را $i + ۱$ یا i خانه به جلو حرکت دهد. اگر کسی مهره را وارد خانه ی ۱۳۸۲ ام کند بازی را می برد. دقت کنید که ممکن است مهره از روی خانه ی ۱۳۸۲ بپرد (در این صورت بازی ادامه می یابد). کدام گزینه صحیح است؟

(الف) شایان می تواند طوری بازی کند که ببرد.

(ب) امین می تواند طوری بازی کند که ببرد.

(ج) امین می تواند طوری بازی کند که نبازد.

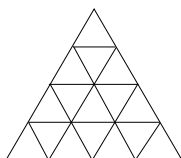
(د) شایان می تواند طوری بازی کند که نبازد.

(ه) گزینه های ج و د صحیح اند.

(۹) برای دو عدد صحیح a و b ، مقدار $x = a \oplus b$ را به این صورت به دست می آوریم: ابتدا a و b را به مبنای ۲ می بریم و این دو عدد دودویی را طوری زیر هم می نویسیم که ارقام هم ارزش آنها زیر هم قرار گیرند. حال برای هر دو رقمی که زیر هم نوشته شده اند، اگر آن دو رقم برابر بودند زیر آنها ۰ و اگر برابر نبودند زیر آنها ۱ می نویسیم. به این ترتیب عدد x (در مبنای ۲) در زیر دو عدد a و b به دست می آید. اگر کمی دقت کنید متوجه می شوید که $a \oplus b = b \oplus a$ و نیز $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus b \oplus c$. مثلاً بر روی اعداد ۲۵۶، ۲۴۰، ۲۰۴ و ۱۷۰ برابر ۴۰۶ است، چون $۱۱۰۰۱۰۱۱۰ = ۱۰۱۰۱۰۱۰ \oplus ۱۱۰۰۱۱۰۰ \oplus ۱۱۱۱۰۰۰۰ \oplus ۱۰۰۰۰۰۰۰$.

مقدار $\oplus$ بر روی اعداد ۱۳۸۲، ۱۳۸۳، ...، ۲۰۰۳، ۲۰۰۴ کدام است؟

(الف) ۳۱۱ (ب) ۶۰۹ (ج) ۱۰۲۴ (د) ۱۳۸۱ (ه) ۲۰۰۵



(۱۰) به چند طریق می توان در ۱۶ مثلث شکل روبرو، اعداد ۰ یا ۱ نوشت، به طوری که مجموع اعداد موجود در مثلث های مجاور هر مثلث، فرد شود، و به چند طریق می توان همین کار را کرد که مجموع اعداد موجود در مثلث های مجاور هر مثلث، زوج شود؟ (دو مثلث مجاورند اگر در یک ضلع مشترک باشند). پاسخ های این دو سؤال به ترتیب کدامند؟

(الف) ۱ و ۱۶ (ب) ۱۶ و ۱ (ج) ۱۶ و ۱۶ (د) ۰ و ۱۶ (ه) ۰ و ۱۲۸

مرحله ی اول چهاردهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱	۶	۳
۸	۹	۷
۴	۵	۲

(۱۱) هادی و کاوه مشغول بازی هستند. بازی به این صورت است که هر نفر در نوبت خود یکی از اعداد ۱ تا ۹ را که تا کنون نوشته نشده در یکی از خانه های خالی جدول می نویسد. این کار ادامه می یابد تا جدول پر شود. در انتها، ۴ عدد که حاصل ضرب های ۳ عدد سطر وسط، ۳ عدد ستون وسط و ۳ عدد روی هر قطر مربع هستند را حساب می کنند و این ۴ حاصل ضرب را با هم جمع می کنند. کاوه می خواهد این مجموع را زیاد و هادی می خواهد این مجموع را کم کند. برای مثال این مجموع برای جدول روبرو برابر است با:

$$(۸ \times ۹ \times ۷) + (۶ \times ۹ \times ۵) + (۱ \times ۹ \times ۲) + (۴ \times ۹ \times ۳) = ۵۰۴ + ۲۷۰ + ۱۸ + ۱۰۸ = ۹۰۰$$

فرض کنید هادی و کاوه هر دو به بهترین نحو ممکن بازی می کنند و کاوه شروع کننده ی بازی است. کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

- (الف) مجموع نهایی بین ۲۰۰ تا ۴۰۰ است. (ب) مجموع نهایی بین ۴۰۱ تا ۶۰۰ است.
(ج) مجموع نهایی بین ۶۰۱ تا ۸۰۰ است. (د) مجموع نهایی بزرگتر از ۸۰۰ است.
(ه) اطلاعات برای تعیین محدوده ی مجموع نهایی کافی نیست.

(۱۲) دو دنباله ی ۱۰ تایی A و B از ارقام ۰ و ۱ داده شده اند. در هر حرکت می توانیم وضعیت ارقام A را از سمت چپ تا جای دلخواهی عوض کنیم (یعنی هر رقم ۱ را به ۰ و هر رقم ۰ را به ۱ تبدیل کنیم). اگر $A = ۱۰۱۱۱۰۰۱۰۰$ و $B = ۰۰۱۱۰۱۰۰۱۰$ باشد، حداقل چند حرکت لازم است تا A به B تبدیل شود؟

- (الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۱۰ (د) ۱۱
(ه) نمی توان از A به B رسید.

(۱۳) می خواهیم k اسب شطرنج با شماره های ۱ تا k را طوری در صفحه ی ۵×۵ قرار دهیم تا بتوان اسب ها را به ترتیب شماره هایشان یک بار حرکت داد به طوری که در هیچ زمانی در یک خانه دو اسب قرار نگیرد. یک حرکت اسب به صورت L یعنی حرکت به ۲ خانه عمودی (یا افقی) بعدی و سپس یک خانه در جهت افقی (یا عمودی) است. بیشینه ی مقدار k چند است؟

- (الف) ۱۲ (ب) ۱۳ (ج) ۲۰ (د) ۲۲ (ه) ۲۴

(۱۴) به ازای کدام یک از مقادیر n که در گزینه ها آمده است، نمی توان اعداد ۱ تا n را در یک ردیف طوری قرار داد که: هر عدد دقیقاً یک بار آمده باشد، و اگر اختلاف هر دو عدد متوالی را بنویسیم تمام اعداد ۱ تا $n-1$ نوشته شده باشند؟

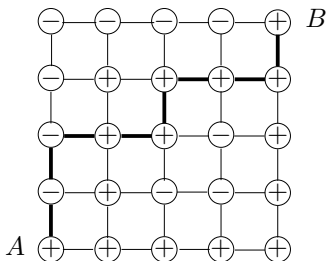
- (الف) ۲۰ (ب) ۳۲ (ج) ۳۷ (د) ۴۸
(ه) به ازای همه ی مقادیر n این کار ممکن است.

(۱۵) عدد یک جای گشت عبارت است از تعداد جفت عددهای متوالی که هر دو عدد آن فرد باشند منهای تعداد جفت عددهای متوالی که هر دو عدد آن زوج باشند. برای مثال عدد جای گشت ۲۴۱۳۵۶ برابر $۱ = ۲ - ۱$ است. بیشینه ی اعداد جای گشت های ۱ تا ۲۰ چیست؟

- (الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۹ (د) ۱۰ (ه) ۱۹

مرحله ی اول چهاردهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۶) فردی در نقطه ی $(2, 3)$ جدول مختصات قرار دارد. او در هر حرکت اگر در نقطه ی (i, j) باشد، می تواند به یکی از نقطه های $(i + i \times j, j)$ ، $(i - i \times j, j)$ ، $(i, j + i \times j)$ یا $(i, j - i \times j)$ برود. با تکرار این حرکت ها، این فرد به کدام یک از نقطه های زیر می تواند برسد؟

(ج) $(-18, 15400)$ (ب) $(1535, -25301)$ (الف) $(-256, 9002)$ (ه) $(-1701, 256)$ (د) $(32, -9207)$ 

۱۷) در شکل مقابل، چند مسیر مختلف به طول ۸ از A به B داریم که تعداد زوجی علامت - داشته باشد؟ یکی از این مسیرها در شکل نشان داده شده است.

(ه) ۶۴

(د) ۳۵

(ج) ۳۳

(ب) ۳۲

(الف) ۱۶

۱۸) ۵۰ سکه ی ۱ تومانی و یک دستگاه داریم. هر بار می توان دو سکه ی a و b تومانی را وارد دستگاه کرد و یک سکه ی $a + b$ تومانی دریافت نمود. می دانیم که برای هر عدد طبیعی سکه وجود دارد. حداقل چند بار از این دستگاه استفاده کنیم تا ۵۰ سکه ی ۱ تومانی اولیه به یک سکه ی ۵۰ تومانی تبدیل شود؟

(ه) ۴۹

(د) ۴۸

(ج) ۴۷

(ب) ۴۶

(الف) ۴۵

۱۹) همان سؤال قبلی را با این فرض که در ابتدا ۴۰ سکه ی ۱ تومانی در اختیار داریم در نظر بگیرید. برای تبدیل این سکه ها به یک سکه ی ۴۰ تومانی حداقل چند نوع سکه ی مختلف تولید می شود؟ برای مثال، برای تولید یک سکه ی ۸ تومانی ۴ نوع سکه ی مختلف ۱، ۲، ۴ و ۸ تومانی تولید می شود.

(ه) ۱۱

(د) ۱۰

(ج) ۹

(ب) ۸

(الف) ۷

۲۰) ۱۳۸۲ وزنه ی یک شکل و با وزن های متمایز داریم که وزن هر کدام توانی از ۲ است. یک ترازوی دوکفه ای در اختیار داریم. در هر بار «توزین» می توانیم تعدادی از وزنه ها را در یک کفه و بقیه ی وزنه ها را در کفه ی دیگر قرار دهیم (همه ی وزنه ها باید در دو کفه ی ترازو قرار گیرند) و مجموع وزن وزنه های موجود در دو کفه را با هم مقایسه کرد. با حداقل چند بار توزین می توان سنگین ترین وزنه را پیدا کرد؟

(ه) این کار ممکن نیست.

(د) ۱۳۸۱

(ج) ۶۹۱

(ب) ۲۲

(الف) ۱۱

۲۱) در سؤال قبل، سبک ترین وزنه را حداقل با چند بار توزین می توان پیدا کرد؟

(ه) این کار ممکن نیست.

(د) ۱۳۸۱

(ج) ۶۹۱

(ب) ۲۲

(الف) ۱۱

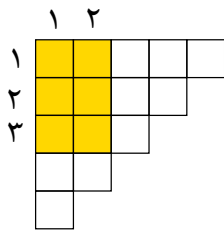
مرحله ی اول چهاردهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۲) جدول مختصات را در نظر بگیرید. در ثانیه ی صفر همه ی نقطه های آن سفیدند به غیر از نقطه ی $(1, 0)$ که سیاه است. می دانیم که اگر در ثانیه ی t نقطه ی (i, j) سیاه و اختلاف i و j برابر k باشد، در ثانیه ی $t + 1$ علاوه بر نقطه ی (i, j) ، نقطه های $(i + k, j)$ ، $(i - k, j)$ ، $(i, j + k)$ و $(i, j - k)$ نیز سیاه خواهند شد. در پایان ثانیه ی ۶ چند خانه ی سیاه در جدول موجود است؟

الف) ۱۳۹ (ب) ۱۵۶ (ج) ۱۹۱ (د) ۲۵۳ (ه) ۵۴۶۱

(۲۳) یک جدول 5×5 داریم که آن را به صورت شطرنجی سیاه و سفید کرده ایم به طوری که گوشه های جدول سیاه اند. ابتدا در خانه ی سطر ۱ و ستون ۱ (خانه ی بالا و سمت چپ) قرار داریم. در هر مرحله اگر در خانه ی سیاه هستیم یک خانه به پایین و اگر در خانه ی سفید هستیم، یک خانه به راست می رویم. دقت کنید که اگر به انتهای سطریا ستون برسیم از طرف دیگر وارد می شویم. بعد از ۱۳۸۲ مرحله در کدام خانه هستیم؟

الف) سطر ۱ و ستون ۱ (ب) سطر ۲ و ستون ۲ (ج) سطر ۱ و ستون ۵
د) سطر ۵ و ستون ۴ (ه) سطر ۴ و ستون ۵



(۲۴) پشت هر یک از خانه های جدول روبرو یک عدد نوشته شده است. این اعداد دیده نمی شوند. می خواهیم با کم ترین تعداد پرسش مجموع همه ی اعداد این جدول را بیابیم. در هر پرسش یک خانه ی x را مشخص می کنیم. در پاسخ، مجموع اعداد موجود در مستطیلی که خانه ی $(1, 1)$ ، گوشه ی بالا و سمت چپ و خانه ی x گوشه ی پایین و سمت راست آن است گزارش می شود. مثلاً مستطیل مربوط به خانه ی $(3, 2)$ در شکل مقابل نشان داده شده است. کمینه ی تعداد پرسش های لازم چند تا است؟

الف) ۵ (ب) ۹ (ج) ۱۰ (د) ۱۴ (ه) ۱۵

(۲۵) می دانیم که عدد n ام فیبوناچی، یا F_n به این صورت تعریف می شود: $F_0 = 0$ ، $F_1 = 1$ و $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ برای $n \geq 2$. برای چه تعداد $0 \leq n \leq 100$ عدد F_n بر ۱۳ بخش پذیر است؟

الف) ۹ (ب) ۱۱ (ج) ۱۳ (د) ۱۵ (ه) ۱۷

(۲۶) در یک کشور با واحد پول «تورو» دو نوع سکه ی پول خرد وجود دارد: ۱ توروپی و x توروپی. مقدار x چه قدر باشد تا اگر همه ی مبالغ ۱ تورو تا ۱۰۲۴ تورو را به سکه های پول خرد تبدیل کنیم، مجموع تعداد سکه های حاصل کمینه شود؟ فرض می کنیم که در هر خرد کردن کم ترین تعداد سکه را به دست می آوریم.

الف) ۲ (ب) ۱۰ (ج) ۳۲ (د) ۱۲۸ (ه) ۵۱۲

(۲۷) فرض کنید که $p(i)$ حاصل ضرب ارقام غیر صفر عدد صحیح دهدهی i است. مثلاً، $p(205) = 10$. مقدار $p(1) + p(2) + \dots + p(998) + p(999)$ چه قدر است؟

الف) $45^3 - 1$ (ب) $45^3 - 45^2$ (ج) 45×46^2 (د) $46^3 - 1$ (ه) 46×45^2

مرحله ی اول چهاردهمین المپیاد کامپیوتر کشور

- (۱, ۲) ۲۸) ۸۲ کارت به ترتیب بر روی هم قرار دارند. بر روی این کارت ها اعداد دلخواه ولی متمایزی نوشته شده اند. یک نفر دنباله ای از دستورهای (i, j) را به ترتیب بر روی این کارت ها اجرا می کند. دستور (i, j) یعنی این که اگر عدد نوشته شده بر روی کارت i ام (از بالا) از عدد نوشته شده بر روی کارت j ام بیش تر باشد، این دو کارت جا به جا شوند.
- (۲, ۳) توجه کنید که این کار تغییری در ترتیب کارت های دیگر ایجاد نمی کند. دستورهای مقابل را
- (۱, ۲) یک بار از ابتدا تا انتها به ترتیب بر روی کارت های ورودی اجرا کنیم. کدام یک از گزینه های زیر
- (۳, ۴) بهترین جواب برای وضعیت نهایی کارت هاست؟
- (۲, ۳)
- (۴, ۵)
- (۳, ۴)
- (۵, ۶)
- (۴, ۵)

- الف) کارت ها بر حسب عددشان از بالا به پایین به صورت صعودی مرتب می شوند.
- ب) کارت با بزرگ ترین عدد، پایین ترین کارت خواهد شد.
- ج) کارت با بزرگ ترین عدد در پایین و کارت با دومین بزرگ ترین عدد درست بالای آن خواهد بود.
- د) کارت با کوچک ترین عدد اولین کارت خواهد شد.
- ه) کارت با کوچک ترین عدد اولین کارت و کارت با دومین کوچک ترین عدد کارت دوم خواهد بود.

- ۲۹) سه دسته کارت به ترتیب با a, b و c عدد کارت یک شکل داده شده اند. این وضعیت را با (a, b, c) نمایش می دهیم. هر بار می توانیم سه عدد کارت از یک دسته برداریم، یکی از آن ها را دور بریزیم و از دو تای دیگر یک کارت به هر کدام از دو دسته ی دیگر اضافه کنیم. این کار را تا وقتی که ممکن است تکرار می کنیم. مثلاً از ترکیب $(۳, ۱, ۴)$ می توانیم به صورت زیر به $(۰, ۲, ۱)$ برسیم.

$$(۳, ۱, ۴) \Rightarrow (۰, ۲, ۵) \Rightarrow (۱, ۳, ۲) \Rightarrow (۲, ۰, ۳) \Rightarrow (۳, ۱, ۰) \Rightarrow (۰, ۲, ۱)$$

اگر از $(۵, ۵, ۶)$ شروع کنیم، کدام یک از گزینه های زیر می تواند ترکیب نهایی باشد؟

- الف) $(۰, ۰, ۰)$ ب) $(۲, ۱, ۰)$ ج) $(۲, ۲, ۰)$ د) $(۱, ۱, ۲)$ ه) $(۱, ۱, ۰)$

- ۳۰) می دانیم که با ۸ رقم دودویی می توان اعداد ۰ تا ۲۵۵ را نمایش داد. یعنی اگر عدد دودویی $(a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0)_2$ باشد مقدار آن برابر $a_7 128a_6 + 64a_5 + 32a_4 + 16a_3 + 8a_2 + 4a_1 + 2a_0 + a_0$ است. اگر رقم a_4 (یعنی رقم با ارزش 2^4) به جای ۰ و ۱، دو مقدار ۱- و ۱ را اختیار کند، تعداد کل اعداد متمایز قابل نمایش با این ۸ رقم دودویی چند تا است؟

- الف) ۱۲۸ ب) ۱۴۴ ج) ۱۹۶ د) ۲۵۶ ه) ۲۷۲

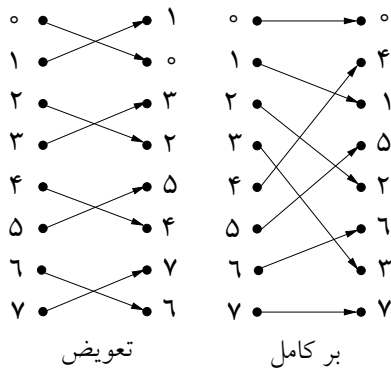
- ۳۱) به چند حالت می توان یک جدول 3×3 را با اعداد ۰ و ۱ پر کرد که تعداد ۱ های موجود در همسایه های هر خانه، فرد باشد. دو خانه همسایه ی یکدیگرند اگر در یک ضلع یا یک گوشه مشترک باشند. پس تعداد همسایه ها حداقل ۳ و حداکثر ۸ تاست. هیچ خانه ای همسایه ی خودش محسوب نمی شود.

- الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۸ ه) ۳۲

- ۳۲) از هر نفر در یک گروه ۱۶ نفره می پرسیم که چند نفر دیگر در گروه وجود دارند که هم قد او هستند. ۱۵ تا از جواب ها این چنین اند: ۶ تا جواب ۱، ۶ تا جواب ۲، ۳ تا جواب ۳. با فرض آن که همه راست می گویند، جواب نفر ۱۶ ام چیست؟

- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) چنین جواب هایی ممکن نیست.

مرحله ی اول چهاردهمین المپیاد کامپیوتر کشور



۳۳) ۸ کارت بر روی هم قرار دارند. بر روی این کارت ها اعداد ۰ تا ۷ به ترتیب از بالا به پایین نوشته شده است (کارت ۰ روست). دو نوع بُر زدن داریم که در شکل مقابل آمده است. یکی «تعویض» که کارت ها را از رو دو به دو با هم تعویض می کند. دیگری «بُر کامل» است که کارت را از رو به دو دسته ی چهار کارتی تقسیم می کند و به صورت کامل دو دسته را با هم بُر می زند تا یک دسته کارت ۸ تایی به دست آید. ترتیب قرار گرفتن کارت ها پس از یک بُر کامل و نیز یک تعویض در شکل نشان داده شده است. می خواهیم با حداقل تعداد بُر زدن ها (عدد B) کاری کنیم که در نهایت کارت با یک عدد دلخواه به روی دسته کارت بیاید. بیش ترین مقدار B چه قدر است؟

الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۷

۳۴) یک شمارنده ی دودویی سه رقمی به طور معمول اعداد صفر ۰ تا هفت ۷ (۱۱۱) را می شمارد. اگر عدد دودویی شمارنده ۰۲ ($a_2a_1a_0$) باشد، عددی که نشان می دهد برابر $a_2 + 2a_1 + 4a_0$ است. فرض کنید یکی از رقم های این شمارنده خراب شده است و به جای ۰ و ۱، دو مقدار دیگر (مثلاً ۰ و ۲، ۱ و ۳، ۲ و ۳ یا مقادیر دیگر) را اختیار می کند. در نتیجه شمارنده به جای اعداد ۰ تا ۷، به ترتیب اعداد ۰، ۳، ۶، ۷، ۱۰ و ۱۱ را نمایش می دهد. رقم خراب، و دو مقداری که اختیار می کند کدام است؟

الف) رقم a_1 و مقادیر ۱ و ۲ (ب) رقم a_1 و مقادیر ۱ و ۳ (ج) رقم a_0 و مقادیر ۲ و ۳ (د) رقم a_0 و مقادیر ۲ و ۴ (ه) رقم a_2 و مقادیر ۱ و ۲

۳۵) عدد صحیح N و یک چراغ روشن مفروض است. دستورالعمل زیر را به ترتیب یک بار برای $N = ۱۳۸۲$ و یک بار دیگر برای $N = ۲۰۰۴$ اجرا کنید و معین کنید که به ترتیب چند بار در بار اول اجرا ($N = ۱۳۸۲$) و چند بار در بار دوم اجرا ($N = ۲۰۰۴$)، هوپ می گوئید. مثلاً اگر دستورالعمل را به ترتیب برای $N = ۳$ و $N = ۵$ ، اجرا کنید، جواب سؤال ۱ و ۰ (یک هوپ برای $N = ۳$ ، و صفر هوپ برای $N = ۵$) خواهد بود. دستورالعمل:

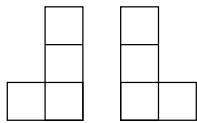
- ۱) چراغ را خاموش کن.
- ۲) اگر $N = ۰$ است، برو به ۷ وگرنه برو به ۳.
- ۳) N را بر ۲ تقسیم کن. خارج قسمت آن را N و باقی مانده را R نام ده. برو به ۴.
- ۴) اگر $R = ۱$ است برو به ۵ وگرنه برو به ۶.
- ۵) اگر چراغ خاموش است آن را روشن کن، وگرنه بگو «هوپ». در هر صورت برو به ۲.
- ۶) اگر چراغ روشن است آن را خاموش کن و برو به ۲.
- ۷) پایان دستورالعمل.

الف) ۲ و ۲ (ب) ۲ و ۴ (ج) ۶ و ۷ (د) ۴ و ۳ (ه) ۴ و ۵

مرحله ی اول چهاردهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۳۶) دو دنباله ی $A = 1, 10, 111, 10$ و $B = 111, 10, 0$ ، هریک شامل ۳ رشته از ۰ و ۱ داده شده اند. با داشتن دنباله ی دل خواه $c = c_1, c_2, \dots, c_n$ (به طوری که $c_i \in \{1, 2, 3\}$ برای هر $1 \leq i \leq n$)، دو رشته ی a و b را به ترتیب از اعضای A و B به شرح زیر می سازیم: فرض کنید منظور از A_i و B_i به ترتیب عضو i ام A و عضو i ام B باشد، آنگاه $a = A_{c_1} A_{c_2} \dots A_{c_n}$ و $b = B_{c_1} B_{c_2} \dots B_{c_n}$. مثلاً اگر $c = 1, 1, 2$ باشد، $a = A_1 A_1 A_2 = 1110111$ و $b = B_1 B_1 B_2 = 11111110$. طول کوتاه ترین دنباله از اعداد ۱، ۲ و ۳ را بیابید به طوری که $a = b$.

الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) ۶

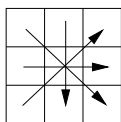


(۳۷) می خواهیم خانه های یک جدول 3×3 را با علامت های + و - پر کنیم به طوری که تعداد علامت های + در هر چهار خانه ای که تشکیل یک شکل L-مانند دهد، زوج باشد. شکل L-مانند شکل های مقابل و یا شکلی است که از دوران آن ها به دست می آید. به چند روش می توان این کار را انجام داد؟

الف) ۴ (ب) ۶ (ج) ۸ (د) ۱۲ (ه) ۱۶

(۳۸) دو سینی داریم که در یکی از آن ها ۱۰ بشقاب روی هم چیده شده و سینی دیگر خالی است. هر بشقاب، یکی از ۵ رنگ را دارد و هر رنگ دقیقاً ۲ بار آمده است. در یک حرکت، می توان هر کدام از بشقاب های سینی اول را برداشت و روی بشقاب های موجود در سینی دوم گذاشت. توجه شود که این بشقاب را فقط روی بشقاب های سینی دوم می توان قرار داد، و نمی توانیم زیر بشقاب دیگری قرار دهیم. هدف این است که بعد از ۵ حرکت، رنگ بشقاب های دو سینی به ترتیب از پایین به بالا دقیقاً یکسان شود. به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

الف) ۳۲ (ب) ۶۴ (ج) ۱۲۰ (د) ۲۵۲ (ه) بستگی به وضعیت ابتدایی دارد.



(۳۹) یک جدول 3×3 از اعداد ۱ تا ۵ موجود است. اگر ارقام موجود در هر یک از سطرها را از چپ به راست، ارقام هریک از ستون ها را از بالا به پایین، و نیز ارقام دو قطر را به صورت شکل مقابل کنار هم بنویسیم، ۸ عدد سه رقمی به دست خواهد آمد. اگر ۱۱۲، ۱۲۱، ۱۲۳، ۱۵۳، ۲۴۳، ۳۱۳، و ۳۲۲ تا ۷ از این اعداد باشند، عدد هشتم کدام است؟

الف) ۵۲۴ (ب) ۴۲۵ (ج) ۲۵۴ (د) ۵۱۴ (ه) ۴۱۵

(۴۰) یک عدد، «آینه ای» است اگر از هر دو طرف راست و چپ یک مقدار خوانده شود؛ مثلاً اعداد ۱۲۲۱ و ۵۹۵ آینه ای هستند ولی ۱۰۱۰ نیست. یک ساعت دیجیتال زمان را با یک عدد شش رقمی $hhmmss$ نشان می دهد که hh نشان دهنده ی ساعت (از ۰۰ تا ۲۳)، mm و ss نشان دهنده ی دقیقه و ثانیه (از ۰۰ تا ۵۹) هستند. ساعت در ابتدای هر شبانه روز ۰۰۰۰۰۰ و در آخرین ثانیه ی آن ۲۳۵۹۵۹ است. عدد نشان داده شده در یک ساعت دیجیتال چند بار در یک شبانه روز آینه ای می شود؟

الف) ۳۶ (ب) ۹۶ (ج) ۱۴۴ (د) ۲۴۰ (ه) ۱۰۰۰

«موفق باشید»

پاسخ تشریحی

چهاردهمین المپیاد کامپیوتر

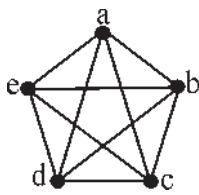
۱. شبکه کامل شبکه‌ای است که در آن هر شهر به تمام شهرهای دیگر وصل باشد. در چنین شبکه‌ای ۴۵ جاده وجود دارد چون از هر شهر ۹ جاده خارج می‌شود که مجموع کل جاده‌های خارج شده از ۱۰ شهر $10 \times 9 = 90$ می‌شود و چون هر جاده برای دو شهر شمارش شده است، تعداد واقعی جاده‌ها برابر $\frac{90}{2} = 45$ یعنی ۴۵ می‌شود (به طریق دیگر چون در شبکه کامل بین هر دو شهری جاده وجود دارد، بنابراین به ازای انتخاب هر دو شهر متمایز یک جاده معرفی خواهد شد، به این معنا که تعداد جاده‌ها برابر $\left[\begin{smallmatrix} 10 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]$ یعنی ۴۵ می‌باشد).

چون در استان داده شده ۴۰ جاده وجود دارد، بنابراین می‌توان تصور کرد که شبکه مورد نظر شبکه‌ای است که از شبکه کامل ۵ جاده برداشته شده باشد. باید آن ۵ جاده را چنان برداریم که تعداد شهرهای با ۹ جاده، ماکزیمم باشد. اگر آن پنج جاده را به صورت مقابل از شبکه برداریم تعداد ۶ شهر به صورت مرکز باقی می‌ماند.

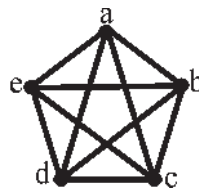


۲. بعد از حرکات اول X و O سطر و یاستونی که در آن x قرار داشته و o قرار ندارد توسط X انتخاب شده و در کنار x قبلی یک x قرار می‌دهد. بعد از قرار داده شدن o در یکی از دو طرف x ها توسط O ، X در حرکت سوم خود x را در طرف دیگر x های قبلی قرار داده و برنده می‌شود.

۳. شرط لازم آن است که مجموع اعداد از ۱ تا n یعنی $\frac{n(n+1)}{2}$ زوج باشد، به عبارت دیگر $n(n+1)$ مضرب ۴ باشد و آن موقعی است که یکی از دو عدد n یا $n+1$ مضرب ۴ باشد. در بین گزینه ها فقط به ازای $n=2003$ حاصل $n(n+1)$ مضرب ۴ می شود.



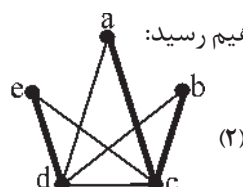
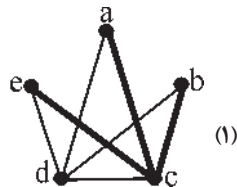
۴. دوستی بین دو میمون را با خط پررنگ و دشمنی بین آنها را با خط کم رنگ نشان می دهیم که به شکل مقابل خواهیم رسید، با این توضیح که قرار است تعدادی از ۱۰ خط کشیده شده پررنگ و مابقی کم رنگ شوند و در ضمن نمی توان در آن شکل مثلث هایی



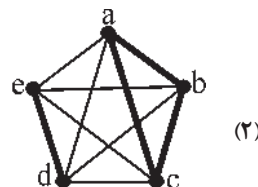
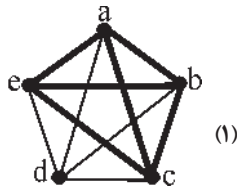
به شکل  و یا  ترسیم کرد.

(I) اگر هر پنج ضلع پنج ضلعی پررنگ باشند، آنگاه تمام قطرهای آن پنج ضلعی نیز پررنگ خواهد شد و به شکل مقابل خواهیم رسید:

(II) اگر ضلعی مانند cd از پنج ضلعی کم رنگ باشد آنگاه دقیقاً یکی از دو ضلع bc و bd و نیز دقیقاً یکی از دو ضلع ac و ad و همچنین دقیقاً یکی از دو ضلع ec و ed کم رنگ خواهند بود. اگر سه ضلع کم رنگ همگی متصل به یک رأس (مانند d) متصل باشند و یا دو تا از آنها به یک رأس و سومی به رأس دیگر وصل باشند به ترتیب به دو شکل «۱» و «۲» خواهیم رسید:



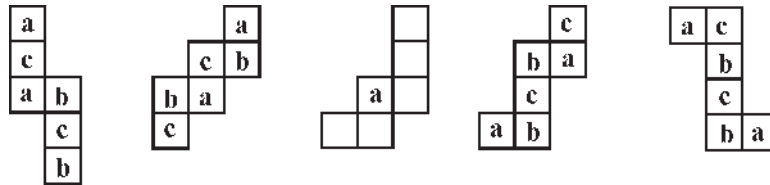
بقیه پاره خط های مربوط به اشکال فوق به صورت منحصر به فرد، به شکل زیر معلوم می شوند:



۵. معلوم است که اگر همه ۱۰ نفر دروغ گو باشند، همه افراد می توانند جمله یاد شده را بیان کنند و نیز اگر ۴ نفر از آن ۱۰ نفر راستگو و ۶ نفر دیگر دروغ گو باشند، همه افراد می توانند جمله مورد نظر را بیان کنند.

تعداد طرق اختصاص ۴ حرف «ر» و ۶ حرف «د» به دنباله از a_1 تا a_4 برابر $\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$ و نیز تعداد طرق اختصاص ۱۰ حرف «د» به آن دنباله برابر $\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ می باشد، بنابراین جواب مورد نظر $\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ یعنی ۲۱۱ می باشد.

۶. همه اشکال به غیر از وسطی، قابل تبدیل هستند. وجوه مقابل را با حروف یکسان نام گذاری می کنیم. در شکل مورد اشاره برای وجهی که با a اسم گذاری شده است، وجه مقابلی یافت نمی شود.

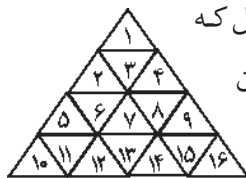


۷. مجموع اعداد از ۱ تا k را t_k نام گذاری می کنیم. بزرگترین عدد مضرب ۱۱ که کوچکتر یا مساوی t باشد را t_1 و عدد مضرب ۱۱ ماقبل t_1 را t_2 می نامیم.

اگر $t - t_1$ زوج باشد آنگاه $\frac{t - t_1}{2}$ عددی صحیح بین ۰ تا ۵ خواهد بود که در این حالت با تبدیل علامت جمع به تفریق در پشت $\frac{t - t_1}{2}$ حاصل آن عبارات به جای t برابر t_1 خواهد شد که به ۱۱ بخش پذیر است، و اگر $t - t_1$ فرد باشد آنگاه $\frac{t - t_1}{2}$ عددی طبیعی بین ۶ تا ۱۰ خواهد شد که در این حالت نیز با تبدیل علامت جمع به تفریق در پشت عدد $\frac{t - t_1}{2}$ حاصل آن عبارات t_1 خواهد شد که باز مضرب ۱۱ است.

۸. فرض کنید بازیکنی در نوبت خود قادر باشد به تعداد k و یا $k + 1$ خانه حرکت کند. اگر با حرکت k خانه او، بازیکن دیگر بتواند برنده شود (معلوم است که در این حالت بازیکن دوم مهره را k و یا $k + 1$ خانه جابه جا کرده است)، آنگاه آن بازیکن به جای k خانه، $k + 1$ خانه مهره را جابه جامی کند و نمی گذارد بازیکن دوم برنده شود زیرا در این حالت بازیکن دوم مهره را $k + 1$ خانه و یا $k + 2$ خانه جابه جامی کند که در هر حال از خانه مورد نظر می گذرد و در آن خانه متوقف نمی شود. و در حالتی که با حرکت $k + 1$ خانه توسط بازیکن اول، بازیکن دوم بتواند برنده شود بازیکن اول حرکت خود را به جای $k + 1$ حرکت به k حرکت تغییر می دهد.

۹. تبدیل یافته تمام اعداد از ۱۰۲۴ تا ۲۰۴۳ در مبنای ۲ عددی ۱۱ رقمی می شوند. بنابراین تبدیل یافته تمام اعداد داده شده در مبنای ۲ عددی ۱۱ رقمی می شود. از طرف دیگر معلوم می شود که رقم i ام عدد حاصل از عمل یاد شده برای اعداد داده شده برابر ۱ است اگر تعداد ۱های موجود در جایگاه i ام کل آن اعداد فرد باشد و در غیر این صورت آن رقم برابر ۰ است. تعداد اعداد داده شده برابر ۶۲۳ است که عددی فرد است، بنابراین در جایگاه یازدهم به تعداد ۶۲۳ رقم ۱ وجود دارد به این معنا که رقم یازدهم از عدد حاصل ۱ است و در نتیجه آن عدد بین ۱۰۲۴ و ۲۰۴۳ می باشد. رقم دهم از اعداد معادل اعداد ۱۰۲۴ تا ۱۵۳۵ در مبنای ۲ برابر ۰ و آن رقم در معادل های اعداد از ۱۵۳۶ تا ۲۰۴۳ برابر ۱ می باشد $(\frac{۱۰۲۴}{۲} + ۱۰۲۳ = ۱۵۳۵)$ ، بنابراین رقم دهم از معادل های اعداد از ۱۳۸۲ تا ۱۵۳۵ (که تعداد آنها زوج است) برابر ۰ و آن رقم در معادل های اعداد از ۱۵۳۶ تا ۲۰۴۳ (که تعداد آنها فرد است) برابر ۱ می باشد و در نتیجه چون در تعداد فردی از ۶۲۳ عدد داده شده رقم دهم برابر ۱ است در عدد حاصل نیز آن رقم ۱ است. عددی که در مبنای ۲ هر دو رقم دهم و یازدهم برابر ۱ باشد، بزرگتر یا مساوی $۵۱۲ + ۱۰۲۴$ می باشد که در بین گزینه ها فقط گزینه آخر در این محدوده می گنجد.



۱۰. مثلث ها را مطابق شکل از ۱ تا ۱۶ نام گذاری می کنیم. در حالت اول که می خواهیم مجموع اعداد موجود در مثلث های مجاور هر مثلثی فرد باشد، چون تنها مثلث مجاور برای مثلث ۱ مثلث ۳ می باشد بنابراین علامت مثلث ۳ برابر «۱» می باشد. از طرف دیگر چون فقط دو خانه ۳ و ۶ مجاور خانه ۲ می باشد بنابراین علامت خانه ۶ برابر «۰» می شود. به همین ترتیب علامت خانه ۸ نیز «۰» می شود. علامت خانه ۱۳ برابر «۱» و علامت خانه های ۱۱ و ۱۵ برابر «۰» می شود که تناقض است. در حالت دوم تمام مثلث های ۳، ۶، ۸، ۱۱، ۱۳ و ۱۵ علامت «۰» را به خود می پذیرند. هر یک از دسته مثلث های سه گانه ۱، ۲ و ۴ و نیز دسته مثلث های سه گانه ۹، ۱۴ و ۱۶ به طور مستقل از یکدیگر به چهار طریق «۰، ۰، ۰» یا «۰، ۱، ۱» یا «۱، ۰، ۱» یا «۱، ۱، ۱» قابل علامت گذاری می باشند و بقیه مثلث ها وابسته به این ها به صورت منحصر به فرد پر می شوند، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر ۴×۴ می باشد.

۱۱. چون خانه وسط در تمام چهار پرانتز تکرار می شود پس برای بیشینه شدن آن حاصل، لازم است آن خانه با عدد ۹ پر شود. اگر ۸ عدد دیگر را به چهار دسته $\{1, 2\}$ ، $\{3, 4\}$ ، $\{5, 6\}$ و $\{7, 8\}$ تقسیم کنیم آنگاه کاوه می تواند در هر مرحله با توجه به عملکرد هادی، در خانه مقابل خانه ای که هادی عدد x را قرار داده است، هم دسته x را قرار دهد که در این صورت عدد به دست آمده برابر ۹۰۰ خواهد شد.

۱۲. اولین رقم از سمت راست A که با معادلش در B متفاوت باشد را i می نامیم. در هر مرحله، از اولین رقم از سمت چپ A شروع کرده و تا رقم i تمام ارقام را تعویض می کنیم که بعد از ۵ مرحله به شکل زیر به دنباله B خواهیم رسید.

$$A_0 = \underline{1011100100} \rightarrow A_1 = \underline{0100011010} \rightarrow A_2 = \underline{1011100010} \rightarrow \\ A_3 = \underline{0100010010} \rightarrow A_4 = \underline{1011010010} \rightarrow A_5 = 0011010010 = B$$

۶	۱۱	۱۶	۲۱	۴
۱۷	۲۲	۵	۱۰	۱۵
۱۲	۷	۲۴	۳	۲۰
۲۳	۱۸	۱	۱۴	۹
	۱۳	۸	۱۹	۲

۱۳. اگر اسب ها را مطابق شکل زیر از ۱ تا ۲۴ شماره گذاری کنیم، بیشینه مقدار k برابر ۲۴ به دست خواهد آمد:

۱۴. اگر اعداد از ۱ تا n را به صورت زیر در یک ردیف بنویسیم همه اعداد از ۱ تا $n-1$ تولید خواهند شد:

$$n, 1, n-1, 2, n-2, 3, \dots$$

۱۵. راه حل اول: در حالتی که اعداد از ۱ تا ۲۰ پشت سر هم نوشته شوند عدد جای گشت مورد نظر برابر $0-0-0$ یعنی ۰ به دست می آید. اگر در همان حال فقط جای دو عدد ۱ و ۲ را با هم عوض کنیم تا به جای گشت ۲۱۳۴۵۶...۱۹۲۰ برسیم عدد مورد نظر برابر $0-1-1$ یعنی ۱ خواهد شد. از این جا به بعد به ازای هر دو عدد فردی که بخواهند در کنار هم قرار بگیرند لاجرم دو عدد زوج نیز پیش هم قرار خواهند گرفت و بنابراین عدد مورد نظر از برابر $x - (x+1)$ یعنی ۱ خواهد شد.

راه حل دوم: دسته ای از اعداد فرد که در کنار هم هستند را O و دسته ای از اعداد زوج که در کنار هم هستند را E می نامیم. معلوم است که اگر در دسته ای m عدد موجود باشد، $m-1$ جفت عدد با زوجیت

یکسان در کنار هم قرار گرفته اند. جای گشت مورد نظر به یکی از چهار شکل زیر می باشد:

$$I) E_1 O_1 E_2 O_2 \dots E_n O_n$$

$$II) E_1 O_1 E_2 O_2 \dots E_n O_n E_{n+1}$$

$$III) O_1 E_1 O_2 E_2 \dots O_n E_n$$

$$IV) O_1 E_1 O_2 E_2 \dots O_n E_n O_{n+1}$$

فرض کنید $|E_i|$ و $|O_i|$ به ترتیب نشانگر تعداد اعداد موجود در هر یک از دسته های E_i و O_i باشد، آنگاه اولاً معلوم است که $\sum |E_i| = \sum |O_i| = 1$ و ثانیاً تعداد جفت عددهای متوالی که هر دو عدد آن از نظر زوجیت یکسان باشد در هر یک از آن دو دسته به ترتیب برابر $|E_i| - 1$ و $|O_i| - 1$ خواهد شد، بنابراین در هر یک از چهار حالت اشاره شده عدد خواسته شده به شکل زیر به دست می آید:

$$I) x_1 = (|O_1| - 1) + (|O_2| - 1) + \dots + (|O_n| - 1) - [(|E_1| - 1) + (|E_2| - 1) + \dots + (|E_n| - 1)] \\ = \sum |O_i| - \sum |E_i| = 0$$

$$II) x_2 = (|O_1| - 1) + (|O_2| - 1) + \dots + (|O_n| - 1) - [(|E_1| - 1) + (|E_2| - 1) + \dots + (|E_{n+1}| - 1)] \\ = \sum |O_i| - \sum |E_i| - 1 = -1$$

$$III) x_3 = x_1 = 0$$

$$IV) x_4 = (|O_1| - 1) + (|O_2| - 1) + \dots + (|O_{n+1}| - 1) - [(|E_1| - 1) + (|E_2| - 1) + \dots + (|E_n| - 1)] \\ = \sum |O_i| - \sum |E_i| + 1 = 1$$

در بین اعداد به دست آمده عدد ۱ از همه بیشتر است.

۱۶. چون یکی از مؤلفه های زوج مرتب داده شده، زوج است پس در هر مرحله به هر مؤلفه مقداری زوج اضافه و یا کم می شود که زوجیت عدد اولیه را تغییر نمی دهد، بنابراین جواب نهایی جوابی است که مؤلفه اولش زوج و مؤلفه دومش فرد باشد که در بین گزینه ها فقط گزینه «د» چنین ویژگی را دارد. البته این شرط، شرط لازم بوده و کافی نیست. در هر مرحله نقطه (m, n) به یکی از نقاط $(m, n(1+m))$ ، $(m, n(1-m))$ ، $(m(1+n), n)$ ، $(m(1-n), n)$ تبدیل می شود به این معنا که یکی از مؤلفه ها ثابت مانده و مؤلفه دیگر در $(1 + \text{مؤلفه ثابت})$ و یا $(\text{مؤلفه ثابت} - 1)$ ضرب می شود. اگر مؤلفه های اولیه غیر مساوی با ۱ باشند، قدر مطلق مؤلفه های نقاط بعدی از قدر مطلق نقاط قبلی بیشتر

می شود. بنابراین نقطه اولیه متناظر به زوج مرتب موجود در گزینه د به شکل زیر به دست می آید:

$$(32, -9207) = (32, -31 \times 33 \times 9) \Rightarrow \text{نقطه قبلی} = (32, 33 \times 9) \text{ یا } (32, -31 \times 9)$$

$$\Rightarrow \text{نقطه قبلی} = (32, 9) = ((-4) \times (-8), 9)$$

$$\Rightarrow \text{نقطه قبلی} = (-4, 9) = (-4, (-3) \times (-3))$$

$$\Rightarrow \text{نقطه قبلی} = (-4, -3) = (-4, (1) \times (-3)) \text{ یا } ((-1) \times 4, -3) \text{ یا } ((-2) \times 2, -3)$$

$$\Rightarrow \text{نقطه قبلی} = (-4, 1)$$

$$\text{یا } (-1, -3)$$

$$\text{یا } (2, -3)$$

معلوم است که هیچ یک از نقاط به دست آمده به نقطه (۲, ۳) نخواهد رسید، بنابراین جواب درست در گزینه های نیامده است.

۱	۲	۸	۱۷	۳۵
۰	۳	۷	۱۸	۳۵
۰	۲	۵	۱۰	۱۸
۱	۲	۵	۱۰	۱۷
۱	۲	۳	۵	۸
۰	۱	۳	۵	۷
۰	۱	۱	۲	۳
۱	۱	۲	۲	۲
۱	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۰	۰	۰

۱۷. برای هر رأس، خانه ای را مطابق شکل مقابل متناظر می کنیم.

عدد بالایی در هر خانه نشانگر تعداد مسیرهایی از A تا به رأس

متناظر به آن خانه می باشد که تعداد علامت های - در آن مسیرها،

زوج باشد و عدد پایینی نشانگر تعداد مسیرهای از A به آن مقصد

می باشد که تعداد علامت های - در آن مسیرها، فرد است. اگر

علامت رأسی + باشد (رئوس متناظر به خانه های سفید)، آنگاه

عدد بالایی خانه متناظرش با مجموع دو عدد بالایی خانه های پایین و چپش و عدد پایینی آن با مجموع

دو عدد پایین آن دو خانه برابر است، و اگر علامت رأسی - باشد (رئوس متناظر به خانه های تیره)، آنگاه

عدد بالایی خانه متناظرش با مجموع دو عدد پایینی خانه های پایین و چپش و عدد پایینی آن با مجموع

دو عدد بالایی آن دو خانه برابر خواهد بود.

۱۸. در هر مرحله یک سکه از تعداد سکه ها کم می شود، بنابراین برای آن که ۵۰ سکه به یک سکه تبدیل

شود (۴۹ سکه کم شود) عمل یاد شده باید ۴۹ بار انجام پذیرد.

۱۹. برای تبدیل سکه های ۱ تومانی به یک سکه ۴۰ تومانی، در هر یک از بازه های $[۲۰, ۳۹]$ ، $[۱۰, ۱۹]$ ، $[۵, ۹]$ ، $[۳, ۴]$ حداقل یک نوع سکه تولید می شود. تولید سکه ۲ تومانی در اولین مرحله نیز اجتناب ناپذیر است، بنابراین تولید حداقل ۷ نوع سکه (با احتساب سکه های ۱ و ۴۰ تومانی) مشخص است. با ۷ نوع سکه به یکی از طرق زیر می توان به جواب رسید:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \end{array} \right\} \rightarrow 40 \\
 \left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \end{array} \right\} \rightarrow 20 \rightarrow 40 \\
 \left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \end{array} \right\} \rightarrow 24 \rightarrow 40
 \end{array}$$

۲۰. با توجه به این که $2^i - 2 = 2^{i-1} + 2^{i-2} + \dots + 2^1 + 2^0$ ، بنابراین وزن سنگین ترین وزنه از مجموع اوزان بقیه وزنه هایش بیشتر است، بنابراین سنگین ترین وزنه در هر مرحله در کفه ای قرار دارد که سنگین تر است. بنابراین در مرحله اول ۶۹۱ وزنه را در یک کفه و ۶۹۱ وزنه دیگر را در کفه دیگر قرار می دهیم بر روی وزنه های کفه ای که سنگین تر باشد را یک علامت می زنیم، وزنه مورد نظر در وزنه های علامت دار قرار دارد. ۳۴۵ وزنه علامت دار را در همان کفه نگه داشته و مابقی (۳۴۶ تا) را در کفه دیگر و در کنار ۶۹۱ وزنه قبلی قرار می دهیم. کفه ای که سنگین تر باشد وزنه مورد نظر را شامل است. بر روی وزنه های آن کفه علامت جدیدی می گزاریم. یقیناً وزنه مورد نظر در بین وزنه هایی که شامل دو علامت هستند قرار دارد که تعداد این وزنه ها حداکثر برابر ۳۴۶ می باشد. اگر این روند را تا انتها ادامه دهیم به این ترتیب که در هر مرحله در یک کفه فقط نصف وزنه ها با ماکزیمم علامت را قرار داده و مابقی وزنه ها را در کفه دیگر قرار دهیم بعد از ۱۱ مرحله وزنه مورد نظر به دست می آید با این توضیح که در هر مرحله حداکثر تعداد وزنه های با ماکزیمم علامت به شکل زیر می باشد.

$$691 \rightarrow 346 \rightarrow 173 \rightarrow 87 \rightarrow 44 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

۲۱. در هیچ حالتی معلوم نمی شود سبک ترین وزنه در کدام کفه قرار دارد مگر در حالتی که در یک کفه فقط سنگین ترین وزنه و در کفه دیگر سایر وزنه ها موجود باشد، بنابراین به غیر از دسته اخیر که شامل ۱۳۸۱ وزنه است هرگز دسته دیگری نمی توان یافت به طوری که مطمئن شد وزنه سبک تر (و یا هر وزنه دیگر به غیر از سنگین ترین وزنه) در آن دسته قرار داشته باشد.

۲۲. در ثانیه i ام ($i \geq 2$) به تعداد 2^{i-1} نقطه سیاه بر روی خط $y=x$ و به تعداد 2^i نقطه سیاه بر روی خط $y=x-2^i$ اضافه می شود، بنابراین رابطه $U_n = U_{n-1} + 2^n + 2^{n-1}$ بین تعداد نقاط سیاه در دو مرحله n و $n-1$ برقرار است. معلوم است که $U_1 = 5$ بنابراین:

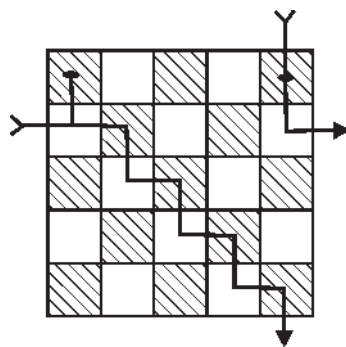
$$U_2 = 5 + 4 + 2 = 11$$

$$U_3 = 11 + 8 + 4 = 23$$

$$U_4 = 23 + 16 + 8 = 47$$

$$U_5 = 47 + 32 + 16 = 95$$

$$U_6 = 95 + 64 + 32 = 191$$



۲۳. مطابق شکل مقابل حرکات از مراحل ۲ تا ۱۱ همانند حرکات از مراحل ۱۲ تا ۲۱ و یا ۲۲ تا ۳۱ و ... می باشد، بنابراین حرکت دوره تناوبی به طور ۱۰ دارد به این معنا که در حرکت ۱۳۸۲ همانند حرکات دوازدهم و دوم در خانه $(2, 2)$ قرار خواهیم داشت.

۲۴. معلوم است که هر یک از خانه های $(5, 1)$ ، $(4, 2)$ ، $(3, 3)$ ،

$(2, 4)$ و $(1, 5)$ فقط متعلق به یک مستطیل می باشند. با

انتخاب آن پنج مستطیل، تعداد بارهایی که هر خانه از جدول شمارش می شوند مطابق شکل مقابل می باشد:

۵	۴	۳	۲	۱
۴	۳	۲	۱	
۳	۲	۱		
۲	۱			
۱				

حال اگر خانه های $(4, 1)$ ، $(3, 2)$ ، $(2, 3)$ ، $(1, 4)$ را انتخاب کرده و مجموع ۴ عدد به دست آمده را

از مجموع ۵ عدد قبلی کم کنیم، آنگاه هر یک از خانه ها دقیقاً یک بار در حاصل جمع به کار می رود.

۰	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۰
	۸	۸	۳	۱۱	۱	۱۲	۰
	۱۲	۱۲	۱۱	۱۰	۸	۵	۰
	۵	۵	۱۰	۲	۱۲	۱	۰
	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۰
	۸	۸	۳	۱۱	۱	۱۲	۰
	۱۲	۱۲	۱۱	۱۰	۸	۵	۰
	۵	۵	۱۰	۲	۱۲	۱	۰
	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۰
	۸	۸	۳	۱۱	۱	۱۲	۰
	۱۲	۱۲	۱۱	۱۰	۸	۵	۰
	۵	۵	۱۰	۲	۱۲	۱	۰
	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۰
	۸	۸	۳	۱۱	۱	۱۲	۰
	۱۲	۱۲					

۲۵. می دانیم باقی مانده مجموع دو عدد در تقسیم بر ۱۳ (یا هر عدد دیگری) با باقی مانده مجموع باقی مانده های آن دو عدد در تقسیم بر ۱۳ برابر است. بنابراین باقی مانده F_i به ازای i از ۱ تا ۱۰۰ در تقسیم بر ۱۳ مطابق جدول مقابل خواهد بود که دوره تناوبی برابر ۲۸ دارد. همان طور که مشاهده می شود تعداد مضارب ۱۳ در بین آن اعداد برابر $1 + \lfloor \frac{100}{13} \rfloor$ یا ۱۵ می باشد.

۲۶. فرض می کنیم x توانی از ۲ به صورت $x = 2^t$ باشد در این صورت اعداد از ۱ تا 1023 را به $\frac{1024}{x}$ دسته x عضوی تقسیم می کنیم (دسته اول $(x-1)$ عضوی است). در هر دسته به تعداد $(x-1) + 2 + 3 + \dots + 1$ یعنی $\frac{x(x-1)}{2}$ سکه «۱» توروپی وجود دارد که تعداد کل آنها $\frac{x(x-1)}{2} \times \frac{1024}{x}$ می شود. هر یک از اعضای دسته دوم شامل ۱ سکه x توروپی، هر یک از اعضا دسته سوم شامل ۲ سکه x توروپی، ... و بالاخره هر یک از اعضای دسته $\frac{1024}{x}$ شامل $(\frac{1024}{x} - 1)$ سکه x توروپی می باشند که تعداد کل آنها $(\frac{1024}{x} - 1) \times x + (1 + 2 + 3 + \dots + (\frac{1024}{x} - 1))$ یا $512(\frac{1024}{x} - 1)$ می باشد که با احتساب $\frac{1024}{x}$ سکه x توروپی مربوط به خود 1024 ریال، تعداد کل سکه ها به شکل زیر به دست می آید:

$$m = \frac{1024}{x} \times \frac{x(x-1)}{2} + 512(\frac{1024}{x} - 1) + \frac{1024}{x} = 512(x - 2 + \frac{1024}{x})$$

 ۳۲، ۱۲۸ و ۵۱۲ برای x به ترتیب برابر ۲۶۲۶۵۶، ۳۱۷۷۶، ۶۸۶۱۶ و ۲۶۲۱۴۶ می باشد که به ازای ۳۲ برای x مینیمم است.

اگر x برابر ۱۰ باشد، آنگاه تعداد سکه های ۱ توروپی برابر $(1 + 2 + 3 + \dots + 9) + (1 + 2 + 3 + 4)$ و $102 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 9) + 5 \times 102$ یعنی $10 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 101) + 5 \times 102$ می شود، تعداد سکه های ۱۰ توروپی نیز برابر 102×10 می باشد که در کل، تعداد همه سکه ها برابر ۵۶۶۲۰ می شود.

$$\left. \begin{aligned} P(1) + P(2) + \dots + P(9) &= 45 \\ P(10) + P(11) + \dots + P(19) &= 46 \\ P(20) + P(21) + \dots + P(29) &= 2 \times 46 \\ &\vdots \\ P(90) + P(91) + \dots + P(99) &= 9 \times 46 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{99} P(i) = 46^2 - 1 \quad 27$$

به همین ترتیب حاصل $\sum P(i)$ به ازای از ۱۰۰ تا ۱۹۹، از ۲۰۰ تا ۲۹۹، ...، از ۹۰۰ تا ۹۹۹ به ترتیب برابر 46^2 ، $46^2 \times 2$ ، ...، 9×46^2 می باشد که مجموع کل آنها برابر $46^3 - 1$ می شود.

۲۸. اعداد موجود در کارت i ام را a_i می نامیم. بعد از دستور اول نابرابری $a_1 < a_2$ برقرار است. بقیه دستورها را از بالا به پایین دوبه دو یک زوج می نامیم. زوج k ام به شکل $[(k+1, k+2), (k, k+1)]$ خواهد بود. بنابراین ۸۰ زوج به دست می آید که براینند آن عملکرد زوج k ام آن است که اعداد موجود در سه کارت k ، $k+1$ و $k+2$ به صورت صعودی مرتب می شود. معلوم است که اعداد بزرگ به سمت پایین منتقل می شوند ولی اعداد موجود در آن کارت ها حداکثر دو پله به سمت بالا می تواند منتقل شود، بنابراین اگر کوچک ترین عدد در کارت ۴ و یا پایین تر باشد هرگز آن عدد به کارت ۱ منتقل نخواهد شد ولی بزرگ ترین عدد به پایین ترین کارت و دومین عدد بزرگ به دومین کارت از پایین منتقل خواهند شد.

۲۹. ترتیب انجام اعمال در نتیجه نهایی بی اثر است بنابراین به ترتیب دلخواه عملی یاد شده را انجام دهید تا به جواب مورد نظر برسید به عنوان مثال ترتیبی از اعمال به شکل زیر، نقطه $(2, 1, 1)$ را به دست خواهد داد:

$$\begin{aligned} (5, 5, 6) &\rightarrow (2, 6, 7) \rightarrow (3, 3, 8) \rightarrow (4, 4, 5) \rightarrow (5, 5, 2) \rightarrow (2, 6, 3) \rightarrow (3, 3, 4) \\ &\rightarrow (4, 4, 1) \rightarrow (1, 5, 2) \rightarrow (2, 2, 3) \rightarrow (3, 3, 0) \rightarrow (0, 4, 1) \rightarrow (1, 1, 2) \end{aligned}$$

۳۰. اگر ۲۵۶ عدد مورد نظر را با ۱۶ دسته ۱۶ تایی از ۰ تا ۱۵، از ۱۶ تا ۳۱، از ۳۲ تا ۴۷، ...، از ۲۴۰ تا ۲۵۵ تقسیم کنیم آنگاه رقم a_4 در دسته های دوم، چهارم، ...، شانزدهم برابر ۱ و در سایر دسته ها برابر ۰ می باشد. مجموع تعداد اعداد موجود در دسته های دوم، چهارم، ...، شانزدهم برابر ۱۲۸ می باشد. در دسته های اول، سوم، ...، پانزدهم با تبدیل ۰ به ۱- در رقم a_4 آن اعداد ۱۶ واحد کمتر می شوند که در این

صورت اعداد دسته $(2k-1)$ ام همان اعداد دسته $(2k)$ ام می شود و فقط ۱۶ عدد موجود در دسته اول به اعداد از ۱۶- تا ۱- تبدیل می شوند. بنابراین تعداد کل جواب ها $16 + 128 = 144$ یعنی ۱۴۴ می شود.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

۳۱. خانه های جدول را مطابق شکل نام گذاری می کنیم:

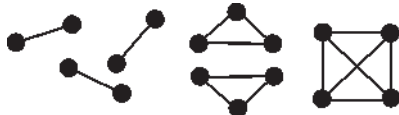
$$b + e + d = b + e + f = \text{فرد} \Rightarrow d = f$$

$$b + e + d = d + e + h = \text{فرد} \Rightarrow b = h$$

$$a + d + e + f + c = g + d + e + f + i = \text{فرد}$$

$$\Rightarrow (e \text{ همسایه}) = a + b + c + d + f + g + h + i = 2(a + c + b + d) = \text{زوج}$$

پس پر کردن خانه های جدول به صورت مطلوب ناممکن است.



۳۲. گراف متناظر به جواب های داده شده به شکل

مقابل می باشد:

همان طور که مشاهده می شود تعداد افرادی که

می توانند جواب ۳ بدهند برابر ۴ می باشد، بنابراین نفر شانزدهم نیز جز این دسته می باشد.

۳۳. اگر اعمال «تعویض» و «بر کامل» را به ترتیب با f و g نمایش دهیم، آنگاه کوتاه ترین راه برای رساندن

اعداد از ۱ تا ۷ به رو به ترتیب به شکل زیر می باشد که در بین آنها عدد ۷ بلندترین طول مسیر را دارد که

طول آن برابر ۵ می باشد.

$$1 \xrightarrow{f} \circ$$

$$2 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} \circ$$

$$3 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} \circ$$

$$4 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} \circ$$

$$5 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} \circ$$

$$6 \xrightarrow{g} 5 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} \circ$$

$$7 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{g} 5 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} \circ$$

۳۴. رقم a در اعداد ۰، ۲، ۴ و ۶ برابر ۰ می باشد. اگر آن رقم خراب باشد و به جای رقم a را اختیار کند،

آنگاه آن اعداد به ترتیب به صورت $a + 0$ ، $a + 2$ ، $a + 4$ و $a + 6$ در می آیند که با قرار دادن اعداد ۰، ۲، ۴ و ۶ و ۱۰

به جای آنها برای a مقدار ثابتی به دست نمی آید.

رقم a_1 در اعداد $0, 1, 4, 5$ برابر 0 می باشد. اگر آن رقم خراب بوده و به جای 0 رقم a را اختیار کند، آنگاه آن اعداد به ترتیب به صورت $a + 0, a + 1, a + 4, a + 5$ در می آیند که با قرار دادن اعداد $2, 3, 6, 7$ به جای آنها برای a مقدار 2 به دست می آید. به این معنا که رقم a_1 به جای 0 مقدار 2 را اختیار می کند. به همین ترتیب معلوم می شود که آن رقم به جای 1 عدد 3 را به خودش اختیار کرده است.

۳۵. کلمه «هوپ» موقعی گفته می شود که دو بار متوالی به باقی مانده 1 برسیم. از طرف دیگر باقی مانده های به دست آمده نشانگر ارقام آن عدد در مبنای 2 می باشد، بنابراین تعداد «هوپ» های گفته شده برای هر عدد بیانگر تعداد « 11 » های موجود در معادل آن عدد در مبنای 2 می باشد. تبدیل یافته هر یک از اعداد 1382 و 2004 در مبنای 2 به ترتیب به شکل (10101100110) و (11111010100) می باشد که در مورد اولی 2 سری « 11 » و در مورد دومی 4 سری « 11 » وجود دارد.

۳۶. فرض می کنیم c شامل α عدد 1 ، β عدد 2 و γ عدد 3 باشد، آنگاه خواهیم داشت: $\gamma = 2\alpha - 3\beta$

$$\Rightarrow \alpha + 5\beta + 2\gamma = 3\alpha + 2\beta + \gamma$$

اگر $\beta = 0$ آنگاه $\alpha = 1$ و $\gamma = 2$ که این دنباله کوتاه ترین طول را دارد اما در این حالت $a \neq b$.

اگر $\beta = 1$ آنگاه $\alpha = 2$ و $\gamma = 1$ کوتاه ترین طول را تولید می کند. در این حالت اگر دنباله c را به صورت $3, 1, 1, 2$ تعریف کنیم تساوی به دست خواهد آمد.

۳۷. علامت « $+$ » و علامت « 0 » را « 1 » در نظر گرفته و خانه های جدول را مطابق شکل نام گذاری می کنیم، خواهیم داشت:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$a + b + c + f = c + b + a + d \Rightarrow f = d$$

$$b + a + d + g = a + d + g + h \Rightarrow b = h$$

$$a + d + g + h = d + g + h + i \Rightarrow a = i$$

$$c + b + a + d = b + a + d + g \Rightarrow c = g$$

$$d + e + f + i = 2d + e + i \Rightarrow e = i$$

به همین ترتیب e با حروف c، a و g نیز برابر می شود، بنابراین حروف b، d، f و h نیز برابر می شوند. بنابراین اگر خانه های جدول را به صورت شطرنجی رنگ آمیزی کنیم، خانه های سیاه به یکی از دو طریق (یا همگی «۰» و یا همگی «۱») و نیز خانه های سفید نیز مستقل از وضعیت خانه های سیاه، به دو طریق (همگی «۰» و یا همگی «۱») قابل پر شدن می باشند که طبق اصل ضرب جواب مورد نظر 2×2 یعنی ۴ می باشد.

۳۸. فرض کنید بعد از مراحل در مورد رنگ خاصی که در بشقاب a و b مربوط به آن رنگ است، بشقاب a پایین تر از بشقاب b باشد، به طور مستقل از سایر عملکردها دو کار می توان انجام داد، یکی آن که بشقاب b را به سینی دوم برد و یا تکلیف تمام بشقاب های بین a و b را مشخص کرده و سپس بشقاب a را (که احتمالاً در زیر چند بشقاب جامانده است) به سینی دوم منتقل کنیم. بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر 2^5 یعنی ۳۲ خواهد شد.

a	b	c
d	۲	f
g	h	i

۳۹. معلوم است که عدد موجود در خانه وسط، چهار بار به عنوان رقم وسط یک عدد سه رقمی ظاهر می شود ولی در بین اعداد داده شده هیچ چهار عددی وجود ندارد که رقم وسط مشابهی داشته باشند، ولی سه عدد ۱۲۱، ۱۲۳ و ۳۲۲ چنانند

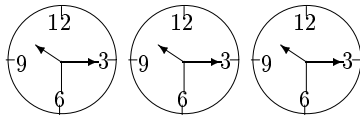
که رقم وسطشان ۲ است، بنابراین عدد مجهول نیز رقم وسطش ۲ است که در بین گزینه ها فقط الف و ب چنینند. عدد a به عنوان رقم اول در ۳ تا از اعداد ظاهر می شود که در بین ۸ عدد فقط رقم ۱ در بیش از دو عدد به عنوان رقم اول ظاهر شده است، بنابراین $a = ۱$. قطر اصلی به صورت i۱۲ می باشد که اگر i را برابر ۱ قرار دهیم آنگاه ستون سوم به صورت ۱cf در می آید که در بین ۸ عدد چنین چیزی وجود ندارد، بنابراین $i = ۳$ و حرف g به عنوان رقم صدگان دو عدد به کار می رود که یکی از آن دو رقم یکنانش ۳ است و دیگری

۱	۱	۲
۵	۲	۴
۳	۱	۳

رقم دهگان ۲ است، در بین ۸ عدد فقط دو عدد ۳۱۳ و ۳۲۲ چنینند. لذا $g = ۳$ ، $h = ۱$ و $c = ۲$. بعد از این جدول به صورت منحصر به فرد به شکل مقابل پر می شود که در آن عدد مجهول عدد موجود در سطر دوم به شکل ۵۲۴ یافت می شود.

۴۰. دو رقم hh به ۱۶ طریق متمایز می تواند باشد (از ۰۰ تا ۰۵، از ۱۰ تا ۱۵ و از ۲۰ تا ۲۳)، دو رقم mm به یکی از ۶ طریق ۰۰، ۱۱، ۲۲، ۳۳، ۴۴ و ۵۵ می تواند باشد. دو رقم ss نیز متناسب با وضعیت hh به صورت منحصر به فرد یافت می شود. بنابراین جواب مورد نظر ۱۶×۶ یعنی ۹۶ به دست می آید.

مرحله ی اول سیزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



(۱) سه ساعت با صفحه ی دوار به نام های A، B، و C داریم که هر سه ساعت $3^{\circ} : 15' : 10''$ را نشان می دهند (مانند شکل مقابل). در ساعت A، ثانیه شمار تکان نمی خورد ولی صفحه (مستقل از عقربه ها) و ساعت شمار و دقیقه شمار طوری حرکت می کنند که ساعت هر لحظه زمان درست را نشان می دهد.

در ساعت B، دقیقه شمار تکان نمی خورد، ولی صفحه (مستقل از عقربه ها) و ساعت شمار و ثانیه شمار طوری حرکت می کنند که ساعت هر لحظه زمان درست را نشان می دهد. در ساعت C، ساعت شمار تکان نمی خورد، ولی صفحه (مستقل از عقربه ها) و دقیقه شمار و ثانیه شمار طوری حرکت می کنند که ساعت هر لحظه زمان درست را نشان می دهد. فرض کنید ۵۰ ساعت از وضعیت داده شده گذشته است. در این مدت، چند بار وضعیت این سه ساعت کاملاً مشابه است (یعنی صفحه و ساعت شمار و دقیقه شمار و ثانیه شمار در هر سه ساعت در یک وضعیت قرار دارند)؟ حالت اولیه را نیز یک وضعیت مشابه به حساب آورید.

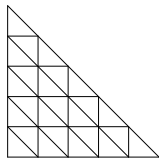
۹ (هـ)

۷ (د)

۵ (ج)

۳ (ب)

۱ (الف)



(۲) در شکل مقابل به دل خواه در یکی از خانه های مثلثی شکل یک مهره قرار می دهیم. در هر حرکت می توان این مهره را از خانه ی فعلی آن برداشت و پس از طی یک مسیر در یک خانه ی جدید گذاشت. این مسیر باید طوری باشد که دقیقاً یک پاره خط افقی، یک پاره خط عمودی و یک پاره خط مورب را قطع کند. این مهره در هر خانه ای که قرار بگیرد آن را سیاه می کند. توجه کنید که این مهره خانه هایی را که در طول مسیر از آن ها عبور می کند سیاه نمی کند. اگر شکل در ابتدا کاملاً سفید باشد، پس از ۲۰ بار حرکت، حداکثر چند خانه را می توان سیاه کرد؟

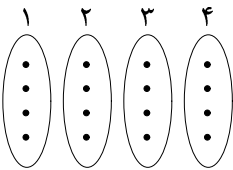
۹ (هـ)

۸ (د)

۷ (ج)

۶ (ب)

۵ (الف)



(۳) می خواهیم هر نقطه موجود در دسته ی i در شکل مقابل را با یک پاره خط به دقیقاً یک نقطه در دسته ی $i+1$ وصل کنیم ($i \leq 3$) به طوری که هیچ دو نقطه ای از دسته ی i ام به یک نقطه از دسته ی $i+1$ ام وصل نباشند. هم چنین می خواهیم هر نقطه موجود در دسته ی ۴ را با یک پاره خط به دقیقاً یک نقطه در دسته ی ۱ وصل کنیم به طوری که هیچ دو نقطه ای از دسته ی ۴ به یک نقطه از دسته ی اول وصل نباشند. به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

الف) $4^3 \times 2^4 \times 3^4$ (ب) $4^4 \times 2^4 \times 3^4$ (ج) $4^3 \times 2^2 \times 3^5$ (د) $4^3 \times 2^5 \times 3^3$ (هـ) $4^4 \times 2^2 \times 3^3$

(۴) جای گشت ۱۲۳۴۵۶ را در نظر بگیرید. در یک حرکت می توانیم جای دو عدد i و j را با هم عوض کنیم اگر $2 \leq |i-j|$. پس از انجام چند حرکت به جای گشت $\pi = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6$ می رسیم. π کدام یک از گزینه های زیر می تواند باشد؟

۴۳۱۲۶۵ (ج)

۲۱۳۴۵۶ (ب)

۶۵۴۳۲۱ (الف)

۵ (هـ) تمام گزینه های فوق می تواند باشد

۳۲۴۶۱۵ (د)

مرحله ی اول سیزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۵) سه دستور A ، B و C داده شده اند که هر کدام به عنوان ورودی زوج مرتب (x, y) را می گیرند و خروجی زیر را تولید می کند:

- دستور A خروجی با مقدار $(x + 3, y)$ را تولید می کند.
- دستور B خروجی با مقدار $(x, y - 2)$ را تولید می کند.
- دستور C خروجی با مقدار (y, x) را تولید می کند.

به تعدادی دستور پشت سر هم یک «برنامه» می گوئیم. هر برنامه به عنوان ورودی زوج مرتب (x, y) را می گیرد و خروجی آن به صورت زیر تعیین می شود: دستور اول بر روی ورودی اجرا می شود، سپس دستور دوم خروجی دستور اول را به عنوان ورودی دریافت می کند و اجرا می شود، ... و دستور $i + 1$ ام خروجی دستور i ام را به عنوان ورودی دریافت می کند و اجرا می شود. خروجی برنامه، خروجی دستور آخر است. به طور مثال برنامه ی AAC را در نظر بگیرید که ورودی آن $(1, 2)$ است. خروجی این برنامه $(2, 7)$ خواهد بود (دستورها از چپ به راست اجرا می شوند). فرض کنید یک برنامه داریم که ورودی آن $(2, 1)$ و خروجی آن $(8, 5)$ است. حداقل تعداد دستورهای این برنامه چند تاست؟

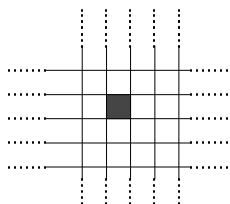
- الف (۵) ب (۶) ج (۷) د (۸) ه (۹)

(۶) همان سؤال قبل، با این تفاوت که خروجی دستورهای A ، B و C به صورت زیر است:

- دستور A خروجی $(x + 1, y)$ را تولید می کند.
- دستور B خروجی $(x, y + 1)$ را تولید می کند.
- دستور C خروجی (y, x) را تولید می کند.

تعداد برنامه هایی را پیدا کنید که از دستور C دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و به ازای ورودی $(0, 0)$ خروجی $(2, 2)$ را تولید کند.

- الف (۶) ب (۱۸) ج (۲۴) د (۳۰) ه (۳۲)



(۷) یک جدول 2 بعدی نامتناهی را در نظر بگیرید که در ابتدا تمام خانه های آن سفید است. در مرحله ی اول یکی از خانه های آن را به دل خواه سیاه می کنیم (شکل مقابل). از مرحله دوم به بعد، در هر مرحله کلیه ی خانه هایی که 1 ، 2 و 3 همسایه سیاه دارند را مشخص می کنیم و سپس همه ی آن ها را سیاه و بقیه ی خانه ها را سفید می کنیم. (دو خانه مجاورند اگر ضلع مشترکی داشته باشد).

بزرگ ترین k ای را پیدا کنید که خانه ای که در مرحله اول سیاه شده بود در مرحله ی k ام هم سیاه شود.

- الف (۱) ب (۷) ج (۸) د (۱۶) ه (k هر قدر می تواند بزرگ باشد).

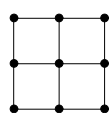
(۸) تعداد زیرمجموعه های $\{1, 2, \dots, 10\}$ که مجموع اعضای آن بر 8 بخش پذیر چند تاست؟

- الف (۱۲۵) ب (۱۲۶) ج (۱۲۷) د (۱۲۸) ه (۱۲۹)

(۹) k عدد رخ را در یک صفحه ی شطرنجی 10×10 طوری قرار داده ایم که تمام صفحه را تهدید کنند. یک رخ در خانه (x, y) ، همه ی خانه های سطر x و ستون y را تهدید می کند. هم چنین می خواهیم که هر رخ دقیقاً توسط 4 رخ دیگر تهدید شود. حداقل k چند است؟

- الف (۹) ب (۱۰) ج (۱۳) د (۱۶) ه (۲۴)

مرحله ی اول سیزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



۱۰) نقشه ی یک استان در شکل مقابل نشان داده شده است که در آن هر نقطه یک شهر و هر خط یک جاده بین دو شهر است. فاصله ی دو شهر A و B برابر است با حداقل تعداد جاده هایی که باید طی کنیم تا از A به B برسیم. یک دزد دریکی از این شهرها که از قبل مشخص نیست مخفی شده است. برای پیدا کردن این دزد مجاز هستیم به صورت زیر عمل کنیم.

- در ابتدای هر روز یکی از شهرها به نام A را انتخاب و آن را جست و جو می کنیم. اگر دزد در آن شهر بود که او را دست گیر می کنیم. ولی اگر نبود به کمک دستگاهی فاصله ی شهر A تا شهری که دزد در آن قرار دارد را پیدا می کنیم.

- در انتهای هر روز دزد از شهری که در آن قرار دارد به یکی از شهرهای مجاور آن می رود (دو شهر را مجاور گوئیم اگر با یک جاده به هم متصل باشند). دقت کنید که دزد حتماً جای خود را عوض می کند.

حداقل به چند روز نیاز داریم تا مطمئن باشیم که دزد را دستگیر می کنیم؟

- الف) ۶ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) ۹ (ه) با گذشت هر چند روز نمی توان مطمئن بود که دزد را پیدا کرده ایم.



۱۱) همان سؤال قبل اگر نقشه ی استان به صورت مقابل باشد.

- الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) با گذشت هر چند روز نمی توان مطمئن بود که دزد را پیدا کرده ایم.

۱۲) در خانه ی $(0, 0)$ جدول مختصات عدد ۱ را می نویسیم. فرض کنید در ابتدای هر مرحله در خانه ی (x, y) عدد i نوشته شده است. در آن مرحله i را پاک می کنیم و یکی از چهار حرکت زیر را انجام می دهیم:

- در خانه ی $(x + 1, y)$ عدد $4i$ را می نویسیم،
- در خانه ی $(x, y + 1)$ عدد $4i + 1$ را می نویسیم،
- در خانه ی $(x - 1, y)$ عدد $4i + 2$ را می نویسیم، یا
- در خانه ی $(x, y - 1)$ عدد $4i + 3$ را می نویسیم.

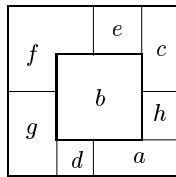
پس از انجام چند مرحله متوجه می شویم در خانه $(1, 1)$ عدد K نوشته شده است. K کدام گزینه می تواند باشد؟

- الف) ۶۰۳۹ (ب) ۱۰۸۲ (ج) ۱۳۴۷ (د) ۵۱۳۲ (ه) ۵۹۲۱

۱۳) کامران یک دستگاه عددشمار ساخته است که ۷ لامپ دارد. معنی روشن یا خاموش بودن لامپ i ام به ترتیب ۱ یا ۰ بودن رقم i ام یک عدد ۷ رقمی در مبنای ۲ است. مثلاً اگر فقط لامپ سوم روشن باشد دستگاه عدد ۸ را نمایش می دهد. در ابتدا همه ی لامپ ها خاموش هستند. این دستگاه دکمه ای دارد که با فشار آن عدد دستگاه یک واحد افزایش می یابد. کامران با ۶۴ بار فشار دادن دکمه عدد اولیه ی صفر را به ۶۴ تبدیل می کند. اگر d_i برابر با تعداد دفعاتی باشد که لامپ i ام تغییر وضعیت داده است، $\sum_{i=1}^7 d_i$ برابر چه مقدار است؟

- الف) ۱۲۹ (ب) ۱۲۷ (ج) ۶۱ (د) ۶۵ (ه) ۶۴

مرحله اول سیزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



۱۴) ۸ مربع هم اندازه با رنگ های $a, b, \dots, h$ را یکی پس از دیگری در یک صفحه چیده ایم (هر مربع بر روی مربع های قبلی قرار می گیرد) و شکل مقابل حاصل شده است. اگر مربع با رنگ a را A بنامیم، و مربع با رنگ b را B و $\dots$ به چه ترتیبی این مربع ها را چیده ایم؟

ب) F, E, C, H, A, D, G و B

الف) F, C, H, B, A, G, D, E

د) B, G, D, A, H, C, E, F

ج) B, F, G, D, A, H, C, E

ه) B, F, C, E, A, H, G, D

۱۵) همه ی رشته های تولید شده از حروف a و b را به ترتیب طول رشته و در صورت مساوی بودن طول ها به ترتیب الفبایی مرتب می کنیم. مثلاً هشت رشته ی اول عبارتند از: $a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab$. رشته ی ۱۳۸۱ ام کدام است؟

ج) $ababbaabab$

ب) $bababbbab$

الف) $ababbaabba$

ه) $ababaaaba$

د) $babaabbaab$

۱۶) ۲۰ عدد کاسه داریم که در هر یک می توانیم یک پنج تومانی قرار دهیم یا آن را خالی بگذاریم. هم چنین ۱۰ کاسه ی دیگر داریم که در هر یک می توانیم یک ۲ تومانی قرار دهیم یا آن را خالی بگذاریم. به چند طریق می توانیم در این کاسه ها، سکه هایی ۵ تومانی و ۲ تومانی قرار دهیم تا مجموع سکه های موجود در کاسه ها ۸۱ تومان شود؟

ب) $\binom{15}{5} \times \binom{13}{2} \times \binom{10}{1} \times \binom{8}{0}$

الف) $\binom{15}{5} + \binom{13}{2} + \binom{10}{1} + \binom{8}{0}$

د) $\binom{13}{8} + \binom{5}{3}$

ج) $\frac{15! + 8 \times 13! \times 14}{20!}$

ه) $\binom{15}{5} \times \binom{10}{2} + \binom{13}{2} \times \binom{8}{1}$

۱۷) منظور از یک زیر دنباله تعدادی عدد پشت سر هم از یک دنباله است. مثلاً $(2, 3, 4)$ زیر دنباله ی $(1, 2, 3, 4, 5)$ هست ولی $(1, 4, 5)$ زیر دنباله ی آن نیست. هم چنین یک زیر دنباله مضرب پنج است اگر جمع اعضای آن مضرب پنج باشد. مثلاً (5) یا $(1, 2, 3, 4)$ زیر دنباله های مضرب ۵ از $(1, 2, 3, 4, 5)$ هستند ولی $(1, 2, 3)$ مضرب ۵ نیست. تعداد زیر دنباله های ناتهی مضرب ۵ دنباله ی $(1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 3, 8, 1, 1, 1, 1, 1)$ چه قدر است؟

ه) ۲۶

د) ۲۴

ج) ۲۲

ب) ۱۸

الف) ۴

۱۸) یک سالن با ۱۰۳ ردیف صندلی داریم که در هر ۵ ردیف متوالی آن در مجموع ۲۰۰ نفر نشسته اند. در این سالن حداقل و حداکثر چند نفر نشسته اند؟

ج) $4120/4000$

ب) $4200/4120$

الف) $4200/4000$

ه) چنین حالتی ممکن نیست.

د) $4120/4120$

۱۹) اگر f یک تابع از اعداد صحیح و مثبت به اعداد صحیح و مثبت باشد که $f(n+1) > f(n)$ و $f(f(n)) = 3n$. مقدار $f(9)$ چه قدر است؟

ه) ۱۸

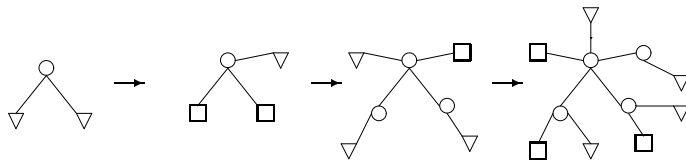
د) ۱۶

ج) ۱۲

ب) ۱۰

الف) ۹

مرحله اول سیزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



۲۰) طبق قواعد زیر هر شکل از شکل قبل

به این صورت ساخته می شود:

* هر مربع تبدیل به دایره می شود.

* هر مثلث تبدیل به مربع می شود.

* در پایان، به ازاء هر دایره (حتی دایره های جدید)، یک مثلث جدید می کشیم و به آن دایره وصل می کنیم.

در بالا چهار شکل اول این سری را نشان داده ایم. شکل یازدهم چند تا مثلث دارد؟

الف) ۸۹

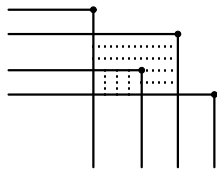
ب) ۹۰

ج) ۱۲۱

د) ۱۲۳

ه) ۱۲۵

۲۱) یک ریاضی دان در دفتر کار خود یک تخته سیاه خیلی بزرگ دارد. روزی پسرش از وی خواست تا با او بازی کند. ریاضی دان که به بازی های کودکانه چندان آشنایی نداشت، به فرزندش پیشنهاد کرد بازی «رولینگ» را انجام دهند. ریاضی دان به پسرش گفت که در این بازی، پسر با گچ یک نقطه روی تخته بگذارد و سپس ریاضی دان از آن نقطه دو نیم خط رسم کرد: یک نیم خط افقی از نقطه به سمت چپ و یک نیم خط عمودی از نقطه به پایین.



پسر که از این بازی کلافه شده بود از پدرش خواست تا یک بازی دیگر مثل «کوئیدیچ» را بازی کنند، ولی ریاضی دان برای آن که پسرش راضی شود به او گفت: «اگر بتوانی با انتخاب ۷ نقطه بیشترین ناحیه های بسته را ایجاد کنی تو را به تماشای مسابقه ی کوئیدیچ خواهیم برد». یک ناحیه ی بسته، ناحیه ای از تخته است که دور تا دور آن به وسیله ی نیم خط ها بسته شده باشد. مثلاً در شکل مقابل با انتخاب ۴ نقطه، دو ناحیه ی بسته ایجاد کرده ایم که با هاشور مشخص شده اند.

پسر با انتخاب ۷ نقطه حداکثر چند ناحیه ی بسته می تواند ایجاد کند؟

الف) ۱۰

ب) ۱۲

ج) ۱۵

د) ۱۸

ه) ۲۰

۲۲) یک قورباغه روی نقطه ی صفر محور مختصات نشسته است. این قورباغه می تواند به سمت جلو بجهد، ولی طول پرش آن در n امین جهش به دل خواه خودش i یا $i + 1$ واحد است. او پس از چند جهش می تواند به نقطه ی ۱۳۸۱ برسد؟ و چند جهش دیگر لازم است تا از آن جا به نقطه ی ۲۰۰۳ برسد؟

الف) ۵۲ و ۱۱

ب) ۵۲ و ۱۲

ج) ۵۲، نمی تواند برسد

د) ۳۷ و ۹

ه) به هیچ کدام نمی تواند برسد.

۲۳) یک بازی دو نفره بر روی عبارت $((\underbrace{?}_{\times} \underbrace{?}_{\times}) \underbrace{?}_{\times})$ انجام می شود. در این عبارت به جای هر علامت ؟ باید یکی از

اعداد ۰، ۱ یا ۲ (به صورت غیر تکراری) و به جای * یکی از عملگرهای $\times$ (ضرب) یا $+$ (جمع) قرار گیرد. بازی به این صورت است: نفر اول یکی از اعداد را برای اولین ؟، سپس نفر دوم یک عملگر و یک عدد برای ؟ * بعدی، در مرحله ی آخر نفر اول همین کار را برای ؟ * بعدی انجام می دهد. کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

الف) نفر اول می تواند طوری بازی کند که عدد حاصل زوج شود.

ب) نفر دوم می تواند طوری بازی کند که عدد حاصل زوج شود.

ج) نفر اول می تواند طوری بازی کند که عدد حاصل فرد شود.

د) نفر دوم می تواند طوری بازی کند که عدد حاصل فرد شود.

ه) هر دو گزینه های الف و ب درست اند.

مرحله ی اول سیزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۴) ۱۰ سکه دور دایره ای چیده شده اند که یک درمیان شیر (H) و خط (T) هستند. در هر مرحله می توانیم هر سه تا سکه پشت سر هم را که HTH یا THT باشند انتخاب کنیم و هر سه را برگردانیم. با تکرار این کار، حداکثر چه تعداد H می توانیم داشته باشیم؟

الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۷ (د) ۸ (ه) ۹

(۲۵) عبارت بدون پرانتز $a - b/c * d + e$ را در نظر بگیرید. می دانیم که مقدار این عبارت برابر است با $x = ((a - ((b/c) * d)) + e)$. به چند طریق می توان این عبارت را پرانتزگذاری کرد که به ازای همه ی مقادیر a تا e ، حاصل آن همان مقدار x باشد؟ در عبارت پرانتزگذاری شده به ازای هر عملگر حداکثر یک جفت پرانتز می توان گذاشت، مثلاً $a + ((b/c)) * d + e$ حاوی یک جفت پرانتز اضافه است.

الف) ۱۶ (ب) ۳۲ (ج) ۱۸ (د) ۲۴ (ه) ۸

(۲۶) مجموعه ی S «دوستانه» است اگر برای هر $x \in S$ حداقل یکی از $x + 1$ و $x - 1$ هم در S باشد. مثلاً $\{1, 2, 499, 500\}$ دوستانه است. چه تعداد مجموعه ی دوستانه با ۵ عضو از اعداد ۱ تا ۱۰۰ داریم؟

الف) ۴۶۵۶ (ب) ۹۲۰۸ (ج) ۹۲۱۶ (د) ۱۰۰۰۰ (ه) ۱۸۳۳۶

(۲۷) ۷ تا کره ی یک شکل و یک رنگ داریم که از جنس های متفاوت ساخته شده اند. می دانیم که حداقل ۴ تا از این کره ها از یک جنس هستند (به این جنس، «غالب» می گوئیم). دو تا کره را برمی داریم و به هم می چسبانیم؛ اگر از یک جنس باشند جرقه می زند، در غیر این صورت اتفاقی نمی افتد. با حداقل چند بار چسباندن کره ها به هم مطمئناً می توان یک کره پیدا کرد که از جنس غالب باشد؟

الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۷

(۲۸) ترکیب دو دنباله ی مرتب A و B به ترتیب با اندازه های n و m یک دنباله ی مرتب به اندازه ی $n + m$ تولید می کند و این کار به اندازه ی $m + n$ هزینه دارد. (مثلاً اگر $A = (1, 2, 3, 5)$ و $B = (4, 6)$ باشد $C = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ترکیب این دو دنباله و هزینه ی تولید آن ۶ است). برای ترکیب سه دنباله، ابتدا دو تای آن ها را با هم ترکیب و دنباله ی حاصل را با دنباله ی سوم ترکیب می کنیم. بدیهی است که انتخاب دو دنباله ی اول در کل هزینه ی ترکیب مؤثر است. حال فرض کنید ۷ دنباله به اندازه های ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۸ و ۱۰ داریم. کم ترین هزینه ی کل برای ترکیب این ۷ دنباله چه قدر است؟

الف) ۴۸ (ب) ۱۰۵ (ج) ۱۳۴ (د) ۱۴۴ (ه) ۱۶۲

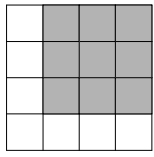
(۲۹) در یک جدول، دو خانه را همسایه می گوئیم اگر در یک نقطه یا در یک ضلع اشتراک داشته باشند (بنابراین، هر خانه حداکثر ۸ همسایه دارد). می خواهیم در یک جدول 10×10 ، k خانه را علامت بزنیم به طوری که هر خانه ی علامت نخورده حداقل یک همسایه علامت خورده داشته باشد. k حداقل چه قدر است؟

الف) ۱۳ (ب) ۱۴ (ج) ۱۵ (د) ۱۶ (ه) ۱۷

(۳۰) یک n -ضلعی را «کامل» می نامیم اگر به ازای هر عدد صحیح i ($1 \leq i \leq n$)، دقیقاً یک ضلع به طول i داشته باشد و هر دو ضلع مجاور آن بر هم عمود باشند. کم ترین عدد n که به ازای آن، n -ضلعی کامل وجود دارد چند است؟

الف) ۴ (ب) ۶ (ج) ۸ (د) ۱۲ (ه) ۱۶

مرحله اول سیزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



(۳۱) بازی یک نفره‌ی «کوئیدج» به شکل زیر انجام می‌شود: یک صفحه‌ی 4×4 که همه‌ی ۱۶ خانه‌ی آن سفید هستند در اختیار داریم. در هر حرکت، یکی خانه را انتخاب می‌کنیم. با انتخاب هر خانه، رنگ آن خانه و همه‌ی خانه‌هایی که در بالا و سمت راست آن هستند عوض می‌شود (از سفید به سیاه یا از سیاه به سفید تغییر می‌یابد). مثلاً در شکل مقابل با انتخاب خانه‌ی دوم از ردیف سوم، رنگ بعضی از خانه‌ها سیاه شده است. می‌خواهیم با k بار انجام این حرکت، صفحه را به صورت شطرنجی در آوریم (یعنی رنگ هیچ دو خانه‌ای که در یک ضلع مشترکند، یکی نباشد). کم‌ترین مقدار k چه قدر است؟

الف) ۶ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) ۱۵ (ه) ۱۶

(۳۲) ۳۰ دانش آموز در یک کلاس حضور دارند که همه‌ی آن‌ها افرادی راست‌گو هستند. می‌دانیم یکی از آن‌ها المپیادی است ولی او را نمی‌شناسیم. می‌خواهیم با پرسیدن k سؤال، فرد مزبور را بیابیم. در هر سؤال می‌توانیم یکی از دانش آموزان را انتخاب کنیم و به او اسم چند نفر از دانش آموزان را بگوییم و از او پرسیم که آیا فرد المپیادی، یکی از آن چند نفر است یا خیر؟ او هم فقط به این سؤال جواب «بله» یا «خیر» می‌دهد. k حداقل چه قدر باشد که با پرسیدن k سؤال همواره مطمئن باشیم می‌توانیم فرد مورد نظر را بشناسیم؟

الف) ۳ (ب) ۵ (ج) ۷ (د) ۱۰ (ه) ۱۵

(۳۳) اعداد ۱ تا ۱۰۰۰ را به این صورت در یک سطر می‌نویسیم: ابتدا عدد ۱، سپس بدون فاصله عدد ۱۰۰۰، بعد ۲، سپس ۹۹۹، و ... مثلاً ۱۸ رقم ابتدای این سطر به این صورت است: ۱۱۰۰۰۰۲۹۹۹۳۹۹۸۴۹۹۷۵. ۴۹۰ امین رقم نوشته شده در این سطر چند است؟

الف) ۰ یا ۹ (ب) ۱ یا ۸ (ج) ۲ یا ۷ (د) ۳ یا ۶ (ه) ۴ یا ۵

(۳۴) یک رشته‌ی دودویی n -رقمی را یک «عدد جهانی» می‌نامیم در صورتی که وقتی خودش را با معکوسش جمع بزنیم دو بریک ایجاد نشود. مثلاً فرض کنید $n = 6$. در این صورت $(010001)_2$ یک عدد جهانی است چون معکوس آن $(100010)_2$ است و موقع جمع زدن این دو عدد، هیچ دو رقم ۱ روی هم قرار نمی‌گیرند تا موقع جمع زدن دو بر یک به وجود آید. (در واقع دو بریک، معادل ده بریک، در جمع اعداد دودویی است و وقتی ایجاد می‌شود که جمع ارقام واقع در یک ستون، بیش‌تر از ۱ شود). تعداد اعداد دودویی جهانی ۱۰ رقمی چه قدر است؟

الف) ۲۵ (ب) ۲۱۰ (ج) ۳۵ (د) ۳۸ (ه) ۴۴

(۳۵) در یک صفحه‌ی شطرنج (8×8) به چند روش می‌توان ۸ رخ در خانه‌های سیاه قرار داد که هیچ دو رخی یک‌دیگر را تهدید نکنند (در یک سطر یا یک ستون نباشند)؟

الف) $8!/2$ (ب) ۱۲۰ (ج) ۵۷۶ (د) ۴۰۹۶ (ه) ۱۴۴۰۰

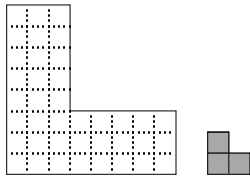
(۳۶) دو تابع A و B به صورت زیر بر روی اعداد طبیعی تعریف شده‌اند.

$$A(n) = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ B(n+1) - 1 & n > 1, \end{cases} \quad B(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 2, \\ A(n-2) + 2 & n > 2 \end{cases}$$

مقدارهای $A(1381)$ و $B(2003)$ چه قدرند؟

الف) ۱۳۸۱ و ۲۰۰۳ (ب) ۱۳۸۰ و ۲۰۰۲ (ج) ۱۳۸۲ و ۲۰۰۳ (د) ۱۳۸۲ و ۲۰۰۴ (ه) ۱۳۸۰ و ۲۰۰۳

مرحله ی اول سیزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



۳۷) به چند طریق می توان سالن به شکل مقابل را با موزائیک نشان داده شده کاملاً پوشاند به طوری که موزائیک ها روی هم قرار نگیرند؟

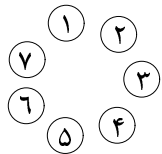
الف) ۸

ب) ۱۲

ج) ۱۴

د) ۱۶

ه) ۲۰



۳۸) بهداد مشغول انجام بازی «دامبلدور» است. این بازی به این صورت انجام می شود: ۷ سنگ با شماره های ۱ تا ۷ به صورت زیر قرار دارند. در حرکت i ام بازی، بهداد به صورت یک-پا ۱- i سنگ را در جهت ساعت گرد رد کرده و به صورت جفت-پا روی سنگ بعد می پرد و می ایستد. برای مثال بهداد در شروع بازی روی سنگ ۱ است. او در حرکت اول جفت-پا روی سنگ ۲ می پرد. در حرکت دوم یک-پا روی سنگ ۳ پریده و سپس جفت پا روی سنگ ۴ می پرد.

در حرکت سوم، یک-پا روی سنگ های ۵ و ۶ پریده و سپس جفت-پا روی سنگ ۷ می پرد و بالاخره، در حرکت چهارم، به صورت یک-پا روی سنگ های ۱، ۲، ۳ می پرد و روی سنگ ۴ به صورت جفت-پا می ایستد. آیا می توانید مشخص کنید بهداد پس از حرکت ۱۳۸۱ام روی کدام سنگ خواهد بود؟

الف) ۱

ب) ۲ یا ۳

ج) ۴

د) ۵ یا ۶

ه) ۷

۳۹) روز دیگر محمد به بازی «اسنیپ» پرداخت. این بازی شبیه بازی دامبلدور است. در این بازی ۱۰ سنگ ۱ تا ۱۰ به صورت دایره ای شکل قرار گرفته اند. محمد روی سنگ ۱ قرار دارد. او در حرکت i ام باز هم روی ۱- i سنگ به صورت یک-پا و سپس روی سنگ بعدی جفت-پا می پرد. اما فرق مهم این دو بازی در این است که در این بازی هرگاه محمد به صورت جفت-پا روی سنگ ۱ بیرد، جهت پریدنش را عوض می کند. مثلاً تصور کنید پس از حرکت سوم او روی سنگ ۷ قرار دارد. او در حرکت چهارم به صورت یک-پا به ترتیب روی سنگ های ۸، ۹ و ۱۰ خواهد پرید و سپس به صورت جفت-پا روی سنگ ۱ می پرد. حال جهت حرکتش عوض می شود و در حرکت پنجم، به صورت یک-پا از روی سنگ های ۱۰، ۹، ۸، و ۷ خواهد گذشت و به صورت جفت-پا روی سنگ ۶ می پرد. مشخص کنید پس از حرکت ۲۰۰۳ام او روی کدام سنگ خواهد بود؟

الف) ۱ یا ۲

ب) ۳ یا ۴

ج) ۵ یا ۶

د) ۷ یا ۸

ه) ۹ یا ۱۰

۴۰) در یک خانواده ی مردسالار مجموعه ی «اجداد» یک نفر برابر است با پدر او، پدر پدر او و ... و مجموعه ی «بزرگ تر» های یک نفر برابر است با اجداد و برادران اجداد او. در روز عید، بزرگ فامیل که هیچ برادری بزرگ تری ندارد یک سکه به یکی از پسران خود می دهد. هر کس که سکه را دریافت کند یا آن را برای خود برمی دارد و یا آن را به یکی از پسرانش یا یکی از بزرگ ترهایش می بخشد. اگر G نام بزرگ فامیل و P ، Q ، R ، و S نام ۴ نفر از اعضای آن فامیل باشد که در یک دور بازی مشارکت داشته اند، کدام یک از ترتیبات دریافت سکه زیر ممکن نیست؟

الف) $G \rightarrow P \rightarrow R \rightarrow Q \rightarrow S \rightarrow R$ ب) $G \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow P$ ج) $G \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow Q \rightarrow P$ د) $G \rightarrow P \rightarrow R \rightarrow Q \rightarrow S \rightarrow R$ ه) $G \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow Q \rightarrow S$

«موفق باشید»

پاسخ تشریحی

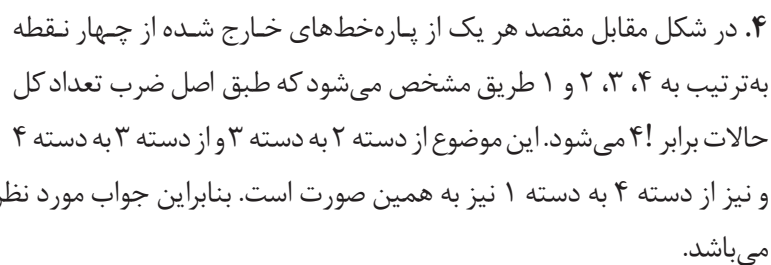
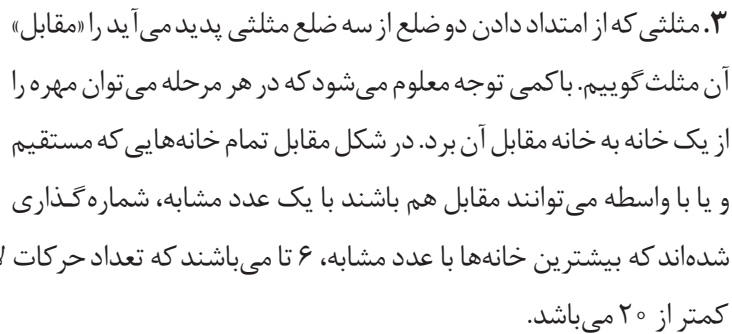
سیزدهمین المپیاد کامپیوتر

۱. کافی است ثابت کنیم جای هر دو عدد مانند x و y را می توانیم عوض کنیم، بدون آن که جای بقیه اعداد عوض شود:

● اگر $|x - y| \geq 2$ آنگاه جای آن دو عدد را با هم عوض می کنیم.

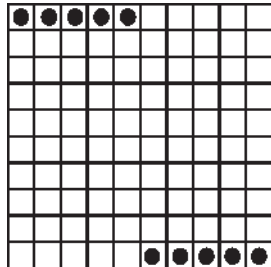
● اگر $|x - y| < 2$ آنگاه عددی مانند z وجود دارد به طوری که $|x - z| \geq 2$ و $|y - z| \geq 2$. در این صورت جای x را با z و سپس جای z را با y عوض می کنیم که در این صورت فقط جای دو عدد x و y با هم عوض خواهد شد.

۲. چون ثانیه شمار صفحه A ثابت است، باید بقیه ثانیه شمارها (که متحرک هستند) مثل آن ثانیه شمار باشند. این موضوع برای عقربه های دقیقه شمار و ساعت شمار نیز مصداق دارد. بنابراین تنها حالتی که هر سه عقربه در هر سه ساعت وضعیت مشابه دارند در ساعت $3^{\circ} : 15' : 10^{\circ}$ می باشد. لازم به ذکر است که صفحات آن سه ساعت نیز مشابه هم خواهد بود چون در هر لحظه در هر یک از آنها، صفحات چنان می چرخند که ساعت زمان درست را نشان دهد. بنابراین از هر ۱۲ ساعت یک بار، وضعیت سه ساعت کاملاً مشابه به هم خواهد بود که در طول 5° ساعت، با احتساب حالت اولیه، دقیقاً ۵ بار آن وضعیت اتفاق خواهد افتاد.



۶. معلوم است که با جمع کردن تعدادی از اعداد $\{1, 2, 4\}$ همه اعداد از ۱ تا ۷ را به شکل زیر می‌توان تولید کرد:

حال باید توجه کرد که اگر زیرمجموعه دلخواهی از $A = \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ را در نظر بگیریم، بستگی به این که مجموع اعضای آن زیرمجموعه در تقسیم بر ۸ چه باقی مانده‌ای داشته باشد، می‌توان زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\{1, 2, 4\}$ به آن اضافه کرد تا حاصل بر ۸ بخش‌پذیر باشد. اگر مجموع اعضای مجموعه تهی را ۰ در نظر بگیریم که بر ۸ بخش‌پذیر است، آنگاه به ازای هر زیرمجموعه دلخواهی از مجموعه A که تعداد آنها 2^7 یعنی ۱۲۸ است یک و فقط یک زیرمجموعه به صورت مطلوب یافت خواهد شد.



۷. معلوم است که اگر تعداد رخ‌ها کمتر از ۱۰ باشد همه خانه‌ها تهدید نخواهند شد زیرا در این صورت خانه‌ای وجود خواهد داشت که نه در سطرش مهره باشد و نه در ستونش. با ۱۰ رخ مطابق شکل مقابل می‌توان به جواب رسید.

۸. چون مقدار هر دو مؤلفه افزایش یافته‌اند و از بین دو دستور A و B فقط دستور A مقدار مؤلفه را افزایش می‌دهد معلوم می‌شود که در طول برنامه حتماً باید از دستور C استفاده کرد. از طرف دیگر چون دو عدد ۱ و ۵ به اندازه ۴ واحد از هم اختلاف دارند (که مضرب ۳ نیست) بنابراین لازم است از دستور B نیز حتماً استفاده شود و در ضمن در هر مرحله حداکثر ۳ واحد به مجموع مؤلفه‌ها (که در ابتدا ۲ + ۱ یعنی ۳ و در انتها ۵ + ۸ یعنی ۱۳ می‌باشد) اضافه می‌شود، بنابراین حداقل ۴ بار نیز باید از دستور A استفاده کرد که در این صورت حداقل ۶ دستور نیاز خواهد بود. با ۶ دستور به شکل زیر می‌توان به هدف رسید:

$(2, 1) \xrightarrow{A} (5, 1) \xrightarrow{B} (5, -1) \xrightarrow{C} (-1, 5) \xrightarrow{A} (2, 5) \xrightarrow{A} (5, 5) \xrightarrow{A} (8, 5)$

۹. اگر مجاز نبودیم از دستور C استفاده کنیم، آنگاه تعداد برنامه‌های مطلوب برابر با ۶ می‌شد که به شکل زیر می‌باشند:

AABB ABAB ABBA BBAA BABA BAAB

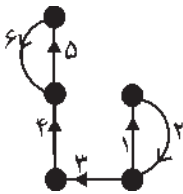
حال که قرار است دقیقاً یک عدد دستور C در لابه‌لای دستورهای قرار داده شود، آن را در جای دلخواه قرار داده و تمام دستورهای بعد از آن را تعویض می‌کنیم (A را به B و B را به A تبدیل می‌کنیم)، که در این صورت هر برنامه به دست آمده مطلوب خواهد شد. به عنوان مثال اگر حرف C را به عنوان دومین حرف از سمت چپ برنامه ABAB قرار دهیم آن برنامه به شکل ACABA تغییر خواهد یافت که نقطه (۰, ۰) را به (۲, ۲) تبدیل می‌کند.

چون در هر مورد برای C پنج جای متمایز وجود دارد. بنابراین تعداد دنباله‌های مطلوب ۶ × ۵ یعنی ۳۰ خواهد شد.

۱۰. حرکت به سمت‌های راست، چپ، بالا و پایین را به ترتیب r, d, l, u و نمایش می‌دهیم. حال گزینه‌ها را

یکی پس از دیگری امتحان کرده و جایگاه آنها را مشخص می کنیم:

الف) عدد ۶۰۳۹ به صورت $۴k+۳$ می باشد، بنابراین حرکت آخر d بوده و عدد قبل از آن $\frac{۶۰۳۹-۳}{۴}$ یعنی ۱۵۰۹ می باشد. عدد ۱۵۰۹ به صورت $۴k+۱$ می باشد، بنابراین حرکت آخر u بوده و عدد قبل از آن $\frac{۱۵۰۹-۱}{۴}$ یعنی ۳۷۷ می باشد. عدد ۳۷۷ به صورت $۴k+۱$ می باشد. بنابراین حرکت آخر u بوده و عدد قبل از آن $\frac{۳۷۷-۱}{۴}$ یعنی ۹۴ می باشد. عدد ۹۴ به صورت $۴k+۲$ می باشد، بنابراین حرکت آخر l بوده و عدد قبل از آن $\frac{۹۴-۲}{۴}$ یعنی ۲۳ می باشد. عدد ۲۳ به صورت $۴k+۳$ می باشد، بنابراین حرکت آخر d بوده و عدد قبل از آن $\frac{۲۳-۳}{۴}$ یعنی ۵ می باشد. عدد ۵ به صورت $۴k+۱$ می باشد، بنابراین حرکت آخر u بوده و عدد قبل از آن ۱ می باشد.



با توجه به توضیحات فوق معلوم می شود که عدد ۶۰۳۹ بعد از دنباله $udluud$ نوشته می شود که جایگاه آن با توجه به شکل زیر در نقطه $(-۱, -۱)$ خواهد بود:

$$\begin{aligned} ۱۰۸۲ &= ۴k+۲ \Rightarrow k=۲۷۰, & \text{حرکت} &= l \\ ۲۷۰ &= ۴k+۲ \Rightarrow k=۶۷, & \text{حرکت} &= l \\ ۶۷ &= ۴k+۳ \Rightarrow k=۱۶, & \text{حرکت} &= d \\ ۱۶ &= ۴k \Rightarrow k=۴, & \text{حرکت} &= r \\ ۴ &= ۴k \Rightarrow k=۱, & \text{حرکت} &= r \end{aligned}$$

عدد ۱۰۸۲ بعد از دنباله $rrdll$ نوشته می شود که جایگاه آن نقطه $(۰, -۱)$ می باشد.

$$\begin{aligned} ۱۳۴۷ &= ۴k+۳ \Rightarrow k=۳۳۶, & \text{حرکت} &= d \\ ۳۳۶ &= ۴k \Rightarrow k=۸۴, & \text{حرکت} &= r \\ ۸۴ &= ۴k \Rightarrow k=۲۱, & \text{حرکت} &= r \\ ۲۱ &= ۴k+۱ \Rightarrow k=۵, & \text{حرکت} &= u \\ ۵ &= ۴k+۱ \Rightarrow k=۱, & \text{حرکت} &= u \end{aligned}$$

عدد ۱۳۴۷ بعد از دنباله $uurrd$ نوشته می شود که جایگاه آن نقطه $(۲, ۱)$ می باشد.

۲۵۰

(المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)

$$5132 = 4k \Rightarrow k = 1283, \text{ حرکت } = r \quad (د)$$

$$1283 = 4k + 3 \Rightarrow k = 320, \text{ حرکت } = d$$

$$320 = 4k \Rightarrow k = 80, \text{ حرکت } = r$$

$$80 = 4k \Rightarrow k = 20, \text{ حرکت } = r$$

$$20 = 4k \Rightarrow k = 5, \text{ حرکت } = r$$

$$5 = 4k + 1 \Rightarrow k = 1, \text{ حرکت } = u$$

عدد ۵۱۳۲ بعد از دنباله urrrdr نوشته می شود که جایگاه آن نقطه (۴, ۰) می باشد.

$$5921 = 4k + 1 \Rightarrow k = 1480, \text{ حرکت } = u \quad (ه)$$

$$1480 = 4k \Rightarrow k = 370, \text{ حرکت } = r$$

$$370 = 4k + 2 \Rightarrow k = 92, \text{ حرکت } = l$$

$$92 = 4k \Rightarrow k = 23, \text{ حرکت } = r$$

$$23 = 4k + 3 \Rightarrow k = 5, \text{ حرکت } = d$$

$$5 = 4k + 1 \Rightarrow k = 1, \text{ حرکت } = u$$

عدد ۵۹۲۱ بعد از دنباله udrfru نوشته می شود که جایگاه آن نقطه (۱, ۱) می باشد.

۱۱. هر بار که لامپ i از ۰ به ۱ تبدیل می شود لامپ های سمت چپ آن تغییر نمی کنند ولی هرگاه آن لامپ از ۱ به ۰ تبدیل می شود لامپ $(i+1)$ هم تغییر وضعیت می دهد. بنابراین اگر لامپ i ، k بار تغییر وضعیت دهد (که k بار آن از ۰ به ۱ و k بار دیگر آن از ۱ به ۰ می باشد) آنگاه لامپ $(i+1)$ ، k بار تغییر وضعیت می دهد. معلوم است که لامپ اول ۶۴ بار تغییر وضعیت می دهد، بنابراین لامپ های دوم، سوم، ... و هفتم به ترتیب ۳۲، ۱۶، ۸، ۴، ۲ و ۱ بار تغییر وضعیت خواهند داد. بنابراین:

$$\sum_{i=1}^7 d_i = 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127$$

۱۲. بهترین حالت آن است که در یک روز از جستجو جای دقیق دزد را شناسایی کنیم. چون از هر شهر حداقل به دو شهر دیگر می توان رفت، بنابراین باگذشت زمان هرگز جای دقیق دزد معلوم نخواهد شد.



۱۳. شهرها را مطابق شکل مقابل نام گذاری می کنیم:

● روز اول به شهر A می رویم که اگر دزد در آن شهر بود دستگیر می کنیم و در غیر این صورت فاصله آن از A را اندازه گرفته و جای دقیق دزد را متوجه می شویم که یکی از حالات زیر پیش می آید:
□ اگر فاصله ۱ باشد یعنی دزد در شهر B است و در انتهای آن روز به یکی از دو شهر A و یا C خواهد رفت.

● روز دوم به شهر C می رویم که اگر دزد در آن جا بود دستگیر می کنیم، در غیر این صورت او حتماً در شهر A است که در انتهای روز به ناچار به شهر B خواهد رفت.
● روز سوم به شهر B رفته و دزد را دستگیر می کنیم.
□ اگر فاصله ۲ باشد آنگاه دزد در شهر C می باشد که در انتهای روز به یکی از دو شهر D و یا B خواهد رفت.

● روز دوم به شهر D رفته و اگر دزد در آن شهر بود او را دستگیر می کنیم، در غیر این صورت او حتماً در شهر B است که در انتهای روز به یکی از دو شهر C و یا A خواهد رفت.
● روز سوم به شهر C رفته و اگر دزد در آن شهر بود او را دستگیر کرده و در غیر این صورت متوجه می شویم که او حتماً در شهر A است که در انتهای روز به ناچار به شهر B خواهد رفت.
● روز چهارم به شهر B رفته و دزد را دستگیر می کنیم.
□ اگر فاصله ۳ باشد آنگاه دزد در شهر D می باشد که در انتهای روز به یکی از دو شهر C و یا E خواهد رفت.

● روز دوم به شهر C رفته و اگر دزد در آن شهر بود او را دستگیر می کنیم در غیر این صورت او حتماً در شهر E است که در انتهای روز به یکی از دو شهر F و D خواهد رفت.
● روز سوم به شهر D رفته و اگر دزد در آن شهر بود او را دستگیر کرده و در غیر این صورت متوجه می شویم که او در شهر F است که در انتهای روز به ناچار به شهر E خواهد رفت.
● روز چهارم به شهر E رفته و او را دستگیر می کنیم.
□ اگر فاصله ۴ باشد آنگاه دزد در شهر E می باشد که در انتهای روز به یکی از دو شهر F و یا D خواهد رفت.

● روز دوم به شهر D رفته و اگر دزد در آن شهر بود او را دستگیر کرده و در غیر این صورت متوجه

می شویم که او در شهر F است که در انتهای روز به ناچار به شهر E خواهد رفت.

● روز سوم به شهر E رفته و دزد را دستگیر می کنیم.

□ اگر فاصله ۵ باشد آنگاه دزد در شهر F می باشد که در انتهای روز به شهر E خواهد رفت.

● روز دوم به شهر E رفته و دزد را دستگیر می کنیم.

۱۴. اولاً از نابرابری $f(n+1) > f(n)$ معلوم می شود که تابع اکیداً صعودی است، بنابراین رابطه $f(n) \geq n$ برقرار است و چون $f(1) \neq 1$ ، در نتیجه $f(n) > n$ (اگر $f(1) = 1$ ، آنگاه $f(f(1)) = 3$ یا $f(1) = 3$ که تناقض است).

اگر $f(1) = k \geq 3$ آنگاه $f(f(1)) = 3 \times 1$ یا $f(k) = 3$ که با $f(n) > n$ در تضاد است، بنابراین $f(1) = k = 2$:

$$\begin{aligned} f(1) = 2 &\Rightarrow f(f(1)) = 3 \Rightarrow f(2) = 3 \\ &\Rightarrow f(f(2)) = 6 \Rightarrow f(3) = 6 \\ &\Rightarrow f(f(3)) = 9 \Rightarrow f(6) = 9 \\ &\Rightarrow f(f(6)) = 18 \Rightarrow f(9) = 18 \end{aligned}$$

f		e	c
g	d	h	
		a	

۱۵. معلوم است که مربعی که از همه بالاتر است مربع B می باشد که با برداشتن آن به شکل مقابل خواهیم رسید:

		e	c
g	d	h	
		a	

در این حالت باید مربع F را برداریم که شکل باقی مانده به شکل زیر خواهد بود:

بعد از این مرحله اولین مربع قابل برداشت، مربع E می باشد که در بین گزینه ها فقط گزینه «ب» با مطالب اشاره شده سازگاری دارد.

۱۶. معلوم است که تعداد رشته های به طول i برابر 2^i می باشد. بنابراین آخرین رشته ۹ حرفی که به صورت bbbbbbbbbb می باشد رشته هزار و بیست و دوم می باشد زیرا:

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1022$$

به تعداد 2^{10} رشته ده حرفی می توان ساخت که نصف آنها با حرف a و نصف دیگر با حرف b شروع می شوند و چون رشته ۱۳۸۱ اُم به نصفه اول متعلق است، بنابراین آن رشته با حرف a شروع می شود. لازم به ذکر است که رشته مورد نظر سیصد و پنجاه و نهمین رشته ده حرف است، زیرا $1022 = 359 - 1381$ در بین ۵۱۲ رشته ای که با a شروع می شوند ۲۵۶ تای اول آنها حرف دوم a و ۲۵۶ تای دیگر (که ۳۵۹ نیز به همین دسته متعلق است) حرف دوم b دارند. در بین آن ۲۵۶ رشته، ۱۲۸ تای اول حرف سوم a و ۱۲۸ تای دوم حرف سوم b دارند (چون $128 < 103 = 256 - 359$ ، بنابراین رشته مورد نظر به دسته اول تعلق دارد). اگر به همین ترتیب ادامه دهیم خواهیم داشت:

$$1381 - 1022 = 359 < 512 \Rightarrow \text{حرف اول} = a$$

$$359 > 256 \Rightarrow \text{حرف دوم} = b$$

$$359 - 256 = 103 < 128 \Rightarrow \text{حرف سوم} = a$$

$$103 > 64 \Rightarrow \text{حرف چهارم} = b$$

$$103 - 64 = 39 > 32 \Rightarrow \text{حرف پنجم} = b$$

$$39 - 32 = 7 < 16 \Rightarrow \text{حرف ششم} = a$$

$$7 < 8 \Rightarrow \text{حرف هفتم} = a$$

$$7 > 4 \Rightarrow \text{حرف هشتم} = b$$

$$7 - 4 = 3 > 2 \Rightarrow \text{حرف نهم} = b$$

$$3 - 2 = 1 \Rightarrow \text{حرف دهم} = a$$

۱۷. مجموع سکه های ۲ تومانی حداکثر برابر ۲۰ می تواند باشد، بنابراین تعداد کاسه های شامل ۵ تومانی حداقل برابر ۱۳ و حداکثر برابر ۱۵ می باشد. چون مجموع سکه های ۲ تومانی زوج است، بنابراین مجموع سکه های ۵ تومانی باید فرد باشد، بنابراین تعداد کاسه های شامل ۵ تومانی یا برابر ۱۳ است (که در این صورت تعداد کاسه های شامل ۲ تومانی برابر ۸ خواهد بود) و یا تعداد آن کاسه ها برابر ۱۵ است (که در

این صورت تعداد کاسه های شامل ۲ تومانی برابر ۳ خواهد بود، بنابراین جواب به شکل زیر خواهد بود:

$$? = \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۱۸. اگر دنباله داده شده را به صورت $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ تصور کنیم آنگاه دنباله $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ را به

شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i \end{cases}$$

بنابراین دنباله جدید به شکل زیر به دست خواهد آمد:

$$0, 2, 2, 2, 5, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 22, 23, 24, 25, 26, 27$$

اگر b_k و b_l در تقسیم بر ۵ باقی مانده یکسان داشته باشند، آنگاه $b_k - b_l$ مضرب ۵ بوده و معلوم خواهد شد که زیر دنباله $a_1, a_2, \dots, a_k$ مضرب ۵ است. بنابراین کافی است زوج b_i هایی را پیدا کنیم که در تقسیم بر ۵ باقی مانده یکسانی دارند. b_i ها متناسب با باقی مانده بر ۵ به پنج دسته زیر افراز می شوند:

$$0: 0, 5, 10, 25$$

$$1: 6, 11, 26$$

$$2: 2, 7, 22, 27$$

$$3: 23$$

$$4: 9, 14, 24$$

به ازای انتخاب هر دو عضو از یک دسته به یک زیر دنباله مضرب ۵ خواهیم رسید، بنابراین:

$$? = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 26$$

۱۹. حداکثر تعداد نفرات برای موقعی است که در هر یک از ردیف های ۱، ۶، ۱۱، ۱۶، ...، ۹۶ و ۱۰۱ دقیقاً

۲۰۰ نفر و در هر یک از سایر ردیف ها ۰ نفر نشسته باشند که در این حالت تعداد نفرات 21×200 یعنی

۴۲۰۰ خواهد شد. حداقل تعداد نفرات نیز برای موقعی است که در هر یک از ردیف های ۵، ۱۰، ۱۵، ... و

۱۰۰ دقیقاً ۲۰۰ نفر و در هر یک از سایر ردیف ها ۰ نفر نشسته باشند که در این حالت تعداد نفرات

200×200 یعنی ۴۰۰۰ خواهد شد.

۲۰.

● اگر نفر اول در ابتدا ۱ و در انتها $a \times$ را انتخاب کند (اگر نفر دوم $\circ$ را انتخاب کند a برابر ۲ و اگر نفر دوم ۲ را انتخاب کند آنگاه a برابر $\circ$ است) حاصل عدد به دست آمده مستقل از علامت انتخابی نفر دوم زوج خواهد شد.

● اگر نفر اول عدد ۱ را انتخاب کند آنگاه نفر دوم با انتخاب $2 \times$ مستقل از انتخاب آخر نفر اول می تواند حاصل را زوج کند. و اما اگر نفر اول عدد $\circ$ و یا ۲ را انتخاب کند آنگاه نفر دوم با انتخاب $1 \times$ مستقل از انتخاب آخر نفر اول می تواند حاصل را زوج کند.

۲۱. تعداد دایره ها، مثلث ها و مربع های موجود در مرحله n ام را به ترتیب با $D(n)$ ، $S(n)$ و $R(n)$ نمایش می دهیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$D(1) = 1, \quad S(1) = 2, \quad R(1) = \circ$$

$$D(n) = D(n-1) + R(n-1)$$

$$R(n) = S(n-1)$$

$$S(n) = D(n)$$

بنابراین به جواب زیر خواهیم رسید:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
D	۱	۱	۳	۴	۷	۱۱	۱۸	۲۹	۴۷	۷۶	۱۲۳	۱۹۹
S	۲	۱	۳	۴	۷	۱۱	۱۸	۲۹	۴۷	۷۶	۱۲۳	۱۹۹
R	$\circ$	۲	۱	۳	۴	۷	۱۱	۱۸	۲۹	۴۷	۷۶	۱۲۳

با توجه به جدول فوق معلوم می شود که در انتهای مرحله ۱۱ تعداد مثلث ها برابر ۱۲۳ می باشد.

۲۲. خطوط افقی و عمودی مربوط به نقطه i حداکثر یکی از خطوط افقی و یا عمودی مربوط به نقطه j را قطع می کنند. بنابراین با اضافه شدن نقطه k ام حداکثر $(k-1)$ نقطه تلاقی جدید پدید می آید که به ازای حداقل یکی از نقاط تلاقی ناحیه باز و به ازای حداکثر $(k-2)$ نقطه تلاقی دیگر ناحیه بسته ایجاد می شود. بنابراین اگر حداکثر تعداد ناحیه های بسته برای k نقطه را با $D(k)$ نشان دهیم

رابطه $D(k) = D(k-1) + k - 2$ برقرار خواهد بود. از طرف دیگر چون $D(2) = 0$ ، بنابراین:

$$D(3) = D(2) + 1 = 1$$

$$D(4) = D(3) + 2 = 3$$

$$D(5) = D(4) + 3 = 6$$

$$D(6) = D(5) + 4 = 10$$

$$D(7) = D(6) + 5 = 15$$

۲۳. اگر تصور کنیم که در حرکت i ام به اندازه i واحد به جلو بجهد آنگاه خواهیم داشت:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n < 1381 < 1 + 2 + 3 + \dots + (n+1)$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} < 1381 \Rightarrow n(n+1) < 2762 \Rightarrow n < 53$$

به ازای $n = 52$ و در حالتی که قورباغه در حرکت i ام به اندازه i واحد بجهد به نقطه $\frac{52 \times 53}{2}$ یعنی

۱۳۷۸ خواهد رسید. بنابراین کافی است برای رسیدن به نقطه ۱۳۸۱ در ۵۲ حرکت، فقط در سه جهش

از ۵۲ جهش به جای i واحد جهیدن، به اندازه $i+1$ واحد بجهد.

اگر تصور کنیم که قورباغه از حرکت ۵۲ به بعد در هر حرکت کمترین مقدار ممکن را بجهد آنگاه بعد از

۱۰ حرکت به نقطه ۱۹۵۶ خواهد رسید زیرا: $62 + 55 + 54 + 53 + (1381) = 1956$. و اگر قورباغه

در هر حرکت بیشترین مقدار ممکن را بجهد آنگاه بعد از ۱۰ حرکت به نقطه ۱۹۶۶ خواهد رسید که

عقب تر از نقطه ۲۰۰۳ می باشد. اما نقطه مقصد بعد از ۱۱ حرکت به ترتیب در حالتی که قورباغه کمترین

مقدار و نیز بیشترین مقدار را بجهد برابر ۲۰۱۹ و ۲۰۳۰ می شود، به این معنا که رسیدن به نقطه ۲۰۰۳ از

نقطه ۱۳۸۱ با شرایط اشاره شده غیر ممکن است.

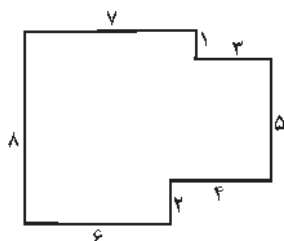
۲۴. اگر از یک نقطه از محیط چندضلعی اشاره شده، شروع و در یک جهت محیط آن را طی کنیم تا به

نقطه شروع بازگردیم آنگاه تعداد واحدهایی که به سمت راست حرکت می کنیم با تعداد واحدهایی که به

سمت چپ حرکت می کنیم برابر است و این موضوع برای جهت های بالا و پایین نیز صحیح است، به این

معنا که مجموع واحدهای عمودی و نیز مجموع واحدهای افقی زوج است که زوج بودن کل محیط n

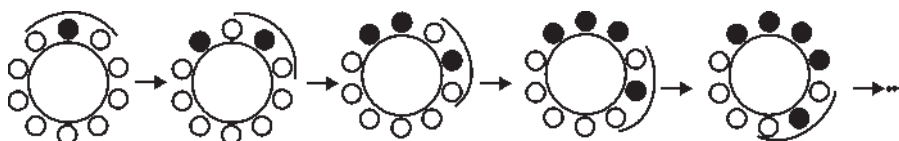
ضلعی را نتیجه می دهند.



به ازای $n = 4$ به مستطیل می رسمیم که طول دو ضلع مقابل آن با هم برابر است و شرایط مسأله را برآورده نمی کند. به ازای $n = 6$ چون مجموع اعداد از ۱ تا ۶ برابر ۲۱ بوده و فرد است، شرایط مسأله برآورده نمی شود. به ازای $n = 8$ به شکلی مانند شکل مقابل می رسمیم:

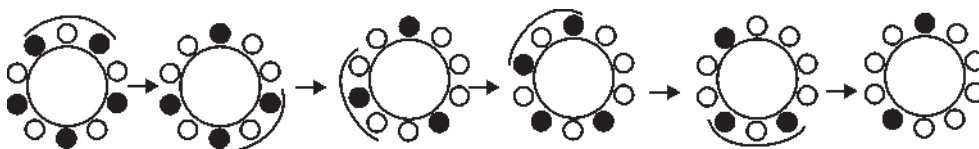
۲۵. اولاً واضح است که تعداد H ها نمی تواند برابر ۱۰ باشد، زیرا آخرین تغییر هم شامل H است و هم T .

ثانیاً اگر تصور کنیم که تعداد H ها برابر ۹ باشد، مراحل انجام شده را از انتها به ابتدا مرتب می کنیم (H را با $\circ$ و T را با $\bullet$ نمایش می دهیم):



چون در هر مرحله سه تایی قابل تعویض منحصر به فرد می باشد، بنابراین نهایت کار مشخص است و هرگز سکه ها به صورت یک در میان H و T نخواهند شد.

و اما مراحل تولید ۸ تا H به شکل زیر می باشد:



۲۶. برای آن که حاصل $b/c * d$ مقدار واقعی خود را نشان دهد آن را به یکی از چهار شکل زیر می توان پرانتزگذاری کرد:

۱) $b/c * d$

۲) $(b/c * d)$

۳) $(b/c) * d$

۴) $((b/c) * d)$

همچنین اگر آن عبارت را t بنامیم آنگاه حاصل عبارت $a - t + e$ را مستقل از قبلی ها به چهار شکل زیر

می توان پرانتزگذاری کرد:

۱) $a - t + e$ ۲) $(a - t + e)$

۳) $(a - t) + e$ ۲) $((a - t) + e)$

بنابراین تعداد کل پرانتزگذاری ها 4×4 یعنی ۱۶ خواهد شد.

۲۷. یکی از سه حالت زیر پیش می آید:

۱) هر پنج عضو متوالی باشند که تعداد این مجموعه ها برابر ۹۶ به دست می آید.

۲) دو عضو کوچک آن متوالی و نیز سه عضو بزرگ آن نیز متوالی باشند ولی عضو دوم آن با عضو سومش متوالی نباشند که در این صورت مجموعه ای از ۱ تا ۱۰۰ به شکل زیر افراز خواهد شد:

$$\underbrace{\quad \times \times}_{x} \underbrace{\quad \times \times \times}_{y} \underbrace{\quad \times \times \times \times}_{z}$$

تعداد افرازهای فوق با تعداد جواب های معادله $x + y + z = 95$ با شرایط $x \geq 0$ و $y \geq 1$ ، $z \geq 0$ برابر است که تعداد جواب های چنین معادله ای برابر $\left[\begin{smallmatrix} 96 \\ 3 \end{smallmatrix} \right]$ یعنی ۴۵۶۰ می باشد.

۳) سه عضو کوچک آن متوالی و نیز دو عضو بزرگ آن نیز متوالی باشند ولی عضو سوم آن با عضو چهارمش متوالی نباشد که در این صورت نیز تعداد جواب ها برابر $\left[\begin{smallmatrix} 96 \\ 3 \end{smallmatrix} \right]$ یا ۴۵۶۰ به دست می آید.

۲۸. ابتدا کره ها را به سه دسته دوتایی یک دسته یکی ای تقسیم کرده و کره های موجود در هر دسته دوتایی را به هم می چسبانیم که یکی از حالات زیر اتفاق می افتد:

۱) هیچ زوجی جرقه نزنند. در این حالت معلوم می شود که کره تنها، از جنس غالب است.

۲) فقط یک زوج جرقه بزنند. معلوم می شود که هر دو کره موجود در آن دسته از جنس غالب است.

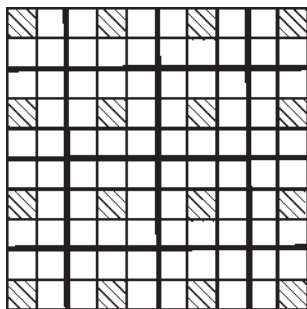
۳) فقط دو زوج جرقه بزنند. از هر یک از این دسته ها یک کره بیرون آورده و آن دو را به هم می چسبانیم که اگر جرقه زد، آنگاه هر دو از جنس غالب هستند و اگر جرقه نزنند، از جنس غالب خواهد بود.

۴) هر سه زوج جرقه بزنند. از هر یک از دسته های اول و دوم یک کره بیرون آورده و به هم می چسبانیم، اگر جرقه بزنند که غالب هستند و اگر جرقه نزنند هر دو کره موجود در دسته سوم غالب هستند.

در هر حالت معلوم می شود که تعداد اعمال چسباندن بیش از ۴ نمی شود.

۲۹. ابتدا توجه می‌کنیم که برای ترکیب سه دنباله با طول های a ، b و c ابتدا دو تا از آنها مانند a ، b را ترکیب کرده (که حاصل دنباله به طول $a+b$ و با هزینه $a+b$ می‌شود) و سپس دنباله های حاصل را با دنباله سوم ترکیب می‌کنیم که حاصل دنباله ای به طول $a+b+c$ شده ولی هزینه آن $(a+b)+c$ می‌شود که در کل مجموع هزینه ها برابر $c+2(a+b)$ می‌شود. برای آن که کل هزینه ها مینیمم شود کافی است هر یک از دو عدد a و b از عدد c کمتر یا مساوی باشند. بنابراین در هر دسته ای که حداقل ۳ دنباله داشته باشد ابتدا دنباله های با طول مینیمم را با هم ترکیب می‌کنیم، که به جدول زیر خواهیم رسید.

هزینه	دسته جدید	دسته دنباله ها
۹	۶, ۷, ۸, ۸, ۹, ۱۰	۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۸, ۱۰
۱۳	۸, ۸, ۹, ۱۰, ۱۳	۶, ۷, ۸, ۸, ۹, ۱۰
۱۶	۹, ۱۰, ۱۳, ۱۶	۸, ۸, ۹, ۱۰, ۱۳
۱۹	۱۳, ۱۶, ۱۹	۹, ۱۰, ۱۳, ۱۶
۲۹	۱۹, ۲۹	۱۳, ۱۶, ۱۹
۴۸	۴۸	۱۹, ۲۹
۱۳۴		



۳۰. اگر جدول را مطابق شکل، به ۱۶ ناحیه افراز کنیم آنگاه معلوم می‌شود که وجود حداقل یک خانه علامت دار در هر ناحیه الزامی است. بنابراین وجود حداقل ۱۶ خانه علامت دار حتمی است. در شکل با ۱۶ خانه علامت دار به منظور مسأله رسیده ایم:

$$A(n) = B(n+1) - 1 \Rightarrow A(n) = [A(n-1) + 2] - 1 = A(n-1) + 1 \quad ۳۱$$

یعنی به ازای $n \geq 2$ حاصل $A(n)$ از عدد قبلی خود ۱ واحد بیشتر است و چون $A(2) = 2$ ، بنابراین $A(n) = n$ همیشه برقرار است.

$$B(n) = A(n-2) + 2 \Rightarrow B(n) = [B(n-1) - 1] + 2 = B(n-1) + 1$$

یعنی به ازای $n \geq 3$ حاصل $B(n)$ از عدد قبلی خود ۱ واحد بیشتر است و چون $B(3) = 3$ ، بنابراین $B(n) = n$ به ازای $n \geq 3$ همیشه برقرار است.

۳۲. اگر خانه های با مختصات $(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)$ را به ترتیب انتخاب کنید صفحه شطرنجی خواهد شد. لازم به ذکر است که انتخاب هر یک از آن خانه ها الزامی است، زیرا خانه ای مانند $(2, 1)$ را فقط انتخاب خودش می تواند تغییر رنگ دهد.

۳۳. به هر دانش آموز یک کد از ۱ تا ۳۰ داده و شماره او را در مبنای ۲ در نظر می گیریم. معلوم است که در آن مبنای شماره هر فرد حداکثر پنج رقمی است. بنابراین پنج لیست به نام های A, B, C, D و E در نظر گرفته و هر یک از آنها را متناظر به یکی از ارقام پنج گانه اعداد در مبنای ۲ قرار می دهیم. در جایگاه هایی که رقم ۱ باشد در لیست متناظر اسم فرد را می نویسیم و در غیر این صورت اسم او را در آن لیست نمی نویسیم. به عنوان مثال اسم نفر یازدهم در لیست های A, B, D نوشته شده ولی در لیست های C و E نوشته نمی شود، زیرا عدد ۱۱ در مبنای ۲ به شکل 101 نوشته می شود. لیست های پنج گانه را به یک نفر نشان می دهیم و او اطلاع می دهد که فرد المپیادی در کدام یک از لیست های پنج گانه قرار دارد که به این ترتیب شماره آن فرد شناسایی خواهد شد.

۳۴. اگر اعداد را از چپ به راست دوبه دو در داخل یک بسته در نظر بگیریم اولاً معلوم می شود که مجموع اعداد موجود در داخل هر بسته برابر 1001 می شود و ثانیاً بسته اول پنج رقمی، هشت بسته بعدی چهار رقمی، نود بسته بعدی پنج رقمی و مابقی بسته ها همگی شش رقمی می باشند. بنابراین پس از اتمام بسته ۹۹ تعداد ارقام به کار رفته به شکل زیر به دست می آید:

$$487 = 1 \times 5 + 8 \times 4 + 90 \times 5$$

بنابراین ۴۹۰ امین رقم، سومین رقم از بسته صدم می باشد. چون بسته صدم به شکل 100901 می باشد، بنابراین رقم مورد نظر رقم صفر می باشد.

۳۵. رقم اول و آخر را یک بسته، رقم دوم و ماقبل آخر (نهم) را یک بسته، و رقم پنجم و ششم را نیز یک بسته در نظر می گیریم. اولاً معلوم می شود که تعداد بسته ها برابر ۵ می باشد و ثانیاً دو رقم موجود در

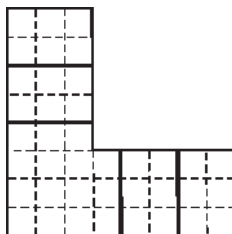
درون هر بسته مستقل از بسته های دیگر بر روی هم سه حالت «۰۰»، «۰۱» و «۱۰» را می توانند داشته باشند، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر 3^5 می باشد.

۳۶. انتخاب جایگاه رخ در هر یک از ستون های اول و دوم مستقل از یکدیگر به ۴ طریق، در ستون های سوم و چهارم به ۳ طریق، در ستون های پنجم و ششم به ۲ طریق و بالاخره در هر یک از دو ستون آخر به ۱ طریق ممکن است، بنابراین جواب مورد نظر $4! \times 4!$ یعنی ۵۷۶ می باشد.

۳۷. ابتدا باید توجه کرد که اگر X به Y و نیز Y به X سکه دهد آنگاه لازم است X و Y پدر و پسر باشند.



در گزینه «ه» نفرات Q و S پدر و پسر هستند و نمودار نفرات بدون R مطابق شکل مقابل می شود. در آن نمودار جایگاه R جایی است که بتواند به S سکه بدهد که با توجه به نمودار، فقط می تواند پسر S باشد (پدر S ، Q است و R نمی تواند پدر S باشد). اگر R پسر S باشد، آنگاه Q نمی تواند به R سکه بدهد در حالی که یکی از قسمت های گزینه «ه» به صورت $R \rightarrow Q$ می باشد. نمودار سایر گزینه ها به اشکال زیر می تواند باشد:



۳۸. در شکل مقابل هر یک از مستطیل های 2×3 مستقل از بقیه اشکال به دو طریق و نیز شکل پنجم فقط به یک طریق قابل پر شدن می باشند، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1$ یعنی ۱۶ می باشد.

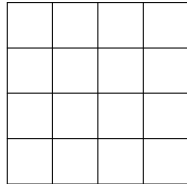
۳۹. اگر روی سنگ k ام باشیم و حرکت بعدی حرکت m ام باشد، با احتساب سنگی که به صورت جفت پا به روی آن پریده می شود مجموعاً m شماره طی می شود. بنابراین بعد از حرکت ۱۳۸۱ مجموعاً $۱ + ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۳۸۱$ یعنی ۹۵۴۲۷۲ شماره طی می شود و بعد از آن حرکت بر روی شماره ۹۵۴۲۷۲ قرار خواهیم داشت که اگر آن عدد را بر ۷ تقسیم کنیم باقی مانده ۴ می آورد به این معنا که در آخرین حرکت به صورت جفت پا به روی سنگ شماره ۴ پریده شده است. لازم به ذکر است که حرکت اول از روی سنگ شماره ۱ بوده است، بنابراین به مجموع اعداد از ۱ تا ۱۳۸۱ عدد ۱ اضافه شده است.

۴۰. چند حرکت ابتدایی مشخص است. شماره سنگ هایی که پس از حرکات اول، دوم، سوم و چهارم بر روی آنها به صورت جفت پا پریده می شود به ترتیب ۲، ۴، ۷ و ۱۱ (همان ۱) می باشد که از سنگ ۱ به ترتیب ۱ واحد، (۱+۲) واحد، (۱+۲+۳) واحد و بالاخره (۱+۲+۳+۴) واحد فاصله دارند. در این لحظه جهت عوض می شود و بعد از حرکت n ام دوباره به صورت جفت پا به روی شماره ۱ پریده خواهد شد که در آن n اولین عدد است که $n + \dots + ۷ + ۶ + ۵$ مضرب ۱۰ باشد و این نیز موقعی برقرار است که $n + \dots + ۳ + ۲ + ۱$ یا $\frac{n(n+1)}{۲}$ مضرب ۱۰ و یا $n(n+1)$ مضرب ۲۰ باشد که اولین n بعد از ۴ برای برآورده کردن آن شرط، $n = ۱۵$ می باشد. و بعد از ۱۵ نیز اعداد ۱۹ و ۲۰ آن شرط را برآورده می کنند. از حرکت بیستم تا حرکت سی و نهم کاملاً شبیه حرکت صفرم تا نوزدهم می باشد؛ یعنی سلسله حرکات دوره تناوبی به طول ۲۰ دارد، لذا حرکت ۲۰۰۳ در مکانی قرار داریم که در انتهای حرکت سوم داشته ایم، بنابراین بعد از آن حرکت بر روی سنگ هفتم به صورت جفت پا پریده خواهد شد.

مرحله ی اول دوازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱) به چند طریق می توان سه زیرمجموعه ی A ، B ، و C از $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ انتخاب کرد به طوری که $A \cap B = C$

الف) 2^7 (ب) 3×2^7 (ج) 5×2^7 (د) 2^{10} (ه) 3×2^{10}

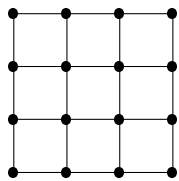


(۲) می خواهیم خانه های جدول زیر را به سه رنگ چنان رنگ آمیزی کنیم که هیچ دو خانه ای که مجاورند، (یعنی ضلع مشترک دارند) هم رنگ نباشند. حداقل چند خانه باید رنگ آمیزی شود تا رنگ بقیه ی خانه ها به طور یکتا مشخص شود؟

الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۷

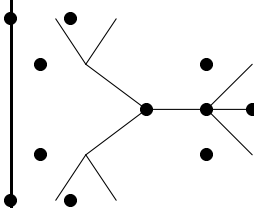
(۳) روی یک دایره اعداد ۱ تا ۸ را به ترتیب ساعت گرد چیده ایم. از عدد ۱ شروع می کنیم و در هر مرحله یا به عدد بعدی (در جهت ساعت گرد) می رویم و یا از روی عدد بعدی می پریم و به عدد پس از آن می رویم. وقتی که دوباره به ۱ رسیدیم متوقف می شویم. می دانیم که از ابتدای کار تا این لحظه ۱ بار از روی ۴ پریده ایم. به چند حالت ممکن است این کار را کرده باشیم؟

الف) کمتر از ۵۰۰ طریق (ب) بین ۵۰۰ و ۱۰۰۰ طریق (ج) بین ۱۰۰۱ و ۲۰۰۰ طریق
د) بین ۲۰۰۱ و ۴۰۰۰ طریق (ه) بیشتر از ۴۰۰۰ طریق



(۴) شکل روبه رو از ۲۴ پاره خط و ۱۶ نقطه تشکیل شده است. می بینید که در بیش ترین حالت برای رفتن از یک نقطه به یک نقطه دیگر باید از حداقل ۶ پاره خط بگذریم. می خواهیم از مجموع ۱۸ قطر مربع های کوچک ۲ تا را رسم کنیم تا در بیش ترین حالت با پیمایش ۵ پاره خط بتوان از هر نقطه به هر نقطه ی دیگر رسید. به چند حالت می توان این کار را انجام داد؟

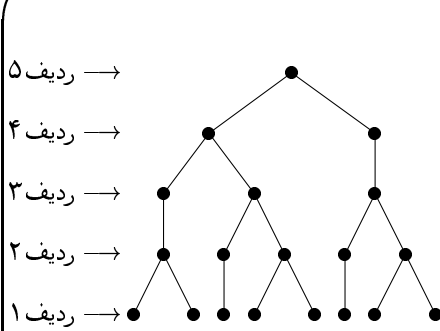
الف) صفر (ب) ۱ (ج) ۹ (د) ۸۱ (ه) ۱



(۵) شکل روبه رو ۱۲ رأس دارد که ۱۱ زوج آن با پاره خط هایی به هم وصل شده اند. می خواهیم هر کدام از رأس ها را با یکی از سه رنگ موجود رنگ کنیم به طوری که هیچ ۲ رأس متصل به هم، یک رنگ نشوند. به چند طریق این کار ممکن است؟

الف) کمتر از ۱۰۰۰ طریق (ب) بین ۱۰۰۰ و ۳۰۰۰ طریق (ج) بین ۳۰۰۰ و ۶۰۰۰ طریق (د) بین ۶۰۰۰ و ۲۰۰۰۰ طریق (ه) بین ۲۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰ طریق

مرحله ی اول دوازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



۶) یک بازی دو نفره روی ۸ رأس ردیف ۱ شکل روبه رو به این صورت انجام می شود: هر کس در نوبت خود یکی از این ۸ رأس که تا به حال رنگ نشده را انتخاب می کند و آن را به رنگ خود درمی آورد. رنگ مربوط به یکی از دو نفر سبز و رنگ مربوط به دیگری قرمز است. پس از پایان این کار، از ردیف دوم شروع می کنیم و هر رأس که از پایین فقط به یک رأس متصل است آن را به همان رنگ و اگر به ۲ رأس وصل باشد، در صورتی که آن ۲ رأس هم رنگ باشند، آن را به رنگ قرمز و اگر نه، به رنگ سبز در می آوریم. این کار را سطح به سطح انجام می دهیم تا به سطح پنجم برسیم. در نهایت صاحب رنگ رأس ردیف پنجم برنده است. چه کسی امکان برد حتمی را دارد؟

الف) نفر اول (ب) نفر دوم (ج) صاحب رنگ سبز (د) صاحب رنگ قرمز (ه) هیچ کدام

۲	۳	۲
۳	۲	۱

تعریف زیر را برای سه سؤال بعدی در نظر بگیرید: یک جدول $m \times n$ که در هر خانه آن یک عدد صحیح قرار می گیرد را شمارنده می گوئیم. اگر اختلاف عدد نوشته شده در هر دو خانه مجاور (سطری یا ستونی) آن دقیقاً یک باشد. به عنوان نمونه جدول روبه رو یک جدول شمارنده 3×2 است.

۷) می خواهیم در حداقل تعداد خانه های یک جدول $m \times n$ عدد بگذاریم به طوری که در بقیه ی خانه ها فقط به یک طریق بتوان عدد گذاشت تا حاصل یک جدول شمارنده باشد. این حداقل در چه بازه ای قرار دارد؟

الف) ۱ یا ۲ (ب) $[m+n-1, 3]$ (ج) $[\frac{mn}{3}, m+n]$ (د) $[mn-1, \frac{mn}{3}]$ (ه) دقیقاً mn

۸) یک جدول شمارنده $m \times n$ که روی همه ی خانه های آن را پوشانیده اند، داده شده است. می خواهیم پوشش روی حداقل تعداد خانه های آن را برداریم (عددهای آن برای ما مشخص شود) که بتوانیم عدد بقیه ی خانه ها را حدس بزنیم. حداقل در چه بازه ای قرار دارد؟

الف) ۱ یا ۲ (ب) $[m+n-1, 3]$ (ج) $[\frac{mn}{3}, m+n]$ (د) $[mn-1, \frac{mn}{3}]$ (ه) دقیقاً mn

۹) چند جدول شمارنده ی 2×5 وجود دارد که در خانه بالا و سمت چپ آن عدد یک قرار داده شده است؟

الف) بین ۱ تا ۴۰ عدد (ب) بین ۴۱ تا ۱۳۰ عدد (ج) بین ۱۳۱ تا ۲۰۰ عدد (د) بین ۲۰۱ تا ۲۸۰ عدد (ه) بیش از ۲۸۰ عدد

۱۰) فرض کنید تعدادی سنگ ریزه روی میز است. دو نفر با هم این بازی را (نوبتی) انجام می دهند: هر کس در نوبت خودش می تواند d سنگ ریزه از روی میز بردارد، به این شرط که تعداد سنگ ریزه های روی میز بر d بخش پذیر باشد و از d بزرگ تر باشد. هر کس با حرکتش باعث شود ۱ سنگ ریزه باقی بماند برنده می شود. اگر تعداد سنگ ریزه های اولیه در ۹ بازی انجام شده به ترتیب ۲، ۳، ... و ۱۰ باشد، در چند تا از این بازی ها نفر اول می تواند برنده شود؟

الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۷

۱۱) یک شبکه $m \times n$ از نقاط را در نظر بگیرید که در آن فاصله ی نقاط مجاور برابر ۱ است (افقی و عمودی). می خواهیم با کشیدن تعدادی خط با طول ۱ بین خانه های مجاور کاری کنیم که از هر نقطه بتوان با استفاده از این خطوط به هر

مرحله ی اول دوازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

نقطه ی دیگری رفت. در ضمن می خواهیم اگر هریک از خطوط به طول ۱ کشیده شده، پاک شود، باز هم این خاصیت حفظ شود، یعنی باز هم بتوان از هر نقطه به هر نقطه ی دیگر رفت. اگر $m = 5$ و $n = 3$ ، حداقل تعداد خطوط چند است؟

- الف) ۱۳ (ب) ۱۵ (ج) ۱۶ (د) ۱۷ (ه) ۱۸

۱۲) فرض کنید شبکه ای 5×4 از نقاط داریم که خانه ها با فاصله های منظم ۱ از هم قرار دارند و بین بعضی از خانه ها با فاصله ۱ خطوطی رسم شده است. یک ماشین در اختیار داریم که اگر شبکه ای را به او بدهیم یک شبکه عیناً مثل همان برای ما می سازد. در این صورت، ما دو شبکه عین هم خواهیم داشت. ما هم حق داریم این دو شبکه را هر طوری که بخواهیم روی هم بیندازیم: می توانیم شبکه ها را از صفحه جدا کنیم و در فضا بچرخانیم، فقط ابعاد دو شبکه باید بر هم منطبق باشند. یعنی باز هم یک شبکه 5×6 از نقاط خواهیم داشت. حالا دو نقطه مجاور به هم وصل هستند. اگر در حداقل یکی از شبکه هایی که روی هم رفته اند این دو به هم وصل بوده باشند مثلاً از شبکه راست به چپ برسیم. می خواهیم با تعدادی بار استفاده از این ماشین شبکه پر شود (تمام خانه های مجاور با فاصله ۱ به هم وصل شوند) حداقل تعداد خطوط اولیه چقدر می تواند باشد؟



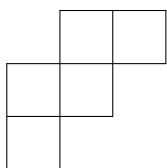
- الف) ۸ (ب) ۹ (ج) ۱۰ (د) ۱۱ (ه) ۱۳

۱۳) دو مرکز گازرسانی و ۶ شهر داریم. می خواهیم از مراکز گازرسانی به شهرها لوله کشی کنیم، به طوری که از هر مرکز گازرسانی ۶ لوله خارج شده باشد و به هر شهر ۲ لوله وارد شده باشد. اشکالی ندارد که در این لوله کشی ها از یک مرکز گازرسانی به یک شهر ۲ خط لوله کشیده شود. به چند طریق می توانیم لوله کشی کنیم؟

- الف) (ب) (ج) (د) (ه)

۱۴) سکه ای روی صفحه ی مختصات در نقطه ای با مختصات نامنفی قرار دارد. در هر لحظه یک تراز یکی از پای عمودهای سکه بر یکی از محورها راه می افتد به سمت سکه، سکه را برمی دارند. 90° درجه به سمت راست یا چپ می پیچد. همان قدر که آمده می رود. اگر در فضای به مختصات نامنفی بود سکه را می گذارد وگرنه سکه را به جای اولش برمی گرداند. در طی این اعمال سکه از کدام مختصات می تواند به کدام مختصات رفته باشد. (عدد را جای تست بگذار نه ضربش را.)

- الف) از (۸۴, ۳۵) به (۹۱, ۴۹) (ب) از (۳۰, ۴۲) به (۳۶, ۶۰) (ج) از (۹, ۱۲) به (۱۵, ۲۰)
د) از (۰, ۵) به (۱۰, ۰) ه) از (۵۵, ۷۷) به (۷, ۱۱)



۱۵) به چند طریق می توان اعداد ۱ تا ۵ را در خانه های شکل مقابل قرار داد، به طوری که عدد مربوط به هر خانه از اعداد خانه های سمت راست و پایین آن خانه (در صورت وجود) کوچک تر باشد؟

مرحله ی اول دوازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

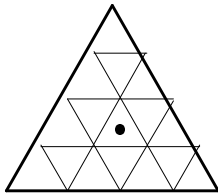
الف (۱۴) (ب) ۲۸ (ج) ۱۳ (د) (ه) ۵

۱۶) برای جایگشت $f(p)$ را تعریف می کنیم $\sum_{i=1}^n |p_i - i|$. میانگین $f(p)$ برای کل جایگشت های ۷ تایی چند است؟

الف (۱۴) (ب) (ج) (د) (ه) ۵

۱۷) تعداد جایگشت های π از اعداد ۱ تا ۷ را بیابید که برای هر $1 \leq i \leq n-3$ داشته باشیم $\pi_i < \pi_{i+3}$.

الف (۲۱۰) (ب) (ج) (د) (ه) ۵



۱۸) در ساختن بنای ساختمان شکل روبه رو فقط از آجرهایی استفاده می شود که تمام سطح آنها آینه است. دیوار دور ساختمان ساخته شده است می خواهیم روی ماکزیمم تعداد از خط چین های شکل دیوار بسازیم که از مرکز ساختمان تمام نقاط دیده شود. این تعداد چند تا است؟

الف (صفر) (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) هیچ کدام

۱۹) فردی از محل A می خواهد با حرکت های افقی و عمودی به نقطه ای از خیابان اصلی شهر برسد (ضلع BC) برسد به طوری که مسیری که طی می کند کوتاه ترین مسیر باشد و از ابتدای شروع حرکت تا انتها دقیقاً در ۳ مکان تغییر جهت بدهد. (ضلع های AB و AC به ۱۰ قسمت مساوی)

الف (۸۴) (ب) ۱۲۰ (ج) ۱۶۸ (د) ۲۴۰ (ه) ۱۰۲۴

۲۰) ۲۰ متغیر بولی $q_{i,j}$ ($1 \leq i \leq 5$ و $1 \leq j \leq 4$) داریم که در شرایط

$$\begin{cases} q_{i,j} \Rightarrow q_{i+1,j} & i < 5 \\ q_{i,j} \Rightarrow q_{i,j+1} & j < 4 \end{cases}$$

صدق می کنند. به چند طریق می توان به این متغیرها مقادیر «درست» و «غلط» داد؟

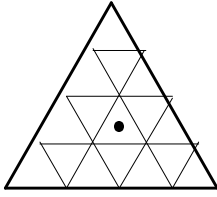
الف (۱۲۶) (ب) ۱۲۷ (ج) ۱۲۸ (د) ۱۲۹ (ه) ۱۳۰

۲۱) مجموعه $S = \{1, 2, \dots, n\}$ مفروض است. T یک تابع است که به هریک از زیرمجموعه های S یکی از زیرمجموعه های S را نسبت می دهد. چند تابع T وجود دارد که دارای خاصیت زیر است؟

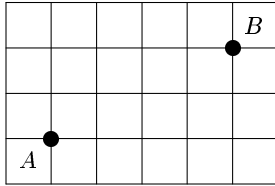
$$\forall P, Q \subseteq S : P \subseteq Q \Leftrightarrow T(P) \subseteq T(Q)$$

الف (۲) (ب) 2^n (ج) $n!$ (د) $(2^n)!$ (ه) 2^{n2^n}

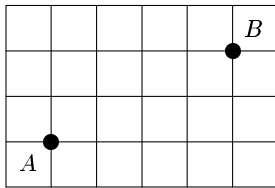
مرحله ی اول دوازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



(۲۲) n ظرف با تعدادی سیب در هریک موجود است؛ این ظرف ها روی یک میز به صورت یک صف قرار گرفته اند. هر جا می توانیم ۲ ظرف کنار هم را انتخاب می کنیم و از هر کدام ۱ سیب را برمی داریم (هر دو باید حداقل ۱ سیب داشته باشند)، یا به هر کدام ۱ سیب اضافه می کنیم. با تکرار این کار کدام دو وضعیت زیر به هم قابل تبدیل هستند؟

(ج) $(a \text{ و } c) - (b \text{ و } d)$ (ب) $(a \text{ و } b) - (c \text{ و } d)$ (الف) $(a, b, c, d) \text{ و } d$ (ه) $(b, c, d) \text{ و } d$ (د) $(a \text{ و } d) - (b \text{ و } c)$ 

(۲۳) اگر مسأله ی بالا این گونه تغییر کند که ظرف ها دور یک میز دایره شکل قرار گرفته اند و در هر مرحله فقط می توانیم به ۴ ظرف متوالی هر کدام ۱ سیب اضافه کنیم، از وضعیتی که همه ی ظرف ها خالی هستند به کدام یک از وضعیت های زیر می توان رسید؟

(ه) $(a, c, d) \text{ و } d$ (د) $a \text{ و } b$ (ج) $(b, c, d) \text{ و } d$ (ب) $c \text{ و } d$ (الف) $(a, b, c, d) \text{ و } d$ 

(۲۴) در شکل مقابل می خواهیم از خانه A به B برویم به طوری که تنها روی خط ها حرکت کنیم و دقیقاً هشت حرکت انجام دهیم. در هر حرکت، در یکی از چهار جهت اصلی به یک نقطه ی مجاور می رویم. هم چنین در طول مسیر می توان به نقطه ی تکراری هم رفت. به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

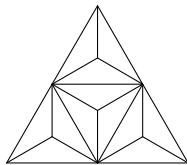
(ه) ۳۶۰

(د) ۴۴۸

(ج) ۵۶

(ب) ۱۶۸

(الف) ۱۵



(۲۵) به چند طریق می توان مثلث های کوچک را سیاه یا سفید کنیم به طوری که هیچ دو مثلث سیاه مجاور نباشند. (دو مثلث مجاورند اگر ضلع مشترک داشته باشند.)

(ه) ۲۰۸

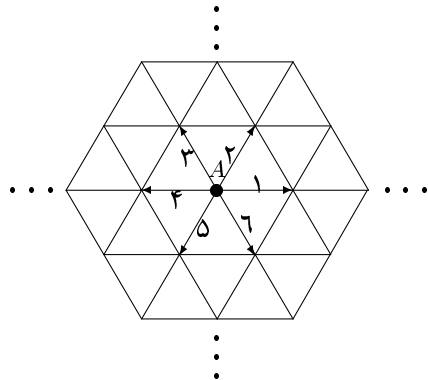
(د) ۱۹۴

(ج) ۱۴۴

(ب) ۱۱۲

(الف) ۱۰۸

مرحله ی اول دوازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



(۲۶) در شکل مقابل یک نفر روی نقطه ی A ایستاده است. او در هر حرکت تاس می اندازد و با توجه به شماره ی تاس، یک واحد در جهت مربوطه (که در شکل مشخص شده) جلو می رود. حال پس از انداختن ۴ تاس به چه احتمالی به نقطه ی اول باز می گردد (توجه کنید که همه ی صفحه مثلث بندی شده است)؟

(ه) $\frac{15}{108}$

(د) $\frac{9}{108}$

(ج) $\frac{128}{108}$

(ب) $\frac{5}{72}$

(الف) $\left(\frac{4}{3}\right)^4$

(۲۷) خانه های یک جدول $m \times n$ به رنگ های سیاه و سفید رنگ شده اند و در یکی از خانه ها، یک مهره قرار دارد. در هر حرکت می توانیم مهره را یک خانه به بالا، پایین، چپ یا راست حرکت دهیم، با این شرط که مهره به هر خانه ای که وارد شود، رنگ آن خانه را عوض می کند (از سفید به سیاه و بالعکس). به ازای کدام یک از گزینه های زیر، می توان به گونه ای خانه ها را رنگ کرد و مکان اولیه مهره را مشخص نمود که با انجام تعدادی حرکت نتوان تمامی خانه ها را هم رنگ کرد؟

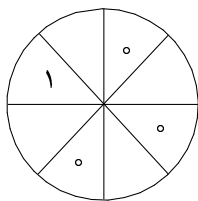
(ج) $n = m = 8$

(ب) $n = 1$ و $m = 16$

(الف) $n = m = 4$

(ه) هم رنگ کردن خانه ها همیشه عملی است.

(د) $n = 5$ و $m = 7$



(۲۸) در شکل روبه رو در بعضی از خانه ها صفر یا یک گذاشته ایم. با پر کردن بقیه خانه ها (با صفر و یک) به چند شکل مختلف می توانیم برسیم؟ (دو شکل را مختلف می گوئیم اگر نتوان یکی را مقداری چرخاند و روی دیگری گذارد به نحوی که اعداد خانه های روی هم، یکسان باشند. توجه کنید که مجاز به پشت و رو کردن شکل نیستیم.)

(ه) ۱۶

(د) ۱۴

(ج) ۱۲

(ب) ۱۰

(الف) ۸

(۲۹) تعداد زیادی کارت مقوایی 3×3 که با خط های افقی و عمودی به مربع های 1×1 تقسیم شده است، به همراه یک میز بزرگ در اختیار داریم. در هر «مرحله» می توانیم تعدادی کارت را هم زمان روی میز قرار دهیم به نحوی که این دو شرط رعایت شوند: اولاً کارت هایی را که در یک مرحله روی میز می گذاریم نباید هیچ قسمتی از یک دیگر را بپوشانند و ثانیاً حداقل یکی از مربع های یک در یک هر یک از کارت هایی را که در مرحله ی i ام می گذاریم، باید دقیقاً روی یکی از مربع های یک در یک یکی از کارت های مرحله ی $i - 1$ قرار بگیرد. اگر در ابتدا تنها یک کارت روی میز باشد، پس از ۴ مرحله حداکثر چند کارت روی میز خواهد بود؟

مرحله ی اول دوازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

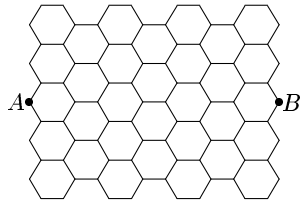
۱۶۵ (هـ)

۸۸ (د)

۸۷ (ج)

۵۵ (ب)

۵۴ (الف)



۳۰) اگر در شکل روبه‌رو طول اضلاع همه‌ی شش ضلعی‌ها با هم یکسان باشد، تعداد کوتاه‌ترین مسیرهای ممکن بین A و B به نحوی که فقط از روی اضلاع شش ضلعی‌ها حرکت کنیم چقدر است؟

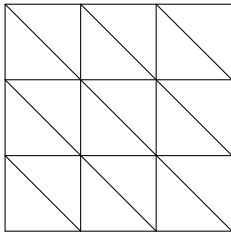
۲۵۶ (هـ)

۲۵۲ (د)

۷۰ (ج)

۲۴ (ب)

۱۶ (الف)



۳۱) شکل روبه‌رو یک جدول 3×3 است که هر مربع آن به دو خانه مثلثی شکل تقسیم شده است. می‌خواهیم در هر مثلث یک عدد بنویسیم به نحوی که تمامی اعداد ۱ تا ۱۸ در جدول ظاهر شده باشند و در هر یک از ۹ مربع اولیه، مجموع اعداد نوشته‌شده در دو مثلث آن برابر عددی ثابت گردد. همچنین مجموع کل اعداد نوشته‌شده در هر سه مربعی که یک سطر یا ستون جدول 3×3 را تشکیل می‌دهند، عدد ثابتی شود. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۲۹ × ۹! (هـ)

 $\frac{2^9 \times 18!}{9!}$ (د)

۹! (ج)

 $\frac{18!}{9!}$ (ب) $(\frac{18}{9})$ (الف)

۳۲) فرض کنید $S \subseteq \{1, 2, \dots, 8\}$. تعریف می‌کنیم $S^* = \{x + 1 \mid x \in S\}$. اگر تعداد S ‌هایی که $S \cup S^* = \{1, 2, \dots, 9\}$ برابر n باشد، باقیمانده‌ی n بر ۵ کدام است؟

۴ (هـ)

۳ (د)

۲ (ج)

۱ (ب)

۰ (الف)

۳۳) می‌توان یک دنباله از اعداد را این‌گونه تغییر داد که ۳ عدد پشت‌سرهم a, b, c و از دنباله را از دنباله پاک کرد و به جای آن‌ها عدد $a + c - b$ را در همان مکان قرارداد. مثلاً رشته‌ی $(1, 2, 8, 4, 7)$ را می‌توان به $(1, -2, 7)$ و همچنین $(1, -2, 7)$ را به $(1, 0)$ تبدیل کرد. حال کدام یک از رشته‌های زیر را می‌توان به (0) تبدیل کرد؟

(الف) $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$ (ب) $(2, 4, -1, 7, 8, 4, 9, 3, 1)$ (ج) $(7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5, 5)$

(د) $(8, 7, 5, 7, 3, 6, 7, 7, 4)$ (هـ) $(4, 4, 3, 7, 1, 9, 8, 5, 6)$

۱			
	۱		
		۱	
			۱

۳۴) به چند طریق می‌توان خانه‌های خالی را با اعداد ۱، ۲، ۳، و ۴ پر کرد به‌طوری‌که در هر سطر و هر ستون هر عدد دقیقاً یک بار آمده باشد؟

۴۸ (هـ)

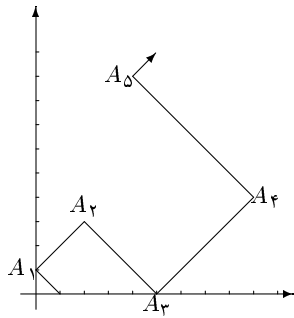
۲۴ (د)

۲۵ (ج)

۱۶ (ب)

۸ (الف)

مرحله ی اول دوازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



(۳۵) یک نفر روی نقطه $(1, 0)$ علامت می گذارد. در حرکات بعدی به ترتیب روی A_1 و A_2 و A_3 و A_4 و A_5 علامت می گذارد. اگر روند ادامه یابد، مختصات A_{10} چه خواهد بود؟

(الف) $(26, 15)$ (ب) $(25, 15)$ (ج) $(6, 5)$ (د) $(55, 25)$ (ه) $(26, 25)$

(۳۶) خانه های یک جدول 2×3 ، با شش رنگ که با اعداد ۱ تا ۶ شماره گذاری شده اند، رنگ شده اند. کاغذ را ۳ بار تا می زنیم تا در نهایت به یک مربع 1×1 برسیم، توجه کنید که تا زدن فقط روی خطوط افقی و عمودی جدول مجاز است. حال شش مربع 1×1 به ترتیبی روی هم قرار گرفته اند. کدام یک از رنگ آمیزی های زیر را نمی توان ۳ بار تا زد به نحوی که رنگ ها به ترتیب ۱ تا ۶ روی هم قرار گرفته باشند؟

۵	۴	۱
۶	۳	۲

۵	۶	۱
۴	۳	۲

۲	۱	۳
۵	۶	۴

۶	۵	۱
۳	۴	۲

۵	۳	۲
۶	۴	۱

(الف) (ب) (ج) (د) (ه)

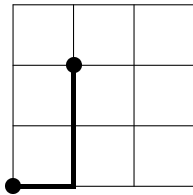
(۳۷) یک میدان که به صورت یک صفحه ی شطرنجی $n \times n$ است در مرکز شهر قرار دارد. k گانگستر می خواهند به این صورت در این میدان دوئل کنند: هر فرد در یک خانه به دلخواه خودش قرار می گیرد (در هر خانه حداکثر ۱ نفر) و اسلحه ی خود را به سمت یکی از چهار جهت شمال، جنوب، شرق، و یا غرب نشانه گرفته است. همه در یک لحظه شلیک می کنند. اگر بخواهیم هیچ یک از افراد کشته نشوند، k حداکثر چند است؟

(الف) n^2 (ب) $4n$ (ج) $4n - 2$ (د) $4n - 4$ (ه) $2n$

(۳۸) در یک نظام عددی دودویی، اعداد ۶ رقمی هستند و رقم های سوم و ششم علاوه بر دو مقدار ۰ و ۱ می توانند ارزش -1 را نیز داشته باشند. مثلاً عدد $(1, 1, -1, 0, 1, -1)$ ارزشی برابر $-25 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + (-1) \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + (-1) \times 2^5$ دارد. روی یک تخته، به ازای تمامی این گونه اعداد ۶ رقمی، ارزش معادل آن ها را نوشته ایم و سپس به ازای هر عدد صحیح i ، اگر i حداقل یک بار روی تخته نوشته شده باشد، دقیقاً یکی از i ها را پاک می کنیم. در نهایت چند عدد روی تخته باقی مانده است؟

(الف) ۳۶ (ب) ۴۴ (ج) ۵۶ (د) ۶۳ (ه) ۱۰۰

مرحله ی اول دوازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



در شکل روبه رو هر نقطه نماینده ی یک کارخانه است. هر کارخانه از کارخانه ی بالا و سمت چپ خود (در صورت وجود) کالای اولیه دریافت می کند و کالای تولیدی خود را به عنوان کالای اولیه، به کارخانه های پایین و سمت راست خود می فرستد. اگر یک کارخانه a واحد کالا از کارخانه ی بالایی و b واحد کالا از کارخانه ی سمت راستی خود دریافت کند، در مجموع $2(a + b)$ واحد کالا تولید می کند که نصف آن را به کارخانه ی پایینی و نصف آن را به کارخانه ی سمت راستی می فرستد. فرض کنید کارخانه ی A در ابتدا ۲ واحد کالا به کارخانه ی سمت راست و ۳ واحد به کارخانه ی پایینی خود بفرستد، در نهایت کارخانه ی B چند واحد کالا تولید خواهد کرد؟

۲۱۰ (هـ)

۱۷۵ (د)

۹۰ (ج)

۸۵ (ب)

۶۰ (الف)

«موفق باشید»

پاسخ تشریحی

دوازدهمین المپیاد کامپیوتر

۱. هر عضوی از U وجودش در سه مجموعه A ، B و C یکی از چهار حالت زیر را می تواند داشته باشد،

A	B	C
✓	✓	✓
✓	—	—
—	✓	—
—	—	—

بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر 2^{10} یا 4^5 می باشد.

۲. چون مجموع اعداد موجود در مربع های A ، B و C با مجموع اعداد موجود در

A	B
D	C

مربع های A ، D و C برابر است، بنابراین مجموع دو عدد موجود در B با مجموع

دو عدد موجود در D برابر است. به همین ترتیب معلوم می شود که مجموع دو

عدد موجود در یک مربع با مجموع دو عدد موجود در هر مربع دیگری برابر است که این مجموع برابر با

۱۹ می باشد. لذا اعداد ۱، ۲، ...، ۱۸ را به ۹ دسته $(1, 18)$ ، $(2, 17)$ ، ...، $(9, 10)$ دسته بندی کرده و آنها

را به ۹! طریق بین ۹ مربع تقسیم کرده و سپس هر زوج را به ۲! طریق در مثلث های موجود در هر مربع

قرار می دهیم. که تعداد کل روش ها $9! \times 2^9$ خواهد شد.

۳. بهترین حالت ممکن آن است که دور تادور شبکه، ششلول بندها ایستاده و هر کدام از آنها به سمت

بیرون شلیک کنند که در این صورت تعداد آنها برابر $(n-2)^2 - n^2$ ؛ یعنی $4n - 4$ خواهد شد.

۴. ابتدا سه عدد از هفت عدد را به $\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۳۵ طریق انتخاب کرده و آنها را به ترتیب صعودی در خانه های ۱، ۴ و ۷ قرار می دهیم، سپس دو عدد از چهار عدد را به $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ یعنی ۶ طریق انتخاب کرده و آنها را به ترتیب صعودی در خانه های ۲ و ۵ قرار می دهیم، و در نهایت نیز دو عدد باقی مانده را به ترتیب صعودی در خانه های ۳ و ۶ قرار می دهیم. بنابراین جواب مورد نظر 6×35 ؛ یعنی ۲۱۰ می باشد.

۵. یکی از رئوس از درجه واحد را انتخاب و آن را با یکی از سه رنگ موجود رنگ می کنیم. رأس متصل به آن، سپس رأس متصل به دومی و ... را به دو طریق می توانیم رنگ کنیم، بنابراین تعداد روش های مطلوب برابر 3×2^{11} ؛ یعنی ۶۱۴۴ خواهد شد.

۶. حرکت دو دور کامل انجام یافته است که آن را به صورت ردیفی، به شکل زیر نمایش می دهیم:

$$\boxed{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}, \underline{5}, \underline{6}, \underline{7}, \boxed{8}, \underline{1}, \boxed{2}, \underline{3}, \underline{4}, \underline{5}, \underline{6}, \underline{7}, \underline{8}, \boxed{1}$$

در نمایش فوق $\boxed{x}$ نشانگر آن است که در جایگاه x توقف یقیناً انجام شده است و $\underline{y}$ نشانگر آن است که جایگاه y قابل توقف است. اگر تعداد پرش های دور اول صفر باشد آن حرکت به $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۱ طریق ممکن است. اگر تعداد پرش های دور اول یک بار باشد انتخاب آن جایگاه به $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۶ طریق ممکن است. اگر تعداد پرش های دور اول دو بار باشد انتخاب آن دو جایگاه به $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۱۰ طریق ممکن است و بالاخره اگر تعداد پرش های دور اول سه بار باشد انتخاب آن سه جایگاه به ۴ طریق (۲۴۶ یا ۲۴۷ یا ۲۵۷ یا ۳۵۷) ممکن است که مجموع کل آن طرق برابر ۲۱ می شود. معلوم است که تعداد پرش های دور اول ۴ یا بیشتر نمی تواند باشد. تعداد طرق پرش ها در دور دوم مستقل از دور اول نیز برابر ۲۱ می شود که طبق اصل ضرب تعداد کل طرق برابر 21×21 ؛ یعنی ۴۴۱ خواهد شد.

	3	2	1
3		1	3
2	1		2
1	3	2	

۷. اگر خانه های موجود در خانه های قطر اصلی را به ترتیب با رنگ های ۱، ۲، ۳ و ۱ رنگ آمیزی کنیم سایر خانه ها به ناچار رنگ هایی پیدا می کنند که به صورت لاتین در جدول نمایش داده شده اند.

۸. S باید هر دو عضو ۱ و ۸ را داشته باشد. از بین اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ تعدادی می توانند در S نباشند، اگر این تعداد برابر ۰ باشد به $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۱ طریق ممکن است. اگر این تعداد برابر ۱ باشد به $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۶ طریق ممکن است. اگر تعداد مورد نظر ۲ باشد به $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} - 5$ ؛ یعنی ۱۰ طریق ممکن است. و بالاخره اگر تعداد اشاره شده برابر ۳ باشد به ۴ طریق ممکن است. یادآوری می شود که از هر دو عضو متوالی حداقل یکی در S موجود است. بنابراین تعداد کل حالات برابر ۲۱ می باشد.

۹. هر مربع واحد یک قطر اصلی و یک قطر فرعی و کل شبکه ۹ قطر اصلی و ۹ قطر فرعی دارد که برای رسیدن به منظور لازم است یک قطر اصلی و یک قطر فرعی رسم شود. انتخاب این دو قطر به $\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۸۱ طریق ممکن است.

۱۰. اگر رنگ آمیزی کامل شده باشد با تغییر رنگ هر یک از ۸ نقطه ردیف اول (فقط یک نقطه) رنگ تمامی نقاط بالای آن از جمله رنگ نقطه موجود در ردیف ۵ تغییر می کند، بنابراین در آخرین حرکت که از آن مهدی است، او می تواند نقطه آخر از ۸ نقطه ردیف اول را چنان رنگ آمیزی کند که رنگ نقطه موجود در ردیف ۵ رنگ مورد دلخواه او باشد.

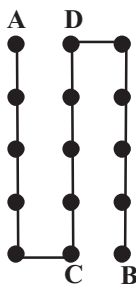
۱	۲	۳	...	n
۲	۳	۴	...	n+۱
۳	۴	۵	...	n+۲
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	m+۱	m+۲	...	m+n-۱

۱۱. اگر در خانه بالا و سمت چپ جدول عدد ۱ و در خانه پایین سمت راست جدول عدد $m+n-1$ را قرار دهیم آنگاه جدول به صورت منحصربه فرد، به شکل مقابل پر خواهد شد:

۱۲. در بعضی حالات خاص می توان با دانستن اعداد بعضی از خانه ها، عدد موجود در خانه ای را کشف کرد ولی در حالت کلی جواب مورد نظر برابر mn می باشد. برای رد چهار گزینه دیگر می توانید جدول 2×2 را بررسی کنید.

۱۳. خانه (۱, ۲) به دو طریق قابل پر شدن می باشد (۰ و یا ۲) و هر یک از ستون های چهارگانه دیگر متناسب با ستون قبلی خود به سه طریق می توانند پر شوند، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر $3^4 \times 2$ یعنی ۱۶۲ می باشد.

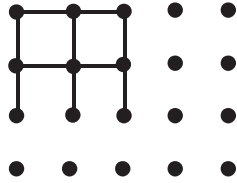
۱۴. کسی که در نوبتش با ۲ سنگریزه روبه رو شود یکی از آن دو را برداشته و برنده می شود. بنابراین به ازای $n = 2$ نفر اول برنده می شود. به ازای $n = 3$ نفر اول به ناچار ۱ سنگریزه برداشته و نفر دوم با ۲ سنگریزه مواجه شده و برنده می شود. به ازای $n = 4$ نفر اول ۱ سنگریزه برداشته و نفر دوم با ۳ سنگریزه مواجه شده و بازنده می شود. به ازای $n = 5$ نفر اول ۱ سنگریزه برداشته و نفر دوم با ۴ سنگریزه مواجه شده و برنده می شود. به همین ترتیب معلوم می شود که اگر تعداد سنگریزه ها زوج باشد نفر اول و در غیر این صورت نفر دوم برنده خواهد شد.



۱۵. شکل مقابل شکلی است که از هر نقطه آن می توان به نقطه دیگری رفت و کمترین پاره خط ممکن را نیز داراست (۱۴ پاره خط). معلوم است که با حذف هر پاره خط دلخواهی از آن دو نقطه یافت خواهند شد که به هم مسیری نداشته باشند، بنابراین لازم است به شکل فوق یک یا چند پاره خط اضافه کنیم. اگر مجاز بودیم از پاره خط های غیر واحد نیز استفاده کنیم می توانستیم A را به B وصل کنیم که در این صورت شکل به دست آمده (پانزده ضلعی فضایی) خاصیت مورد نظر را داشت، ولی چون مجاز به استفاده از پاره خط های غیر واحد نیستیم به ناچار B را به C و A را به D وصل می کنیم که شکل حاصل خاصیت مورد نظر را خواهد داشت و در ضمن دارای ۱۶ پاره خط به طول واحد می باشد.

۱۶. الگوریتم رسیدن از (۸۴, ۳۵) به (۹۱, ۴۹) به شکل زیر می باشد:

(۸۴, ۳۵) $\rightarrow$ (۴۹, ۳۵) $\rightarrow$ (۱۴, ۳۵) $\rightarrow$ (۱۴, ۲۱) $\rightarrow$ (۱۴, ۷)
 $\rightarrow$ (۲۱, ۷) $\rightarrow$ (۲۸, ۷) $\rightarrow$ (۳۵, ۷) $\rightarrow$ (۴۲, ۷)
 $\rightarrow$ (۴۲, ۴۹) $\rightarrow$ (۹۱, ۴۹)



۱۷. اگر شبکه مقابل را چهار بار به ماشین بدهیم شکل مطلوب به دست خواهد آمد.

۱۸. تعداد شهرهایی که هر دو لوله اش از یک مرکز باشد ۰، ۲، ۴ یا ۶ می تواند باشد که تعداد طرق لوله کشی در هر یک از چهار حالت فوق به ترتیب $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ خواهد شد که مجموع تمام آن طرق ۱۴۱ می شود.

۱۹. هر یک از مؤلفه های نقاط سه بار افزایش و یک بار کاهش می یابد. مختصات نقاط A_1 ، A_2 و A_3 ، ...، A_6 به ترتیب به شکل $(0, 1)$ ، $(2, 3)$ ، $(5, 0)$ ، $(9, 4)$ ، $(4, 9)$ ، $(10, 15)$ ، $(17, 8)$ ، $(25, 16)$ ، $(16, 25)$ ، $(26, 35)$ خواهد بود.

۲۰. در هر مرحله دو گردو به کل گردوها اضافه و یا دو گردو از کل گردوها کم می شود، بنابراین اگر کل گردوها فرد باشد در نهایت نیز فرد، و اگر کل گردوها زوج باشد در نهایت نیز کل گردوها زوج خواهد بود. مجموع کل گردوها در حالات a, b, c و d به ترتیب فرد، زوج، فرد و زوج می باشد، بنابراین a به b ، b به c ، c به d و d به a قابل تبدیل نیستند. و اما a به c و نیز b به d قابل تبدیلند که نحوه تبدیل هر یک به شکل زیر می باشد:

نحوه تبدیل a به c : اولی را رد کرده و پس از آن هر زوج متوالی را انتخاب کرده و گردو به آنها اضافه می کنیم.

● اولی، دومی و سومی را رد کرده و پس از آن هر زوج متوالی را انتخاب کرده و گردو به آنها اضافه می کنیم.

● اولی، دومی، سومی، چهارمی و پنجمی را رد کرده و پس از آن هر زوج متوالی را انتخاب کرده و گردو به آنها اضافه می کنیم.

اگر الگوریتم فوق را ادامه دهیم به حالت c خواهیم رسید.

نحوه تبدیل b به d : زوج های $(1, 2)$ ، $(3, 4)$ ، ...، $(49, 50)$ ، $(51, 52)$ ، $(53, 54)$ ، ...،

(۹۸, ۹۹) را انتخاب کرده و به هر یک از اعضای ۲۵ زوج اول یک گردو اضافه و از هر یک از اعضای ۲۵ زوج دیگر یک گردو بر می داریم که به دنباله زیر خواهیم رسید:

۲, ۳, ۴, ۵, ..., ۴۹, ۵۰, ۵۰, ۵۰, ۵۱, ..., ۹۵, ۹۶, ۹۷, ۹۸

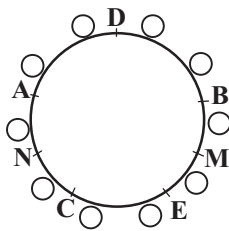
● زوج های (۲, ۳), (۴, ۵), ..., (۴۸, ۴۹) را انتخاب کرده و به هر یک از اعضای آن زوج ها یک گردو اضافه و زوج های (۵۱, ۵۲), (۵۳, ۵۴), ..., (۹۹, ۹۸) را انتخاب کرده و از هر یک از اعضای آن یک گردو بر می داریم که به دنباله زیر خواهیم رسید،

۳, ۴, ۵, ..., ۴۹, ۵۰, ۵۰, ۵۰, ۵۰, ۵۱, ..., ۹۵, ۹۶, ۹۷

با تکرار الگوریتم فوق پس از مدتی به دنباله متقارن زیر می رسیم:

۵۰, ۵۱, ۵۰, ..., ۵۰, ۵۱, ۵۰, ۵۱, ۵۰, ۵۰, ۵۰, ۵۱, ۵۰, ۵۱, ۵۰, ۵۰, ۵۱, ۵۰

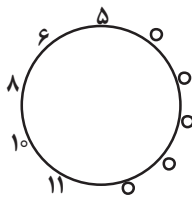
باز با تکرار آن الگوریتم به دنباله d خواهیم رسید.



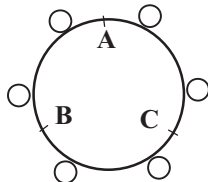
۲۱. برای تولید a هر یک از کمان های AB, BC, CD, DE و EA سه بار و سپس کمان AB را ۴ بار دیگر و کمان MN را ۱۴ بار انتخاب می کنیم.

وضعیت b قابل تولید نیست.

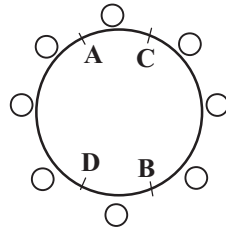
کمان هایی که شامل هر دو خانه ۱۲ و ۴ باشند مجموعاً حداکثر ۴ بار به کار می روند. بنابراین کمان هایی که شامل ۱۲ بوده ولی شامل ۴ نباشند حداقل برابر ۸ می باشد (چنین کمانی فقط کمانی می تواند باشد که هر چهار عدد ۹, ۱۲, ۸ و ۸ را در بر دارد).



بنابراین کمان یاد شده دقیقاً ۸ بار و کمان ۹ و ۱۲ و ۴ و ۹ دقیقاً ۱ بار به کار می رود. اگر گردوهای اضافه شده را کم کنیم به حالت مقابل می رسیم که قابل تولید نیست.



برای تولید وضعیت c هر یک از کمان های بزرگ AB, BC, CA را ۵۱ بار انتخاب می کنیم.



برای تولید وضعیت d کمان سمت راست AB را ۱ بار، کمان سمت راست CD را ۲ بار و بالاخره کمان سمت چپ AB را ۴ بار انتخاب می کنیم.

۲۲. اگر مقدار کالای تحویلی به راست و پایین از کارخانه A را به ترتیب a و b بنامیم آنگاه اگر مقدار کالای اضافه شده به خاطر a در هر یک از ۴۹ نقطه موجود را به صورت x نمایش دهیم، در هر یک از آن ۴۹ نقطه مقدار x به شکل زیر پیدا می شود که در جدول ارائه شده هر عدد برابر مجموع دو عدد بالا و سمت چپ خود می باشد (غیر از ستون و سطر آخر)

۰	۱	۱	۱	۱	۱	۰
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۰
۰	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۰
۰	۱	۴	۱۰	۲۰	۳۵	۰
۰	۱	۵	۱۵	۳۵	۷۱	۰
۰	۱	۶	۲۱	۵۶	۱۲۶	۰
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

مجموع کل اعداد جدول فوق برابر ۴۶۱ می شود. برای b نیز جدولی مشابه جدول فوق یافت می شود. بادر نظر گرفتن a و b اولیه مقدار ماده دریافتی توسط B برابر $(a+b) \times ۴۶۲$ ؛ یعنی ۲۳۱۰۰ می شود که با توجه به صورت مسأله مقدار کالای تولیدی ۲×۲۳۱۰۰ ؛ یعنی ۴۶۲۰۰ به دست می آید.

۲۳. برای رسیدن از A به B یکی از دو حالت زیر اتفاق می افتد:

I) چهار حرکت راست (R)، یک حرکت پایین (L) و سه حرکت بالا (U). تعداد دنباله های متشکل از چهار R، یک L و سه U که هر دنباله متناظر به یک مسیر مطلوب می باشد برابر $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۷ \\ ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۸ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۲۸۰ می باشد.

II) پنج حرکت راست (R)، یک حرکت چپ (L) و دو حرکت بالا (U). تعداد دنباله های متشکل از پنج R، یک L و دو U که هر دنباله متناظر به یک مسیر مطلوب می باشد برابر $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۱۶۸ می باشد.

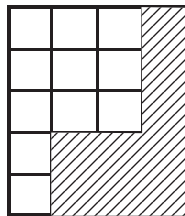
معلوم است که تعداد کل مسیرهای مطلوب برابر $۱۶۸ + ۲۸۰$ ؛ یعنی ۴۴۸ می باشد.

۲۴. فرض می کنیم حرکت اول به سمت راست باشد در این صورت برای رسیدن به BC ده واحد طی خواهد شد که آن را به صورت aaaaaaaaaa نمایش می دهیم. هدف قرار دادن سه علامت به نشانه مکان های تغییر جهت در بین a ها می باشد که این امر به $\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۸۴ طریق امکان پذیر است (بین هر دو a ی متوالی یک جا خالی برای قرار دادن مکان نما وجود دارد و بین ده عدد a مجموعاً نه جا خالی وجود دارد). اگر حرکت اول به سمت بالا باشد نیز برای رسیدن به BC به ۸۴ طریق می توان عمل کرد که مجموع کل مسیرهای مطلوب $۸۴ + ۸۴$ ؛ یعنی ۱۶۸ خواهد شد.

۲۵. می دانیم تعداد کل جایگشت ها برابر $۷!$ می باشد. در $\frac{1}{7}$ از جایگشت ها رقم اول ۱، در $\frac{1}{7}$ از آنها رقم اول ۲، ... و بالاخره در $\frac{1}{7}$ از جایگشت ها رقم اول ۷ می باشد که در این صورت $\sum |\pi_i - i|$ بر رقم اول کل جایگشت ها $(۰ + ۱ + ۲ + \dots + ۶) \times ۶!$ ؛ یعنی $۲۱ \times ۶!$ خواهد شد. این مجموع بر ارقام دوم، سوم، ... و هفتم نیز به ترتیب برابر ۱۶، ۱۳، ۱۲، ۱۳، ۱۶ و ۲۱ می باشد، بنابراین:

$$\bar{x} = \frac{\sum |\pi_i - i|}{7!} = \frac{6! \times (21 + 16 + 13 + 12 + 13 + 16 + 21)}{7!} = 16$$

۲۶. گزاره های درست را با خانه سیاه و گزاره های غلط را با خانه سفید نمایش می دهیم (مانند شکل زیر).



با ارتفاع خانه های سیاه ستون ها یک دنباله چهار عضوی می سازیم. دنباله متناظر به شکل ارائه شده ۵، ۲، ۲، ۰ می باشد، معلوم است که با شرایط مسأله همه دنباله های به دست آمده صعودی خواهند بود. تعداد ۰ های دنباله را x_0 تعداد ۱ های دنباله را x_1 ، ... و بالاخره تعداد ۵ های دنباله را x_5

می نامیم که در این صورت به معادله $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$ می رسم که در مجموعه اعداد نامنفی

۹؛ یعنی ۱۲۶ جواب دارد، به ازای هر جوابی از معادله یک دنباله صعودی و به ازای هر دنباله ای ۵؛ صعودی یک جواب مطلوب برای جدول به دست می آید.

۲۷. اولاً در هر مرحله دو عضو از اعضای دنباله کم می شود، بنابراین برای آن که در انتهای کار فقط یک عدد باقی بماند لازم است تعداد اعضای دنباله فرد باشد. ثانیاً می دانیم زوجیت عدد $a + b + c$ با زوجیت عدد $a + c - b$ یکی است، بنابراین برای آن که در انتهای کار عددی زوج باقی بماند لازم است مجموع اعداد زوج باشد. ثالثاً با تکرار عمل اشاره شده صرف نظر از آن که a, b و c کدام سه عدد متوالی باشند عدد نهایی برای دنباله $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$ ، عدد $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots - x_8 + x_9$ می باشد. تنها دنباله ای از دنباله های داده شده که در هر سه شرط فوق صدق می کند دنباله زیر می باشد:

(۸, ۷, ۵, ۷, ۳, ۶, ۷, ۷, ۴)

۲۸. برای آن که شخص پس از ۴ حرکت به نقطه A برگردد باید یکی از سه حالت زیر اتفاق بیافتد:

I) شخص روی یک لوزی حرکت کند. احتمال آن که حرکت اول، دوم، سوم و چهارم شخص مطلوب باشد به ترتیب $\frac{4}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ و $\frac{1}{6}$ می باشد که در این صورت احتمال رسیدن به مقصد باطی کردن یک لوزی برابر $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{1}{6}$ ؛ یعنی $\frac{4}{216}$ خواهد بود.

II) شخص یک پاره خط به طول ۲ (نه لزوماً پاره خط راست) را طی کرده و همان مسیر را برگردد که در این صورت احتمال مطلوب بودن حرکات اول، دوم، سوم و چهارم به ترتیب برابر $\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ و $\frac{1}{6}$ خواهد بود. بنابراین احتمال رسیدن به مقصد به طریق اشاره شده برابر $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$ ؛ یعنی $\frac{5}{216}$ خواهد بود.

III) ابتدا شخص یکی از ۶ پاره خط اطراف خود را به صورت رفت و برگشت طی کرده و سپس همین عمل را با همان پاره خط یا با پاره خط دیگر تکرار کند، که در این صورت احتمال مطلوب بودن هر یک از حرکات چهارگانه او به ترتیب $\frac{6}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ و $\frac{1}{6}$ در کل $\frac{6}{216}$ می باشد.

با در نظر گرفتن سه حالت ممکن احتمال رسیدن به مقصد $\frac{4}{216} + \frac{5}{216} + \frac{6}{216}$ ؛ یعنی $\frac{15}{72}$ یا $\frac{5}{24}$ می باشد.

۱	۳	۲	۴
	۱		
		۱	
			۱

۲۹. سطر اول به $3!$ طریق قابل پر شدن می باشد. بدون آن که به کلیت مسأله لطمه ای وارد شود فرض می کنیم جدول مورد نظر مطابق شکل مقابل باشد که در این صورت خانه $(3, 2)$ به دو حالت پر می شود، یا با ۳ و یا با ۴.

در حالت اول جدول به شکل «الف» و در حالت دوم جدول به شکل «ب» در می آید.

۱	۳	۲	۴
	۱	۳	
		۱	
			۱

شکل ب

۱	۳	۲	۴
	۱	۴	
		۱	
			۱

شکل الف

جدول الف فقط به یک حالت ولی جدول ب به سه حالت می تواند پر شود، بنابراین جواب مورد نظر $3 \times 3! + 1 \times 3! = 24$ می باشد.

۳۰. در مرحله اول ۴، در مرحله دوم ۹، در مرحله سوم ۲۵ و در مرحله چهارم ۳۶ کارت می توان بر روی میز با شرایط مسأله قرار داد که در این صورت تعداد کل کارت ها برابر $36 + 25 + 9 + 4 + 1$ ؛ یعنی ۷۵ خواهد شد. به راحتی می توانید بررسی کنید که تعداد کل کارت های روی میز پس از n مرحله برابر عبارت زیر می باشد:

$$\left\lfloor \frac{4n+3}{3} \right\rfloor^2 + \dots + \left\lfloor \frac{19}{3} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{15}{3} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{11}{3} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor^2$$

	N	O	P
M			
I	J	K	L
E	F	G	H
A	B	C	D

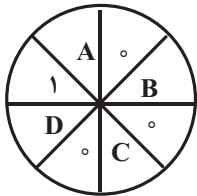
۳۱. تعداد پاره خط های افقی ۱۲ و نیز تعداد پاره خط های عمودی نیز ۱۲ می باشد، بنابراین اگر از هر پاره خط فقط یک بار عبور کنیم مدت زمان لازم ۲ $\times 12 + 1 \times 12$ ؛ یعنی ۳۶ ثانیه خواهد بود. اما شرط لازم برای آن که بتوان یک گراف را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ و با عبور از هر یال دقیقاً یک بار چنان رسم کرد که نقطه پایان همان نقطه شروع باشد، آن است که درجه

همه رئوس آن زوج باشد که در گراف رسم شده درجه ۸ رأس؛ یعنی رئوس A, B, C, E, H, I, L, N و O فرد بوده و به ازای هر دو رأس فرد که به یکدیگر وصل هستند یک حرکت اضافی لازم است. اگر حرکت به صورت زیر باشد، مدت زمان لازم ۴۲ ثانیه خواهد بود.

A.B.F.G.C.B.C.D.H.G.K.L.H.L.P.O.K.J.N.O.N.M.I.J.F.E.I
_E.A

۲۳۰

المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)

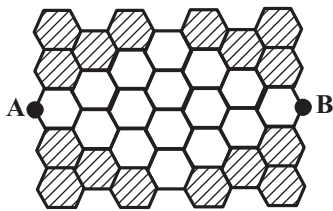


۳۲. هر یک از خانه های A, B, C و D را به دو طریق می توان پر کرد. بنابراین تعداد کل شیوه ها برابر 2^4 ؛ یعنی ۱۶ می شود. اما حالت $(1, 0, 0, 0)$ برای (D, A, B, C) مانند حالت $(0, 0, 0, 1)$ و حالت $(0, 1, 0, 0)$ مانند حالت $(0, 0, 1, 0)$ می باشد. بنابراین جواب مطلوب ۱۴ می باشد.

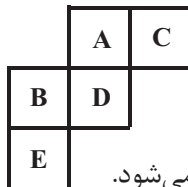
۳۳. به راحتی قابل درک است که $T(\phi) = \phi$ و $T(S) = S$ حاصل $T(\{1\})$, $T(\{2\})$, $T(\{3\})$, $T(\{4\})$, $T(\{5\})$ و $T(\{6\})$ را به دلخواه $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ و $\{6\}$ در نظر می گیریم که این کار به ۶!؛ یعنی ۷۲۰ طریق ممکن است. حال اگر فرض کنیم $T(\{x_1\}) = \{y_1\}$, $T(\{x_2\}) = \{y_2\}$, ..., $T(\{x_n\}) = \{y_n\}$ از مجموعه های دو عضوی به بعد عضو متناظر به هر زیرمجموعه به صورت منحصر به فرد به شکل زیر پیدا می شود:

$$T(\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}) = \{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}\}$$

۳۴. اگر بخواهیم رنگ خانه ای عوض شود از خانه مجاور آن به آن وارد شده و از آن خارج می شویم و اگر خانه ای خانه گذر باشد و نخواهیم رنگ آن عوض شود به آن وارد شده و پس از خروج از آن دوباره به آن خانه برگشته و خروج از آن را تکرار می کنیم.



۳۵. خانه هایی که هاشور خورده اند در مسیر مطلوب شرکت ندارند. شکل باقی مانده یک شبکه 4×4 می باشد که تعداد مسیرهای کوتاه موجود از گوشه چپ و پایین آن به گوشه راست و بالای آن برابر $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۷۰ می باشد.

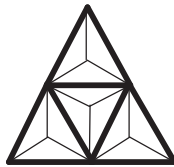


۳۶. دو حالت زیر پیش می آید:

I) در خانه های A و B دو عدد ۱ و ۲ باشد که در این حالت آن دو خانه را به ۲! و سه خانه دیگر را به ۳! طریق می توان پر کرد که کل حالات $2! \times 3!$ ؛ یعنی ۱۲ می شود.

(II) در خانه های A و B دو عدد ۱ و ۳ باشد که در این حالت آن دو خانه را به ۲! طریق می توان پر کرد (مثلاً $A = ۱$ و $B = ۳$). عدد ۲ وابسته به این که $A = ۱$ یا $B = ۱$ به صورت منحصر به فرد در یک خانه به ترتیب در C یا E قرار خواهد گرفت و دو عدد ۴ و ۵ نیز به دو حالت در خانه های باقی مانده می توانند قرار گیرند. بنابراین در این حالت نیز تعداد کل حالات ۲×۲ ؛ یعنی ۴ می شود. با توجه به دو قسمت قبل تعداد کل جواب ها $۱۲ + ۴$ ؛ یعنی ۱۶ می شود.

۳۷. با در نظر گرفتن ۴ مثلث پر رنگ در شکل زیر حالات زیر پیش می آید:



(I) تعداد مثلث های سیاه صفر باشد که این کار به $\begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۱ طریق ممکن است.
 (II) تعداد مثلث های سیاه یک باشد که این کار به $\begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۱۲ طریق ممکن است.
 (III) تعداد مثلث های سیاه دو باشد که در این صورت آن دو مثلث نمی توانند در داخل یک مثلث پر رنگ قرار گیرند. رنگ کردن دو مثلث با شرط فوق به $3 - \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۵۱ طریق ممکن است.

(IV) تعداد مثلث های سیاه ۳ باشد که در این صورت آن سه مثلث در داخل سه مثلث پر رنگ متمایز قرار داشته و به $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۶ \\ ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۹۰ طریق امکان پذیر است.
 (V) تعداد مثلث های سیاه ۴ باشد که در این صورت آن چهار مثلث در داخل چهار مثلث پر رنگ متمایز قرار داشته و به $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۵۴ طریق ممکن است.
 مجموع کل حالات به دست آمده $۵۴ + ۹۰ + ۵۱ + ۱۲ + ۱$ ؛ یعنی ۲۰۸ می شود.

	C	B
A		

۳۸. خطوط جدول کاغذی را مطابق شکل نام گذاری می کنیم. طریقه ساخت

گزینه های ب، ج، د و ه را با دنباله نشان می دهیم، در این نمایش ها X؛

یعنی این که کاغذ را از خط X به طرف داخل؛ یعنی به شکل  و X؛ یعنی این که کاغذ را

از خط X به طرف بیرون؛ یعنی به شکل  تا کنیم:

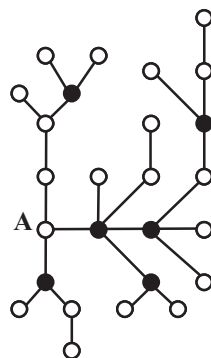
ب) Cab

ج) cba

د) CAb

ه) Abc

۳۹. بزرگترین عدد ساخته شده ۶۳ و کوچکترین عدد ساخته شده ۳۶- می باشد و همه اعداد صحیح بین ۳۶- تا ۶۳ را نیز می توان ساخت. پس ۱۰۰ عدد متمایز با شرایط داده شده ساخته می شوند؛ یعنی از تخته ۱۰۰ عدد پاک شده است در حالی که تعداد اعداد نوشته شده بر روی تخته $2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3$ ؛ یعنی ۱۴۴ می باشد، بنابراین $100 - 144$ ؛ یعنی ۴۴ عدد بر روی تخته باقی می ماند.



۴۰. در هر یک از نقاط پر رنگ وجود یک نگهبان الزامی است به شرطی که حرکت را از شاخه بالایی A شروع کنیم.

مرحله ی اول یازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱) به چند طریق می توان از میان اعداد ۱ تا ۳۰، سه عدد متمایز انتخاب کرد، به طوری که تشکیل تصاعد هندسی دهند؟

الف) ۶ (ب) ۱۰ (ج) ۱۱ (د) ۱۲ (ه) ۱۳

(۲) رقم های یک نظام عددی عبارتند از ۱ با ارزش یک، ۰ با ارزش صفر و ۱ با ارزش منفی یک (۱-). چند عدد چهار رقمی با مقادیر متمایز در این نظام عددی وجود دارد؟ مثلاً مقدار اعداد ۰۰۱۱ و ۱۱۱۱ هر دو برابر ۱- است (برای ۰۰۱۱، $1 = -1 + 2 \times (-1) + 4 \times 0 + 8 \times 0$).

الف) ۱۶ (ب) ۱۷ (ج) ۳۱ (د) ۳۲ (ه) ۸۱

(۳) با خواندن کلمات ۹ حرفی از حروف a و b از چپ به راست، با دیدن هر a دو گلوله در کاسه ای می اندازیم و با دیدن هر b ، یک گلوله از کاسه برمی داریم. در شروع کار کاسه خالی است. به ازای چند کلمه از کلمات ۹ حرفی پس از خواندن حرف نهم، کاسه خالی خواهد بود؟ (اگر در هنگام خواندن کلمه ای به حرف b برسیم و گلوله ای در کاسه نباشد تا آن را برداریم، آن کلمه در این شمارش محسوب نخواهد شد).

الف) ۳ (ب) ۹ (ج) ۱۱ (د) ۱۲ (ه) ۱۵

(۴) تعداد جایگشت های اعداد ۱ تا ۱۰ که در آن به ازای هر i بین ۱ تا ۵، عدد $i - 1$ قبل $2i$ قبل (و نه لزوماً بلافاصله قبل) از عدد $2i$ آمده باشد کدام است؟

الف) $\frac{10!}{5!5!}$ (ب) $\frac{10!}{4!}$ (ج) $\frac{10!}{5!}$ (د) $\frac{10!}{3!5!}$ (ه) ۵!

(۵) اگر S و T دو رشته از ۰ و ۱ باشند، ST رشته ای است که از نوشتن پشت سر هم این دو رشته به دست می آید. مثلاً اگر $S = 1010$ و $T = 011$ باشد، $ST = 1010011$ و $TS = 011010$. طول یک رشته تعداد ۰ و ۱ های آن است. مثلاً طول رشته ی TS در مثال بالا ۷ است.

اگر B رشته ای از ۰ و ۱ و $A = 1011$ باشد به طوری که $AB = BA$ ، طول رشته ی B کدام می تواند باشد؟

الف) ۱۳۷۸ (ب) ۱۳۷۹ (ج) ۲۰۰۱ (د) ۲۰۰۲ (ه) هیچ کدام

(۶) قد ۸ دانش آموز به نام های J, K, L, M, N, O, P, Q اندازه گیری شده است. می دانیم:

- هیچ دو نفری هم قد نیستند.
- قد L از M بلندتر و قد M از N بلندتر است.
- قد J از قد K بلندتر نیست.
- قد N از Q بلندتر و قد Q از J بلندتر است.
- قد O از قد P بلندتر نیست.
- تنها از بلندقدترین فرد کلاس کوتاه تر است.

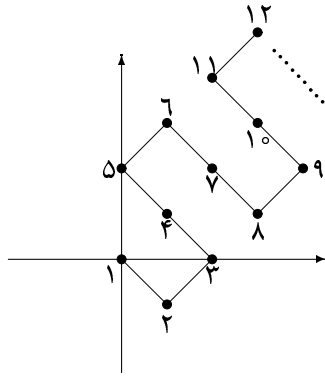
چند ترتیب مختلف از نظر قد برای این دانش آموزان وجود دارد؟

الف) ۳۴ (ب) ۳۵ (ج) ۳۶ (د) ۳۸ (ه) ۳۹

(۷) تعداد زوج عددهای دودویی حداکثر ۷ رقمی که مجموع آن ها برابر 10101010 است چه قدر است؟ دقت کنید که در این شمارش، مثلاً زوج عددهای 10100000 و 00001010 یک بار محسوب می شود.

الف) ۴۲ (ب) ۴۳ (ج) ۴۴ (د) ۸۵ (ه) ۸۷

مرحله ی اول یازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



۸) اعداد ۱، ۲، ۳، و ... را مطابق شکل بر روی صفحه ی مختصات می نویسیم. این اعداد به ترتیب در مختصات $(0, 0)$ ، $(1, -1)$ ، $(2, 0)$ و ... قرار دارند. مختصات نقطه ی متناظر عدد ۱۳۷۹ چیست؟

الف) $(458, 460)$ ب) $(229, 231)$ ج) $(459, 461)$ د) $(916, 918)$ ه) $(917, 919)$

۹) ۹ لامپ در سه ردیف سه تایی قرار دارند. آن ها را با رنگ های قرمز، سبز، آبی، و زرد رنگ می کنیم. می دانیم:

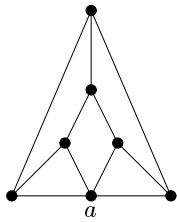
• در یک ردیف یا ستون، هیچ دو لامپی هم رنگ نیستند.

• لامپ وسط قرمز است.

• دقیقاً یک لامپ سبز است.

حداقل تعداد لامپ های آبی چند است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵



۱۰) به چند طریق می توان پاره خط های شکل مقابل را رنگ آمیزی کرد به گونه ای که هر دو پاره خط که در یک نقطه ی انتهایی اشتراک دارند ناهم رنگ باشند؟ پاره خط ها را می توان با رنگ های قرمز، آبی، و سبز رنگ آمیزی کرد و برای رنگ آمیزی پاره خط های متصل به رأس a می توان از رنگ زرد نیز استفاده کرد.

الف) صفر ب) ۱ ج) ۴ د) ۱۲ ه) ۲۴

۱۱) در زمان صفر، یک دوچرخه و دو نفر در نقطه ی A هستند. این دو نفر می خواهند به نقطه ی B در فاصله ی ۱۳۰۰ متری بروند. سرعت پیاده روی و سرعت دوچرخه سواران به ترتیب ۴ متر در ثانیه و ۱۲ متر در ثانیه است. این سرعت ها برای نفر دوم به ترتیب ۶ و ۱۶ متر در ثانیه است. با فرض آن که در هر زمان فقط یک نفر می تواند سوار دوچرخه شود، جزء صحیح کمترین زمان لازم برای این که هر دو نفر به نقطه ی B برسند چه قدر است؟

الف) ۱۵۰ ثانیه ب) ۱۶۳ ثانیه ج) ۱۷۵ ثانیه د) ۱۸۰ ثانیه ه) ۲۱۵ ثانیه

۱۲) ۶ نفر برای انتخاب در یک کمیته ی ۳ نفره نامزد شده اند. تعداد انتخاب کنندگان ۳۰ نفر است و هریک دقیقاً به ۳ نفر رأی داده است. نفرات منتخب به ترتیب ۲۶، ۲۲، و ۱۹ رأی آورده اند. حداقل چند نفر به هر سه عضو انتخاب شده رأی داده اند؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) هیچ کدام

۱۳) ۵ عدد چهار رقمی دودویی 1010 ، 0001 ، 0011 ، 1000 ، 0110 داده شده است. می توان یک عدد k رقمی A پیدا کرد که شامل همه ی این ۵ عدد باشد (مثلاً عدد 1010110011 فقط شامل 0110 ، 0011 ، و 1010 است). کمینه ی تعداد ارقام A (یعنی k) چند است؟

الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۰ د) ۱۱ ه) ۱۲

مرحله ی اول یازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۴) از هر کدام از هفت نفر به نام های A, B, C, D, E, F و G سؤال شد که چند نفر از بقیه را از قبل می شناسد. این افراد به ترتیب از A پاسخ دادند: ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۲، ۱ (یعنی به عنوان مثال C، ۴ نفر دیگر را می شناسد). می دانیم:

- حداکثر یک نفر دروغ گفته است.
- دروغ گو تعداد افرادی که از قبل می شناسد را کمتر از مقدار واقعی می گوید.
- شناختن یک رابطه ی دوطرفه است.
- F حتماً راست گفته است.
- چه کسی حتماً دروغ گفته است؟

الف) D یا E (ب) E یا G (ج) C یا G (د) E یا C (ه) D یا G

۱۵) حسین و علی با یک سکه که یک روی آن سفید و روی دیگر سیاه است بازی می کنند، به طوری که هر بار سکه را به هوا می اندازند تا بر زمین افتد و رنگ ظاهر شده را یادداشت می کنند (می دانیم احتمال رو آمدن سیاه و سفید برابر است). اگر ۱۰ سفید متوالی بیاید، حسین و اگر یک سیاه و بلافاصله بعد از آن ۹ سفید متوالی بیاید، علی برنده می شود. بازی تا آن جاکه یکی از دو نفر برنده شود ادامه می یابد. احتمال برد علی چقدر است؟

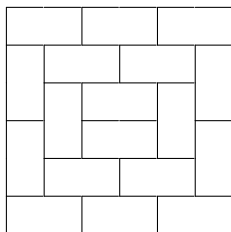
الف) کمتر از $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{9}{10}$ (ه) بیشتر از $\frac{9}{10}$

۱۶) یک دنباله از رقم های ۰ و ۱ را یک رشته می نامیم. رشته ی A را زیر رشته ی B گوئیم اگر A از حذف تعدادی (صفر یا بیشتر) از رقم های ابتدایی و انتهایی B به دست آید. مثلاً هر کدام از رشته های ۰۱۱۰۱، ۰۱۱، ۱۰۱، ۱۱۰ و ۱۱۰ زیر رشته ی ۰۱۱۰۱ هستند. اگر S یک رشته به طول حداکثر ۶ باشد، منظور از A_S مجموعه ی رشته های به طول ۶ است که S زیر رشته ی آن ها نباشد. به ازای کدام یک از گزینه های زیر به عنوان S و T و $A_S \cup A_T$ ، ۲^۶ عضو دارد؟

الف) ۰۱۰۱ و ۱۱۱ (ب) ۱۰۱ و ۱۱۱ (ج) ۱۱۰۱۱ و ۱۰۱۱۰ (د) ۰۱۰۱ و ۱۱۱۰ (ه) «الف»، «ب» و «ج»

۱۷) یک جدول 9×9 از اعداد ۰ و ۱ داده شده است. می دانیم در هر چهار خانه ای که تشکیل یک مربع 2×2 بدهند حداقل ۲ و حداکثر ۳ بار عدد ۱ ظاهر شده است. حداقل و حداکثر تعداد یک های جدول چه قدر می تواند باشد؟

الف) ۴۱ و ۶۵ (ب) ۴۰ و ۶۱ (ج) ۳۶ و ۶۵ (د) ۴۰ و ۶۵ (ه) ۳۶ و ۶۱



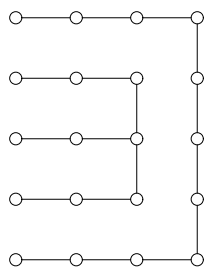
۱۸) می خواهیم k عدد کاشی 1×2 را روی کف یک اتاق 6×6 بگذاریم و از کودکی بخواهیم تا بقیه ی کف اتاق را با کاشی ها 1×2 کاملاً پر کند. برای این که کودک راهی جز چیدن کاشی ها به صورت شکل روبه رو نداشته باشد، حداقل k چند است؟

الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) ۶

۱۹) مجموعه ی کلمات ۱ تا ۶ حرفی از حروف a و b را مانند کلمات لغت نامه مرتب می کنیم. ۷۹ امین کلمه در این مجموعه ی مرتب کدام است؟ برای روشن شدن مفهوم مرتب کردن کلمات، مجموعه ی مرتب کلمات ۱ تا ۳ حرفی به ترتیب از چپ به راست برابر است با: bab, bba, bb, bab, baa, ba, b, abb, aba, ab, aab, aaa, aa, a که نهمین کلمه در آن ba است.

الف) baabba (ب) abaaaa (ج) baaabb (د) baab (ه) bab

مرحله ی اول یازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



۲۰) امید و حمید با هم نقطه بازی می کنند. قاعده ی بازی به این صورت است که هر نفر در نوبت خود باید یک نقطه را به یک نقطه ی مجاور آن که قبلاً به آن وصل نشده، متصل کند و هرگاه یک نفر یک مربع 1×1 را کامل کرد، باید یک حرکت دیگر به عنوان جایزه انجام دهد (دو نقطه در صورتی مجاورند که فاصله ی آنها یک باشد). امتیاز یک فرد در انتهای بازی برابر تعداد مربع های 1×1 است که او کامل کرده است. نوبت حمید است که بازی کند و وضعیت بازی به شکل روبه روست. در نهایت اگر هر نفر بهترین بازی خود را انجام دهد، بازی با چه نتیجه ای تمام می شود؟

- الف) ۱۰ بر ۲ به نفع امید
ب) ۸ بر ۴ به نفع امید
ج) ۴ بر ۸ به نفع حمید
د) ۳ بر ۹ به نفع حمید
ه) ۲ بر ۱۰ به نفع حمید

۲۱) یک جدول 12×12 داریم که در گوشه ی بالای سمت راست و پایین سمت چپ آن حرف O قرار دارد و گوشه ی بالای سمت چپ و همچنین پایین سمت راست آن با حرف X پر شده است. در قدم اول در خانه های مجاور خانه های شامل O، حرف O قرار می دهیم و در قدم بعد در خانه های مجاور خانه های شامل X، حرف X را می نویسیم (اگر این خانه قبلاً با حرف دیگری پر شده بود، حرف قبلی را پاک و حرف جدید را جایگزین می کنیم). این کار را متناوباً تکرار می کنیم. اگر در هر قدم تعداد O ها در جدول را با K نشان دهیم، حداکثر K چقدر است؟ (دو خانه را که یک ضلع مشترک دارند مجاور می نامیم.)

- الف) ۶۵
ب) ۷۲
ج) ۹۴
د) ۱۱۲
ه) ۱۲۴

۲۲) یک مکعب مشبک $2 \times 2 \times 2$ از ۸ «ریزمکعب» به ابعاد واحد تشکیل شده است. داخل هر ریزمکعب یک رقم صفر یا یک می نویسیم. وجه های این ریزمکعب ها که بر روی سطح مکعب قرار دارند را «وجه خارجی» می نامیم. یک وجه خارجی ریزمکعبی به نام A را در نظر می گیریم. به این وجه یک عدد ۲ رقمی دودویی نسبت می دهیم. رقم با ارزش ترین عدد رقم نوشته شده ی داخل ریزمکعب A و رقم دیگر آن رقم داخل ریزمکعب پشت A (نسبت به وجه خارجی مورد نظر) است. این کار را برای همه وجه های خارجی انجام می دهیم. بنابراین روی هر سطح مکعب ۴ عدد دودویی با مقدار بین ۰ تا ۳ دیده می شود. به چند طریق می توان عددهای داخل ریزمکعب ها را تعیین کرد به گونه ای که روی هر کدام از سطح های مکعب، ۴ عدد متمایز قرار بگیرند؟

- الف) ۰
ب) ۲
ج) ۴
د) ۸
ه) ۱۶

۲۳) افراد $A_1, A_2, \dots, A_{11}$ به ترتیب ساعت گرد دور یک میز گرد نشسته اند. به ترتیب از هر کدام از این افراد می پرسیم که آیا نفری که سمت چپ آن فرد نشسته است، راست گوست یا دروغ گو؟ به ترتیب این جواب ها به دست آمد: د، د، د، د، د، د، د، ر، ر، ر، ر، ر (د = دروغ گو، ر = راست گو)
با توجه به این که دروغ گوها همیشه دروغ می گویند و راست گوها همیشه راست، حداقل چند نفر دروغ گو در این جمع وجود دارد؟

- الف) ۳
ب) ۴
ج) ۵
د) ۶
ه) چنین وضعیتی نمی تواند پیش بیاید.

۲۴) سه ظرف ۳ لیتری داریم که در هر کدام ۱ لیتر آب وجود دارد. در هر حرکت یکی از ظرف ها را انتخاب می کنیم؛ مقدار $\frac{1}{3}$ آب درون آن را در یکی از دو ظرف دیگر و $\frac{1}{3}$ دیگر را در ظرف سوم می ریزیم و $\frac{1}{3}$ را در همان ظرف اول باقی می گذاریم. فرض کنید این کار را چند بار تکرار کنیم. در ظرف ها به ترتیب چه مقدار آب می تواند باشد؟

- الف) $\frac{27}{44}, \frac{25}{44}$ و $\frac{41}{44}$
ب) $\frac{12}{44}$ و $\frac{89}{44}$ و $\frac{141}{44}$
ج) $\frac{41}{44}$ و $\frac{111}{44}$ و $\frac{91}{44}$
د) $\frac{247}{44}$ و $\frac{91}{44}$ و $\frac{291}{44}$
ه) $\frac{291}{44}$ و $\frac{129}{44}$ و $\frac{292}{44}$

مرحله ی اول یازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۵) دو نفر روی مبدأ محور x ایستاده اند. در هر مرحله هر کدام به طور مستقل یک واحد به چپ یا راست می روند. به چند طریق ممکن است بعد از ۵ مرحله هر دو نفر در یک مکان باشند؟

الف) ۷۰ (ب) ۱۲۷ (ج) ۱۹۷ (د) ۲۵۲ (ه) ۲۵۶

(۲۶) قرار است ۱۰۰ نفر معلم از بین ۴ دانش آموز به نام های A, B, C ، و D یکی را به روش «حذفی» انتخاب کنند. این کار با معرفی دو نفر از ۴ دانش آموز شروع می شود. معلمان رأی می دهند و فردی که رأی کمتری آورد حذف می شود. سپس بین فرد برنده و یکی از دو نفر دیگر رأی گیری می شود و در بار آخر بین برنده ی بار دوم و تنها نفر باقی مانده رأی گیری می شود تا برنده ی نهایی معین شود. مدیر مدرسه در هر مرحله دو دانش آموزی که به رأی گذاشته می شوند را انتخاب می کند. او قبلاً در یک نظرخواهی از معلمان می داند که آن ها به صورت زیر رأی خواهند داد:

$$C > A > D > B \quad ۱۷ \text{ نفر}$$

$$A > B > D > C \quad ۳۲ \text{ نفر}$$

$$D > B > C > A \quad ۳۴ \text{ نفر}$$

$$B > A > C > D \quad ۱۷ \text{ نفر}$$

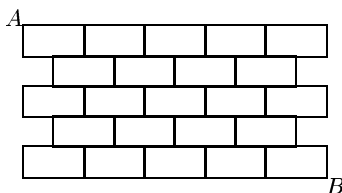
(به عنوان مثال ۳۴ نفر D را به B ، B را به C و C را به A ترجیح می دهند.)

مثلاً اگر A و B به رأی گذاشته شوند، B با اختلاف دو رأی برنده می شود. با این فرض که هیچ معلمی رأی خود را عوض نمی کند، مدیر مدرسه ممکن است بتواند به ترتیبی دانش آموزان را در هر مرحله به رأی بگذارد که دانش آموز مورد نظرش انتخاب شود. مدیر می تواند کاری کند که آخرین مرحله ی رأی گیری بین دانش آموزان زیر باشد:

الف) A و B (ب) C و D (ج) B و C (د) A و C (ه) همه ی حالت های ممکن

(۲۷) یک خط «سواپی» در مثلث، یک پاره خط از یک رأس مثلث به ضلع مقابل آن است. در مثلث ABC از رأس های A, B و C به ترتیب ۵، ۱۵ و ۱۰ خط سواپی رسم کرده ایم. اگر هیچ ۳ خطی در یک نقطه داخل مثلث هم دیگر را قطع نکنند، چند ناحیه در داخل مثلث به وجود می آید؟

الف) ۲۷۵ (ب) ۲۷۶ (ج) ۳۰۶ (د) ۷۵۰ (ه) ۱۰۵۶



(۲۸) در شکل روبه رو می خواهیم با پیمودن کوتاه ترین مسیر روی خطوط شبکه، از نقطه ی A به نقطه ی B برویم. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

الف) ۱۰ (ب) ۲۸ (ج) ۳۲ (د) ۴۴ (ه) ۵۶

(۲۹) یک بازی کامپیوتری بین بازی کن و کامپیوتر روی یک شبکه ی $N \times M$ انجام می گیرد. کامپیوتر به جای یک دزد که در آغاز در خانه ی $(1, 1)$ قرار دارد بازی می کند و بازی کن به جای پلیس که در آغاز در خانه ی (N, M) قرار دارد بازی می کند. بازی بدین صورت انجام می گردد که در هر مرحله، نخست پلیس به یکی از خانه های مجاور خود (که با خانه ی فعلی یک ضلع مشترک دارد) می رود و سپس دزد با توجه به حرکت پلیس به یکی از خانه های مجاور خود می رود. اگر (و تنها اگر) پس از حرکت دزد، دزد و پلیس در یک سطر یا یک ستون قرار گرفتند پلیس می تواند دزد را مورد هدف قرار دهد و بازی پایان می پذیرد. در چند مورد از حالت های زیر از اندازه ی شبکه، کامپیوتر می تواند ببرد؟

۸×۹ ۱۰×۱۰ ۵×۴ ۳×۵

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

مرحله ی اول یازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۳۰) چند کلمه ی ۸ حرفی از حروف a, b, c, d, e و f وجود دارد که در هر یک از آن ها دقیقاً دو نوع حرف متفاوت به کار رفته باشد؟

الف) ۱۰۲۴ (ب) ۱۸۹۰ (ج) ۳۸۴۰ (د) ۳۸۱۰ (ه) ۱۵۳۶

۳۱) بر روی یک خط مستقیم دو قورباغه در دو نقطه به فاصله ی ۶۹۵۰ سانتی متر از هم نشسته اند. در هر «مرحله» هر قورباغه دریکی از دو جهت راست یا چپ و بر روی خط می جهد. می دانیم که طول جهش دو قورباغه در هر مرحله یکسان و برابر توانی از دو است (مثل ۱، ۲، ۴، ...) و جهش آن ها ممکن است در یک جهت نباشد. حداقل پس از چند مرحله، دو قورباغه در یک نقطه ی مشترک فرود می آیند؟

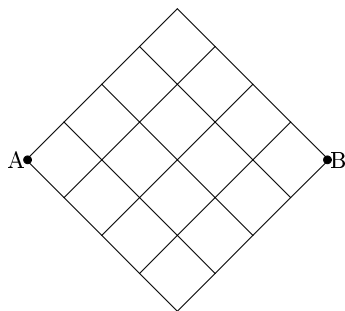
الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۷ (د) ۸ (ه) ۱۰

۳۲) فرض کنید A مجموعه ی کلیه ی رشته های به طول ۸ از ۰ و ۱ باشد که در آن ها رشته ی ۰۰ نیامده باشد (در رشته ی ۰۱۰۱۱۰۰۱ رشته ی ۰۰ آمده ولی در ۰۱۱۰۱۰۱۰۱ رشته ی ۰۰ نیامده است) و B مجموعه ی کلیه ی رشته های به طول ۸ باشد که در آن ۱۱ نیامده باشد. $A \cup B$ چند عضو دارد؟

الف) ۶۶ (ب) ۶۸ (ج) ۱۰۸ (د) ۲۵۴ (ه) ۲۵۶

۳۳) یک عدد دودویی n با ۱۳۷۹ رقم صفر و یک را در نظر بگیرید (ممکن است تعدادی از رقم های سمت چپ آن صفر باشد). با هر «عمل» یکی از ارقام این عدد را انتخاب می کنیم و آن را تغییر می دهیم (صفر به یک و یک به صفر تبدیل می شود). حداقل تعداد عمل هایی که پس از آن عدد حاصل بر ۳ بخش پذیر می شود را در نظر بگیرید. این تعداد را عدد بخش پذیری n می نامیم. در میان اعداد دودویی ۱۳۷۹ رقمی، بیشینه ی (ماکزیمم) عدد بخش پذیری چند است؟

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۶۸۸ (ه) ۱۳۷۹



۳۴) دو شخص با نام های A و B در نقاط مشخص شده در شکل قرار دارند. شکل از مربع های واحد تشکیل شده است. در هر ثانیه A یک واحد به سمت راست و B یک واحد به سمت چپ روی خطوط حرکت می کنند. هرگاه دو راه در مقابل یک نفر وجود داشته باشد، با احتمال مساوی یکی از آن دو را انتخاب می کند. احتمال این که A و B در ۸ ثانیه ی اول در یک نقطه به هم برسند چه قدر است؟

الف) $\frac{۲۵}{۳۵۶}$ (ب) $\frac{۳۰}{۳۵۶}$ (ج) $\frac{۳۵}{۳۵۶}$ (د) $\frac{۲۰}{۱۲۸}$ (ه) $\frac{۳۵}{۱۲۸}$

۳۵) یک روبات (آدم مصنوعی) روی صفحه ای نامتناهی قرار دارد. حرکت این روبات به گونه ایست که ابتدا یک «گام» به سمت بالا می رود، سپس یک گام به سمت راست، یک گام به پایین و یک گام به سمت چپ می رود (و همین کار را تکرار می کند: یک گام به بالا، ...) این روبات طوری برنامه ریزی شده است که طول گام های آن به ترتیب برابر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳۸، ۵۳۹، ۵۴۰، ۵۴۱، ۵۴۲، ۵۴۳، ۵۴۴، ۵۴۵، ۵۴۶، ۵۴۷، ۵۴۸، ۵۴۹، ۵۵۰، ۵۵۱، ۵۵۲، ۵۵۳، ۵۵۴، ۵۵۵، ۵۵۶، ۵۵۷، ۵۵۸، ۵۵۹، ۵۶۰، ۵۶۱، ۵۶۲، ۵۶۳، ۵۶۴، ۵۶۵، ۵۶۶، ۵۶۷، ۵۶۸، ۵۶۹، ۵۷۰، ۵۷۱، ۵۷۲، ۵۷۳، ۵۷۴، ۵۷۵، ۵۷۶، ۵۷۷، ۵۷۸، ۵۷۹، ۵۸۰، ۵۸۱، ۵۸۲، ۵۸۳، ۵۸۴، ۵۸۵، ۵۸۶، ۵۸۷، ۵۸۸، ۵۸۹، ۵۹۰، ۵۹۱، ۵۹۲، ۵۹۳، ۵۹۴، ۵۹۵، ۵۹۶، ۵۹۷، ۵۹۸، ۵۹۹، ۶۰۰، ۶۰۱، ۶۰۲، ۶۰۳، ۶۰۴، ۶۰۵، ۶۰۶، ۶۰۷، ۶۰۸، ۶۰۹، ۶۱۰، ۶۱۱، ۶۱۲، ۶۱۳، ۶۱۴، ۶۱۵، ۶۱۶، ۶۱۷، ۶۱۸، ۶۱۹، ۶۲۰، ۶۲۱، ۶۲۲، ۶۲۳، ۶۲۴، ۶۲۵، ۶۲۶، ۶۲۷، ۶۲۸، ۶۲۹، ۶۳۰، ۶۳۱، ۶۳۲، ۶۳۳، ۶۳۴، ۶۳۵، ۶۳۶، ۶۳۷، ۶۳۸، ۶۳۹، ۶۴۰، ۶۴۱، ۶۴۲، ۶۴۳، ۶۴۴، ۶۴۵، ۶۴۶، ۶۴۷، ۶۴۸، ۶۴۹، ۶۵۰، ۶۵۱، ۶۵۲، ۶۵۳، ۶۵۴، ۶۵۵، ۶۵۶، ۶۵۷، ۶۵۸، ۶۵۹، ۶۶۰، ۶۶۱، ۶۶۲، ۶۶۳، ۶۶۴، ۶۶۵، ۶۶۶، ۶۶۷، ۶۶۸، ۶۶۹، ۶۷۰، ۶۷۱، ۶۷۲، ۶۷۳، ۶۷۴، ۶۷۵، ۶۷۶، ۶۷۷، ۶۷۸، ۶۷۹، ۶۸۰، ۶۸۱، ۶۸۲، ۶۸۳، ۶۸۴، ۶۸۵، ۶۸۶، ۶۸۷، ۶۸۸، ۶۸۹، ۶۹۰، ۶۹۱، ۶۹۲، ۶۹۳، ۶۹۴، ۶۹۵، ۶۹۶، ۶۹۷، ۶۹۸، ۶۹۹، ۷۰۰، ۷۰۱، ۷۰۲، ۷۰۳، ۷۰۴، ۷۰۵، ۷۰۶، ۷۰۷، ۷۰۸، ۷۰۹، ۷۱۰، ۷۱۱، ۷۱۲، ۷۱۳، ۷۱۴، ۷۱۵، ۷۱۶، ۷۱۷، ۷۱۸، ۷۱۹، ۷۲۰، ۷۲۱، ۷۲۲، ۷۲۳، ۷۲۴، ۷۲۵، ۷۲۶، ۷۲۷، ۷۲۸، ۷۲۹، ۷۳۰، ۷۳۱، ۷۳۲، ۷۳۳، ۷۳۴، ۷۳۵، ۷۳۶، ۷۳۷، ۷۳۸، ۷۳۹، ۷۴۰، ۷۴۱، ۷۴۲، ۷۴۳، ۷۴۴، ۷۴۵، ۷۴۶، ۷۴۷، ۷۴۸، ۷۴۹، ۷۵۰، ۷۵۱، ۷۵۲، ۷۵۳، ۷۵۴، ۷۵۵، ۷۵۶، ۷۵۷، ۷۵۸، ۷۵۹، ۷۶۰، ۷۶۱، ۷۶۲، ۷۶۳، ۷۶۴، ۷۶۵، ۷۶۶، ۷۶۷، ۷۶۸، ۷۶۹، ۷۷۰، ۷۷۱، ۷۷۲، ۷۷۳، ۷۷۴، ۷۷۵، ۷۷۶، ۷۷۷، ۷۷۸، ۷۷۹، ۷۸۰، ۷۸۱، ۷۸۲، ۷۸۳، ۷۸۴، ۷۸۵، ۷۸۶، ۷۸۷، ۷۸۸، ۷۸۹، ۷۹۰، ۷۹۱، ۷۹۲، ۷۹۳، ۷۹۴، ۷۹۵، ۷۹۶، ۷۹۷، ۷۹۸، ۷۹۹، ۸۰۰، ۸۰۱، ۸۰۲، ۸۰۳، ۸۰۴، ۸۰۵، ۸۰۶، ۸۰۷، ۸۰۸، ۸۰۹، ۸۱۰، ۸۱۱، ۸۱۲، ۸۱۳، ۸۱۴، ۸۱۵، ۸۱۶، ۸۱۷، ۸۱۸، ۸۱۹، ۸۲۰، ۸۲۱، ۸۲۲، ۸۲۳، ۸۲۴، ۸۲۵، ۸۲۶، ۸۲۷، ۸۲۸، ۸۲۹، ۸۳۰، ۸۳۱، ۸۳۲، ۸۳۳، ۸۳۴، ۸۳۵، ۸۳۶، ۸۳۷، ۸۳۸، ۸۳۹، ۸۴۰، ۸۴۱، ۸۴۲، ۸۴۳، ۸۴۴، ۸۴۵، ۸۴۶، ۸۴۷، ۸۴۸، ۸۴۹، ۸۵۰، ۸۵۱، ۸۵۲، ۸۵۳، ۸۵۴، ۸۵۵، ۸۵۶، ۸۵۷، ۸۵۸، ۸۵۹، ۸۶۰، ۸۶۱، ۸۶۲، ۸۶۳، ۸۶۴، ۸۶۵، ۸۶۶، ۸۶۷، ۸۶۸، ۸۶۹، ۸۷۰، ۸۷۱، ۸۷۲، ۸۷۳، ۸۷۴، ۸۷۵، ۸۷۶، ۸۷۷، ۸۷۸، ۸۷۹، ۸۸۰، ۸۸۱، ۸۸۲، ۸۸۳، ۸۸۴، ۸۸۵، ۸۸۶، ۸۸۷، ۸۸۸، ۸۸۹، ۸۹۰، ۸۹۱، ۸۹۲، ۸۹۳، ۸۹۴، ۸۹۵، ۸۹۶، ۸۹۷، ۸۹۸، ۸۹۹، ۹۰۰، ۹۰۱، ۹۰۲، ۹۰۳، ۹۰۴، ۹۰۵، ۹۰۶، ۹۰۷، ۹۰۸، ۹۰۹، ۹۱۰، ۹۱۱، ۹۱۲، ۹۱۳، ۹۱۴، ۹۱۵، ۹۱۶، ۹۱۷، ۹۱۸، ۹۱۹، ۹۲۰، ۹۲۱، ۹۲۲، ۹۲۳، ۹۲۴، ۹۲۵، ۹۲۶، ۹۲۷، ۹۲۸، ۹۲۹، ۹۳۰، ۹۳۱، ۹۳۲، ۹۳۳، ۹۳۴، ۹۳۵، ۹۳۶، ۹۳۷، ۹۳۸، ۹۳۹، ۹۴۰، ۹۴۱، ۹۴۲، ۹۴۳، ۹۴۴، ۹۴۵، ۹۴۶، ۹۴۷، ۹۴۸، ۹۴۹، ۹۵۰، ۹۵۱، ۹۵۲، ۹۵۳، ۹۵۴، ۹۵۵، ۹۵۶، ۹۵۷، ۹۵۸، ۹۵۹، ۹۶۰، ۹۶۱، ۹۶۲، ۹۶۳، ۹۶۴، ۹۶۵، ۹۶۶، ۹۶۷، ۹۶۸، ۹۶۹، ۹۷۰، ۹۷۱، ۹۷۲، ۹۷۳، ۹۷۴، ۹۷۵، ۹۷۶، ۹۷۷، ۹۷۸، ۹۷۹، ۹۸۰، ۹۸۱، ۹۸۲، ۹۸۳، ۹۸۴، ۹۸۵، ۹۸۶، ۹۸۷، ۹۸۸، ۹۸۹، ۹۹۰، ۹۹۱، ۹۹۲، ۹۹۳، ۹۹۴، ۹۹۵، ۹۹۶، ۹۹۷، ۹۹۸، ۹۹۹، ۱۰۰۰، ۱۰۰۱، ۱۰۰۲، ۱۰۰۳، ۱۰۰۴، ۱۰۰۵، ۱۰۰۶، ۱۰۰۷، ۱۰۰۸، ۱۰۰۹، ۱۰۱۰، ۱۰۱۱، ۱۰۱۲، ۱۰۱۳، ۱۰۱۴، ۱۰۱۵، ۱۰۱۶، ۱۰۱۷، ۱۰۱۸، ۱۰۱۹، ۱۰۲۰، ۱۰۲۱، ۱۰۲۲، ۱۰۲۳، ۱۰۲۴، ۱۰۲۵، ۱۰۲۶، ۱۰۲۷، ۱۰۲۸، ۱۰۲۹، ۱۰۳۰، ۱۰۳۱، ۱۰۳۲، ۱۰۳۳، ۱۰۳۴، ۱۰۳۵، ۱۰۳۶، ۱۰۳۷، ۱۰۳۸، ۱۰۳۹، ۱۰۴۰، ۱۰۴۱، ۱۰۴۲، ۱۰۴۳، ۱۰۴۴، ۱۰۴۵، ۱۰۴۶، ۱۰۴۷، ۱۰۴۸، ۱۰۴۹، ۱۰۵۰، ۱۰۵۱، ۱۰۵۲، ۱۰۵۳، ۱۰۵۴، ۱۰۵۵، ۱۰۵۶، ۱۰۵۷، ۱۰۵۸، ۱۰۵۹، ۱۰۶۰، ۱۰۶۱، ۱۰۶۲، ۱۰۶۳، ۱۰۶۴، ۱۰۶۵، ۱۰۶۶، ۱۰۶۷، ۱۰۶۸، ۱۰۶۹، ۱۰۷۰، ۱۰۷۱، ۱۰۷۲، ۱۰۷۳، ۱۰۷۴، ۱۰۷۵، ۱۰۷۶، ۱۰۷۷، ۱۰۷۸، ۱۰۷۹، ۱۰۸۰، ۱۰۸۱، ۱۰۸۲، ۱۰۸۳، ۱۰۸۴، ۱۰۸۵، ۱۰۸۶، ۱۰۸۷، ۱۰۸۸، ۱۰۸۹، ۱۰۹۰، ۱۰۹۱، ۱۰۹۲، ۱۰۹۳، ۱۰۹۴، ۱۰۹۵، ۱۰۹۶، ۱۰۹۷، ۱۰۹۸، ۱۰۹۹، ۱۱۰۰، ۱۱۰۱، ۱۱۰۲، ۱۱۰۳، ۱۱۰۴، ۱۱۰۵، ۱۱۰۶، ۱۱۰۷، ۱۱۰۸، ۱۱۰۹، ۱۱۱۰، ۱۱۱۱، ۱۱۱۲، ۱۱۱۳، ۱۱۱۴، ۱۱۱۵، ۱۱۱۶، ۱۱۱۷، ۱۱۱۸، ۱۱۱۹، ۱۱۲۰، ۱۱۲۱، ۱۱۲۲، ۱۱۲۳، ۱۱۲۴، ۱۱۲۵، ۱۱۲۶، ۱۱۲۷، ۱۱۲۸، ۱۱۲۹، ۱۱۳۰، ۱۱۳۱، ۱۱۳۲، ۱۱۳۳، ۱۱۳۴، ۱۱۳۵، ۱۱۳۶، ۱۱۳۷، ۱۱۳۸، ۱۱۳۹، ۱۱۴۰، ۱۱۴۱، ۱۱۴۲، ۱۱۴۳، ۱۱۴۴، ۱۱۴۵، ۱۱۴۶، ۱۱۴۷، ۱۱۴۸، ۱۱۴۹، ۱۱۵۰، ۱۱۵۱، ۱۱۵۲، ۱۱۵۳، ۱۱۵۴، ۱۱۵۵، ۱۱۵۶، ۱۱۵۷، ۱۱۵۸، ۱۱۵۹، ۱۱۶۰، ۱۱۶۱، ۱۱۶۲، ۱۱۶۳، ۱۱۶۴، ۱۱۶۵، ۱۱۶۶، ۱۱۶۷، ۱۱۶۸، ۱۱۶۹، ۱۱۷۰، ۱۱۷۱، ۱۱۷۲، ۱۱۷۳، ۱۱۷۴، ۱۱۷۵، ۱۱۷۶، ۱۱۷۷، ۱۱۷۸، ۱۱۷۹، ۱۱۸۰، ۱۱۸۱، ۱۱۸۲، ۱۱۸۳، ۱۱۸۴، ۱۱۸۵، ۱۱۸۶، ۱۱۸۷، ۱۱۸۸، ۱۱۸۹، ۱۱۹۰، ۱۱۹۱، ۱۱۹۲، ۱۱۹۳، ۱۱۹۴، ۱۱۹۵، ۱۱۹۶، ۱۱۹۷، ۱۱۹۸، ۱۱۹۹، ۱۲۰۰، ۱۲۰۱، ۱۲۰۲، ۱۲۰۳، ۱۲۰۴، ۱۲۰۵، ۱۲۰۶، ۱۲۰۷، ۱۲۰۸، ۱۲۰۹، ۱۲۱۰، ۱۲۱۱، ۱۲۱۲، ۱۲۱۳، ۱۲۱۴، ۱۲۱۵، ۱۲۱۶، ۱۲۱۷، ۱۲۱۸، ۱۲۱۹، ۱۲۲۰، ۱۲۲۱، ۱۲۲۲، ۱۲۲۳، ۱۲۲۴، ۱۲۲۵، ۱۲۲۶، ۱۲۲۷، ۱۲۲۸، ۱۲۲۹، ۱۲۳۰، ۱۲۳۱، ۱۲۳۲، ۱۲۳۳، ۱۲۳۴، ۱۲۳۵، ۱۲۳۶، ۱۲۳۷، ۱۲۳۸، ۱۲۳۹، ۱۲۴۰، ۱۲۴۱، ۱۲۴۲، ۱۲۴۳، ۱۲۴۴، ۱۲۴۵، ۱۲۴۶، ۱۲۴۷، ۱۲۴۸، ۱۲۴۹، ۱۲۵۰، ۱۲۵۱، ۱۲۵۲، ۱۲۵۳، ۱۲۵۴، ۱۲۵۵، ۱۲۵۶، ۱۲۵۷، ۱۲۵۸، ۱۲۵۹، ۱۲۶۰، ۱۲۶۱، ۱۲۶۲، ۱۲۶۳، ۱۲۶۴، ۱۲۶۵، ۱۲۶۶، ۱۲۶۷، ۱۲۶۸، ۱۲۶۹، ۱۲۷۰، ۱۲۷۱، ۱۲۷۲، ۱۲۷۳، ۱۲۷۴، ۱۲۷۵، ۱۲۷۶، ۱۲۷۷، ۱۲۷۸، ۱۲۷۹، ۱۲۸۰، ۱۲۸۱، ۱۲۸۲، ۱۲۸۳، ۱۲۸۴، ۱۲۸۵، ۱۲۸۶، ۱۲۸۷، ۱۲۸۸، ۱۲۸۹، ۱۲۹۰، ۱۲۹

مرحله ی اول یازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۳۶) اگر نمایش دودویی عدد W را از راست به چپ بنویسیم و صفرهای سمت چپ آن را حذف کنیم، عدد به دست آمده را W^R می نامیم (به عنوان مثال اگر $W = 110010 = 50$ ، آن گاه $W^R = 10011 = 19$). اگر بدانیم W دوازده برابر W^R است، W حداقل چند رقم دارد؟

الف) ۸ (ب) ۹ (ج) ۱۰ (د) ۱۱ (ه) هیچ کدام

(۳۷) در روستایی دادوستد فقط به صورت مبادله ی اجناس صورت می گیرد. فرض کنید فقط ۴ جنس به نام های A تا D مبادله می شوند. یک مبادله را به صورت یک فرمول نشان می دهیم. مثلاً $3C \ 4D \leftrightarrow A \ B$ یعنی یک عدد جنس A و یک عدد جنس B را می توان با ۳ عدد جنس C و ۴ عدد جنس D مبادله کرد و برعکس. می دانیم که فقط مبادله های زیر مجاز هستند:

$$\begin{array}{lcl} A & \leftrightarrow & B \ D \\ B \ C & \leftrightarrow & D \ A \\ 2B & \leftrightarrow & 2D \\ C \ A & \leftrightarrow & 2C \ 2D \end{array}$$

اگر یک نفر به تعداد کافی A در اختیار داشته باشد، بعد از یک سری مبادله تعداد D ، C و B هایی که در اختیار دارد، چند مورد از موارد زیر می تواند باشد؟ (۱) $6B \ 2D \ 4C$ (۲) $2C \ D$ (۳) $4D$ (۴) $2B \ 3C$

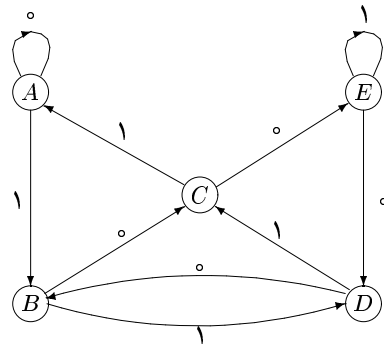
الف) هیچ مورد (ب) ۱ مورد (ج) ۲ مورد (د) ۳ مورد (ه) ۴ مورد

(۳۸) ۱۰ نوع کارت با شماره های ۱ تا ۱۰ و از هر کدام ۴ عدد داده شده است. این ۴۰ کارت را در هم می ریزیم و آن ها را به طور تصادفی در ۱۰ جعبه با شماره های ۱ تا ۱۰ قرار می دهیم (در هر جعبه ۴ کارت). سپس از جعبه ی شماره ۱ شروع می کنیم و یک کارت از درون آن برمی داریم. کارت مورد نظر را دور می اندازیم و از جعبه ای که شماره ی آن با شماره ی کارت برداشته شده یکسان است یک کارت برمی داریم. این روند را آن قدر تکرار می کنیم تا به جعبه ای برسیم که درون آن کارتی نباشد. احتمال این که شماره ی این جعبه ۱ باشد در کدام یک از بازه های زیر قرار می گیرد؟

الف) $[0, 1]$ (ب) $[0, 0.5]$ (ج) $[0, 0.25]$ (د) $[0, 0.1]$ (ه) $[0, 0.01]$

(۳۹) در یک جدول 100×100 از ۰ و ۱، در هر مرحله به ازای یک عدد k ، همه ی اعداد سطر k ام را یک و سپس همه ی اعداد ستون k ام را صفر می کنیم. از یک جدول تمام صفر شروع می کنیم. ۱۰۹ مرحله، این عمل را روی جدول انجام می دهیم: در ۵۰ مرحله ی اول، به ازای k های زوج از ۲ تا ۱۰۰ و در ۵۰ مرحله ی بعد به ازای k های فرد از ۱ تا ۹۹ به ترتیب این کار را انجام می دهیم. سپس برای ۹ عدد دنباله ی ۱۳، ۱، ۹۷، ۷، ۵، ۲، ۴، ۱۰۰ و ۹۹ (از راست به چپ)، این کار را انجام می دهیم. عدد دودویی متناظر کدام سطر کم ترین مقدار را دارد؟

الف) ۳ (ب) ۶ (ج) ۷ (د) ۹ (ه) ۹۸



(۴۰) در نمودار مقابل از رأس A شروع می کنیم و با خواندن از چپ به راست رشته ی ورودی از رقم های صفر و یک، روی نمودار حرکت می کنیم. به عنوان مثال اگر رشته ی ورودی ۰۱۰۱۱ باشد، از A شروع می کنیم و به ترتیب به رأس های A ، C ، B ، A و B می رویم (در B متوقف می شویم). اگر رشته ی دریافتی، عدد دودویی معادل عدد ۱۱۳۷۹۲۱۰۱۱۴۲۰ باشد، پس از دریافت آخرین رقم عدد دودویی (کم ارزش ترین رقم) در کدام رأس متوقف می شویم؟

الف) A (ب) B (ج) C (د) D (ه) E

«موفق باشید»

پاسخ تشریحی

یازدهمین المپیاد کامپیوتر

۱. بزرگترین عدد ممکن ۱۱۱۱ و کوچکترین آنها $\overline{1111}$ می باشد که به ترتیب ارزش ۱۵ و ۱۵- دارند. بین این دو عدد نیز همه اعداد صحیح قابل تولید می باشند، بنابراین ۳۱ عدد متمایز با ارقام مورد اشاره قابل ساخت می باشد.

۲. دسته اعداد زیر، تصاعدهایی هستند که قدرنسبت هر یک از آنها عددی صحیح می باشد.

۱, ۲, ۴	۲, ۴, ۸
۴, ۸, ۱۶	۱, ۳, ۹
۲, ۶, ۱۸	۵, ۱۰, ۲۰
۱, ۴, ۱۶	۳, ۶, ۱۲
۶, ۱۲, ۲۴	۱, ۵, ۲۵
۳, ۹, ۲۷	۷, ۱۴, ۲۸

و اما دسته اعداد زیر تصاعدهایی هستند که قدرنسبت هر یک از آنها عددی غیر صحیح می باشد:

۴, ۶, ۹	۸, ۱۲, ۱۸	۱۲, ۱۸, ۲۷
۴, ۱۰, ۲۵	۹, ۱۵, ۲۵	۱۶, ۲۰, ۲۵

بنابراین مجموعاً ۱۸ تصاعد هندسی پیدا می شود که متأسفانه در گزینه ها نیامده است.

۳. شرط لازم آن است که طول B مضربی از ۴ باشد.

۴. با توجه به داده های مسئله ترتیب LMNQJ به دست می آید، که قبل از L باید فقط یک نفر قرار گیرد، اگر K قبل از L باشد، آنگاه ترتیب افراد به شکل زیر، در می آید:

$KL \square M \square N \square Q \square J \square$

که اگر دو نفر P و O پیش هم باشند، آنگاه یک خانه از مربع ها را انتخاب کرده و آن دو حرف را در آنجا قرار می دهیم (ابتدا P و سپس O)، که این کار به ۵ طریق ممکن است. اما اگر دو نفر P و O پیش هم نباشند آنگاه دو خانه از مربع را به $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۱۰ طریق انتخاب کرده و در اولی P و در دومی O را قرار می دهیم. اگر P قبل از L باشد، آنگاه ترتیب افراد به شکل $PL \square M \square N \square Q \square J \square$ در می آید که اگر دو نفر O و K پیش هم باشند، آنگاه یک خانه از مربع ها را انتخاب کرده و آن دو حرف را به ۲! طریق در آن مربع قرار می دهیم (چون باید K قبل از J باشد، پس مربع آخر نمی تواند انتخاب شود)، این کار به $2! \times \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۸ طریق ممکن است. اما اگر دو نفر O و K پیش هم نباشند، آنگاه یکی از چهار مربع اول را انتخاب K را در آن قرار می دهیم و سپس یکی از چهار مربع باقی مانده را انتخاب کرده و O را در آن قرار می دهیم که این کار نیز به 4×4 طریق ممکن است. بنابراین تعداد کل حالات برابر $16 + 8 + 10 + 5$ ؛ یعنی ۳۹ خواهد شد.

۵. ارزش عدد 10101010 در مبنای ۱۰ برابر ۱۷۰ می باشد، در حالی که یک عدد هفت رقمی در مبنای ۲ حداکثر ارزشی برابر ۱۲۷ می تواند داشته باشد. اگر هر دو عددی که مجموعشان برابر ۱۷۰ می شود را مکمل هم بنامیم، آنگاه مکمل ۱۲۷ عدد ۴۳، مکمل ۱۲۶ عدد ۴۴ و ... و بالاخره مکمل ۸۵ خود ۸۵ می شود. همه زوج های اشاره شده در مبنای دو که تعداد آنها برابر $1 + 43 - 85$ ؛ یعنی ۴۳ می باشد، در مبنای ۲ حداکثر ۷ رقمی هستند در حالی که سایر زوج های مکمل مثل ۴۰ و ۱۳۰، یکی از مؤلفه هایشان در مبنای ۲ هشت رقمی بوده و قابل قبول نیستند.

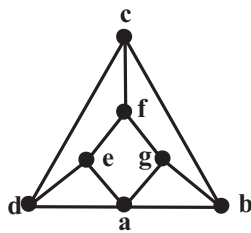
۶. تعداد a ها برابر ۳ و تعداد b ها برابر ۶ بوده و شروع هر یک از دنباله ها با a و پایان آن دنباله ها با دو عدد b می باشد که به شکل زیر می باشند:

aaabbbbbbb	aabbbbabb	ababbbabb
aababbbbb	abaabbbbb	abbaabbbbb
aabbabbbb	abababbbb	abbababbb
aabbbabbb	ababbabbb	abbabbabb

۷. تعداد کل جایگشت های از ۱ تا ۱۰ برابر ۱۰! می باشد که در نصف آنها ۱ قبل از ۲ و در نصف دیگر ۲ قبل از ۱ می باشد. به همین ترتیب در نصف اعداد مطلوب ($\frac{10!}{2}$) عدد ۳ قبل از ۴ و در نصف دیگر ۴ قبل از ۳ می باشد. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، معلوم است که جواب مطلوب برابر $\frac{10!}{2^5}$ خواهد شد.

قرمز	سبز	زرد
زرد	قرمز	آبی
آبی	زرد	قرمز

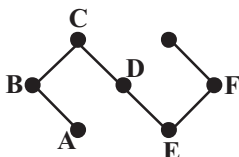
۸. در کل جدول حداکثر سه لامپ قرمز، سه لامپ زرد و یک لامپ سبز موجود است، بنابراین وجود دو لامپ آبی الزامی است. مطابق جدول مقابل وجود دو لامپ آبی کافی است.



۹. به خاطر تقارن موجود در شکل اگر فرض کنیم ab زرد، ag قرمز، ae آبی و ad سبز باشند، کلیت مسأله به هم نمی خورد. در این صورت رنگ سایر یال ها به اجبار به شکل زیر خواهند بود.

$de = \text{قرمز}$ ، $ef = \text{سبز}$ ، $dc = \text{آبی}$ ، $fg = \text{آبی}$
 $cf = \text{قرمز}$ ، $cb = \text{سبز}$ ، $gb = ?$

همان طور که مشخص است برای gb رنگی پیدا نمی شود.



۱۰. اگر یک دوره تناوب از شکل را در نظر بگیریم و مختصات نقطه A به صورت (k, k) باشد، آنگاه اولاً K فرد است. ثانیاً در نقاط A, B, C, D ,

E و F به ترتیب اعداد $3k+1, 3k+2, 3k+3, 3k+4, 3k+5$ و $3k+6$ قرار دارد. عدد 1379 به صورت $3k+2$ می باشد. بنابراین آن عدد در نقطه B قرار دارد. چون از تساوی $3k+2 = 1379$ مقدار k برابر 459 به دست می آید. پس مختصات نقطه A به صورت $(459, 459)$ و مختصات نقطه B به صورت $(460, 458)$ خواهد بود.

۱۱. افراد را A, B و C می نامیم. $n(X), n(\bar{X}), n(X \cap Y)$ و $n(X \cup Y)$ به ترتیب نشانگر تعداد افرادی است که به X رأی داده اند، به X رأی نداده اند، هم به X و هم به Y رأی داده اند و بالاخره به X یا Y رأی داده اند. حداقل مقدار عبارت $n(A \cap B \cap C)$ مطلوب مسأله می باشد.

$$\begin{aligned} n(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) &\leq n(\bar{A}) + n(\bar{B}) + n(\bar{C}) = 4 + 8 + 11 = 23 \\ \Rightarrow n[(\overline{A \cap B \cap C})] &\leq 23 \Rightarrow n(\text{کل}) - n(A \cap B \cap C) \leq 23 \\ \Rightarrow 30 - n(A \cap B \cap C) &\leq 23 \Rightarrow 7 \leq n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

۱۲. بهترین عدد ممکن عدد 101000110 می باشد که شامل ۹ رقم می باشد.

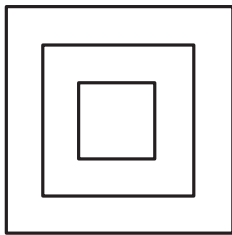
۱۳. اگر نفر اول x متر را پیاده و مابقی $1300-x$ متر را با دوچرخه برود معلوم است که نفر دوم x متر اول را با دوچرخه و مابقی مسافت را پیاده خواهد رفت. بهترین حالت آن است که هر دو هم زمان به مقصد برسند. بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} + \frac{1300-x}{12} &= \frac{x}{16} + \frac{1300-x}{6} \Rightarrow 13x = 4 \times 1300 \Rightarrow x = 400 \\ \Rightarrow t &= \frac{400}{4} + \frac{1300-400}{12} = 100 + 75 = 175 \end{aligned}$$

۱۴. گزینه ای مطلوب است که به ازای دو رشته موجود در آن یک رشته ۶ حرفی یافت نشود که هر دو رشته داده شده زیر رشته آن باشند. به ازای 0101 و 111 موجود در گزینه الف رشته 010111 و به ازای 0101 و 111 موجود در گزینه ب رشته 0101111 و به ازای 11011 و 10110 موجود در گزینه ج رشته 110110 موجود هستند، بنابراین گزینه های مطلوب نمی باشند، به ازای 0101 و 1110 موجود در گزینه د هیچ رشته ۶ حرفی که هر دو تایی آنها زیر رشته آن باشند یافت نمی شود.

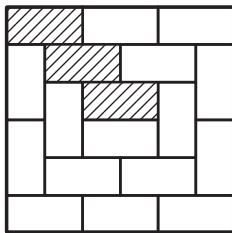
۱۵. یک نفر حداکثر ۶ نفر می تواند آشنا داشته باشد. بنابراین A حتماً راست گفته است؛ یعنی A با همه دست داده است، از جمله B. G نمی تواند دروغ گفته باشد زیرا در این صورت با ۶ نفر دست داده است (با همه) که در این صورت G با هر دو نفر A و B دست داده است و جواب او «۱» دروغ است، در صورتی که تعداد دروغ گوها بیش از یک نفر نیست. پس B نیز راستگو می باشد؛ یعنی A با همه و B به غیر از G با همه دست داده اند. بنابراین E و F هر دو حداقل با هر دو نفر A و B دست داده اند. به طریق مشابه استدلال می شود که دو نفر C و D نمی توانند دروغگو باشند یعنی یکی از دو نفر E یا G دروغ گفته است.

۱۶. اگر بار اول تا دهم همگی سفید بیایند، حسین و در غیر این صورت علی برنده خواهد شد؛ یعنی به غیر از حالت اشاره شده، اگر حسین بخواند برنده شود باید 10 بار متوالی سفید بیاید که چون قبل از این سفیدها یک سیاه آمده است، قبل از پرتاب آمدن سفید دهم، علی برنده می شود، چون یک سیاه و نه سفید متوالی ظاهر شده است. بنابراین احتمال برد حسین $(\frac{1}{4})^{10}$ و احتمال برد علی $1 - (\frac{1}{4})^{10}$ می باشد.



۱۷. اگر کف اتاق را به شکل مقابل در نظر بگیریم و در هیچ یک از سه ناحیه کاشی قرار ندهیم، آنگاه کودک به دو طریق می تواند کاشی ها را در هر یک از آن ناحیه قرار دهد. پس وجود حداقل سه کاشی الزامی است.

اگر سه عدد کاشی را مطابق شکل مقابل در کف اتاق بچینیم کودک فقط به یک طریق می تواند کار را ادامه دهد.

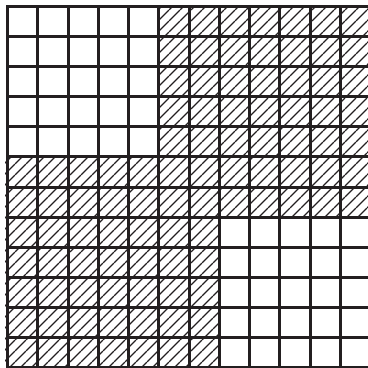


۱۸. تعداد کلماتی که حرف اول آنها برابر a است و یک حرفی، دو حرفی، ... و شش حرفی می باشند، به ترتیب برابر $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ می باشند که مجموع آنها برابر $1 - 2^6$ ؛ یعنی 63 می شود. پس از کلمه شصت و چهارم به بعد همه کلمات با b شروع می شوند. تعداد کلماتی که با ba شروع می شوند $1 - 2^5$ ؛ یعنی 31 می باشد، بنابراین از کلمه شصت و پنجم تا کلمه نود و پنجم از جمله کلمه هفتاد و نهم با ba شروع می شوند. تعداد کلماتی که با baa شروع می شوند برابر $1 - 2^4$ ؛ یعنی 15 می باشد، بنابراین از کلمه

شصت و ششم تا کلمه هشتادم، از جمله کلمه هفتاد و نهم با baa شروع می شوند. با همین استدلال معلوم می شود که کلمه هفتاد و نهم کلمه baabba می شود.

۱۹. حالت مینیمم موقعی است که سطرهای دوم، چهارم، ششم و هشتم همگی ۱ و مابقی خانه ها ۰ باشند، که در این صورت تعداد ۱ ها، ۳۶ خواهد بود.

حالت ماکزیمم نیز موقعی است که سطرهای فرد همگی ۱ و سطرهای زوج نیز یک در میان ۱ باشند (با شروع از ۱) که در این صورت نیز تعداد ۱ ها $5 \times 4 + 9 \times 5$ ؛ یعنی ۶۵ خواهد بود.

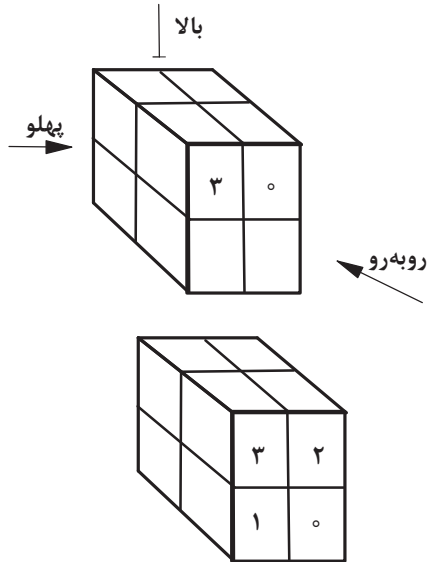


۲۰. خانه های هاشور خورده نشانگر O و سایر خانه ها نشانگر X می باشند. پس از مراحل وضعیت جدول به شکل مقابل می باشد که ۹۴ خانه از آن O می باشد و تا آن مرحله هرگز تعداد O ها به بیش از ۹۴ نمی رسد. پس از این مرحله یک در میان وضعیت جدول به همین شکل می شود. پس هرگز تعداد O ها بیش از ۹۴ نخواهد رسید.

۲۱. اگر A_1 راستگو باشد وضعیت حقیقی آن یازده نفر به ترتیب به صورت د، ر، د، ر، د، ر، د، ر، د، ر، د، ر و اگر A_1 دروغ گو باشد وضعیت حقیقی آن یازده نفر، به ترتیب به صورت ر، د، ر، د، ر، د، ر، د، ر، د، ر، د خواهد بود. پس تعداد دروغ گوها در این جمع حداقل برابر ۴ می باشد.

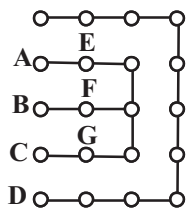
۲۲. در ابتدا آب موجود در هر یک از ظروف را $\frac{3^k}{3^k}$ در نظر می گیریم که در آن k به اندازه کافی بزرگ است.

پس از گذشت مراحل وضعیت سه ظرف چنان است که مخرج همان 3^k بوده و صورت آنها به صورت $a \times 3^i$ ، $b \times 3^i$ و $c \times 3^i$ در می آید. در مرحله بعد با فرض این که آب موجود در ظرف اول را تقسیم کنیم صورت سه کسر به ترتیب برابر $a \times 3^{i-1}$ ، $(3b+a) \times 3^{i-1}$ و $(3c+a) \times 3^{i-1}$ خواهد شد که اگر صورت هر یک از کسرها را با مخرج آنها ساده کنیم، صورت آن کسرها به ترتیب به صورت a ، $3b+a$ و $3c+a$ خواهد شد که باقی مانده آن سه عدد در تقسیم بر ۳ یکسان است. در بین گزینه ها فقط سه عدد موجود در گزینه «د» چنان هستند که صورت هر سه عدد در تقسیم بر ۳ باقی مانده ۱ می آورد.



۲۳. فرض می‌کنیم اعداد ۰ و ۳ از وجه «روبه‌رو» مطابق شکل مقابل، پهلوی هم باشند در این صورت هر دو عدد نوشته شده در خانه‌های بالای وجه «پهلوی» برابر ۲ خواهد بود که مطلوب نیست. اما اگر اعداد ۰ و ۳ از وجه «روبه‌رو» مطالب شکل مقابل پهلوی هم نباشند در این صورت، آنگاه اعداد موجود در ستون اول وجه «پهلوی» هر دو برابر ۲ خواهد شد که باز مطلوب نیست. بنابراین هرگز حالت خواسته شده به دست نمی‌آید.

۲۴. ابتدا حمید پاره‌خط‌های EF، AB و BC را کشیده و دو امتیاز کسب می‌کند، سپس امید



پاره‌خط‌های FG را کشیده و دو امتیاز کسب می‌کند و جایزه خود را یکی از پاره‌خط‌های باقی‌مانده انتخاب کرده و رسم می‌کند. این پاره‌خط هر پاره‌خطی (مانند CD) می‌تواند باشد، همه امتیازات باقی‌مانده که ۸ امتیاز می‌باشد را نصیب حمید خواهد کرد.

۲۵. I. برای آن که A و B به مرحله نهایی برسند الگوریتم زیر اجرا می‌شود:

● C و D با هم قیاس می‌شوند که D برنده می‌شود.

● A و D با هم قیاس می‌شوند که A برنده شده و به همراه B به فینال می‌رسد.

II. برای آن که C و D به مرحله نهایی برسند الگوریتم زیر اجرا می‌شود:

● A و B با هم قیاس می‌شوند که B برنده می‌شود.

● B و D با هم قیاس می‌شوند که D برنده شده و به همراه C به فینال می‌رسد.

III. برای آن که B و C به مرحله نهایی برسند الگوریتم زیر اجرا می‌شود:

● A و D با هم قیاس می‌شوند که A برنده می‌شود.

● A و C با هم قیاس می‌شوند که C برنده شده و به همراه B به فینال می‌رسد.

IV. برای آن که A و C به مرحله نهایی برسند الگوریتم زیر اجرا می شود:

● B و D با هم قیاس می شوند که D برنده می شود.

● D و A با هم قیاس می شوند که A برنده شده و به همراه C به فینال می رسد.

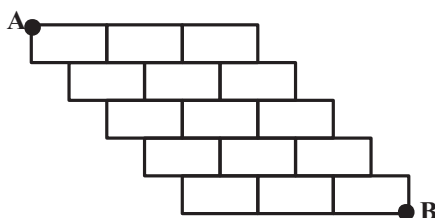
۲۶. ۵ خط مرسوم از A مثلث را به ۶ ناحیه تقسیم می کند. ۱۵ خط مرسوم از B هر یک، خطوط مرسوم از A (۵ خط سوایی به همراه پاره خط AC) را قطع می کند و به ازای هر نقطه تقاطع یک ناحیه جدید ایجاد می شود. بنابراین کل ناحیه های به دست آمده تا این مرحله برابر $۶ + ۶ \times ۱۵$ ؛ یعنی ۹۶ می باشد. هر یک از ۱۰ خط مرسوم از C هر یک از ۲۱ خط قبلی (۵ + ۱۵ خط سوایی به همراه پاره خط AB) را در یک نقطه قطع می کند، بنابراین تعداد ناحیه های اضافه شده برابر ۲۱×۱۰ ؛ یعنی ۲۱۰ خواهد شد. معلوم می شود که تعداد کل ناحیه ها برابر $۹۶ + ۲۱۰$ ؛ یعنی ۳۰۶ می باشد.

۲۷. تعداد طرقی که آن دو در نقطه ۵ با هم ملاقات کنند برابر 1^2 می باشد. تعداد طرقی که آن دو در نقطه ۳ با هم ملاقات کنند برابر $\left[\begin{smallmatrix} ۵ \\ ۱ \end{smallmatrix} \right]$ ؛ یعنی ۲۵ می باشد. در حقیقت هر یک از آن دو نفر به $\left[\begin{smallmatrix} ۵ \\ ۱ \end{smallmatrix} \right]$ طریق می توانند یکی از ۵ حرکت خود را به عنوان حرکت برگشتی انتخاب کنند.

تعداد طرقی که آن دو در نقطه ۱ با هم ملاقات کنند برابر $\left[\begin{smallmatrix} ۵ \\ ۲ \end{smallmatrix} \right]$ ؛ یعنی ۱۰۰ می باشد. در حقیقت هر یک از آن دو نفر به $\left[\begin{smallmatrix} ۵ \\ ۲ \end{smallmatrix} \right]$ طریق می توانند دو تا از ۵ حرکت خود را به عنوان حرکت برگشتی انتخاب کنند. تعداد طرق ملاقات آن دو در نقاط ۵-، ۳- و ۱- نیز به همان صورت به دست می آید. پس جواب مطلوب برابر $۲(۱ + ۲۵ + ۱۰۰)$ ؛ یعنی ۲۵۲ می باشد.

یادآوری می شود که امکان ملاقات آن دو در نقاط زوج غیرممکن است.

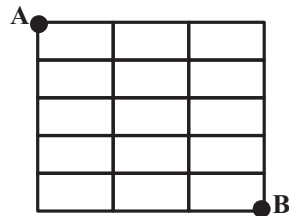
۲۸. اگر $N + M$ زوج باشد کامپیوتر و در غیر این صورت بازی کن برنده می شود.



۲۹. بعضی از خطوط شبکه اضافه بوده و هرگز از آنها نمی توان عبور کرد. با حذف آن خطوط، شبکه جدید به صورت مقابل در می آید:

۲۰۰

المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)



تعداد مسیرهای مطلوب در شبکه فوق با تعداد مسیرهای از A به B در شبکه مقابل تفاوتی ندارد که این تعداد برابر $\binom{3+5}{3}$ ؛ یعنی ۵۶ می باشد.

۳۰. برای آن که دو قورباغه به هم برسند لازم است برابند حرکت هر یک از آن دو ۳۴۷۵ سانتی متر به سمت دیگری باشد. عدد ۳۴۷۵ در مبنای ۲ به شکل $A = 110110010011$ می باشد. در هر جهش قورباغه به اندازه 2^i سانتی متر جهش می کند و این به آن معناست که به عدد A در مبنای ۲ به اندازه $00 \dots 00100$ اضافه و یا آن اندازه از A کم شده است. عمل موقعی به اتمام می رسد که عدد مورد نظر به ۰ برسد. بهترین الگوریتم به شکل زیر می باشد:

$$A - 2^0 - 2^2 - 2^4 + 2^7 + 2^9 - 2^{12}$$

الگوریتم فوق پس از ۶ مرحله قورباغه ها را به هم خواهد رساند.

۳۱. تنوع حروف به کار رفته در هر یک از کلمات به یکی از چهار شکل زیر می باشد:

x, x, x, x, x, x, y, y

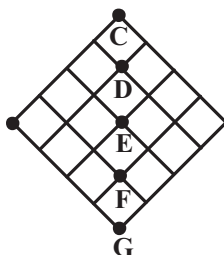
x, x, x, x, x, x, x, y

x, x, x, x, y, y, y, y

x, x, x, x, x, y, y, y

تعداد کلمات قابل ساخت در هر یک از چهار شکل فوق به ترتیب $\binom{6}{1} \binom{5}{1} \frac{8!}{6!2!}$ ، $\binom{6}{1} \binom{5}{1} \frac{8!}{7!}$

می باشد که مجموع آنها ۳۸۱۰ می شود. $\binom{6}{2} \frac{8!}{4!4!}$ و $\binom{6}{1} \binom{5}{1} \frac{8!}{5!3!}$



۳۲. نقاط تقاطع دو متحرک یکی از نقاط C, D, E, F و G از شکل مقابل می باشد که احتمال ملاقات آن دو نفر در هر یک از نقاط مورد اشاره به شکل زیر می باشد:

$$P(C) = P(G) = \frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$$

$$P(D) = P(F) = \frac{4}{16} \times \frac{4}{16} = \frac{16}{256}$$

$$P(E) = \frac{6}{16} \times \frac{6}{16} = \frac{36}{256}$$

$$\Rightarrow P = \sum P_i = \frac{1}{256} + \frac{16}{256} + \frac{36}{256} + \frac{16}{256} + \frac{1}{256} = \frac{70}{256} = \frac{35}{128}$$

۳۳. اگر دوره ۱، ۲، ۳، ...، ۹ به تعداد چهار بار تکرار شود، آنگاه هر یک از آن ۹ عدد یک بار در سمت بالا، یک بار در سمت پایین، یک بار در سمت راست و یک بار در سمت چپ به کار می‌روند؛ یعنی بعد از طی چهار دوره به نقطه اولیه خواهیم رسید که در این صورت مجموعاً $(1 + 2 + 3 + \dots + 9) \times 4$ ؛ یعنی 180 دسی متر طی شده است.

۳۴. اگر تعداد رشته‌هایی به طول n که شامل 0 نیستند را با $F(n)$ نمایش دهیم، آنگاه آن تعداد را به دو دسته تقسیم کنیم، رشته‌هایی که رقم آخرشان 0 است و رشته‌هایی که رقم آخرشان 1 است. رقم ماقبل آخر تمام رشته‌های موجود در دسته اول 1 می‌باشد چون در هیچ‌یک از آنها دو رقم 0 پشت سر هم نیامده است، بنابراین تعداد آن رشته‌ها را $n-2$ رقم اول تعیین خواهد کرد که با توجه به تعریف این تعداد برابر $F(n-2)$ می‌باشد. تعداد رشته‌های موجود در دسته دوم نیز برابر $F(n-1)$ می‌باشد. بنابراین رابطه $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ برقرار است و با توجه به تساوی‌های $F(2) = 3$ و $F(3) = 5$ تساوی‌های زیر حاصل خواهند شد:

$$F(4) = 8, \quad F(5) = 13, \quad F(6) = 21, \quad F(7) = 34, \quad F(8) = 55$$

از طرف دیگر با توجه به اصل شمول و عدم شمول رابطه زیر برقرار است:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

حاصل هر یک از عبارات $|A|$ و $|B|$ برابر 55 به دست آمد. حاصل $|A \cap B|$ نیز برابر 2 می‌باشد

زیرا تنها دو رشته 10101010 و 10101010 می‌باشد که نه شامل 00 است و نه شامل 11 . بنابراین:

$$|A \cup B| = 55 + 55 - 2 = 108$$

۳۵. اگر باقی مانده تقسیم عدد بر ۳ برابر ۱ باشد، آنگاه یکی از ارقام ۱ موجود در جایگاه های فرد را از ۱ به ۰ تبدیل می کنیم و اگر آن جایگاه ها ۰ باشد می توانیم یکی از ارقام ۰ موجود در جایگاه های زوج را از ۰ به ۱ تبدیل کنیم، که اگر چنین چیزی نیز ممکن نبود دو تا از ۰ های موجود در جایگاه های فرد را از ۰ به ۱ تبدیل می کنیم. به همین شیوه ثابت می شود که اگر باقی مانده تقسیم عدد بر ۳ برابر ۲ باشد نیز بیشینه عدد بخش پذیری ۲ است.

۳۶. وقتی جعبه ای مانند i (غیر از ۱) خالی شود به این معناست که هر چهار کارت با شماره i دور انداخته شده اند و هیچ کارتی با شماره i در بین کارت ها باقی نمانده است؛ یعنی هرگز به جعبه خالی رجوع نخواهیم کرد. در مورد جعبه ۱، مطلب فوق صدق نمی کند زیرا آخرین کارت جعبه ۱ وقتی از آن جعبه خارج می شود که قبل از آن سومین ۱ از یکی از جعبه ها بیرون آمده باشد و با آمدن چهارمین ۱، مجبوریم به جعبه ۱ مراجعه کنیم که قبل از این هر چهار کارت آن جعبه خارج شده اند. بنابراین به طور حتم جعبه خواسته شده جعبه ۱ می باشد.

۳۷. پس از مرحله صدم سطور دوم، چهارم، ششم و ... به ترتیب کمترین ۱ ها را دارند که پس از اجرای مراحل ۱۰۱ تا ۱۰۹ تعداد ۱ های سطور ۲ و ۴ به مراتب افزایش یافته و تعداد ۱ های سطر ششم که در آخر این سطر قرار دارند کمتر از مابقی سطور می باشد.

۳۸. اگر رئوس پایانی متناظر به اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ... را در نظر بگیریم، به ترتیب رئوس B, C, D, E, A ، B, C, D, E, A ، ... خواهد شد که با دوره تناوب ۵ دنباله B, C, D, E, A تکرار می شود. چون باقی مانده عدد داده شده بر ۵ برابر ۴ می باشد، بنابراین رأس مورد نظر رأس E می باشد.

۳۹. چون رقم سمت چپ W همیشه ۱ است پس رقم سمت راست W^R همیشه ۱ خواهد بود؛ یعنی W^R همیشه عددی فرد است. با توجه به تساوی $W = ۱۲W^R$ معلوم می شود که W مضرب ۴ بوده، ولی مضرب ۸ نمی باشد؛ یعنی W در سمت راست خود به دورقم ۰ ختم می شود و این به آن معناست که W از

W^R فقط دو رقم بیشتر دارد. عددی که در مبنای ۲ از عدد دیگر ۲ رقم اضافی داشته باشد، حداکثر a برابر دیگری می تواند باشد که a کمتر از ۸ می باشد.

۴۰. شیوه تولید مورد اول به شکل زیر می باشد:

(لازم به یادآوری است که در هر مرحله می توانیم به تعداد دلخواه A وارد عمل کنیم و در ضمن شماره عمل به کار رفته بر روی فلش نوشته شده است.)

$$4A \xrightarrow{(1)} 4B \quad 4D = 4B \quad 4(D \ A) \xrightarrow{(2)} 8B \quad 4C = 6B \quad 4C \quad 2B \xrightarrow{(3)} 6B \quad 4C \quad 2D$$

شیوه تولید مورد سوم به شکل زیر می باشد:

$$2A \xrightarrow{(1)} 2B \quad 2D \xrightarrow{(3)} 2D \quad 2D = 4D$$

شیوه تولید مورد چهارم به شکل زیر می باشد:

$$3A \xrightarrow{(1)} 3B \quad 3D = 3B \quad 3(D \ A) \xrightarrow{(2)} 3B \quad 3B \quad 3C = 2B \quad 4B \quad 3C$$

$$\xrightarrow{(3)} 2D \quad 4B \quad 3C = 2(D \ B) \quad 2B \quad 3C \xrightarrow{(1)} 2B \quad 3C$$

مورد دوم قابل تولید نمی باشد.

مرحله ی اول دهمین المپیاد کامپیوتر کشور

سوالات پنج گزینیه یی

- (۱) نگهبانی در یک شرکت با سه کارمند به نام های علی، حسین، و مجید کار می کند. نگهبان باید هر روز سرکار حاضر شود، مگر روزی که هر سه کارمند در مرخصی باشند. می دانیم که
- علی یک روز در میان به مرخصی می رود و امروز هم سرکار است.
 - حسین ۵ روز کار می کند و دو روز به مرخصی می رود و دیروز اولین روز کار او بعد از یک مرخصی بوده است.
 - مجید سه روز کار می کند و یک روز به مرخصی می رود. او دیروز در مرخصی بوده است.

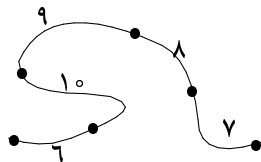
اولین روز تعطیلی نگهبان چند روز دیگر است؟

- الف) ۴ (ب) ۷ (ج) ۱۱ (د) ۱۹ (ه) نگهبان هیچ گاه تعطیلی نخواهد داشت.

- (۲) عددهای ۱ تا ۷۸ را به ترتیب حرکت عقربه های ساعت روی دایره یی نوشته ایم. عدد ۱ را به عنوان عدد جاری انتخاب کرده و عملیات زیر را آن قدر تکرار می کنیم که تنها یک عدد بر روی دایره باقی بماند:

- اگر عدد جاری مساوی x باشد، آن را از روی دایره حذف، به هریک از x عدد بعدی (در جهت عقربه های ساعت) بر روی دایره یک واحد اضافه، و عدد $x + 1$ ام پس از آن را به عنوان عدد جاری انتخاب می کنیم.
- توجه داشته باشید که اگر تعداد عددهای باقی مانده بر روی دایره از x کم تر باشد، ممکن است به یک یا چند عدد بیش از یک واحد اضافه شود. عددی که در نهایت بر روی دایره می ماند، چه باقیمانده یی بر ۵ دارد؟

- الف) صفر (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴



- (۳) شکل روبه رو ۵ شهر و جاده های بین آن ها را نشان می دهد. عددهای بین شهرهای متوالی، نشان گر مسافت بین آن ها است. می خواهیم پمپ بنزینی بر روی جاده یا در یکی از شهرها احداث کنیم به طوری که مجموع مسافت شهرهای مختلف تا پمپ بنزین که آن را y می نامیم حداقل باشد. جزء صحیح y چند است؟ (جزء صحیح عدد x ، بزرگ ترین عدد صحیحی است که از x بزرگ تر نباشد.)

- الف) ۶۳ (ب) ۶۹ (ج) ۷۰ (د) ۷۶ (ه) ۹۲

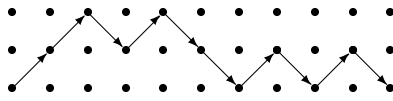
- (۴) ده نقطه ی متمایز $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ بر روی صفحه یی قرار دارند به طوری که هیچ سه تایی از آن ها روی یک خط نیستند. برای هر سه عدد متمایز i, j, k ، و $\angle a_i a_j a_k$ به طوری که $\angle a_i a_j a_k < 180^\circ$ چند درجه است؟

- الف) ۱۸۲۰۰ (ب) ۱۹۸۰۰ (ج) ۲۱۶۰۰ (د) ۳۳۶۰۰ (ه) ۴۳۲۰۰

- (۵) به چند طریق می توان تعدادی از خانه های غیر مجاور در یک صفحه ی 4×2 را علامت زد؟ (دو خانه مجاور هستند اگر در یک ضلع مشترک باشند.)

- الف) ۱۷ (ب) ۲۶ (ج) ۳۴ (د) ۴۱ (ه) ۵۴

مرحله ی اول دهمین المپیاد کامپیوتر کشور

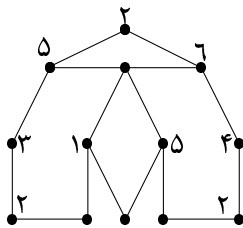


۶) شکل روبه‌رو یک جدول ۱۱×۳ با ۳۳ نقطه است. می‌خواهیم با استفاده از حرکت‌های مورب (مانند شکل روبه‌رو) از نقطه‌ی گوشه‌ی سمت چپ و پایین به نقطه‌ی گوشه‌ی سمت راست و پایین برویم. توجه کنید که با هر حرکت مورب فقط می‌توان به سمت راست شکل رفت. این کار به چند طریق ممکن است؟

- الف) $3^2 \times 2^4$ ب) $3 \times \begin{pmatrix} 1^0 \\ 5^0 \end{pmatrix}$ ج) 2^5 د) $\begin{pmatrix} 1^0 \\ 5^0 \end{pmatrix}$ هـ) 2^4

(۷) مهدی عدد مخفی x از مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۵۳ را انتخاب می‌کند. مریم می‌خواهد با تعدادی سؤال از عدد x آگاه شود. مریم در هر مرحله دو عدد a و b را با فرض $1 \leq a < b \leq 53$ انتخاب می‌کند. اگر $x = a$ یا $x = b$ ، مهدی مقدار x را به مریم می‌گوید و کار تمام است. در غیر این صورت مهدی یکی از سه جواب زیر را به مریم می‌دهد که عدد انتخابی او کوچک‌تر از a ، بین a و b ، یا بزرگ‌تر از b است. مریم با چند سؤال حتماً می‌تواند عدد مهدی را پیدا کند؟

- الف) ٣ ب) ٤ ج) ٥ د) ٦ هـ) ٧



۸) شکل روبه‌رو ۱۳ نقطه را نشان می‌دهد که توسط ۱۶ پاره‌خط به هم متصل شده‌اند. در ابتدا برای هر نقطه یک عدد طبیعی به عنوان برچسب آن نقطه در نظر گرفته شده است. پس از آن در هر مرحله برای هر نقطه، از بین نقاط متصل به آن، نقطه‌یی که بزرگ‌ترین و نقطه‌یی که کوچک‌ترین برچسب را در مرحله‌ی قبل داشته است در نظر گرفته، مجموع برچسب آن دو را به عنوان برچسب آن نقطه در آن مرحله قرار می‌دهیم. در شکل داده‌شده، برچسب بعضی از نقطه‌ها در ابتدا بر روی آن‌ها نشان داده شده است. در مورد مجموع برچسب بقیه‌ی نقاط در انتهای مرحله‌ی سوم چه می‌توان گفت؟

- (الف) زوج است و بر ۳ بخش پذیر است.
(ب) فرد است و بر ۳ بخش پذیر است.
(ج) زوج است و بر ۳ بخش پذیر نیست.
(د) عدد اول است.
(ه) احتمال درستی هر کدام از چهار مورد فوق وجود دارد.

۹) آزمونی شامل ۴۰ پرسش ۵ گزینه‌ای است. در این آزمون هر پاسخ درست ۴ نمره‌ی مثبت، هر پاسخ نادرست ۱ نمره‌ی منفی، و هر پرسش بدون پاسخ نمره‌ی صفر دارد. کم‌ترین تعداد شرکت‌کنندگان در این آزمون چه قدر باشد تا مطمئن شویم که حداقل دو نفر نمره‌ی برابر می‌گیرند؟

- الف) ۱۵۶ ب) ۱۹۱ ج) ۱۹۴ د) ۱۹۶ هـ) ۲۰۱

۱۰) ۵ تیم فوتبال در یک تورنمنت به صورت دوره‌یی با یک‌دیگر مسابقه داده‌اند. هر باخت، مساوی، و برد به ترتیب صفر، یک، و سه امتیاز دارد. اگر بدانیم که هر دو تیم با هم یک مسابقه برگزار کرده‌اند و نیز بدانیم که پس از پایان تورنمنت تیم اول ۹ و تیم دوم ۷ امتیاز کسب کرده‌اند، تیم چهارم حداکثر چند امتیاز کسب کرده است؟

- الف) ٣ ب) ٤ ج) ٥ د) ٦ هـ) ٧

مرحله ی اول دهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱۱) یک ماشین محاسبه گر یک حافظه ی داخلی به نام M دارد. این ماشین می تواند با انجام دستورهای زیر یک عبارت را محاسبه کند:

• Add X : مقدار X را با مقدار M جمع و حاصل را در M ذخیره می کند.

• Mul X : مقدار X را در مقدار M ضرب و حاصل را در M ذخیره می کند.

در دستورهای فوق X می تواند یک عدد صحیح یا یک متغیر باشد. فرض کنید مقدار M در ابتدا صفر است. برای مثال، دستورهای زیر، از راست به چپ، عبارت $ax + 5$ را محاسبه می کند: Add a ، Mul x و Add 5. کدام یک از عبارت های زیر با این ماشین قابل محاسبه نیست؟

- الف) $ax^2 + bx + c$ ب) $(a+b)xy + ya$ ج) $(ax+by)(a+b)$ د) $3x^5 + 1$
 ه) همه ی این عبارت ها را می توان محاسبه کرد.

(۱۲) اگر گزاره های زیر درباره ی گزینه های همین سؤال باشند و بدانیم که دقیقاً یک گزینه درست است، گزینه ی درست کدام است؟

- الف) اگر گزینه ی «ب» درست باشد، گزینه ی «د» نادرست است.
 ب) گزینه ی «ب» درست است.
 ج) اگر یکی از گزینه های «الف» یا «ه» درست باشد، گزینه ی «د» درست است.
 د) گزینه های «الف» و «ب» درست هستند.
 ه) هیچ کدام از گزینه های بالا درست نیستند.

(۱۳) به چند حالت می توان از یک مجموعه ی ۱۰ عضوی به ترتیب سه زیرمجموعه ی A_1, A_2, A_3 و A_3 را انتخاب کرد به طوری که $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ ؟ (A_i ها لزوماً متمایز نیستند).

- الف) 2^{10} ب) 2^{15} ج) 3^{10} د) 2^{20} ه) 7^{10}

(۱۴) یکان یک عدد k رقمی ۷ است. می دانیم اگر یکان این عدد را از سمت راست عدد برداریم و در سمت چپ آن بگذاریم، عدد ما ۵ برابر می شود. k حداقل چند است؟

- الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۱۰

(۱۵) تعداد رشته هایی به طول ۱۰ متشکل از A, T, C و G را بیابید که در آن ها A و T مجاور هم نباشند و C و G نیز مجاور هم نباشند.

- الف) ۲۰۴۸ ب) ۴۹ ج) $2^8 \times 10 \times 4 - 4^{10}$ د) ۱۰۲۴ ه) ۴۶

(۱۶) ارزش یک عدد $\overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$ در مبنای ۱۰ برابر است با:

$$a_5 \times (-10)^5 + a_4 \times (-10)^4 + \dots + a_1 \times (-10) + a_0$$

تعداد اعداد یک رقمی تا ۶ رقمی در مبنای ۱۰ که ارزش آن ها منفی است، چند تا است؟ (برای اعدادی که کمتر از ۶ رقم دارند، رقم های سمت چپ را صفر در نظر بگیرید.)

- الف) ۱۰۱۰۱۰ ب) ۸۱۹۰۰۰ ج) ۵۰۰۰۰۰ د) ۵۰۹۰۹۰ ه) ۹۰۹۰۹۰

مرحله ی اول دهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱۷) به چند طریق می توان اعداد ۰ و ۱ را در خانه های یک جدول 10×15 قرار داد به طوری که مجموع هر ۴ عدد متوالی در یک سطر یا یک ستون عددی زوج باشد؟

الف) صفر (ب) ۵۱۲ (ج) ۲۱۶ (د) $\binom{15}{4} \binom{10}{4}$ (ه) $\frac{2^{150}}{\binom{15}{4} \binom{10}{4}}$

(۱۸) ۸ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. به چند طریق می توان این نقطه ها را دوه دو به هم متصل کرد، به طوری که هیچ دو وترى از ۴ وتر حاصل، هم دیگر را قطع نکنند؟ (وتریک دایره پاره خطی است که دو نقطه از محیط دایره را به هم وصل می کند.)

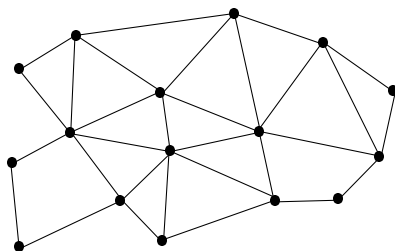
الف) ۸ (ب) ۱۴ (ج) ۱۶ (د) ۱۸ (ه) ۲۴

(۱۹) از دو عدد دودویی A و B ، عدد دودویی $C = A \oplus B$ را به این صورت به دست می آوریم: اگر رقم های i ام A و B یکسان باشند، رقم i ام C برابر صفر و در غیر این صورت برابر ۱ است (در سمت چپ هر عدد به اندازه ی کافی می توان رقم صفر اضافه کرد). مثلاً $110 = 000100 \oplus 00100$. حال بر روی عدد دودویی x عمل زیر را انجام می دهیم: x را به دو قسمت دل خواه x_1 و x_2 تقسیم می کنیم و x را برابر $x_1 \oplus x_2$ قرار می دهیم. مثلاً اگر $x = 11000100$ ، بر اساس یک حالت از تقسیم x داریم: $x_1 = 110$ و $x_2 = 00100$. یک عدد دودویی را «جالب» می گوئیم اگر بتوان با تکرار عمل بالا آن را به ۱ تبدیل کرد. چند عدد دودویی به طول ۱۰ «جالب» است؟ (رقم های سمت چپ یک عدد دودویی می تواند صفر باشد.)

الف) ۳۲ (ب) ۱۰۲۴ (ج) ۵۱۱ (د) ۱۰۲۳ (ه) ۵۱۲

(۲۰) می خواهیم تعدادی مهره ی 1×2 را در یک جدول 1×12 بچینیم به طوری که هر مهره دقیقاً روی دو خانه ی مجاور قرار گیرد و دیگر نتوانیم هیچ مهره یی روی جدول قرار دهیم. به چند طریق این کار ممکن است؟

الف) ۱۹ (ب) ۲۰ (ج) ۲۱ (د) ۲۲ (ه) ۲۳



(۲۱) درجه ی یک رأس در گراف برابر تعداد یال هایی از گراف است که به آن متصل هستند. در گراف مقابل به هر رأس، عددی برابر مجموع درجه های همسایه های آن رأس نسبت می دهیم. فرض کنید مجموع این اعداد برابر A شود. در گام بعدی روی هر یال یک رأس جدید اضافه می کنیم و دوباره برای هر رأس، همان عمل را انجام می دهیم. مجموع اعداد جدید را B می نامیم. $B - A$ چند است؟

الف) ۳۰ (ب) ۶۰ (ج) ۶۲ (د) ۱۲۰ (ه) ۱۲۴

(۲۲) یک شرکت بشکه هایی از چهار ماده ی شیمیایی مختلف به نام های A ، B ، C ، و D تولید و در انبارهای خود ذخیره می کند. این شرکت ۴ انبار دارد که در هر انبار ۴ بشکه از انواع A ، B ، C ، و D موجود است (از هر ماده یک بشکه). این مواد شیمیایی در صورتی که با هم مخلوط شوند، خطرناک هستند. به همین دلیل شرکت تصمیم دارد بشکه ها را بین این انبارها طوری جابه جا کند که در نهایت هر انبار حاوی ۴ بشکه از یک نوع ماده ی شیمیایی باشد. برای این کار از یک کامیون استفاده می شود. این کامیون می تواند در هر بار جابه جایی حداکثر ۲ بشکه را از یک انبار به یکی دیگر از انبارهای شرکت انتقال دهد. حداقل با چند بار جابه جایی می توان این کار را انجام داد؟

الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۷ (د) ۸ (ه) ۱۰

مرحله ی اول دهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۳) تعدادی عدد طبیعی متفاوت داده شده اند که مجموعشان برابر ۱۳ می باشد. بیشترین مقدار حاصل ضربشان چه قدر است؟

الف) ۴۲ (ب) ۶۰ (ج) ۷۲ (د) ۷۵ (ه) ۸۰

(۲۴) نقطه ی (X, Y) داده شده است. هر بار می توانیم به مقدار X یا به مقدار Y یک واحد اضافه کنیم و به نقطه ی جدید (X', Y') برویم. می خواهیم با تکرار عمل بالا از نقطه ی $(1, 1)$ به نقطه ی $(5, 5)$ برسیم. برای این کار باید ۸ بار عمل فوق را انجام دهیم و از ۷ نقطه ی میانی بگذریم، یعنی

$$(1, 1) \rightarrow (x_1, y_1) \rightarrow \dots \rightarrow (x_7, y_7) \rightarrow (5, 5).$$

می خواهیم این نقاط را طوری انتخاب کنیم که $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_7 \times y_1 \times y_2 \times \dots \times y_7$ ماکزیمم باشد. این مقدار ماکزیمم در کدام بازه قرار دارد؟

الف) بین ۱۰۰,۰۰۰ و ۱,۰۰۰,۰۰۰ (ب) بین ۱,۰۰۰,۰۰۰ و ۵,۰۰۰,۰۰۰
ج) بین ۵,۰۰۰,۰۰۰ و ۲۰,۰۰۰,۰۰۰ (د) بین ۲۰,۰۰۰,۰۰۰ و ۶۰,۰۰۰,۰۰۰
ه) بیش از ۶۰,۰۰۰,۰۰۰

(۲۵) دنباله یی از اعداد ۱ تا ۹ داده شده است. روی این دنباله الگوریتم زیر را انجام می دهیم. ابتدا ۳ عنصر اول دنباله را مرتب می کنیم. بعد از آن عناصر سوم و چهارم و پنجم را مرتب می کنیم. بعد عناصر پنجم و ششم و هفتم و در نهایت عناصر هفتم و هشتم و نهم را مرتب می کنیم. برای چه تعداد از جایگشت های اعداد یک تا نه دنباله یی که با این روش به دست می آید، مرتب است؟

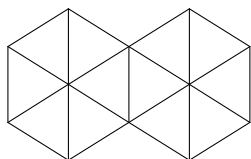
الف) ۸۱ (ب) ۵۱۲ (ج) ۱۰۲۴ (د) ۱۲۹۶ (ه) ۲۵۴۲

(۲۶) ۷۰۰ سکه را در صد ستون ۷ تایی قرار داده ایم. از هر ستون که حداقل ۳ سکه دارد، ۲ سکه برمی داریم، یکی را دور می اندازیم و دومی را روی ستون سمت چپ قرار می دهیم (در مورد سمت چپ ترین ستون، سکه ی دوم را نیز دور می اندازیم). این کار را آن قدر ادامه می دهیم تا هیچ ستون ۳ سکه یی و بیش تر نداشته باشیم. در پایان مجموعاً در همه ی صد ستون چند سکه باقی مانده است؟

الف) ۱۰۰ (ب) ۱۹۷ (ج) ۱۹۸ (د) ۱۹۹ (ه) ۲۰۰

(۲۷) رقم های یک سیستم عددنویسی باستانی عبارتند از: X با ارزش ۱۰، Y با ارزش ۹، V با ارزش ۵، U با ارزش ۴، و I با ارزش ۱. هر عدد در این سیستم، از کنار هم قرار گرفتن تعدادی از ارقام فوق تشکیل می شود به طوری که ابتدا ارقام X و Y به ترتیب دل خواه، سپس ارقام U و V به ترتیب دل خواه، و در نهایت ارقام I قرار می گیرند. مثلاً، $YXII = 9 + 10 + 1 + 1 = 21$ و $VVUVII = 5 + 5 + 4 + 5 + 1 + 1 = 21$. برای عدد ۱۳، چند نمایش مختلف در سیستم فوق وجود دارد؟

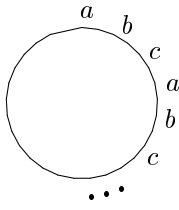
الف) ۱۲ (ب) ۱۳ (ج) ۱۴ (د) ۱۵ (ه) ۱۶



(۲۸) ۲۳ چوب کبریت به صورت روبه رو چیده شده اند. حداقل چند چوب کبریت باید برداریم تا هیچ مثلی در شکل باقی نماند؟ (هر پاره خط کوچک در شکل یک چوب کبریت است.)

الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۷ (د) ۸ (ه) ۹

مرحله ی اول دهمین المپیاد کامپیوتر کشور



(۲۹) حروف a, b, c را مانند شکل به طور متناوب دور یک دایره چیده ایم. می دانیم که در مجموع ۴۸ حرف دور دایره قرار داده ایم. سپس از یکی از حروف a شروع کرده و در جهت عقربه های ساعت حروف را یک در میان حذف می کنیم (خود اولین حرف نیز حذف می شود) تا در نهایت، دو حرف باقی بماند. این دو حرف به ترتیب نسبت به مبدأ، کدام دو حرف هستند؟

الف) اول a ، بعد b ب) اول c ، بعد a ج) اول c ، بعد b د) اول a ، بعد c ه) اول b ، بعد c

(۳۰) ۲۰۰۰ بلوک ساختمانی هریک به تنهایی بر روی زمین قرار دارند. می خواهیم برجی با قرار دادن همه ی این بلوک ها روی هم بسازیم. برای این کار تعداد نامحدودی جرثقیل داریم که می توانند به صورت هم زمان کار کنند. هر جرثقیل می تواند یک برج متشکل از یک یا چند بلوک را بر روی یک برج دیگر قرار دهد و یک برج جدید بسازد. اگر تعداد بلوک های برجی که توسط جرثقیل برداشته می شود کم تر یا مساوی ۱۰۰ باشد، این کاریک ساعت و در غیر این صورت دو ساعت طول می کشد. حداقل چند ساعت برای ساختن برج ۲۰۰۰ بلوکی لازم است؟

الف) ۱۱ ب) ۱۲ ج) ۱۳ د) ۱۴ ه) ۱۵

M_1	M_2
M_3	M_4

۱	۰
۰	۱

(۳۱) یک ماتریس M با درایه های صفر و یک و با ابعاد $2^n \times 2^n$ موجود است. S رشته ی متناظر با ماتریس M را به صورت زیر محاسبه می کنیم: اگر کلیه ی درایه های M صفر باشد، $S = ۰$ و اگر کلیه ی درایه های M یک باشد، $S = ۱$. در غیر این صورت ماتریس را به چهار ماتریس مساوی M_1, M_2, M_3, M_4 (مطابق ماتریس بالا از شکل روبه رو) تقسیم می کنیم. رشته ی S_i ($i = ۱, ۲, ۳, ۴$) متناظر با ماتریس M_i را به دست می آوریم. سپس $S = ۲S_1S_2S_3S_4$. برای مثال رشته ی متناظر ماتریس پایین از شکل روبه رو ۲۱۰۰۱ است.

کدام یک از رشته های زیر ممکن است رشته ی متناظر یک ماتریس صفر و یک باشد؟

الف) ۱ و ۳ ب) ۱ و ۲ ج) ۱ و ۲ و ۳ د) ۲ و ۳ ه) هیچ کدام

۲۰۱۰۲۱۰۲۱۰۱۰۱۰ (۳) ۲۱۱۲۰۰۲۰۰۰۰۰۰۱ (۲) ۲۰۲۲۱۱۱۰۱۱۱۱۱ (۱)

(۳۲) در سؤال قبلی چند رشته ی متناظر برای ماتریس های ۱۶×۱۶ وجود دارد؟

الف) ۱۶۶۴ ب) ۲۱۶ ج) ۲۶۴ د) ۴۲۵۶ ه) ۴۱۶

(۳۳) پنج نفر به نام های احسان، حامد، حسین، شادی، و الهام در تعدادی جلسه شرکت کردند. می دانیم تصادفاً در هر جلسه دقیقاً یک نفر غایب بوده است. الهام در ۵ جلسه شرکت کرد و حامد در ۸ جلسه. در ضمن می دانیم سه نفر دیگر هریک در بیش تر از ۵ جلسه و کم تر از ۸ جلسه شرکت کرده اند. کدام یک از گزینه های زیر در مورد این سه نفر درست است؟

الف) هر سه در ۶ جلسه شرکت کرده اند. ب) دو نفر در ۶ جلسه و یک نفر در ۷ جلسه شرکت کرده اند.
ج) دو نفر در ۷ جلسه و یک نفر در ۶ جلسه شرکت کرده اند.
د) هر سه در ۷ جلسه شرکت کرده اند. ه) اطلاعات داده شده برای حل مسئله کافی نیست.

مرحله ی اول دهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۳۴) در دو گوشه ی متقابل یک صفحه ی شطرنجی 2000×2000 دو مهره ی اسب قرار دارد. این دو مهره به نوبت حرکت می کنند. حرکت مهره ی اسب ۱ خانه در جهت عمودی یا افقی و ۲ خانه در جهت دیگر است. کم ترین مجموع تعداد حرکات لازم برای دو مهره چه قدر است تا این دو مهره روی یک خانه قرار بگیرند؟

الف) ۱۳۳۰ (ب) ۱۳۳۱ (ج) ۱۳۳۲ (د) ۱۳۳۳ (ه) ۱۳۳۴

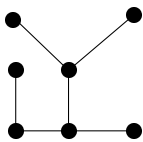
(۳۵) در جزیره ی فرد عجیبی زندگی می کند که در روزهای سه شنبه، چهارشنبه، و پنجشنبه همه ی جمله هایی که می گوید دروغ است و در بقیه ی روزهای هفته همه ی جمله های او راست است. این فرد عجیب در چند روز از یک هفته می تواند جمله ی زیر را بگوید: «من هم دیروز دروغ گفتم و هم فردا»؟

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۵

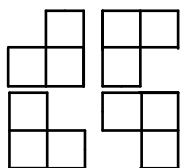
توجه کنید که سؤال های ۳۶ تا ۴۰ وجود ندارند و باید در پاسخ نامه سؤال های بله – خیر را از شماره ی ۴۱ علامت بزنید.

سؤالات بله - خیر

(۴۱) نقشه ی شهرهای یک کشور در شکل روبه رو داده شده است. در این شکل هر دایره متناظر یک شهر و پاره خط های بین آن ها متناظر جاده های بین این شهرهاست. هر شهر دارای یک مخزن بنزین است. همه ی این مخزن ها در ابتدا تهی هستند بجز یک شهر دل خواه به نام شهر مبدأ که مخزن آن ۳۰ لیتر بنزین دارد. در شهر مبدأ ماشینی قرار دارد که می تواند حداکثر ۳ لیتر بنزین حمل کند، و برای رفتن از هر شهر به شهر مجاور یک لیتر از این بنزین را مصرف می کند. ماشین می تواند مقداری از بنزینی را که حمل می کند در مخزن بنزین یک شهر خالی کند، یا از مخزن بنزین آن شهر مقداری بنزین برای حمل بردارد. آیا می توان با انتخاب شهر مبدأ مناسب ۳۰ لیتر بنزین موجود در مخزن آن شهر را به وسیله ی ماشین طوری بین شهرها پخش کرد که پس از بازگشت ماشین به شهر مبدأ، در مخزن بنزین هر شهر حداقل یک لیتر بنزین مانده باشد؟

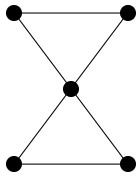


(۴۲) جایگشت (۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷) از اعداد ۱ تا ۷ را در نظر بگیرید. در هر مرحله می توانیم با داشتن یک جایگشت، تعداد دل خواهی از اعداد آخر آن را برداشته، به اول آن منتقل کنیم و به جایگشت جدیدی برسیم. مثلاً جایگشت فوق با برداشتن ۳ عدد آخر و انتقال آن ها، به جایگشت (۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۱, ۲) تبدیل می شود. آیا می توان جایگشت فوق را با انجام تعداد دل خواهی از تبدیل های مذکور، سرانجام به جایگشت (۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷) تبدیل کرد؟



(۴۳) یک جدول $m \times n$ داریم ($m > 2, n > 2$) که به صورت دل خواه در خانه های آن اعداد ۰ یا ۱ قرار داده ایم. در هر حرکت می توانیم به هریک از سه خانه ی این جدول که تشکیل یکی از اشکال روبه رو را می دهند یک واحد اضافه کنیم. آیا با حرکاتی از نوع بالا می توانیم اعداد نوشته شده در تمام خانه های جدول را زوج کنیم؟

مرحله ی اول دهمین المپیاد کامپیوتر کشور



(۴۴) یک کشور دارای چند شهر و چند جاده ی بین شهری است. در برنامه ی توسعه، دولت تصمیم می گیرد بین هر دو شهری که قبلاً با استفاده از دقیقاً دو جاده می شد از یکی به دیگری رفت، یک جاده تأسیس کند. مثلاً اگر یک کشور شامل سه شهر A ، B و C و دو جاده ی $A - B$ و $B - C$ باشد، بعد از برنامه ی توسعه، بین شهرهای A و C هم جاده تأسیس می شود. فرض کنید کشوری دارای ۵ شهر باشد. آیا ممکن است بعد از برنامه ی توسعه، شکل شهرها و جاده های این کشور مطابق شکل مقابل باشد؟ (دایره های توپر نشان گر شهرها و خط های بین آن ها نشان گر جاده ها هستند.)

(۴۵) ۹ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. دو نفر بازی زیر را انجام می دهند: هر بازی کن در نوبت خود دو نقطه که قبلاً به هم وصل نشده باشد را به هم متصل می کند، به طوری که وتر رسم شده وترهای قبلی را در داخل دایره قطع نکند. آیا بازی کن دوم می تواند طوری بازی کند که حتماً برنده شود؟ (توجه کنید که از یک نقطه می توان چند وتر رسم کرد.)

(۴۶) دنباله ی $۱۰, ۹, ۸, ۶, ۷, ۲, ۵, ۱, ۳$ را در نظر بگیرید. در هر مرحله می توانیم چهار عنصر متوالی دنباله را در نظر بگیریم و مکان زوج اول را با زوج دوم این چهارتایی عوض کنیم، مثلاً از روی دنباله ی فوق و با در نظر گرفتن چهار عدد مجاور $۱, ۵, ۲, ۷$ ، می توان دنباله ی $۱۰, ۹, ۸, ۶, ۱, ۵, ۲, ۷$ را به دست آورد. آیا با انجام تعداد دلخواهی از اعمال فوق می توان از دنباله ی بالا به دنباله ی $۱۰, ۹, ۸, ۷, ۶, ۵, ۴, ۳, ۲, ۱$ رسید؟

(۴۷) دو نفر بازی زیر را با ظرفی که شامل ۱۳۷۸ عدد کשמش است انجام می دهند: هر بازی کن در نوبت خود می تواند ۱ یا ۳ یا ۵ کشمش بردارد. بازی کنی که آخرین کشمش (یا کشمش ها) را بردارد بازنده است. آیا بازی کن اول می تواند برنده ی این بازی شود؟

(۴۸) در یک چندضلعی ساده (نه لزوماً محدب) تمام قطرهای را رسم کرده ایم و روی هر قطر تعداد اضلاعی که توسط آن قطر قطع می شود را نوشته ایم (یک قطر یک ضلع را وقتی قطع می کند که با آن نقطه ی مشترکی داشته باشد). آیا همواره مجموع اعداد نوشته شده روی قطرهای زوج است؟

(۴۹) دنباله ی $۱, ۰, ۱, ۰, ۰, ۰, ۱, ۰, ۰, ۰$ از اعداد صفر و یک را در نظر بگیرید. در هر مرحله یکی از دو عمل زیر را می توانیم انجام دهیم:

- جای دو عنصر مجاور را با یک دیگر عوض کنیم.

- سه عنصر متوالی را در نظر گرفته و مقدار هر سه را تغییر دهیم (از صفر به یک و از یک به صفر تبدیل کنیم).

می گوییم دنباله ی A از دنباله ی B کوچک تر است اگر به ازای هر رقم یک در A ، رقم متناظر آن در B هم برابر یک باشد. آیا می توان با شروع از دنباله ی بالا و استفاده از اعمالی که گفته شد به دنباله ی $۱, ۰, ۰, ۰, ۱, ۰, ۰, ۱, ۰, ۰$ رسید، به شرط این که دنباله هایی که در طول مسیر تولید می شوند، غیر قابل مقایسه باشند؟ (دو دنباله ی A و B قابل مقایسه اند اگر حداقل یکی از آن ها از دیگری کوچک تر باشد.)

(۵۰) عدد $N = ۳۲۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰$ را با تعداد ارقام ۱۳۷۸ در نظر بگیرید. بر روی N عمل زیر را تکرار می کنیم: هر بار یک رقم دلخواه با مقدار k ($k > ۰$) را انتخاب می کنیم، سپس آن رقم را صفر کرده و به k رقم بعدی از چپ به راست یک واحد اضافه می کنیم. آیا با کم تر از ۱۱ بار تکرار این عمل می توان تمام رقم های N را به صفر و یک تبدیل کرد؟

«موفق باشید»

پاسخ تشریحی

دهمین المپیاد کامپیوتر

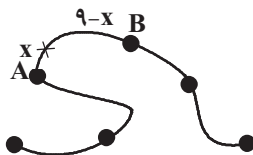
۱. معلوم است که در هر مرحله مجموع اعداد روی دایره ثابت می ماند. در ابتدا مجموع کل اعداد برابر با $\frac{78 \times 79}{2}$ ؛ یعنی 3081 می باشد. بنابراین این عدد، عدد نهایی است که در تقسیم بر ۵ باقی مانده ۱ دارد.

۲. در جدول زیر ● نشانگر مرخصی و × نشانگر روز کاری است:

علی	×	●	×	●	×	●	×	●	×	●	×	●
حسین	×	×	×	×	●	●	×	×	×	×	×	●
مجید	×	×	×	●	×	×	×	●	×	×	×	●
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱

معلوم است که پس از یازده روز هر سه نفر در مرخصی به سر می برند.

۳. اگر پمپ بنزین در نقطه ای بین دو شهر A و B واقع باشد بهینه است. در این حالت y برابر با:



$$x + (10 + x) + (16 + x) + (9 - x) + (17 - x) + (24 - x)$$

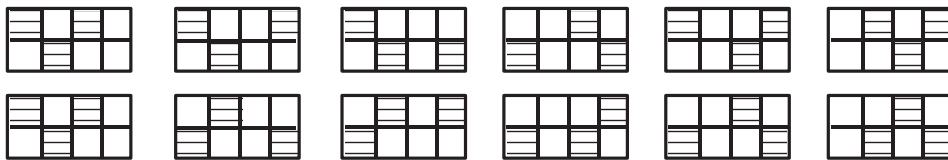
یعنی ۷۶ می باشد.

۴. تعداد حالاتی که صفر خانه علامت زده شده باشد برابر $\left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]$ یعنی ۱ می باشد.

تعداد حالاتی که یک خانه علامت زده شده باشد برابر $\left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 1 \end{smallmatrix} \right]$ یعنی ۸ می باشد.

تعداد حالاتی که دو خانه علامت زده شده باشد برابر $\left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]$ یعنی ۲۸ می باشد که در ده مورد خانه ها مجاور هستند و ۱۸ مورد از آن مطلوب می باشد.

تعداد حالاتی که سه خانه علامت زده شده مطلوب باشند برابر ۱۲ می باشد که به شکل زیر می باشند:



و بالاخره تعداد حالاتی که چهار خانه علامت زده شده باشند برابر ۲ می باشد که به شکل زیر



می باشند:

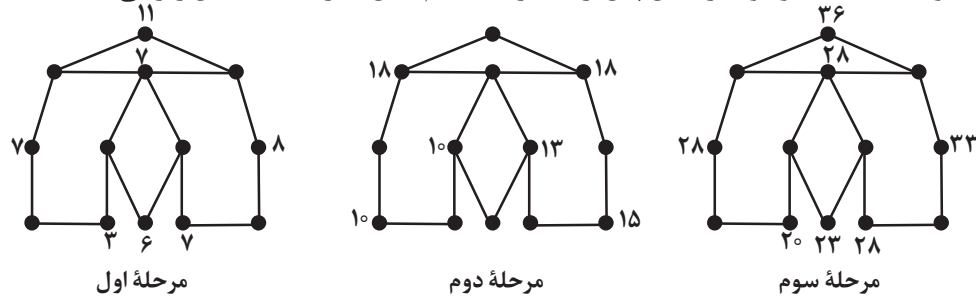
مجموع کل حالات اشاره شده ۴۱ می شود.

۵. به ازای هر سه نقطه متمایز یک و فقط یک مثلث ایجاد خواهد شد که آن مثلث سه زاویه کمتر از 180° داشته و مجموع آن سه زاویه 180° می باشد. بنابراین جواب مورد نظر برابر $180^\circ \times \left[\begin{smallmatrix} 10 \\ 3 \end{smallmatrix} \right]$ ؛ یعنی 21600 می باشد.

۶. ابتدا مریم دو عدد ۱۸ و ۳۶ را انتخاب می کند. اگر $x = 18$ یا $x = 36$ که مسأله حل است و اگر غیر این باشد x در یکی از بازه های $[1, 17]$ ، $[19, 35]$ یا $[37, 53]$ قرار دارد که هر یک از آن بازه ها دارای ۱۷ عضو بوده و شرایط یکسانی دارند. فرض می کنیم مهدی وجود x را در بازه اول اعلام کند، در این صورت مریم دو عدد ۶ و ۱۲ را انتخاب می کند. اگر $x = 6$ یا $x = 12$ که مسأله حل است و اگر غیر این باشد x در یکی از بازه های $[1, 5]$ ، $[7, 11]$ یا $[13, 17]$ قرار دارد که هر یک از آن بازه ها دارای ۵ عضو بوده و شرایط یکسانی دارند. فرض می کنیم مهدی وجود x را در بازه دوم اعلام کند، در این صورت مریم دو عدد ۸ و ۱۰ را انتخاب کرده و x را می یابد زیرا اگر $x = 8$ یا $x = 10$ که مسأله حل است و اگر غیر این باشد x یکی از سه عدد ۷، ۹ یا ۱۱ می باشد که مهدی آن را اعلام می کند.

۷. اگر در یکی از نقاط سطر اول یا سوم باشیم معلوم است که حرکت بعدی به یک طریق و اگر در یکی از نقاط سطر دوم باشیم حرکت بعدی به دو طریق قابل انجام است. (به غیر از ستون دهم که به ناچار باید به پایین برویم). یک در میان یعنی در حرکت های دوم، چهارم، ششم، هشتم و دهم در سطر دوم خواهیم بود که طبق اصل ضرب جواب مورد نظر برابر $1^6 \times 2^4 \times 1$ خواهد بود.

۸. وضعیت اعداد موجود در شکل پس از سه مرحله انجام عمل ذکر شده به شکل زیر می باشد:



همان طور که مشاهده می شود مجموع اعداد خواسته شده برابر $28 + 20 + 23 + 28$ ؛ یعنی ۹۹ می باشد.

۹. برای آن که تیم چهارم حداکثر امتیاز را کسب کنید نتیجه بازی ها باید مطابق جدول زیر باشد که در این صورت آن تیم ۶ امتیازی می باشد. و اما تیم چهارم نمی تواند ۷ امتیازی باشد زیرا در این صورت تیم سوم نیز علاوه بر دو تیم دوم و چهارم ۷ امتیازی خواهد بود که لازمه اش داشتن دو برد و یک تساوی توسط هر یک از آن تیم ها می باشد. بنابراین تیم اول سه برد،

تیم های دوم، سوم و چهارم هر یک دو برد دارند که مجموعاً ۹ برد می شود. از طرف دیگر هر یک از سه تیم مورد اشاره یک تساوی دارند؛ یعنی نتیجه حداقل دو بازی نیز تساوی بوده است که در این صورت تعداد بازی ها بیش از ۱۰ بازی می شود و تناقض ایجاد می کند، زیرا تعداد کل بازی های انجام شده برابر ۱۰ می باشد.

	A	B	C	D	E
A			A	A	A
B	B		C	B	—
C	A	C		D	C
D	A	B	D		D
E	A	—	C	D	

۱۰. بیشترین امتیاز کسب شده برابر ۱۶۰ و کمترین امتیاز کسب شده برابر ۴۰- می باشد. در بین همه اعداد صحیح از ۴۰- تا ۱۶۰ به غیر از ۱۵۹، ۱۵۸، ۱۵۷، ۱۵۴، ۱۵۳ و ۱۴۹ همگی قابل کسب هستند، بنابراین در کل به تعداد ۶- ۲۰۱؛ یعنی ۱۹۵ امتیاز متمایز می توانیم داشته باشیم. برای آن که مطمئن شویم حداقل دو نفر امتیاز یکسان دارند وجود حداقل ۱۹۶ نفر لازم است.

۱۱. می دانیم گزاره شرطی «اگر p آنگاه q» فقط وقتی ارزش نادرستی دارد که p درست و q نادرست باشد. بنابراین اگر در آن گزاره ارزش p نادرست باشد بدون توجه به ارزش q می فهمیم که ارزش کل گزاره درست است. p را مقدم و q را پیرو می نامند.

از دو گزاره الف و ب یکی درست می باشد، زیرا اگر ب نادرست باشد آن گاه گزاره شرطی الف به خاطر نادرست بودن مقدمش درست خواهد بود. گزاره ب نمی تواند درست باشد، زیرا در این صورت گزینه الف و هر دو نادرست بوده (به خاطر این که فقط یکی از گزاره ها ارزش درست دارد) آنگاه به خاطر نادرست بودن مقدم گزاره شرطی ج، آن گزاره شرطی ارزش درست خواهد داشت که تناقض است. بنابراین گزینه مورد نظر که ارزش درستی دارد گزینه الف می باشد.

۱۲. برنامه گزینه الف از چپ به راست:

$$ax^2 + bx + c = (a \times x + b) \times x + b$$

Add a, Mul x, Add b, Mul x, Add b

برنامه گزینه ب از چپ به راست:

$$(a + b)xy + ya = [(a + b) \times x + a] \times y$$

Add a, Add b, Mul x, Add a, Mul y

برنامه گزینه د از چپ به راست:

$$3x^5 + 1 = (((((3 \times x) \times x) \times x) \times x) \times x) + 1$$

Add x, Mul 3, Mul x, Mul x, Mul x, Mul x, Add 1

گزینه ج را به صورت های اشاره شده نمی توان پراستزگذاری کرد.

۱۳. هر عضو از آن ۱۰ عضو ۷ انتخاب زیر را مستقل از اعضای دیگر می تواند داشته باشد:

۱. متعلق به هیچ یک از سه زیرمجموعه نباشد.
 ۲. فقط متعلق به A_1 باشد.
 ۳. فقط متعلق به A_2 باشد.
 ۴. فقط متعلق به A_3 باشد.
 ۵. به A_1 و A_2 متعلق بوده ولی به A_3 متعلق نباشد.
 ۶. به A_1 و A_3 متعلق بوده ولی به A_2 متعلق نباشد.
 ۷. به A_2 و A_3 متعلق بوده ولی به A_1 متعلق نباشد.
- بنابراین طبق اصل ضرب تعداد حالات ممکن برابر 7^{10} می باشد.

۱۴. A و T را یار هم و C و G را نیز یار هم می نامیم. عضو اول ۴ حالت دارد. عضو دوم نمی تواند یار اولی باشد؛ یعنی ۳ حالت دارد. عضو سوم نمی تواند یار دومی باشد؛ یعنی این عضو نیز ۳ حالت می تواند داشته باشد و ... بنابراین تعداد حالات ممکن برابر 4×3^9 می باشد. که متأسفانه در هیچ یک از گزینه ها نیامده است.

۱۵. اعداد یک، سه و پنج رقمی ارزش مثبت و مابقی اعداد ارزش منفی دارند. تعداد اعداد دو رقمی، چهار رقمی و شش رقمی که ارزش منفی دارند به ترتیب برابر ۹۰، ۹۰۰ و ۹۰۰۰۰۰ می باشد که مجموع آنها ۹۰۹۰۹۰ می شود.

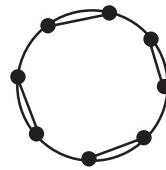
۱۶.

$$\begin{aligned} \overline{Va_n \dots a_3 a_2 a_1} &= \overline{5 \times a_n \dots a_3 a_2 a_1 7} \Rightarrow a_1 = 5 \\ \Rightarrow \overline{Va_n \dots a_3 a_2 5} &= \overline{5 \times a_n \dots a_3 a_2 5 7} \Rightarrow a_2 = 8 \\ \Rightarrow \overline{Va_n \dots a_3 8 5} &= \overline{5 \times a_n \dots a_3 8 5 7} \Rightarrow a_3 = 2 \\ \Rightarrow \overline{Va_n \dots 2 8 5} &= \overline{5 \times a_n \dots 2 8 5 7} \Rightarrow a_4 = 4 \\ \Rightarrow \overline{Va_n \dots 4 2 8 5} &= \overline{5 \times a_n \dots 4 2 8 5 7} \Rightarrow a_n = 1 \end{aligned}$$

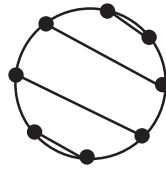
در مرحله بعد رقم قبل از ۱ برابر ۷ به دست می آید به همین منظور رقم ۷ موجود در سمت چپ عدد را که از قبل موجود بود رقم مورد نظر در نظر می گیریم. بنابراین a_n همان a_8 می باشد. بنابراین عدد مورد نظر ۱۴۲۸۵۷ می باشد که یک عدد شش رقمی است.

۱۷.

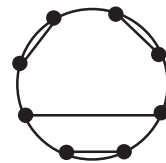
I. معلوم است که در این حالت با توجه به متمایز بودن ۸ نقطه تعداد شکل های حاصل برابر ۲ می باشد.



II. معلوم است که در این حالت با دوران وترها، به طوری که قیافه شکل عوض نشود و فقط نقاط تغییر کنند ۴ شکل حاصل خواهد شد.

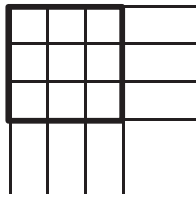


III. با دوران وترهای این شکل نیز ۸ شکل حاصل خواهد شد.



بنابراین مجموع حالات برابر $۲ + ۴ + ۸$ ؛ یعنی ۱۴ خواهد شد.

۱۸. یک جدول ۳×۳ از گوشه شبکه جدا می کنیم. هر یک از خانه های آن مستقل از دیگری دو حالت



۰ و ۱ می توانند داشته باشند، مابقی خانه ها وابسته به این که سه خانه موجود در سمت چپ یا بالای آن چه اعدادی باشند منحصر به فرد تعیین خواهند شد، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر $۲^۹$ ؛ یعنی ۵۱۲ می باشد.

۱۹. شرط لازم و کافی برای آن که به عدد ۱ برسیم آن است که تعداد ۱های عدد اولیه فرد باشد که تعداد

این اعداد برابر با $\binom{10}{9} + \binom{10}{8} + \dots + \binom{10}{1}$ ؛ یعنی $۲^۹$ می باشد.

۲۰. درجه هر رأس از گراف به تعداد درجه آن رأس در نوشتن A به کار می رود بنابراین اگر درجه رؤس را $a_1, a_2, \dots, a_n$ در نظر بگیریم آنگاه خواهیم داشت:

$$A = a_1 \times a_1 + a_2 \times a_2 + \dots + a_n \times a_n = \sum a_i^2$$

به همین ترتیب معلوم می شود که :

$$B = \sum a_i^2 + (\underbrace{2^2 + 2^2 + \dots + 2^2}_{29 \text{ تا}})$$

$$\Rightarrow B - A = 29 \times 4 = 116$$

یادآوری می شود که تعداد یال های گراف داده شده برابر ۲۹ می باشد. همان طور که دیده می شود عدد به دست آمده در هیچ یک از گزینه ها نیامده است.

۲۱. معلوم است که کامیون از انبار ۱ که قرار است از حالت $ABCD$ به حالت $AAAA$ تبدیل شود، حداقل دوبار خارج و حداقل دو بار به آن انبار وارد خواهد شد. انبارهای ۲، ۳ و ۴ نیز چنین وضعیتی را دارند. بنابراین حداقل جابه جایی های لازم برابر $\frac{4+4+4+4}{2}$ یعنی ۸ می باشد. اگر کامیون با الگوریتم زیر حرکت کند با ۸ بار جابه جایی می تواند به هدف برسد:

۱. بشکه های BC را از انبار ۱ به انبار ۲، منتقل کند.
۲. بشکه های CC را از انبار ۲ به انبار ۳، منتقل کند.
۳. بشکه های BD را از انبار ۳ به انبار ۴، منتقل کند.
۴. بشکه های BB را از انبار ۴ به انبار ۲، منتقل کند.
۵. بشکه های AD را از انبار ۲ به انبار ۱، منتقل کند.
۶. بشکه های DD را از انبار ۱ به انبار ۴، منتقل کند.
۷. بشکه های AC را از انبار ۴ به انبار ۳، منتقل کند.
۸. بشکه های AA را از انبار ۳ به انبار ۱، منتقل کند.

۲۲. راه حل اول: اگر تعداد مهره ها ۶ عدد باشد آنگاه به یک طریق می توان آنها را چید.

اگر تعداد مهره ها ۵ عدد باشد، آنگاه دو خانه غیر مجاور باید خالی بمانند که به یکی از ۱۵ طریق زیر

ممکن است:

۱-۴	۳-۶	۵-۸	۷-۱۰	۹-۱۲
۱-۶	۳-۸	۵-۱۰	۷-۱۲	
۱-۸	۳-۱۰	۵-۱۲		
۱-۱۰	۳-۱۲			
۱-۱۲				

اگر تعداد مهره ها ۴ عدد باشد آنگاه چهار خانه غیر مجاور باید خالی بمانند که به یکی از ۵ طریق زیر

ممکن است.

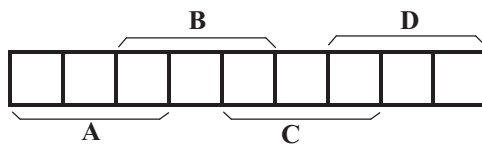
۱-۴-۷-۱۰

۱-۴-۷-۱۲

۱-۴-۹-۱۲

۱-۶-۹-۱۲

۳-۶-۹-۱۲

مجموع کل حالات مورد اشاره برابر $۵ + ۱۵ + ۱ = ۲۱$ می باشد.**راه حل دوم:** تعداد طرق چیدن مهره های ۱×۲ در جدول $n \times ۱$ را f_n می نامیم. هر یک از f_n طریق دوحالت می تواند داشته باشد. به این صورت که یا خانه n ام آن خالی است و یا پر. در حالت اول خانه های $(n-1)$ ام و $(n-2)$ ام یقیناً پر هستند و از آن خانه به قبل نیز تعداد طرق چیدن ها برابر f_{n-3} می باشد. درحالت دوم نیز خانه $(n-1)$ ام یقیناً پر هست، بنابراین تعداد طرق چیدن مهره در سایر خانه ها برابر f_{n-2} می باشد، یعنی رابطه $f_n = f_{n-2} + f_{n-3}$ برقرار است. چون $f(1) = ۱$ ، $f(2) = ۱$ و $f(3) = ۲$ ، بنابراین بامحاسبه، $f(۱۲)$ برابر با ۲۱ به دست می آید.**۲۳.** معلوم است که باید در مرحله اول دو خانه از

سه خانه A اعداد ۱ و ۲ باشند که تعداد طرق جا

دادن آن دو رقم در سه خانه مورد اشاره $۲! \times \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۶ می باشد. در مرحله دوم توجه داریم که در

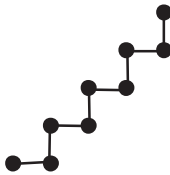
خانه خالی A و دو خانه سمت راست B باید دو عدد ۳ و ۴ موجود باشند که تعداد طرق جا دادن آن دو رقم

در سه خانه مورد اشاره نیز برابر ۶ می باشد. در مرحله سوم می فهمیم که در خانه خالی باقی مانده از

مراحل قبلی و دو خانه سمت راست C باید دو عدد ۵ و ۶ موجود باشند که تعداد طرق جادادن آن دو رقم در سه خانه مورد اشاره نیز برابر ۶ می باشد. در مرحله آخر سه خانه خالی می ماند که باید سه عدد ۷، ۸ و ۹ را در آن سه خانه قرار دهیم که این عمل نیز به ۶ طریق ممکن است. بنابراین تعداد کل حالات برابر 6^4 یعنی ۱۲۹۶ می باشد.

۲۴. ادعای کنیم تجزیه $13 = 4 + 3 + 6$ حالت بهینه است.

در بین گزینه ها گزینه بزرگتر از ادعای ما اعداد ۷۵ و 80 می باشند که هر دو مضرب ۵ می باشند. اگر ۱۳ را به صورت $8 + 5 = 13$ تجزیه و سپس عدد ۸ را به صورت های $2 + 6$ یا $3 + 4$ یا $1 + 7$ تجزیه کنیم در همه حال حاصل ضرب به دست آمده از ۷۲ کمتر خواهد شد.



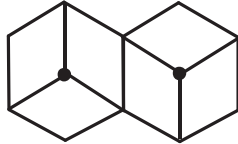
۲۵. بهترین حرکت ممکن به شکل مقابل می باشد که در این صورت حاصل ضرب مورد اشاره $5^1 \times 4^4 \times 3^4 \times 2^4$ یعنی 1658880 می باشد.

۲۶. تمام حالات در جدول مقابل مشخص

است، که مجموع آنها برابر ۱۴ می باشد.

X	Y	V	U	I	تعداد حالات
۱	-	-	-	۳	۱
-	۱	-	۱	-	۱
-	۱	-	-	۴	۱
-	-	۲	-	۳	۱
-	-	۱	۲	-	۳
-	-	۱	۱	۴	۲
-	-	۱	-	۸	۱
-	-	-	۳	۱	۱
-	-	-	۲	۵	۱
-	-	-	۱	۹	۱
-	-	-	-	۱۳	۱

۲۷. با برداشتن هر چوب کبریت حداکثر دو مثلث از بین می‌روند، چون ۱۲ مثلث در شکل موجود است



پس برداشتن حداقل ۶ چوب کبریت الزامی است. با

برداشتن ۶ چوب کبریت مطابق شکل مقابل حذف همه

مثلث‌ها امکان‌پذیر است.

۲۸. مراحل کار به شکل زیر می‌باشد:

۷, ۷, ..., ۷, ۷, ۷, ۷, ۷, ۷

۷, ۷, ..., ۷, ۷, ۷, ۷, ۱۰, ۱ : پس از سه مرحله :

۷, ۷, ..., ۷, ۷, ۷, ۱۱, ۲, ۱ : پس از چهار مرحله :

۷, ۷, ..., ۷, ۷, ۱۲, ۱, ۲, ۱ : پس از پنج مرحله :

۷, ۷, ..., ۷, ۱۲, ۲, ۱, ۲, ۱ : پس از پنج مرحله :

۷, ۷, ..., ۱۲, ۲, ۲, ۱, ۲, ۱ : پس از پنج مرحله :

۲, ۲, ..., ۲, ۲, ۲, ۱, ۲, ۱ : پس از پایان تمام مراحل :

$\Rightarrow 198 = 98 \times 2 + 1 + 1$ تعداد کل مهره‌ها

۲۹. پس از ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ و ۷ ساعت ارتفاع بلندترین برج ساخته شده به ترتیب برابر ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲,

۶۴ و ۱۲۸ بلوک می‌باشد.

در هشتمین ساعت می‌توان یک برج ۱۰۰ بلوکی را بر روی برج ۱۲۸ بلوکی قرار داده و برج ۲۲۸

بلوکی ساخت. بنابراین پس از گذشت ۸ ساعت بلندترین برج می‌تواند ۲۲۸ بلوک داشته باشد.

در نهمین ساعت نیز می‌توان یک برج ۱۰۰ بلوکی را بر روی برج ۲۲۸ بلوکی قرار داده و برج ۳۲۸

بلوکی ساخت. واضح است که اگر پس از گذشت ۷ ساعت برج ۱۲۸ بلوکی را بر روی برج ۱۲۸ بلوکی دیگر

قرار دهیم دو ساعت طول خواهد کشید که در این صورت در انتهای ساعت نهم طول بلندترین برج ۲۵۶

بلوک می‌باشد که برج ساخته شده به شیوه قبل که ۳۲۸ بلوک داشت بهینه می‌باشد.

برای ساختن برج بعدی به دو شیوه می‌توان عمل کرد یا در انتهای ساعت نهم یک برج ۱۰۰ بلوکی را

در طول یک ساعت بر روی بلندترین برج ساخته شده یعنی برج ۳۲۸ بلوکی قرار داده و برج ۴۲۸ بلوکی

به دست آورد، یا در انتهای ساعت هشتم یک برج ۲۲۸ بلوکی را در طول دو ساعت بر روی بلندترین برج ساخته شده یعنی ۲۲۸ بلوکی دیگر قرار داده و برج ۴۵۶ بلوکی به دست آورد که حالت دوم بهینه است. بنابراین در انتهای ساعت دهم بلندترین برج ساخته شده دارای ۴۵۶ بلوک خواهد بود.

به همین ترتیب استدلال می شود که در انتهای ساعات ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴ و ۱۵ طول بلندترین برج می تواند به ترتیب ۶۵۶، ۹۱۲، ۱۳۱۲، ۱۸۲۴ و ۲۶۲۴ بلوک داشته باشد. بنابراین برای ساختن برجی به ارتفاع ۲۰۰۰ بلوک حداقل ۱۵ ساعت لازم است.

۳۰.

پس از مرحله اول: bac bac ... bac
 پس از مرحله دوم: abcabcabcabc
 پس از مرحله سوم: bac bac
 پس از مرحله چهارم: abc
 پس از مرحله آخر: bc

۰	۱	۱	۱
	۱	۰	
	۱		۱
۱	۱		

۳۱. ماتریس متناظر به رشته ۱ ماتریس مقابل می باشد.

۰	۱		
۰	۱		۰
	۱	۰	?
	۱	۰	

بعد از ۲، چهار عدد یکسان نمی تواند باشد، پس رشته ۲ ماتریس متناظر ندارد. ماتریس متناظر به رشته ۳ نیز تا قبل از مرحله آخر به شکل مقابل می باشد که در مرحله آخر ۱۰ را نمی توان در خانه باقی مانده قرار داد:

۳۲. به ازای هر ماتریس یک و فقط یک رشته به دست می آید. بنابراین چون تعداد ماتریس ها برابر $2^{16 \times 16}$ یا 16^{64} می باشد تعداد رشته ها نیز همین تعداد خواهد بود.

۳۳. تعداد جلساتی که احسان، حسین و شادی در آن شرکت کرده اند را به ترتیب e, h, s می نامیم. با توجه به فرض معلوم می شود که هر یک از متغیرهای e, h, s یکی از دو عدد ۶ یا ۷ می توانند باشند. از طرف دیگر اگر تعداد کل جلسات تشکیل شده را k در نظر بگیریم، آنگاه چون هر جلسه متشکل از ۴ نفر می باشد بنابراین تساوی $s + h + e + 8 = 4k$ برقرار خواهد بود. با ساده کردن تساوی فوق و با در نظر گرفتن نابرابری $18 \leq e + h + s \leq 21$ به تساوی $e + h + s = 19$ خواهیم رسید که معلوم می شود یکی از آن دو متغیر برابر ۷ و دو تای دیگر برابر ۶ می باشند.

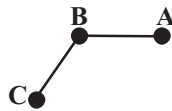
۳۴. در هر حرکت اسب از یک خانه به خانه ای غیر هم رنگ آن می رود. معلوم است که دو خانه متقابل موارد اشاره در جدول 2000×2000 هم رنگ می باشند (مثلاً سفید). اگر دو مهره همدیگر را در خانه ای هم رنگ با خانه های مبدأ ملاقات کنند آنگاه هر دو اسب به تعداد زوجی حرکت انجام داده اند که مجموع حرکاتشان زوج می شود. اگر دو مهره همدیگر را در خانه ای غیر هم رنگ با خانه های مبدأ ملاقات کنند، آنگاه هر دو اسب به تعداد فردی حرکت انجام داده اند که باز مجموع حرکاتشان زوج می شود. بنابراین عدد خواسته شده عددی زوج است. دو اسب مجموعاً ۱۰۰۰ خانه در جهت افقی و ۱۰۰۰ خانه در جهت عمودی و مجموعاً ۲۰۰۰ واحد جابه جا می شوند و با هر حرکت اسب سه واحد جابه جایی اتفاق می افتد. بنابراین برای رسیدن به هدف حداقل $\lceil \frac{2000}{3} \rceil$ یعنی ۱۳۳۳ حرکت لازم است که کوچکترین عدد زوج بزرگتر از ۱۳۳۳ عدد ۱۳۳۴ می باشد.

۳۵. آن فرد در روزهای سه شنبه و پنج شنبه می تواند جمله اشاره شده را بگوید.

a	b
c	d

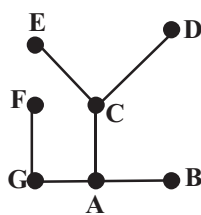
۳۶. زوجیت هر خانه از جدول را مستقل از خانه های دیگر می توان عوض کرد. به عنوان مثال برای تغییر زوجیت خانه a از جدول مقابل خانه های bac, acd و abd را به ترتیب انتخاب کرده و زوجیت خانه های هر دسته را تغییر می دهیم.

۳۷. برای انتقال یک لیتر بنزین به مخزن شهر مجاور دو لیتر بنزین هدر می رود (یک لیتر برای رفت و یک لیتر برای برگشت). برای انتقال یک لیتر بنزین به مخزن شهری که با شهر مبدأ دو واحد فاصله دارد



۸ لیتر بنزین هدر می رود، زیرا اگر شهر مبدأ در شکل مقابل شهر A و شهر مقصد شهر C باشد، فاصله بین شهر A و B سه بار و فاصله بین B تا C یک بار به صورت رفت و برگشت طی می شود تا از شهر A به شهر C یک لیتر بنزین منتقل شود.

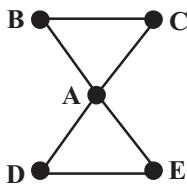
به همین ترتیب ثابت می شود که برای انتقال یک لیتر بنزین به مخزن شهری که با شهر مبدأ سه واحد فاصله دارد ۲۶ لیتر بنزین هدر می رود. با این توضیحات معلوم می شود که بهترین شهر برای مبدأ شهر A



می باشد که در این صورت برای انتقال یک لیتر بنزین به شهرهای B, C, D, E, F و G به ترتیب ۲، ۲، ۸، ۸، ۸ و ۲ لیتر بنزین هدر می رود که با بنزین های موجود در مخازن که باید حداقل یک لیتر در هر مخزن باشد مجموعاً ۳۷ لیتر می شود که از ۳۰ لیتر بیشتر است.

۳۸. عمل اشاره شده فقط جایگشت های دوری جایگشت داده شده را تولید می کند که جایگشت خواسته شده جزء آنها نیست.

۳۹. در صورت سؤال تعریف نفر برنده مشخص نشده است.



۴۰. از دو جاده AB و AC حداقل یکی (مانند AB) و از دو جاده AE و AD نیز حداقل یکی (مانند AE) قبل از طرح توسعه موجود بوده اند. بنابراین باید بعد از طرح توسعه جاده ای مانند BE تأسیس می شد که نشده است.

۴۱. بعد از بازی نفر اول تعداد کشمش های برداشته شده فرد و بعد از بازی نفر دوم تعداد کل کشمش های برداشته شده زوج می شود. چون ۱۳۷۸ زوج است بنابراین بازی توسط نفر دوم به اتمام می رسد و نفر اول برنده می شود.

۴۲. دنباله داده شده عدد ۴ را ندارد ولی دنباله مطلوب عدد ۴ دارد.

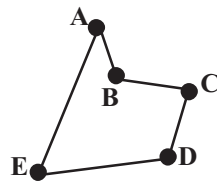
۱۷۷

پاسخ تشریحی دهمین المپیاد کامپیوتر

۴۳. مراحل کار به شکل زیر می باشد:

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{0}11000101 & \longrightarrow & 1010001\underline{0}1 & \longrightarrow & 1010001\underline{1}0 \\ \longrightarrow & 1010\underline{0}1010 & \longrightarrow & 101\underline{0}10010 & \longrightarrow & 101100010 \end{array}$$

۴۴. مراحل کار به شکل زیر می باشد:

$$\begin{array}{ccccccc} 321 & \xrightarrow{(1)} & 3201 & \xrightarrow{(2)} & 32001 & \xrightarrow{(3)} & 320001 \\ & \xrightarrow{(4)} & 3200001 & \xrightarrow{(5)} & 3011001 & \xrightarrow{(6)} & 3010101 \\ & \xrightarrow{(7)} & 3010011 & \xrightarrow{(8)} & 3001011 & \xrightarrow{(9)} & 3000111 \\ & \xrightarrow{(10)} & 0111111 \end{array}$$


۴۵. در پنج ضلعی زیر عدد روی قطر AD برابر ۵ و عدد موجود بر روی هر یک از سایر قطر ها ۴ می باشد که مجموع کل آنها فرد می شود.

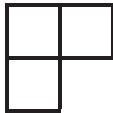
نهمین المپیاد کامپیوتر

بهمن ۷۷

۱. مجموعه اعداد ۱ تا ۱۰ چند زیرمجموعه دارد که مجموع اعضای آن زوج است؟

- الف) ۱۲۸ ب) ۲۵۶ ج) ۵۱۱ د) ۵۱۲ ه) ۵۱۳

۲. حداقل چه تعداد از شکل زیر را می توان در یک جدول 5×5 قرار داد، به طوری که شکل ها روی هم نیفتند و نتوان



شکل دیگری از این نوع را به این جدول افزود؟

- الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۸

۳. در یک جدول منظور از خانه (i, j) ($i > 0, j > 0$) خانه ای است که در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد. یک زیر مجموعه S از خانه های جدول را یک «مجموعه زیبا» گوییم، اگر به ازای هر خانه (a, b) متعلق به S ، تمام خانه های (x, y) که $x \leq a$ و $y \leq b$ نیز در S باشند. کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

الف) خانه $(1, 1)$ عضو هر مجموعه زیبا هست

ب) اعضای هر مجموعه ناتهی زیبا تشکیل یک مستطیل می دهند که خانه $(1, 1)$ را در برمی گیرد

ج) هر اجتماعی از تعدادی مستطیل که همگی شامل $(1, 1)$ باشند، یک مجموعه ناتهی زیباست

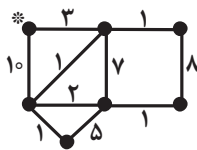
د) الف و ج

ه) ب و ج

۴. با توجه به تعریف مجموعه زیبا در مسأله قبل، یک جدول 3×3 شامل چند مجموعه زیباست؟

- الف) ۹ (ب) ۱۰ (ج) ۱۱ (د) ۱۹ (ه) ۲۰

۵. تعدادی بمب در صفحه قرار داده شده و تعدادی فتیله آنها را مطابق شکل به یکدیگر متصل می‌کند. مدت زمانی که طول می‌کشد تا پس از روشن شدن یک سر هر فتیله، فتیله به‌طور کامل بسوزد، روی آن نوشته شده است.



با توجه به اطلاعات فوق چه مدت پس از منفجر شدن بمبی که در شکل با * مشخص شده است، تمام فتیله‌ها می‌سوزند؟ توجه داشته باشید که پس از سوخت کامل یک فتیله، بمب‌های هر دو سر آن اگر تا آن زمان منفجر نشده باشند، منفجر خواهند شد.

- الف) ۷ (ب) ۸ (ج) ۹/۵ (د) ۱۰/۵ (ه) ۱۲

۶. در یک مسابقه پینگ پنگ بین دو دبیرستان A و B، هر دانش‌آموز دبیرستان A با هر دانش‌آموز دبیرستان B یک مسابقه برگزار می‌کند. (مسابقه پینگ پنگ تساوی ندارد). یک دانش‌آموز «برنده مطلق» محسوب می‌شود اگر او هر دانش‌آموز X از هر دو دبیرستان را یا مستقیماً ببرد، یا از دانش‌آموز دیگری مانند Y ببرد و Y از X برده باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

- الف) ممکن است برنده مطلق وجود نداشته باشد
 ب) برنده مطلق تمام بازی‌هایش را برده است
 ج) اگر برنده مطلق وجود داشته باشد حداکثر یک نفر است
 د) به هیچ وجه برنده مطلق وجود ندارد
 ه) الف و ب و ج

۷. n تا عدد ۱ روی تخته سیاه نوشته شده است. در هر مرحله دو عدد a و b را از روی تخته پاک می‌کنیم و به جای آنها دو بار عدد $a + b$ را می‌نویسیم. بعد از چند مرحله، اعداد به n تا عدد n تبدیل شده‌اند. n کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

- الف) ۱ و ۳ (ب) ۲ و ۳ (ج) فقط ۳ (د) فقط ۲ (ه) ۱ و ۲ و ۳

۸. دو منبع سوخت با شماره های ۱ و ۲ را در نظر بگیرید که ظرفیت هر کدام ۲۰ لیتر است. سه مصرف کننده با شماره های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب با مقدار مصرف ۱۲، ۱۲ و ۱۶ لیتر سوخت داریم. هزینه انتقال هر واحد سوخت از منبع i به مصرف کننده j در سطر i ام و ستون j ام جدول زیر آمده است. حداقل هزینه انتقال سوخت، برای این که هر مصرف کننده به اندازه نیاز خود، سوخت دریافت کند، چه قدر است؟

	۱	۲	۳
۱	۱۰	۱	۳
۲	۶	۶	۹

الف) ۱۶۸

ب) ۱۷۲

ج) ۱۷۶

د) ۱۷۸

ه) ۱۸۰

۹. چهار مثلث متساوی الاضلاع یکسان را در نظر بگیرید. یک مثلث بندی یعنی به ترتیب کنار هم قرار دادن مثلث ها در صفحه، به طوری که هر مثلث حداقل در یک ضلع، با یکی از مثلث های قبلی مشترک باشد و با هیچ یک از آنها هم پوشانی نداشته باشد. تعداد مثلث بندی ها را بشمارید و در این شمارش، مثلث بندی هایی که با دوران در صفحه به هم تبدیل می شوند را یک بار در نظر بگیرید. این تعداد چند تا است؟

ج) ۵

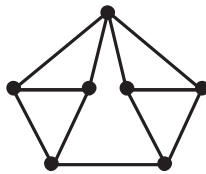
ب) ۴

الف) ۳

ه) ۷

د) ۶

۱۰. تعدادی نقطه و پاره خط مانند شکل زیر موجود است. رنگ آمیزی نقاط را بدین ترتیب تعریف می کنیم: به هر نقطه یک رنگ نسبت می دهیم، به طوری که دو نقطه که با یک پاره خط به هم وصل شده اند، هم رنگ نباشند. گزینه صحیح را انتخاب کنید.



الف) می توان نقاط را با ۳ رنگ، رنگ آمیزی کرد

ب) می توان نقاط را با ۴ رنگ، رنگ آمیزی کرد

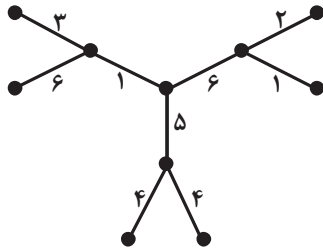
ج) با حذف هر پاره خط، نقاط را می توان با ۳ رنگ، رنگ آمیزی کرد

د) الف و ب و ج

ه) ب و ج

۱۲۴

المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)



۱۱. شکل مقابل نقشه شهرهای یک کشور با جاده های بین آنها را نشان می دهد. در این نقشه، نقاط تو پر نشان دهنده شهرها، و پاره خط های بین آنها نشان دهنده جاده ها هستند. عددهای روی جاده ها، طول جاده ها بر حسب کیلومتر را نشان می دهند. جهان گردی می خواهد از یکی از شهرها شروع کند و از همه شهرها بازدید کند. او حداقل چند کیلومتر مسافت را باید طی کند؟

الف) ۴۵ (ب) ۴۶ (ج) ۴۷ (د) ۴۸ (ه) ۵۰

۱۲. در یک جمع ۵ نفری، هر نفر از یک مطلب اطلاع دارد که افراد دیگر از آن مطلب اطلاع ندارند. این افراد می توانند با هم جلسات ۳ نفری بگذارند و در هر جلسه همه افراد جلسه، از مطالب هم دیگر اطلاع پیدا کنند. حداقل چند جلسه لازم است تا همه از همه مطالب آگاهی پیدا کنند؟

الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) ۶

۱۳. تعدادی عدد روی تخته نوشته شده است. در هر مرحله دو تا از اعداد را پاک می کنیم و روی تخته قدرمطلق تفاضل آن دو را می نویسیم. در پایان تنها عدد صفر روی تخته باقی مانده است. اعداد اولیه کدام یک از حالت های زیر می تواند باشد؟

(۱) ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸ (۲) ۱، ۳، ۷، ۸، ۱۰، ۱۲ (۳) ۱، ۴، ۷، ۹، ۱۲، ۱۸
الف) ۱ (ب) ۱ و ۲ (ج) ۲ (د) ۳ و ۱ (ه) ۳ و ۲ و ۱



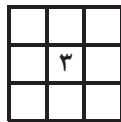
۱۴. می خواهیم در خانه های جدول روبه رو ۴ مهره بگذاریم به قسمی که در هر خانه بیش از یک مهره قرار نگیرد و از هر دو خانه ای که با هم تنها در یک رأس مشترک هستند، لااقل یکی خالی باشد. به چند حالت می توان این کار را انجام داد؟

الف) ۳ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۹ (ه) ۱۰

۱۵. ۷ نفر با شماره های ۱ تا ۷ در یک صف ایستاده اند. می دانیم بین افراد ۱ و ۵ یک نفر، بین افراد ۱ و ۷ سه نفر، بین افراد ۱ و ۳ یک نفر، بین افراد ۲ و ۴ یک نفر و بین افراد ۶ و ۴ یک نفر وجود دارد. این ۷ نفر به چند حالت می توانند در صف ایستاده باشند؟

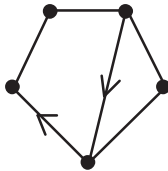
- (الف) ۴ (ب) ۸ (ج) ۱۲ (د) ۱۴ (ه) ۱۶

۱۶. در خانه های مربع مقابل به چند طریق می توان اعداد ۱ تا ۳ را قرار داد به قسمی که در هیچ سطر و هیچ ستون عدد تکراری نداشته باشیم؟



- (الف) ۲ (ب) ۴ (ج) ۶ (د) ۸ (ه) ۱۲

۱۷. در شکل زیر، هر نقطه را یک شهر و هر پاره خط را یک جاده بین دو شهر فرض کنید. بعضی از این جاده ها به صورت یک طرفه جهت دار شده اند. می خواهیم بقیه این جاده ها را طوری به صورت یک طرفه جهت دار کنیم که از هیچ شهری نتوان با حرکت روی جاده ها، به خودش رسید. به چند طریق این کار ممکن است؟



- (الف) ۴ (ب) ۶ (ج) ۸ (د) ۹ (ه) ۱۶

۱۸. دنباله $a_1, a_2, \dots, a_n$ از اعداد متمایز، یک دنباله «۲-مرتبه» نامیده می شود اگر به ازای هر $1 \leq i \leq n-2$ داشته باشیم: $a_i < a_{i+2}$. اگر یک دنباله «۲-مرتبه» را به ترتیب صعودی مرتب کنیم، هر یک از عضوهای این دنباله حداکثر چند خانه جابه جا می شود؟ ($\lfloor x \rfloor$ یعنی بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی x و $\lceil x \rceil$ یعنی کوچک ترین عدد صحیح بزرگ تر یا مساوی x)

- (الف) ۲ (ب) ۳ (ج) $\lfloor n/2 \rfloor$ (د) $\lceil n/2 \rceil$ (ه) $n-1$

۱۲۶

المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)

۱۹. به ازای هر عدد ۷ رقمی در مبنای ۲ که اختلاف تعداد یک‌ها و تعداد صفرهای آن دقیقاً برابر یک باشد، یک نقطه روی صفحه در نظر می‌گیریم. بین هر دو نقطه که اعداد متناظر با آنها فقط در یک رقم متفاوت باشند، یک پاره خط رسم می‌کنیم. تعداد این پاره خط‌ها چند تا است؟

الف) صفر (ب) ۳۵ (ج) ۷۰ (د) ۱۴۰ (ه) ۱۲۲۵

۲۰. یک تاس یک مکعب است که روی ۶ وجه آن اعداد ۱ تا ۶ نوشته شده است، به قسمی که مجموع اعداد روی وجه‌های روبه‌رو ۷ باشد. چند نوع تاس متفاوت داریم؟

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۴ (د) ۶ (ه) ۸

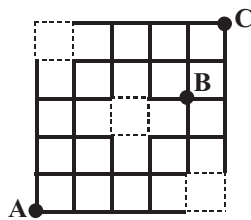
۲۱. دنباله $a_0, a_1, \dots, a_n$ «متنوع» است، اگر $n = 0$ باشد یا

• هر دو عنصر متوالی دنباله متفاوت باشند و دنباله $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ هم متنوع باشد.

چند دنباله متنوع برای $n = 6$ از اعداد ۰، ۱ و ۲ وجود دارد؟ ($\lfloor x \rfloor$ یعنی بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x).

الف) ۳ (ب) ۶ (ج) ۱۲ (د) ۲۴ (ه) ۳۶

۲۲. در شکل زیر می‌خواهیم با حرکت از روی خطوط جدول، با شروع از نقطه A به نقطه B و نیز مجدداً با شروع از



نقطه A به نقطه C برسیم. در هر حرکت می‌توان ۲ یا ۳ واحد به سمت چپ، راست، بالا یا پایین رفت و در ضمن نمی‌توان از خطوط خط چین عبور کرد. تعداد حداقل حرکت‌های لازم برای رسیدن از خانه A به خانه B و برای رسیدن از خانه A به خانه C به ترتیب چند تا است؟

الف) ۳ و ۴ (ب) ۴ و ۵ (ج) ۵ و ۵ (د) ۴ و ۴ (ه) ۵ و ۴

۲۳. یک جدول 8×8 شامل اعداد طبیعی از مجموعه ۱ تا n است، به طوری که عدد هر خانه از عدد خانه سمت

راست و خانه بالایی آن (در صورت وجود) کوچک‌تر است. n لااقل چند است؟

الف) ۸ (ب) ۹ (ج) ۱۵

د) ۱۶ (ه) ۳۲

۲۴. شکل زیر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم تعدادی نقطهٔ اولیه در قسمت سفید شکل انتخاب کنیم، به‌قسمی که



بتوان هر نقطه‌ای در قسمت سفید را با یک خط مستقیم به حداقل یکی از

نقاط اولیه وصل کرد. این خط نباید از قسمت‌های سیاه شکل عبور کند.

حداقل تعداد نقاط اولیه چندتاست؟

(الف) ۲	(ب) ۳	(ج) ۴
(د) ۵	(ه) ۶	

۲۵. اعداد ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۶ و ۱۸ مجموع دوه‌دوی ۵ عدد طبیعی متفاوت هستند. تعداد اعداد فرد در

این ۵ عدد چندتاست؟

(الف) ۱	(ب) ۲	(ج) ۳
(د) ۴	(ه) ۵	

۲۶. یک جدول 10×1 شامل اعداد ۱ تا ۱۰ است، و از هر عدد دقیقاً یک بار در جدول آمده است. در هر مرحله عدد i

بین ۱ تا ۱۰ را انتخاب می‌کنیم و اگر محتوای خانه i ام جدول برابر j ($j \neq i$) بود، محتوای دو خانه i ام و j ام را عوض

می‌کنیم. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

(الف) تعداد تعویض‌ها می‌تواند بی‌نهایت باشد	(ب) تعداد تعویض‌ها حداکثر ۱۰ است
(ج) تعداد تعویض‌ها حداکثر ۴۵ است	(د) تعداد تعویض‌ها حداکثر ۹ است
(ه) تعداد تعویض‌ها حداکثر ۲۰ است	

۲۷. به چند طریق می‌توان سه عدد متفاوت از میان اعداد صحیح ۱ تا ۹ انتخاب کرد که مجموع آنها بر سه بخش پذیر

باشد؟

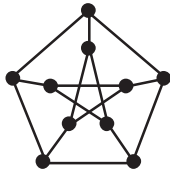
(الف) ۲۷	(ب) ۲۸	(ج) ۳۰	(د) ۴۵	(ه) ۸۴

۲۸. شش عدد a, b, c, x, y, z داده شده است. می‌دانیم $a < b < c$ و $x < y < z$ این اعداد را به‌صورت صعودی

مرتب می‌کنیم. سومین عدد، کدام یک از اعداد می‌تواند باشد؟

(الف) y و b	(ب) c و z	(ج) همهٔ اعداد به‌جز x و a
(د) همهٔ اعداد	(ه) هیچ‌کدام از گزینه‌های فوق صحیح نیست	

۲۹. شکل زیر نقشه خیابان های یک شهر است، که تقاطع ها در آن با دایره های تو پر نشان داده شده اند. تعدادی پلیس و یک دزد هر کدام ابتدا در یک تقاطع (نه لزوماً متمایز) قرار دارند. دزد و هر یک از پلیس ها، با شروع از دزد،



به نوبت حد فاصل دو تقاطع را طی می کنند. اگر یک پلیس بتواند در نوبت حرکتش، خود را به تقاطعی برساند که دزد در آن قرار دارد، دزد را دستگیر می کند. حداقل به چند پلیس نیاز داریم تا به ازای هر موقعیت اولیه دزد و پلیس ها، مطمئن باشیم که می توانیم دزد را دستگیر کنیم؟

(ج) ۳

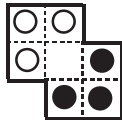
(ب) ۲

(الف) ۱

(ه) ۵

(د) ۴

۳۰. سه مهره سیاه و سه مهره سفید در صفحه ای مانند شکل مقابل قرار دارند. دو خانه از این شکل که در یک ضلع



یا در یک رأس با هم مشترک باشند را «مجاور» هم می نامیم. یک مهره A را

می توان با یکی از حرکت های زیر جابه جا کرد:

(۱) A به خانه مجاورش که خالی است برود.

(۲) اگر مهره A، مهره B و خانه خالی به همین ترتیب و در یک راستا (سطری، ستونی یا قطری) باشند، و رنگ B مخالف رنگ A باشد، A می تواند با پریدن از روی B به مکان خالی برود.

با حداقل چند حرکت می توان جای مهره های سیاه و سفید را عوض کرد؟

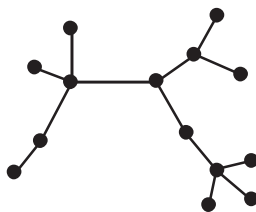
(ه) ۱۰

(د) ۹

(ج) ۸

(ب) ۷

(الف) ۶



۳۱. می خواهیم به هر کدام از نقطه های تو پر در شکل

مقابل، یکی از اعداد ۱ تا k را تخصیص دهیم به طوری که

هر مسیری که دو نقطه با شماره های یکسانی i را به هم

وصل می کند، از حداقل یک نقطه با شماره بیشتر از i

عبور کند. کم ترین مقدار k چه قدر است؟

(ه) ۶

(د) ۵

(ج) ۴

(ب) ۳

(الف) ۲

۳۲. تعداد زیرمجموعه های لااقل ۲ عضوی مجموعه $\{1, 2, \dots, 20\}$ که مجموع هر دو عضو متمایز آنها، از ۲۰ بزرگ تر باشد، چندتا است؟

الف) ۳۰۴۹ (ب) ۳۰۷۰ (ج) ۴۰۹۴ (د) ۴۰۹۵ (ه) ۲۰۴۸

۳۳. یک «عبارت جالب» از نویسه های a و b به صورت زیر تعریف می شود:

• a, ab و ba هر کدام یک عبارت جالب اند.

• اگر S_1 و S_2 دو عبارت جالب باشند $S_1 S_2$ نیز جالب است.

کدام یک از عبارات زیر جالب است؟

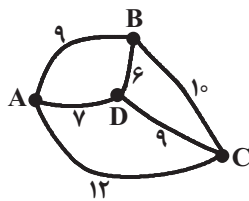
الف) $abbaaaabba$ (ب) $aaabbabbab$ (ج) $bababbaab$

د) الف و ب (ه) ب و ج

۳۴. کلیه اعداد ۶ رقمی که با ارقام ۱ تا ۶ ساخته شده اند و هیچ رقم تکراری ندارند را از بزرگ به کوچک مرتب کرده ایم. عدد ۲۴۳۵۱۶ چندمین آنهاست؟

الف) ۱۷۵ (ب) ۱۷۶ (ج) ۱۷۷ (د) ۵۴۳ (ه) ۵۴۴

۳۵. چهار شهر با جاده هایی مانند شکل زیر به هم وصل هستند. فاصله یک شهر تا یک شهر دیگر، به صورت عددی



برحسب کیلومتر بر روی جاده ای که آن دو شهر را به هم وصل

می کند نوشته شده است. می خواهیم تعدادی

ایستگاه آتش نشانی روی جاده ها و یا در شهرها ایجاد کنیم،

به طوری که برای هر شهر حداقل یک ایستگاه آتش نشانی در

فاصله حداکثر ۶ کیلومتری آن باشد. کدام یک از گزینه های زیر در

مورد کمترین تعداد ایستگاه های آتش نشانی و محل آنها درست

است؟

الف) ۲ ایستگاه بر روی جاده های AD و BC (ب) ۲ ایستگاه بر روی جاده های AD و AC

(ج) ۲ ایستگاه بر روی جاده های BD و DC (د) ۳ ایستگاه بر روی جاده های AB, BD و AC

(ه) الف و ب

۱۳۰

المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)

	a	b	c	B
d	c	f	a	
	b	e	a	
a	b	f	b	
A	a	c	b	

۳۶. در شکل زیر با حرکت به سمت بالا و سمت راست بر روی پاره خطها از A به B می‌رویم و در طول حرکت حرفهای بر روی پاره خطها را به ترتیب کنار هم می‌نویسیم. به این ترتیب، هر حرکت از A به B یک رشته تولید می‌کند. تعداد رشته‌های متفاوتی که به این طریق تولید می‌شوند چند تا است؟

(ج) ۸

(ب) ۷

(الف) ۶

(ه) ۱۰

(د) ۹

۳۷. عدد A را «مولد» عدد B گوییم اگر A به علاوه مجموع ارقامش برابر B شود. مثلاً ۲۷ مولد ۳۶ است، زیرا داریم:

$$۳۶ = ۲۷ + ۲ + ۷$$

(ج) ۱ و ۰

(ب) ۱ و ۱

(الف) ۲ و ۰

(ه) ۲ و ۲

(د) ۱ و ۲

۳۸. چند دنباله $a_1, a_2, \dots, a_{13}$ از اعداد ۱ تا ۱۳ وجود دارد که هر عدد دقیقاً یک بار در آن ظاهر شده باشد و نیز a_i

از a_{i-1} و a_{i+1} کوچک تر باشد؟

$$\left[\begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} \right]^2 \quad (\text{ج})$$

$$\left[\begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix} \right]^2 \times 3^3 \quad (\text{ب})$$

$$\left[\begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} \right]^2 \times 6^3 \quad (\text{الف})$$

$$\left[\begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix} \right]^2 \quad (\text{ه})$$

$$3^3 \times 2^4 \quad (\text{د})$$

۳۹. شش وزنه با وزنهای ۱، ۲، ۳، ۵، ۷ و ۹ کیلوگرم داده شده‌اند. به چند طریق می‌توان با انتخاب تعدادی از این

وزنه‌ها و قرار دادن آنها در یک کفه ترازو، یک جسم با وزن ۱۴ کیلوگرم را در کفه دیگر وزن کرد؟

(ج) ۵

(ب) ۴

(الف) ۳

(ه) ۷

(د) ۶

۴۰. پنج شهر A، B، C، D و E را در نظر بگیرید. قرار است به هر کدام از شهرهای A، B و C دو جاده و به هر یک

از شهرهای D و E یک جاده متصل باشد. به چند طریق می‌توان این شهرها را با تعداد لازم جاده به هم وصل کرد

به طوری که به هر شهر به تعداد فوق جاده متصل باشد و نیز از هر شهر بتوان با حرکت روی جاده ها به تمام شهرهای

دیگر رفت؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

سؤال های بله - خیر (۲۰ سؤال)

۴۱. در یک دنباله نوع A ، عدد اول دنباله، دلخواه است و بعد از آن هر عدد به صورت حاصل ضرب مجموع ارقام عدد قبل در یکی از مقسوم علیه های همان عدد است. مثلاً عدد بعد از ۳۵ می تواند ۴۰ باشد، چون مجموع ارقام ۳۵ برابر ۸ است و ۵ یکی مقسوم علیه ۳۵ می باشد. آیا ممکن است در دنباله ای که با ۱۴۴ شروع می شود، عدد ۸۰۹۲ ظاهر شود؟

۴۲. در یک دنباله نوع B ، عدد اول دلخواه است و بعد از آن هر عدد به صورت حاصل ضرب دو تا از مقسوم علیه های (نه لزوماً متمایز) عدد قبل از آن است. مثلاً عدد بعد از ۷۲ می تواند ۵۴ باشد چون ۹ و ۶ مقسوم علیه ۷۲ هستند. آیا ممکن است در دنباله ای که با ۱۸۰ شروع می شود عدد ۳۳۷۵ ظاهر شود؟

۴۳. سه ماده اولیه دارویی A ، B و C را در نظر بگیرید. هر نوع دارو با نسبت مواد A ، B و C می موجود در آن مشخص می شود. مثلاً در داروی (۴، ۵، ۶) مواد A ، B و C به ترتیب با نسبت های ۴، ۵ و ۶ مخلوط شده اند. می خواهیم ببینیم از یک مجموعه دارو آیا می توان یک داروی مشخص جدید ساخت یا خیر. مثلاً از مجموعه داروهای (۳، ۵، ۱) و (۴، ۵، ۶) می توان داروی (۵، ۵، ۳) را تولید کرد. برای این کار کافی است داروهای این مجموعه را با نسبت ۱ و ۲ ترکیب کنیم. آیا از مجموعه داروهای (۱، ۷، ۳) و (۳، ۲، ۱) می توان داروی (۵، ۴، ۳) را ساخت؟

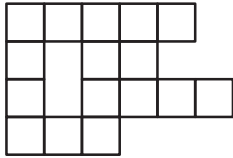
۴۴. بر روی دنباله $a_1, a_2, \dots, a_n$ اعمال زیر را به ترتیب انجام می دهیم:

(۱) $a_1, a_2, \dots, a_n$ را به ترتیب صعودی مرتب می کنیم.

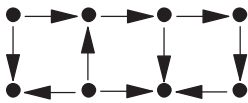
(۲) $a_1, a_2, \dots, a_n$ را به ترتیب صعودی مرتب می کنیم.

(۳) $a_1, a_2, \dots, a_n$ را به ترتیب صعودی مرتب می کنیم.

آیا این دنباله حتماً به ترتیب صعودی مرتب شده است؟



۴۵. آیا می‌توان شکل مقابل را از روی خطوط برید، به‌طور که بتوان با قرار دادن دو تکهٔ به‌دست آمده در کنار هم یک مربع ۴×۴ ساخت؟ (منظور از برش، تقسیم شکل از روی خطوط به دو قسمت یک پارچه است.)



۴۶. آیا می‌توان به هر نقطهٔ شکل روبه‌رو، یک عدد طبیعی نسبت داد، به‌قسمی که اگر از نقطهٔ مربوط به عدد A ، یک فلش به نقطهٔ مربوط به عدد B وجود داشته باشد، آنگاه B بر A بخش‌پذیر باشد؟

۴۷. بازی XO را به این صورت تعریف می‌کنیم: در یک مربع 3×3 بازی‌کن اول در نوبت خود یک X و بازی‌کن دوم یک O در جای خالی می‌گذارند. کسی بازی را می‌برد که یک سطر، یک ستون و یا یک قطر از مهره‌های خود به‌دست آورد. آیا بازی‌کن دوم می‌تواند طوری بازی کند که همیشه برنده شود؟

۴۸. مجموعه‌ای از توپ‌ها با رنگ‌های قرمز و آبی رنگ‌آمیزی شده‌اند. به‌قسمی که از هر رنگ لااقل یک توپ داریم. این توپ‌ها یک کیلویی یا دو کیلویی هستند، به‌صورتی که از هر وزن لااقل یک توپ داریم. آیا لزوماً دو توپ یافت می‌شوند که هم از نظر رنگ و هم از نظر وزن متفاوت باشند؟

۴۹. نقطه C را قرینه نقطه A، نسبت به نقطه B می‌گوییم، در صورتی که B وسط AC باشد. در عمل قرینه کردن A نسبت به B، نقطه A حذف و نقطه C به شکل اضافه می‌شود. در شکل مقابل

آیا می‌توان با انجام تعدادی عمل قرینه کردن نقطه‌ها نسبت به یکدیگر، مجموعه رئوس یک ۷- ضلعی محدب را به دست آورد؟



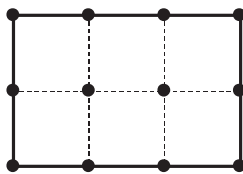
۵۰. یک جدول ۱×۶ را در نظر بگیرید که در هر خانه آن یک سکه به رو قرار دارد. در هر مرحله دو خانه مجاور را انتخاب کرده و سکه‌های موجود در آن خانه‌ها را پشت و رو می‌کنیم. این کار را آن قدر انجام می‌دهیم تا سکه‌های موجود در همهٔ خانه‌ها به پشت برگردند. در این صورت کار متوقف می‌شود. آیا کار پس از دقیقاً ۲۰ مرحله، می‌تواند متوقف شود؟

۵۱. یک جدول 10×10 مفروض است. دو نفر بازی زیر را انجام می‌دهند: هر بازی‌کن به نوبت یک عدد بین ۱ تا ۱۰ را در یکی از خانه‌های خالی جدول می‌نویسد، با این شرط که در سطر و ستونی که آن خانه قرار دارد قبلاً این عدد

نوشته نشده باشد. بازی کنی که در نوبت خود نتواند عددی در یکی از خانه های جدول بنویسد، بازنده و نفر دیگر برنده است. در صورتی که هر دو بازی کن بهترین حرکت خود را انجام دهند، آیا نفر دوم می تواند طوری بازی کند که همیشه برنده بازی باشد؟

۵۲. مجموع دو عدد در مبنای معکوس به این صورت تعریف می شود: ابتدا ارقام دو عدد را معکوس می کنیم، سپس دو عدد را جمع می کنیم و سرانجام ارقام حاصل جمع را معکوس می کنیم. مثلاً مجموع ۱۰۳ و ۶۵ در مبنای معکوس برابر ۷۵۳ می باشد ($۳۵۷ = ۵۶ + ۳۰۱$) و نیز مجموع ۱۰۳ و ۹۵ در مبنای معکوس برابر ۶۳ است ($۳۶۰ = ۵۹ + ۳۰۱$). آیا ممکن است مجموع دو عدد طبیعی A و B در مبنای معکوس برابر یکی از آن دو (A یا B) شود؟

۵۳. در یک بازی دو نفره (نقطه بازی بدون جایزه و با کادر دور!) هر نفر در نوبت خود یکی از خطوط نقطه چین را پررنگ می کند. در هر نوبت به تعداد مربع هایی که بعد از حرکت یک بازی کن، تمام اضلاع آنها پررنگ شده اند، به وی

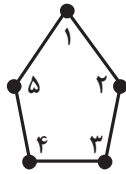


امتیاز داده می شود. دو بازی کن یک در میان حرکت می کنند. در پایان، کسی که امتیاز بیشتری آورده باشد، برنده است. در شکل مقابل اگر هر دو بازی کن بهترین حرکت های ممکن را انجام دهند، آیا بازی کن اول می تواند همیشه برنده شود؟

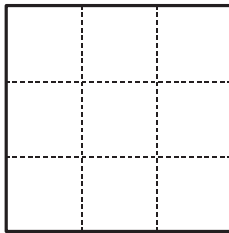
۵۴. یک جدول با اندازه ۱۰×۱۰ با اعداد صفر، ۱ و -۱ پر شده است. آیا چنین جدولی وجود دارد که مجموع اعداد هر سطر، هر ستون و هر یک از دو قطر آن همگی با هم متفاوت باشند؟

۵۵. در یک مهمانی ۱۴ نفر حضور دارند. می دانیم که هر یک از مهمان ها حداکثر ۴ نفر از مهمان های دیگر را می شناسد، و نیز می دانیم که بین این افراد دقیقاً ۲۱ مورد آشنایی دو جانبه وجود دارد. آیا حالتی وجود دارد که این افراد بتوانند به گونه ای دور یک میز بنشینند که هر کس نفر سمت راست خود را بشناسد و با نفر سمت چپ نا آشنا باشد؟

۵۶. می خواهیم به هر یک از رئوس ۵ - ضلعی زیر یک رنگ از سه رنگ a ، b یا c را نسبت دهیم به طوری که رئوس دو سر یک ضلع هم رنگ نباشند. می دانیم که این رنگ آمیزی را می توان به صورت های مختلف انجام داد. حال می خواهیم برای رنگ آمیزی «محدودیت» ایجاد کنیم. هر محدودیت شامل یک شماره رأس و یک رنگ است و



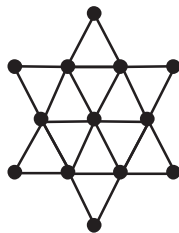
معنی آن، این است که رأس مذکور نمی تواند با آن رنگ، رنگ آمیزی شود. آیا می توان ۵ محدودیت برای این شکل ایجاد کرد به قسمی که با رعایت آنها رئوس ۵ - ضلعی دقیقاً به یک صورت رنگ آمیزی شود؟



۵۷. شکل مقابل را در نظر بگیرید. دو نفر بازی زیر را به این صورت انجام می دهند: ابتدا نفر اول در امتداد یکی از خط چین ها شکل را به دو قسمت تقسیم می کند و یکی از آنها را حذف کرده، دیگری را به نفر دوم می دهد. نفر دوم هم در امتداد یکی از خط چین ها آن را به دو قسمت می کند و یکی از آنها را حذف کرده، دیگری را به نفر اول می دهد. این عمل تکرار می شود تا زمانی که دیگر نتوان شکل را تقسیم کرد. بازی کنی که نتواند عمل تقسیم را انجام دهد بازنده است. در صورتی که هر دو بازی کن بهترین حرکات را انجام دهند، آیا نفر اول می تواند برنده بازی شود؟

۵۸. در شکل مسأله قبل بازی دیگری به صورت زیر تعریف می کنیم. ابتدا نفر اول در امتداد یکی از خط چین ها شکل را به دو قسمت تقسیم می کند. سپس نفر دوم یکی از قسمت ها را حذف می کند و قسمت دیگر را به دو بخش تقسیم می کند. سپس نفر اول یکی از قسمت ها را حذف می کند و قسمت دیگر را به دو بخش تقسیم می کند. بازی به همین صورت ادامه می یابد تا زمانی که بازی کنی نتواند شکل را تقسیم کند و می بازد. در صورتی که هر دو بازی کن بهترین حرکات را انجام دهند، آیا نفر اول می تواند برنده بازی شود؟

۵۹. شکل زیر نقشه خیابان های یک شهر است. در یک تقاطع یک دزد و در تقاطعی دیگر یک پلیس قرار دارد. دزد



و پلیس به نوبت (ابتدا دزد) از یک تقاطع به تقاطع مجاور (که بین شان یک خیابان فاصله است) می روند. اگر پلیس بتواند در نوبت حرکتش خود را به تقاطعی برساند که دزد در آن قرار دارد می تواند دزد را بگیرد. آیا با هر موقعیت دزد و پلیس در ابتدا، پلیس می تواند دزد را بگیرد؟

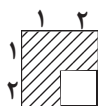
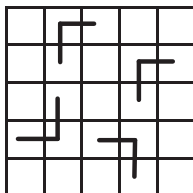
۶۰. رشته $abbbaabb$ را در نظر بگیرید. در هر مرحله می توانیم به ازای یک i دلخواه، جای حرف i ام رشته را با حرف $i + 2$ ام رشته (در صورت وجود) عوض کنیم. آیا پس از تعدادی مرحله ممکن است به رشته $abbaabab$ برسیم؟

پاسخ تشریحی

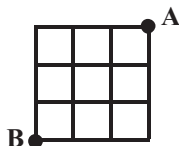
نهمین المپیاد کامپیوتر

۱. مجموعه 10^5 عضوی دارای 2^{10} یعنی 1024 زیرمجموعه است که مجموع اعضای نصف آنها زوج و مجموع اعضای نصف دیگر فرد است. پس جواب مورد نظر 512 می باشد.

۲. هر یک از شبکه های 2×2 موجود در گوشه های مربع چنان باید باشند که حداقل دو خانه از هر یک از آنها پر شود زیرا در غیر این صورت شکل داده شده در آن جا می شود و در ضمن نمی توان شکلی چنان قرار داد که از خانه های دو تا از شبکه های مورد بحث را بپوشاند. بنابراین حداقل ۴ شکل لازم است. با ۴ شکل می توان مطابق جدول بالا به مطلوب رسید.



۳. برای گزینه الف مثال نقض تهی وجود دارد. برای گزینه ب مثال نقض مانند شکل مقابل وجود دارد.



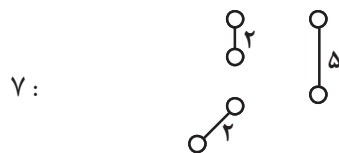
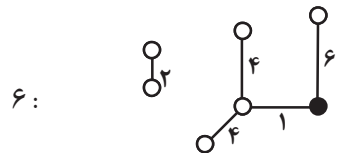
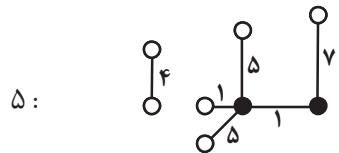
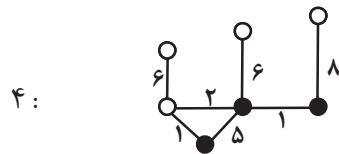
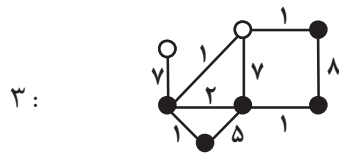
۴. به ازای هر مسیر با طول می نیمم (طول ۶) از A به B یک و فقط یک مجموعه زیبا یافت می شود. به عنوان مثال برای مجموعه زیبای a (تهی)

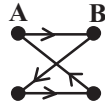
مسیر ۱ و برای مجموعه زیبای b مسیر ۲ متناظر هستند.



تعداد مسیرهای مطلوب در یک شبکه $m \times n$ برابر $\binom{m+n}{m}$ و در این مسأله برابر $\binom{6}{3}$ یعنی ۲۰ می باشد.

۵. وضعیت بمبها و فتیله ها پس از سپری شدن اوقات مختلف مطابق شکل مقابل می باشد. مکان هایی که آتش در آنها باشد با دایره تو خالی نشان داده شده است.





۶. برای صحت گزینه الف شکل مقابل وجود دارد:

اگر بازیکن i از A بازیکن j از B باخته باشد آنگاه i نمی تواند برنده

مطلق باشد زیرا بازیکن هایی که j را برده اند از دبیرستان A بوده و با i بازی نکرده اند. پس بازیکنی که حتی یک باخت داشته باشد نمی تواند برنده مطلق باشد. اگر بازیکن های i و j هر دو برنده مطلق باشند آنگاه i و j نمی توانند در دو دبیرستان متفاوت باشند زیرا اگر i از j برده باشد آنگاه j حداقل یک باخت داشته و نمی تواند برنده مطلق باشد. و اما اگر i و j از یک دبیرستان باشند و هر دو تای آنها همه دانش آموزان دبیرستان دیگر را برده باشند آنگاه بازیکن i بازیکن j را به واسطه برده است و نمی تواند برنده مطلق محسوب شود.

۷. شیوه ساخته شدن n عدد n از روی n عدد 1 را در نظر می گیریم. با عمل کردن به شیوه عکس به n عدد 1 می رسمیم. به این منظور n عدد n را دو به دو در نظر گرفته و اعداد تولیدکننده آنها را می نویسیم. اگر n فرد باشد یک عدد n باقی مانده و هرگز از آن تبدیل نخواهد شد. پس شرط لازم برای رسیدن به مطلوب آن است که n زوج باشد. برای $n = 16$ شیوه زیر را عمل می کنیم:

● ابتدا ۱۶ عدد را دوه دو در نظر گرفته و آنها را به ۱۶ عدد ۲ و سپس آنها را به ۱۶ عدد ۴ و سپس آنها را به ۱۶ عدد ۸ و در نهایت با دسته بندی آن اعداد در ۸ زوج دوتایی آنها را به ۱۶ عدد ۱۶ تبدیل می کنیم.

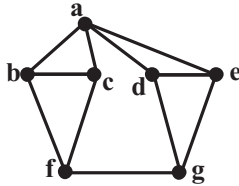
۸. طریقه تقسیم سوخت ها مطابق شکل مقابل می باشد:

	۱	۲	۳
۱	-	۴	۱۶
۲	۱۲	۸	-

۹. تمام مثلث بندی های مطلوب به شکل زیر می باشد:



لازم به ذکر است که شکل های اول و آخر با دوران در فضا قابل تبدیل به هم هستند ولی با دوران در صفحه به هم نمی توانند تبدیل شوند.



۱۰. سه رأس a، d و e سه رنگ متمایز دارند و نیز سه رأس g، d و e نیز سه رنگ متمایز دارند، بنابراین اگر بخواهیم رئوس را فقط با سه رنگ، رنگ آمیزی کنیم آنگاه a و g هم رنگ خواهند بود. به همین ترتیب معلوم می شود که a و f هم رنگ هستند که در این صورت دو رأس f و g که به هم وصل هستند هم رنگ شده و با فرض داده شده تناقض ایجاد می کند.

شکل داده شده را با ۴ نوع رنگ به شکل زیر می توان رنگ کرد:

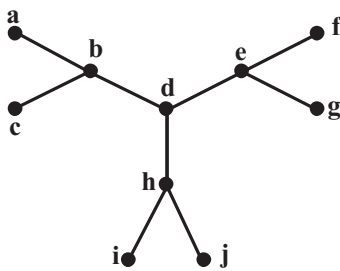
a, g: سبز

b, e: آبی

d, c: قرمز

f: زرد

و همچنین قابل بررسی است که با حذف هر یال رنگ آمیزی شکل با سه رنگ امکان پذیر است.



۱۱. مسیری که طول آن ماکزیمم باشد مسیر اصلی در نظر می گیریم که با توجه به اعداد داده شده مسیر fedhj مسیر اصلی می باشد. با محاسبه معلوم می شود که در این حالت مجموع مسافتات پیموده شده برابر ۴۷ کیلومتر می شود.

۱۲. اگر افراد را a, b, c, d و e در نظر بگیریم معلوم است که با تشکیل سه جلسه abc، edc و abc می توان به منظور رسید.

۱۳. شرط لازم برای رسیدن به مطلوب آن است که مجموع اعداد اولیه زوج باشد، زیرا در هر مرحله دو برابر عدد کوچکتر حذف شده از مجموع اعداد کم شده و در نهایت به صفر می رسد. مجموع اعداد موجود در هر یک از حالات ۲ و ۳ فرد بوده و شرط لازم را ندارند. و اما رسیدن به منظور در حالت اول به شیوه زیر می باشد:

۸, ۵, ۳, ۲, ۱, ۱ → ۳, ۳, ۲, ۱, ۱ → ۳, ۱, ۱, ۱ → ۲, ۱, ۱ → ۱, ۱ → ۰

۱۴. معلوم است که در هر یک از دو شبکه 2×2 موجود در سمت چپ و نیز سمت راست شکل حداکثر دو مهره می تواند قرار گیرد و چون در شکل دقیقاً ۴ مهره موجود است پس در هر یک از آن شبکه ها دقیقاً ۲ مهره موجود خواهد بود. طرق قرار دادن دو مهره در شبکه سمت چپ و به دنبال آن قرار دادن دو مهره در شبکه سمت راست به شکل زیر می باشد:

چپ	راست
	،
	،
	، ، ،

۱۵. با اطلاعات داده شده معلوم می شود که افراد فرد و زوج یک در میان هستند، یعنی در شکل مقابل مربعها با اعداد فرد و دایره ها با اعداد زوج پر شده اند:

□ ○ □ ○ □ ○ □

دایره وسط یقیناً عدد ۴ می باشد بنابراین به دو حالت دو دایره دیگر را می توان با اعداد ۲ و ۶ پر کرد. یکی از دو مربع میانی عدد ۱ می باشد یعنی به دو حالت می توان عدد ۱ را پر کرده و به تناسب آن عدد ۷ مکان منحصر به فرد پیدا خواهد کرد به این صورت که اگر عدد ۱ در مربع دوم (یا سوم) از سمت چپ قرار گیرد عدد ۷ در مربع چهارم (یا اول) از سمت چپ قرار خواهد گرفت. و در نهایت در دو مربع باقی مانده دو عدد ۳ و ۵ را به دو حالت می توان قرار داد که طبق اصل ضرب جواب مورد نظر برابر $2 \times 2 \times 2$ یعنی ۸ خواهد شد.

A	B	
	۳	

۱۶. خانه B را به دو طریق و به تناسب آن خانه A را نیز به دو طریق می توان پر کرد، پس از پر کردن آن دو کل جدول به صورت منحصر به فرد پر می شود، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر 2×2 یعنی ۴ می باشد.

۱۷. هر یک از دو زوج یال های موجود در سمت چپ و راست شکل را به طور مستقل از یکدیگر به سه طریق می توان جهت دار کرد. بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر برابر 3×3 یعنی ۹ می باشد.

۱۸. بیشترین جابه جایی موقعی اتفاق می افتد که دنباله به صورت $a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_k b_k$ یا $a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_k b_k a_{k+1}$ بوده و هر دو دنباله a_1 ها و b_1 ها صعودی بوده و b_k از a_1 کوچکتر باشد، در این صورت دنباله صعودی مورد نظر به شکل $a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} b_1 b_2 \dots b_k$ یا $b_1 b_2 \dots b_k a_1 a_2 \dots a_{k+1}$ مرتب می شود و بیشترین جابه جایی در این حالت مربوط به b_k است که به اندازه k واحد یا $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ واحد جابه جاشده است.

۱۹. تعداد اعداد ۷ رقمی در مبنای ۲ که تعداد ۱ های آنها ۴ و تعداد ۰ های آنها ۳ باشد برابر $\binom{6}{3}$ یعنی ۲۰ می باشد (زیرا رقم سمت چپ قطعاً ۱ است). این اعداد را دسته A می نامیم.

تعداد اعداد ۷ رقمی در مبنای ۲ که تعداد ۱ های آنها ۳ و تعداد ۰ های آنها ۴ باشد برابر $\binom{6}{4}$ یعنی ۱۵ می باشد (زیرا رقم سمت چپ قطعاً ۱ است). این اعداد را دسته B می نامیم.

هر عدد از دسته A دقیقاً به سه عدد از B متصل می شود (رقم یک موجود در سمت چپ عدد را نمی توانیم صفر کنیم ولی اگر هر رقم یک دیگر موجود در آن عدد را صفر کنیم یک عدد از دسته B تولید می شود). بنابراین تعداد کل پاره خط های تولید شده برابر $3 \times 20 = 60$ خواهد شد، که متأسفانه در گزینه ها نیامده است.

۲۰. تاس را چنان روی زمین قرار می دهیم که عدد ۶ روی زمین و عدد ۵ سمت راست قرار گیرد که در این حالت یقیناً عدد ۱ بالا و عدد ۲ سمت چپ قرار خواهند گرفت. دو حالت پیش می آید، عدد ۳ مقابل بوده و عدد ۴ پشت باشد و یا برعکس.

۲۱. با توجه به تعریف دنباله متنوع معلوم می شود که شرط لازم برای متنوع بودن دنباله $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ آن است که دنباله a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 و به دنبال آن دنباله a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 متنوع باشند. چون هر دو عضو متوالی یک دنباله متمایز هستند پس عدد a_1 را به ۳ طریق و عدد a_6 را به دو طریق از بین اعداد ۰، ۱ و ۲ می توان انتخاب کرد یعنی ۶ نوع دنباله متنوع متمایز به صورت $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ وجود دارد. در دنباله $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ پس از معلوم شدن a_1 و a_6 عضو a_3 به یک طریق (چون در وسط قرار گرفته است) و عضو a_5 به دو طریق (متمایز با a_4) مشخص می شوند. چون ۶ نوع دنباله متمایز $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ ایجاد شده

بنابراین طبق اصل ضرب $2 \times 1 \times 6$ یعنی ۱۲ دنباله متنوع به صورت a_6, a_7, a_8, a_9 می توان ایجاد کرد. چون در دنباله اولیه هر یک از اعضای a_1, a_2, a_3 و a_4 بین دو عضو دیگر قرار گرفته اند پس هر یک از آنها به صورت منحصر به فرد مشخص خواهند شد، بنابراین جواب مورد نظر ۱۲ می باشد.

۲۲. شیوه حرکت برای رسیدن به B در بهترین حالت به شکل زیر می باشد:

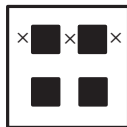
۱. سه واحد بالا ۲. دو واحد پایین ۳. دو واحد راست

۴. دو واحد راست ۵. دو واحد بالا

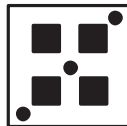
شیوه حرکت برای رسیدن به C نیز در بهترین حالات به شکل زیر می باشد:

۱. سه واحد بالا ۲. دو واحد راست ۳. دو واحد بالا ۴. سه واحد راست

۲۳. اگر ستون اول را از پایین به بالا با اعداد ۱، ۲، ...، ۸ و همچنین سطر آخر را با همان اعداد از چپ به راست پر کنیم آنگاه اعداد موجود در قطر فرعی از پایین به بالا به ترتیب برابر ۱، ۳، ۵، ...، ۱۵ خواهد شد. به راحتی معلوم می شود که مابقی اعداد همگی اعدادی بین ۱ و ۱۵ می باشند.



(۱)



(۲)

۲۴. اگر سه نقطه مطابق شکل (۱) در نظر بگیریم معلوم می شود که

هیچ دو تایی از آنها نقطه اولیه مشترک ندارند بنابراین وجود حداقل

سه نقطه اولیه الزامی است. اگر سه نقطه اولیه مطابق شکل (۲)

باشند آنگاه تمام نقاط سفید رنگ پوشش داده می شوند.

۲۵. اگر تعداد فردها را a و تعداد زوجها را $5 - a$ در نظر بگیریم آنگاه تعداد اعداد فرد تولید شده برابر

$$\begin{pmatrix} 5-a \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ خواهد شد، بنابراین:}$$

$$\begin{pmatrix} 5-a \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Rightarrow (a-1)(a-4) = 0 \Rightarrow a=1 \text{ یا } a=4$$

اگر $a=1$ یعنی فقط یک عدد فرد داشته باشیم و آن را x و اعداد زوج را y_1, y_2, y_3, y_4 بنامیم آنگاه:

$$x + y_1 = 7 \quad x + y_2 = 11$$

$$x + y_3 = 9 \quad x + y_4 = 15$$

از تساوی های فوق معلوم می شود که اعداد زوج به ترتیب به صورت $y_1, y_1 + 2, y_1 + 4, y_1 + 8$ می باشند معلوم است که کوچکترین اعداد یعنی ۸ را دو عدد y_1 و $y_1 + 2$ تولید می کنند بنابراین $2 = y_1 + 2$ یا $3 = y_1$ و این با زوج بودن y_1 در تضاد است.

۲۶. در هر مرحله تعویض، عدد i در خانه i قرار می گیرد یعنی در هر مرحله تعویض حداقل یک عنصر در جای خود قرار می گیرد بنابراین حداکثر ۹ تعویض لازم است (لازم به ذکر است که اگر دقیقاً ۹ عدد در جایگاه خود باشند عدد دهم نیز به ناچار در جایگاه خود خواهد بود).

۲۷. اعداد را به شکل زیر به سه دسته A, B و C تقسیم می کنیم:

$A: 3, 6, 9$

$B: 2, 5, 8$

$C: 1, 4, 7$

برای آن که مجموع اعداد بر ۳ بخش پذیر باشد لازم است هر سه عدد از یک دسته بوده و یا هر یک از

آن اعداد از یک دسته باشند بنابراین: $? = 3 \times \binom{3}{3} + \binom{3}{1} \binom{3}{1} \binom{3}{1} = 3 + 27 = 30$.

۲۸. در هر یک از شش حالت زیر به ترتیب a, b, c, x, y و z سومین عضو دنباله می باشند:

۱) $x < y < a < z < b < c$

۲) $x < a < b < c < y < z$

۳) $a < b < c < x < y < z$

۴) $a < b < x < y < z < c$

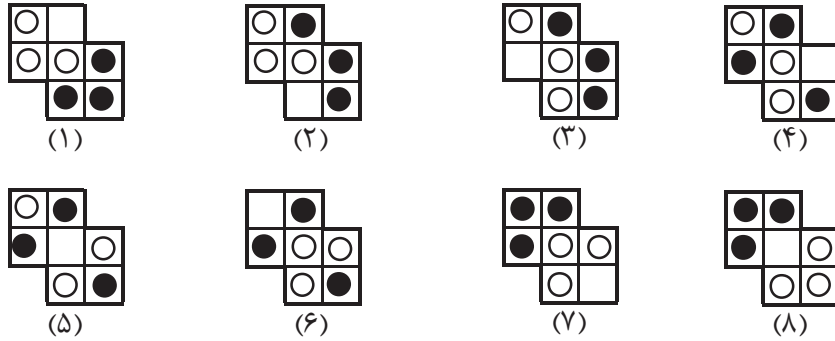
۵) $a < x < y < z < b < c$

۶) $x < y < z < a < b < c$

۲۹. اگر تعداد پلیس ها ۲ باشد دزد همیشه برای فرار راهی در پیش دارد (چون هر تقاطع سه راه است) و

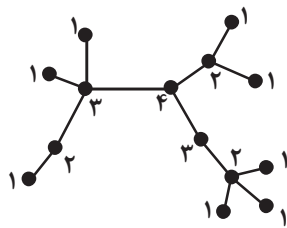
اما اگر تعداد پلیس ها ۳ باشد آن سه می توانند در هر شرایطی خود را به جایی رسانند که دزد را محاصره کرده و او را دستگیر کنند.

۳۰. بهترین حرکت به شکل زیر است که ۸ مرحله طول می کشد:



برای ورود مهره های سفید به خانه های جدید ۳ حرکت و برای ورود مهره های سیاه به خانه های جدید ۳ حرکت لازم است (مجموعاً ۶ حرکت). چون در انتقال مهره ها ناگزیر از خانه وسط کمک می گیریم بنابراین دو حرکت نیز برای ورود مهره به خانه وسط (که متمایز از حرکات قبلی است) لازم است (مراحل اول و ششم). لازم به ذکر است که با یک بار ورود و خروج یک مهره به خانه وسط (نه بیشتر) تعداد حرکات لازم بیش از ۸ شده و مطلوب نمی باشد. با جمع زدن تعداد حرکات فوق معلوم می شود که برای رسیدن به مطلوب حداقل ۸ حرکت لازم است.

۳۱. بهترین حالت ممکن به شکل روبه رو می باشد:



۳۲. کوچکترین عضو زیرمجموعه مطلوب را i می نامیم که دو حالت پیش می آید:

I $1 \leq i \leq 9$. در این حالت هیچ یک از اعضای $i+1, i+2, \dots, 20-i$ نمی توانند در آن زیرمجموعه باشند و اما هر یک از اعضای $20-i+1, 20-i+2, \dots, 20$ و دو حالت در آن زیرمجموعه می توانند داشته باشند، عضو بودن در آن زیرمجموعه و یا عضو نبودن آن (حالتی که هیچ یک از آن اعضا عضو زیرمجموعه مورد نظر نباشند را نمی شماریم زیرا در این صورت زیرمجموعه مورد نظر فقط شامل i بوده و یک عضوی است). بنابراین در این حالت تعداد زیرمجموعه های مورد نظر برابر $2^i - 1$ می باشد.

(II) $10 \leq i \leq 19$. در این حالت همه اعضا بزرگتر از i دو حالت در آن زیرمجموعه می توانند داشته باشند، عضو بودن در آن زیرمجموعه و یا عضو نبودن آن (حالتی که هیچ یک از آن اعضا عضو زیرمجموعه مورد نظر نباشند را نمی شماریم). بنابراین در این حالت تعداد زیرمجموعه های مطلوب برابر $2^{20-i} - 1$ خواهد شد.

با در نظر گرفتن دو حالت فوق تعداد کل زیرمجموعه های مطلوب به شکل زیر پیدا خواهد شد:

$$? = [(2^1 - 1) + (2^2 - 1) + \dots + (2^9 - 1)] + [(2^{10} - 1) + (2^9 - 1) + \dots + (2^1 - 1)]$$

$$= 2^{10} + 2(2^1 + 2^2 + \dots + 2^9) - 19 = 2^{10} + 2(2^{10} - 2) - 19$$

۳۳. به راحتی قابل درک است که در یک عبارت جالب تعداد b ها نمی تواند از تعداد a ها بیشتر باشد بنابراین گزینه ج نمی تواند صحیح باشد. همچنین یک عبارت جالب نمی تواند به صورت $\dots b b a b b \dots$ باشد زیرا اگر a به همراه b سمت راست خود آمده باشد آنگاه در سمت چپ آن $b b$ و اگر a به همراه b سمت چپ خود آمده باشد آنگاه در سمت راست آن $b b$ نمی تواند تولید شود.

۳۴. تمام اعدادی که رقم سمت چپ آنها ۳، ۴، ۵ و ۶ باشد قبل از عدد داده شده می باشند، تعداد این اعداد بر $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ یعنی ۴۸۰ می باشد.

تمام اعدادی که رقم اول آنها ۲ و رقم دومشان ۵ یا ۶ باشد قبل از عدد داده شده قرار دارند که تعداد این اعداد نیز برابر $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ یعنی ۴۸ می باشد.

تمام اعدادی که رقم اول آنها ۲ و رقم دومشان ۴ و رقم سومشان یکی از ارقام ۵ یا ۶ باشد قبل از عدد داده شده قرار دارند که تعداد این اعداد برابر $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ یعنی ۱۲۰ می باشد.

تمام اعدادی که رقم اول آنها ۲ و رقم دومشان ۴، رقم سومشان ۳ و رقم چهارمشان ۶ باشد قبل از عدد داده شده قرار دارند که تعداد این اعداد برابر $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ یعنی ۲۰ می باشد.

تمام اعدادی که رقم اول، دوم، سوم و چهارم آنها به ترتیب ۲، ۳ و ۵ بوده و رقم پنجمشان ۶ باشد قبل از عدد داده شده قرار دارند که تعداد این اعداد برابر $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$ یعنی ۱ می باشد.

بنابراین مجموعاً $1 + 2 + 12 + 48 + 480 = 543$ یعنی ۵۴۳ عدد قبل از عدد داده شده قرار دارد و عدد مطلوب پانصد و چهل و چهارمین عدد می باشد.

۳۵. یکی از سه حالت زیر می تواند جواب باشد:

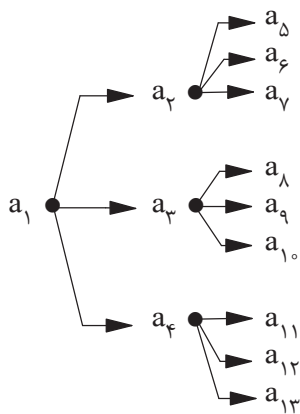
I) ۲ ایستگاه بر روی جاده های AB و DC

II) ۲ ایستگاه بر روی جاده های AD و BC

III) ۲ ایستگاه بر روی جاده های AC و BD

۳۶. تعداد کل مسیرهای اشاره شده برابر $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ یعنی 10 می باشد که هر یک برای خود دنباله ای را تولید می کنند که دنباله های $abcbcb$ ، $abefc$ و $abeaa$ هر یک دو بار تولید می شوند. بنابراین تعداد کل دنباله های متمایز تولید شده برابر $10 - 3 = 7$ خواهد شد.

۳۷. عدد 97 هیچ مولدی ندارد و اما مولدهای عدد 101 اعداد 100 و 91 می باشند.



۳۸. باید درخت موجود در شکل مقابل را تکمیل کنیم
($x \rightarrow y$) نشانگر آن است که عدد x از عدد y کوچکتر است).

عدد a_1 کوچکترین عدد ممکن یعنی 1 می باشد. حال 12 عدد باقی مانده را به سه دسته چهارتایی تقسیم می کنیم تا به شاخه های a_1 اختصاص دهیم که این کار به $\begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ طریق ممکن است. در بین دسته اول کوچکترین عدد را به a_4 و سه عدد دیگر را به $3!$ طریق

بین a_5 و a_6 و a_7 تقسیم می کنیم. دسته های دیگر را نیز به همین صورت بین a_1 های باقی مانده تقسیم می کنیم، بنابراین جواب مورد نظر برابر $3!(3!) \times \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ خواهد شد که جواب صحیح در بین گزینه های نیامده است.

۳۹. تمام حالات ممکن به شکل زیر می باشند:

I) $9, 5$ II) $9, 3, 2$ III) $7, 5, 2$

۴۰. شهر متصل به D یکی از شهرهای A، B یا C می باشد زیرا اگر D به E متصل باشد آنگاه شهر D به غیر از E به هیچ شهر دیگری مسیر نخواهد داشت. به همین صورت E نیز به یکی از شهرهای A، B یا C (به غیر از شهری که D به آن متصل است) وصل خواهد بود. بنابراین تعداد جواب های ممکن برابر 3×2 یعنی ۶ خواهد بود.

۴۱. چون عضو اول دنباله یعنی ۱۴۴ بر ۹ بخش پذیر است پس مجموع ارقام آن نیز بر ۹ بخش پذیر بوده و حاصل ضرب آن مجموع در هر مقسوم علیهی باز مضرب ۹ خواهد بود به همین ترتیب معلوم می شود که همه اعضای دنباله مضرب ۹ می باشد در حالی که عدد 8092 مضرب ۹ نمی باشد.

۴۲. اعضای دنباله را به شکل زیر می سازیم:

$$a_1 = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \quad a_7 = (5^1) \times (3^2 \times 5^1) = 3^2 \times 5^2$$

$$a_9 = (3^1 \times 5^1) \times (3^2 \times 5^2) = 3^3 \times 5^3 = 3375$$

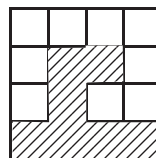
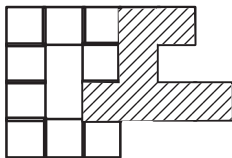
۴۳. فرض می کنیم α برابر داروی اول را با β برابر داروی دوم مخلوط کنیم آنگاه خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} 3\alpha + \beta = 3 \\ 7\alpha + 2\beta = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = -2, \beta = 9$$

$$\alpha + 3\beta = 5$$

از دو معادله اول مقادیر α و β به ترتیب برابر ۲- و ۹ به دست می آیند که اولاً منفی بودن α بی معنی است و ثانیاً مقادیر به دست آمده در معادله سوم صدق نمی کنند.

۴۴. در مرحله دوم دنباله a_8, a_7, a_6 صعودی می باشد و چون آن سه عدد از a_5, a_4, a_3 بزرگتر بوده و طبق عمل اول این سه عدد نیز از a_7 و a_1 بزرگترند پس از عمل دوم a_8, a_7 و a_6 به همین ترتیب بزرگترین اعداد می باشند. در مرحله سوم نیز پنج عضو نخست به ترتیب صعودی نوشته می شوند.

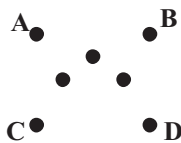


۴۵. مطابق شکل مقابل:

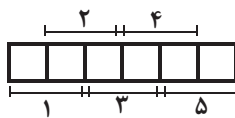
۴۶. به همه نقاط عدد یکسان n را نسبت دهید.

۴۷. ابتدا بازی کن اول یک X در خانه وسط قرار می دهد که در این صورت بازی کن دوم فقط می تواند در دو ستون اول و سوم و یا در دو سطر اول و سوم برنده شود. اما در هر خانه ای که بازی کن دوم O قرار دهد در سطر یا ستون مربوطه نفر اول یک X قرار داده و مانع از برنده شدن نفر دوم می شود.

۴۸. اگر در بین توپ های آبی هم یک کیلویی داشته باشیم و هم دو کیلویی، آنگاه از توپ های قرمز را انتخاب می کنیم این توپ چه یک کیلویی باشد و چه دو کیلویی، مسأله را حل می کند. و اما اگر همه توپ های آبی یک کیلویی (یا دو کیلویی) باشند آنگاه قطعاً در بین توپ های قرمز توپ دو کیلویی (یا یک کیلویی) وجود دارد.



۴۹. کافی است قرینه نقطه A را نسبت به نقطه C و قرینه نقطه B را نسبت به نقطه D به دست آوریم.



۵۰. خانه ها را مطابق شکل مقابل به زوج های ۱ تا ۵ تقسیم می کنیم. برای این که خانه سمت چپ از رو به پشت تبدیل شود باید زوج ۱ فرد بار انتخاب شود. برای این که خانه دوم از سمت چپ از رو به پشت

تبدیل شود باید فرد بار انتخاب شود یعنی تعداد انتخاب های زوج ۲ و ۱ بر روی هم فرد باشد و چون تعداد انتخاب های زوج ۱ فرد بار بود، تعداد انتخاب های زوج ۲ باید زوج بار باشد. به همین ترتیب معلوم می شود تعداد انتخاب های زوج ۳ فرد، تعداد انتخاب های زوج ۴ زوج بار و بالاخره تعداد انتخاب های زوج ۵ فرد بار خواهد بود بنابراین تعداد کل انتخاب ها برابر «فرد + زوج + فرد + زوج + فرد» یعنی فرد می تواند باشد.

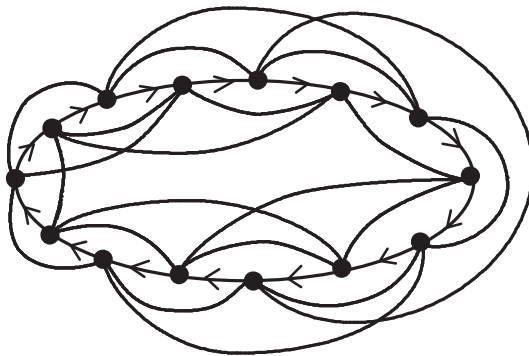
۵۱. شبکه ۱۰×۱۰ نقطه ای در وسط به صورت مرکز تقارن دارد. هر عددی که بازی کن اول در یک خانه قرار دهد بازی کن دوم همان عدد را در قرینه آن خانه نسبت به نقطه مورد اشاره قرار می دهد و هرگز بازنده نمی شود.

۵۲. A را برابر ۱۲ و B را برابر ۹۸۱ در نظر می گیریم:

$$A = ۱۲ = \text{مجموع } A \text{ و } B \text{ در مبنای معکوس} \rightarrow ۲۱ + ۱۸۹ = ۲۱۰$$

۵۳. اگر بازی کن اول پاره خط وسط را رسم کند یقیناً برنده می شود.

۵۴. بزرگترین مجموع برابر $۱۰+$ و کوچکترین مجموع برابر $۱۰-$ می باشد و در این فاصله مجموعاً ۲۱ عدد صحیح وجود دارد، در حالی که تعداد سطرها، ستون ها و دو قطر بر روی هم ۲۲ می باشد بنابراین حداقل یک عضو تکراری خواهیم داشت.



۵۵. در شکل مقابل یال های جهت دار نشانگر آشنایی های یک طرفه و یال های بدون جهت نشانگر آشنایی های دو طرفه است.

۵۶. محدودیت های لازم می تواند به شکل $(۱, a)$ ، $(۱, b)$ ، $(۲, a)$ ، $(۳, c)$ و $(۴, c)$ باشد.

۵۷.

اگر نفر اول شکلی به صورت

 را تحویل نفر دوم دهد آنگاه نفر دوم شکل

 را حذف و

 را تحویل نفر اول می دهد و برنده می شود.

اگر نفر اول شکلی به صورت

 را تحویل نفر دوم دهد نفر دوم شکل

 را حذف و شکل

 را تحویل نفر اول می دهد. نفر اول به ناچار شکلی به صورت

 تحویل نفر دوم

داده و سپس شکلی به صورت

 از او تحویل گرفته و بازنده می شود.

۱۵۰

المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)

۵۸.

نفر اول شکل را به دو قسمت  و  تقسیم می کند، نفر دوم اولی را حذف و دومی را به دو شکل به صورت  و  تقسیم می کند. نفر اول یکی را حذف و دیگری را به ناچار به صورت  و  تقسیم می کند. نفر دوم اولی را حذف و دومی را به صورت  و  تقسیم کرده و برنده می شود.

۵۹. فرض می کنیم در ابتدا دزد و پلیس در دو تقاطع مجاور باشند چون شروع حرکت با دزد است، ابتدا دزد به تقاطعی که پلیس در آن است می رود و از آن به بعد به هر تقاطعی که پلیس رود، دزد به همان تقاطع می رود.

۶۰. هرگز b های مجاور هم نمی توانند از هم جدا شوند.

هشتمین المپیاد کامپیوتر

بهمن ۷۶

۱. در یک مجموعه تفریحی تمرین تیراندازی در نظر گرفته شده است. با هر بلیط می توان ۵ تیر شلیک کرد و به ازای هر تیر که به هدف بخورد، ۲ تیر دیگر جایزه داده می شود. علی با یک بلیط ۱۷ شلیک انجام داده است. او چند بار به هدف زده است؟

- (الف) ۳ بار (ب) ۶ بار (ج) ۱۲ بار (د) ۱۵ بار
- (ه) نمی توان به صورت یکتا تعیین کرد

۲. یک دانش آموز در چند امتحان هوش صد نمره ای شرکت کرده است. پس از آخرین امتحان، دانش آموز با خودش حساب کرد که اگر در آخرین امتحان ۹۷ بگیرم، میانگین نمره های من ۹۰ و اگر ۷۳ بگیرم میانگین ۸۷ خواهد بود. او چند بار امتحان داده است؟

- (الف) ۴ بار (ب) ۵ بار (ج) ۶ بار (د) ۷ بار
- (ه) ۸ بار

۳. یک دنباله از عددها به این صورت ساخته می شود: عدد اول این دنباله برابر با ۱ و پس از آن هر عدد برابر با مجموع عددهای قبل از خودش به اضافه یک است. n امین عنصر این دنباله برابر با چند است؟

- (الف) n (ب) $2n - 1$ (ج) $2^n - 1$ (د) 2^n
- (ه) 2^{n-1}

۴. مجموعه $A = \{1, 2, \dots, 100\}$ مفروض است.

a: به چند طریق می توان دو عدد صحیح از مجموعه A انتخاب کرد که مجموع آنها عددی زوج باشد؟

b: به چند طریق می توان دو عدد صحیح از مجموعه A انتخاب کرد که مجموع آنها عددی فرد باشد؟

(الف) a: ۲۵۰۰, b: ۲۵۰۰ (ب) a: ۲۵۰۰, b: ۲۴۵۰ (ج) a: ۲۴۵۰, b: ۲۴۵۰

(د) a: ۲۴۵۰, b: ۲۵۰۰ (ه) هیچ کدام

۵. به چند طریق می توان جدول نیمه پر روبه رو را با عددهای ۱ تا ۴

طوری پر کرد که در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری نداشته باشیم؟

۱	۲		
	۱	۲	
		۱	

(ج) ۲

(ب) ۱

(الف) ۰

(ه) ۴!

(د) ۳

۶. از میان عددهای زیر حداکثر چند عدد را می توان انتخاب کرد به صورتی که میانگین عددهای انتخاب شده

بزرگ تر یا مساوی ۱۵ باشد؟

۲۱, ۱۴, ۱۳, ۱۷, ۱۵, ۱۶, ۲۳, ۱۲, ۸, ۱۱, ۱۲, ۹, ۵, ۴, ۱۶, ۲, ۱۴, ۱۵, ۱۸, ۸, ۳, ۱۶

(ه) ۱۷

(د) ۱۶

(ج) ۱۵

(ب) ۱۴

(الف) ۱۳

۷. از مجموعه $\{1, 2, \dots, 6\}$ چند زیرمجموعه می توان انتخاب کرد که شامل دو عضو متوالی نباشد؟

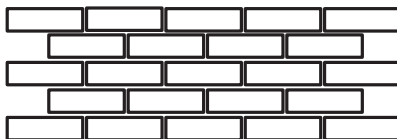
(ج) ۳۶

(ب) ۲۰

(الف) ۳۵

(ه) ۲۱

(د) ۱۵



۸. یک آجر در صورتی می افتد که هیچ آجر یا نیمه آجر در

زیر آن نباشد. در شکل روبه رو حداکثر چند آجر می توان

برداشت به صورتی که آجرهای بالایی پایدار بمانند؟ (بدیهی

است حق برداشتن آجرهای بالایی را نداریم.)

(ج) ۹

(ب) ۸

(الف) ۷

(ه) ۱۲

(د) ۱۰

۹. یک کشاورز پنج نوع محصول می‌کارد: لوبیا، ذرت، کلم، کدو و نخود. او در هر سال دقیقاً سه محصول براساس قوانین زیر می‌کارد:

- اگر ذرت بکارد حتماً لوبیا هم می‌کارد.
 - در هیچ دو سال متوالی‌ای کلم کشت نمی‌کند.
 - در هر سال بیش از یکی از محصولات سال قبل را دوباره کشت نمی‌کند.
- اگر او در سال اول لوبیا، ذرت و کلم بکارد، در سال سوم کدام یک از ترکیبات زیر را باید بکارد؟
- | | | |
|-----------------------|---------------------|---------------------|
| الف) نخود، ذرت، لوبیا | ب) نخود، کلم، لوبیا | ج) کدو، نخود، لوبیا |
| د) کدو، نخود، کلم | ه) کلم، ذرت، لوبیا | |

۱۰. ۱۰ نفر با شماره‌های ۱ تا ۱۰ برای پر کردن سطل خود در مقابل یک شیر آب صف کشیده‌اند. به محض این که سطل فردی که در جلوی شیر آب است پر می‌شود، او به کنار می‌رود و نفر بعدی در صف جای او را می‌گیرد. فرض کنید سطل نفر ۱ام به اندازه‌ای است که پر کردن آن ۱ دقیقه طول می‌کشد. مدت زمانی که نفر ۱ام در صف و جلوی شیر آب معطل می‌شود تا سطل خود را پر کند را «زمان معطلی» نفر ۱ام می‌نامیم. کدام یک از گزینه‌های زیر در باره مجموع زمان معطلی ۱۰ نفر درست است؟

- الف) افراد می‌توانند به ترتیبی در صف بایستند که مجموع زمان‌های معطلی کمتر از ۳/۵ ساعت باشد
- ب) افراد می‌توانند به ترتیبی در صف بایستند که مجموع زمان‌های معطلی بیشتر از ۷ ساعت باشد
- ج) اگر افراد به ترتیب شماره‌هایشان (نفر ۱ اول) در صف بایستند مجموع زمان‌های معطلی کمینه (حداقل) است
- د) اگر افراد به ترتیب عکس شماره‌هایشان (نفر ۱ آخر) در صف بایستند مجموع زمان‌های معطلی کمینه است
- ه) به هر ترتیبی که افراد در صف بایستند مجموع زمان‌های معطلی تغییر نخواهد کرد

۱۱. در سرزمین عجایب چهار نوع آدم وجود دارد: درست‌کارِ باهوش، درست‌کارِ احمق، تبه‌کارِ باهوش و تبه‌کارِ احمق. آدم‌های درست‌کارِ باهوش و آدم‌های تبه‌کارِ احمق همواره راست می‌گویند. آدم‌های درست‌کارِ احمق و آدم‌های تبه‌کارِ باهوش همواره دروغ می‌گویند. به یک نفر از این سرزمین بر می‌خوریم. او به ما جمله‌ای می‌گوید که

با استفاده از این جمله می‌توانیم تعیین کنیم که او دقیقاً از چه نوعی است. این جمله چه می‌تواند باشد؟

- (الف) من احمق هستم (ب) من درست‌کارِ احمق هستم (ج) من درست‌کارِ باهوش هستم
(د) من تبه‌کار هستم (ه) ب و د

۱۲. در سرزمین عجایب، که در مسأله قبل معرفی شد، به دو نفر به نام‌های A و B برخوردیم. A به من چیزی گفت که نفهمیدم. B گفت: «A می‌گوید که یک درست‌کارِ احمق یا یک تبه‌کارِ باهوش است.» A با اعتراض گفت: «من این را نگفتم!» B گفت: «A تبه‌کار است.» و A در جواب گفت: «B احمق است!» با توجه به این مکالمات، A و B هر کدام از چه نوعی هستند؟

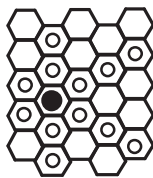
(الف) با این اطلاعات نمی‌توان به‌طور دقیق نوع A و B را مشخص کرد

(ب) A یک تبه‌کارِ احمق و B یک درست‌کارِ احمق است

(ج) A یک درست‌کارِ باهوش و B یک تبه‌کارِ باهوش است

(د) A یک تبه‌کارِ احمق و B یک درست‌کارِ احمق است

(ه) A یک درست‌کارِ باهوش و B یک درست‌کارِ احمق است



۱۳. شکل مقابل را در نظر بگیرید. مهره سیاه یک وزیر در این صفحه است و

خانه‌هایی که تهدید می‌کند با دایره‌های توخالی مشخص شده‌اند. حداقل چند وزیر

لازم است تا بتوان آنها را طوری در صفحه چید که همه خانه‌ها را تهدید کنند؟

(ه) ۶

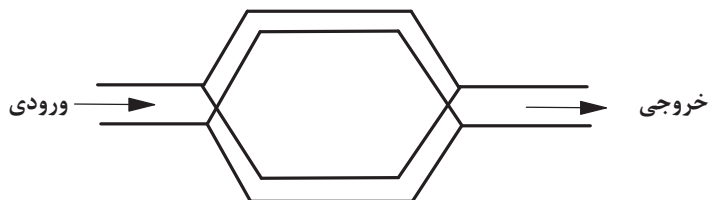
(د) ۵

(ج) ۴

(ب) ۳

(الف) ۲

۱۴. در یک ایستگاه قطار، ریل‌ها به شکل زیر هستند:



همه ریل‌ها از سمت چپ به راست یک طرفه هستند. ۵ قطار با شماره‌های ۱ تا ۵ به ترتیب ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ از ورودی وارد این ریل‌ها می‌شوند. قطارها می‌توانند هر یک از دو راه رسیدن به خروجی را انتخاب کنند و همچنین می‌توانند

مدتی روی ریل منتظر بمانند، ولی نمی توانند از روی هم عبور کنند. همچنین هر دو ریل به اندازه کافی طولانی هستند و می توانند هر تعداد لازم قطار را در خود جا دهند. کدام ترتیب برای خروج این قطارها ممکن نیست؟

- (الف) ۴, ۱, ۲, ۵, ۳ (ب) ۴, ۲, ۱, ۳, ۵ (ج) ۲, ۳, ۴, ۵, ۱ (د) ۲, ۳, ۵, ۱, ۴ (ه) ۳, ۴, ۱, ۵, ۲

۱۵. n دایره در صفحه رسم شده است. با رسم دایره بعدی تعداد نواحی ایجاد شده در صفحه توسط این دایره ها حداکثر چه قدر می تواند افزایش می یابد؟

- (الف) n (ب) $2n - 1$ (ج) $n + 1$ (د) $2n$ (ه) $2n + 1$

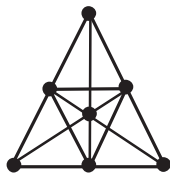
۱۶. یک دانش آموز به عنوان جریمه باید عددهای بین ۱۰۰۰ و ۱۹۹۹ را دوبه دو با هم جمع کند. (یعنی برای هر x که $1999 \leq x \leq 1000$ و هر y که $1999 \leq y \leq 1000$ باید یک بار $x + y$ را محاسبه کند.) این دانش آموز هنگام جمع ده بر یک را منظور نمی کند. در چه تعداد از جمع ها جواب درست به دست می آورد.

- (الف) 55^3 (ب) 45^3 (ج) 36^3 (د) $36^3 - \begin{pmatrix} 1000 \\ 2 \end{pmatrix}$ (ه) $55^3 - \begin{pmatrix} 1000 \\ 2 \end{pmatrix}$

۱۷. در یک روش عددنویسی، ۱۹ رقم وجود دارد. ارقام ۰ تا ۹ و ۱ تا ۹ به ترتیب دارای ارزش ۱- تا ۹- است. مثلاً ۱۳۷۶ را می توان به صورت $14\overline{24}$ و نیز $18\overline{624}$ نمایش داد. (چون $1 \times 1000 + 4 \times 100 - 2 \times 10 - 4 \times 1 = 1376$ و $1 \times 10000 - 8 \times 1000 - 6 \times 100 - 2 \times 10 - 4 \times 1 = 1376$)

تعداد همه نمایش های عدد ۲۵، با حداکثر ۳ رقم چندتاست؟

- (الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۵



۱۸. در شکل مقابل چند مثلث وجود دارد که هر سه رأس آن نقاط پررنگ است؟

- (الف) ۱۱ (ب) ۱۷ (ج) ۲۰ (د) ۲۹ (ه) ۳۵

۱۹. از هر یک از شهرهای یک استان، به جز یکی که فقط یک جاده دارد، دقیقاً سه جاده خارج شده است. تعداد شهرهای این استان کدام یک از عددهای زیر می تواند باشد؟

- الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶
د) ۹ (ه) ۱۳۷۷

۲۰. تعداد ۱۱ مکعب «متمايز» مطابق شکل زیر روی یک میز قرار گرفته اند. یک روبات (آدم آهنی) می تواند در هر

«حرکت» یک مکعب که رویش چیزی قرار ندارد را به روی میز یا روی یک مکعب دیگر منتقل کند. اگر هدف تغییر آرایش مکعب ها به یک صورت جدید (دلخواه) باشد، با حداقل چند «حرکت» می توانیم مطمئن باشیم که روبات می تواند مکعب ها را به هر آرایش جدید (که دلخواه

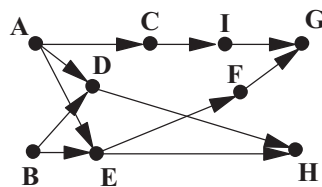
است و مشخص) در آورد؟

- الف) ۲۴ (ب) ۱۷ (ج) ۱۴
د) ۱۱ (ه) ۲۲

۲۱. دانش آموزی برای فارغ التحصیل شدن باید ۹ درس را بگذراند. برخی از این درس ها پیش نیاز هم هستند که این روابط پیش نیازی به صورت « $A \bullet \longrightarrow \bullet B$ » نمایش داده می شوند؛ به این معنی که A پیش نیاز B است و باید قبل از آن گذرانده شود. شکل زیر روابط پیش نیازی بین ۹ درس را نشان می دهد.

اگر این دانش آموز در هر ترم حداکثر سه درس را بگذراند به چند صورت می تواند در طی ۴ ترم فارغ التحصیل

شود؟



- الف) ۱
ب) ۲
ج) ۳
د) ۴
ه) ۵

۲۲. A یک ماتریس ۱۰×۵ است که مقدار درایه های سطر اول آن برابر با یک و مقدار بقیه درایه های ستون اول و ستون پنجم آن برابر با صفر است و مقدار بقیه درایه های آن از رابطه زیر به دست می آید:

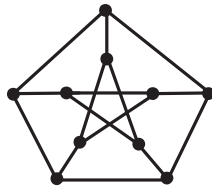
$$A_{ij} = \frac{1}{4} (A_{i-1, j-1} + A_{i-1, j+1}) \quad , \quad 2 \leq i \leq 10 \quad , \quad 2 \leq j \leq 4$$

مقدار درایه های سطر نهم این ماتریس چه خواهد بود؟

$$\begin{aligned} & \text{الف) } \frac{1}{16} \frac{1}{16} \frac{1}{16} \quad \text{ب) } \frac{1}{16} \frac{1}{8} \frac{1}{16} \quad \text{ج) } \frac{1}{16} \frac{1}{8} \frac{1}{4} \\ & \text{د) } \frac{1}{39} \frac{1}{39} \frac{1}{39} \quad \text{ه) } \frac{1}{39} \frac{1}{38} \frac{1}{39} \end{aligned}$$

۲۳. رشته $babababba$ را در نظر بگیرید. در هر مرحله می توانیم دو حرف متوالی از این رشته را با هم جابه جا کنیم. حداقل تعداد مراحل لازم برای این که بتوانیم به رشته ای برسیم که در آن همه a ها در کنار هم و همه b ها نیز در کنار هم قرار گرفته باشند، چند مرحله است؟

الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۰ د) ۱۱ ه) ۱۲

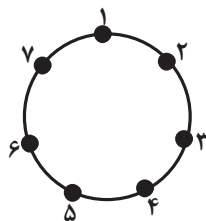


۲۴. برای رسم شکل مقابل حداقل چند بار باید در حین رسم،

قلم را از روی کاغذ برداشت؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

۲۵. فرض کنید که شهرهای ۱ تا ۷ دور دایره ای به وسیله ۷ جاده مانند شکل مقابل به هم وصل شده اند. حداکثر چند



جاده دیگر می توان بین این شهرها کشید به طوری که هیچ دو جاده ای همدیگر را قطع نکنند و بین هر دو شهر حداکثر یک جاده وجود داشته باشد. (جاده ها را می توان هم در داخل دایره و هم در خارج آن کشید).

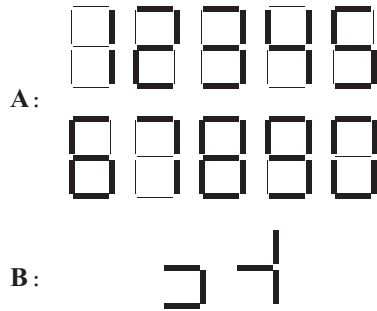
الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰

۲۶. می خواهیم در عبارت زیر سه تا از ۶ علامت ضرب را به جمع تبدیل کنیم، به طوری که مقدار A مینیمم شود.

$$A = ۵ \times ۶ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۷ \times ۸$$

الف) ۶۰ ب) ۸۴ ج) ۷۹ د) ۶۹ ه) ۶۴

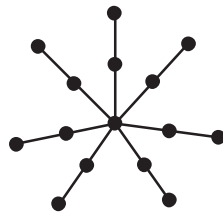
۲۷. یک دستگاه نمایش اعداد از ۷ پاره خط تشکیل شده که با روشن کردن چراغ های مشخص شده در شکل «A»



ارقام 0 تا 9 را نشان می دهد. برای نمایش اعداد 00 تا 59 از یک نمایش دهنده دو رقمی استفاده می کنیم. متأسفانه چراغ بعضی از پاره خط ها سوخته است. حال اگر دستگاه شکل «B» را نمایش دهد عدد واقعی آن چند حالت متفاوت دارد؟

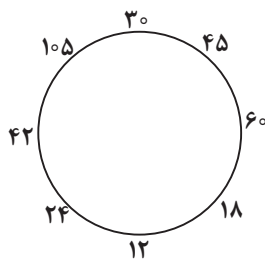
- (الف) ۸ (ب) ۹ (ج) ۱۲ (د) ۶ (ه) ۲۰

۲۸. شکل مقابل نقشه خیابان های یک شهر است. نقاط سیاه مراکز پلیس و خطوط خیابان های شهر هستند. به علت ازدیاد مراکز پلیس وزارت کشور باید مجموعه ای از مراکز پلیس شهر را غیرفعال کند به گونه ای که اولاً هیچ



خیابانی وجود نداشته باشد که هر دو مرکز پلیس دو سرش غیر فعال شده باشد، و ثانیاً اگر حتی یک مرکز دیگر به آن مجموعه اضافه شود آنگاه خیابانی وجود داشته باشد که مراکز پلیس هر دو سرش غیر فعال شده باشد. وزارت کشور به چند طریق می تواند این مجموعه را انتخاب کند؟

- (الف) ۱۲۹ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) ۱۲۸ (ه) ۶۴



(ج) ۲۴

۲۹. مطابق شکل به ترتیب اعداد ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۱۸، ۱۲، ۲۴، ۴۲ و ۱۰۵ دور دایره ای نوشته شده اند. در هر مرحله بین هر دو عدد روی دایره بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها را می نویسیم و سپس همه اعداد مرحله قبل را پاک می کنیم. اگر ۱۳۷۶ بار عمل فوق را انجام دهیم مجموع اعداد باقی مانده چند است؟

- (الف) ۳۳۶ (ب) ۱۶۸ (ج) ۲۴ (د) ۷۲ (ه) ۱۰۰

۳۰. میوه فروشی می خواهد مقداری میوه برای فروش بخرد. دو نوع میوه موجود است: پرتقال و سیب. قیمت خرید هر کیلو پرتقال ۲۰۰ تومان و قیمت فروش آن ۲۳۰ تومان است. قیمت خرید هر کیلو سیب هم ۱۰۰ تومان و قیمت فروش آن ۱۲۰ تومان است. میوه فروشی می خواهد حداکثر به اندازه ۱۶۰۰۰ تومان خرید کند. همچنین به خاطر مشکل حمل و نقل، او حداکثر می تواند مجموعاً به اندازه ۱۰۰ کیلو جنس بخرد. حداکثر مقدار سودی که میوه فروشی می تواند از فروش جنس هایی که می خرد ببرد چند تومان است؟

- (الف) ۲۶۰۰ (ب) ۲۵۰۰ (ج) ۳۰۰۰
(د) ۲۴۰۰ (ه) ۲۳۳۳

۳۱. پنج تیم دوبه دو فوتبال بازی می کنند. در هر بازی برنده ۳ امتیاز و بازنده صفر امتیاز و در صورت تساوی، هر تیم یک امتیاز به دست می آورد. در پایان، فدراسیون امتیاز تیم ها را اعلام می کند. از دنباله های زیر کدام می توانند دنباله امتیازات تیم ها باشند؟

- (I) ۱, ۱, ۶, ۹, ۱۲ (II) ۳, ۳, ۴, ۷, ۱۰ (III) ۲, ۳, ۶, ۸, ۱۰
(الف) فقط I (ب) فقط I و II (ج) فقط I و III
(د) فقط II (ه) هر سه

۳۲. وسط های اضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع را به هم وصل می کنیم تا مثلث متساوی الاضلاع دیگری در وسط آن ایجاد شود. در وسط این مثلث نیز به همان ترتیب مثلث متساوی الاضلاع دیگری ایجاد می کنیم و این کار را n بار انجام می دهیم. می دانیم که در شکل حاصل مجموعاً ۴۵ مثلث می توان شمرد. n برابر است با:

- (الف) ۹ (ب) ۱۰ (ج) ۱۱ (د) ۱۲ (ه) ۲۲

۳۳. تمام عددهای سه رقمی که رقم صفر ندارند را با هم جمع می زنیم. حاصل جمع در کدام محدوده قرار دارد؟
(الف) ۳۲۰۰۰۱ تا ۳۳۰۰۰۰ (ب) ۳۸۰۰۰۱ تا ۳۹۰۰۰۰ (ج) ۴۰۰۰۰۱ تا ۴۱۰۰۰۰
(د) ۴۱۰۰۰۱ تا ۴۲۰۰۰۰ (ه) ۴۳۰۰۰۱ تا ۴۴۰۰۰۰

۳۴. برای ثبت نام در یک مدرسه متقاضی باید سه کار انجام دهد: ملاقات با مدیر، دریافت فرم از دفتر، و دریافت توصیه نامه از معلم A یا B. ترتیب انجام کارها باید به گونه ای باشد که قبل از گرفتن فرم، مدیر را ملاقات کرده باشد.

مدیر در روزهای شنبه صبح و سه شنبه بعد از ظهر و چهارشنبه بعد از ظهر حضور دارد. دفتر روزهای سه شنبه صبح چهارشنبه صبح و شنبه بعد از ظهر و پنجشنبه بعد از ظهر باز است. معلم A روزهای دوشنبه صبح و چهارشنبه صبح و معلم B روزهای شنبه صبح و دوشنبه بعد از ظهر حضور دارند.

علی ثبت نام خود را در یک روز کامل کرده است. از جملات زیر کدامها درست اند؟

(I) توصیه نامه را از معلم A گرفته است.

(II) توصیه نامه را از معلم B گرفته است.

(III) کلیه مراحل ثبت نام را در صبح انجام داده است.

(الف) فقط I (ب) فقط II (ج) فقط III (د) فقط I و III (ه) فقط II و III

۳۵. در همان مسأله قبل، حامد پس از ملاقات با مدیر، می خواهد در یک روز سایر کارها را انجام دهد. این کار در کدام یک از روزهای زیر امکان پذیر است؟

(الف) شنبه (ب) دوشنبه و چهارشنبه (ج) شنبه و دوشنبه

(د) شنبه و چهارشنبه (ه) شنبه و دوشنبه و چهارشنبه

R			R	۲
L	S	L	R	L
	L	S	L	L
۱	R		R	

۳۶. در جدول روبه رو، یک نفر در ابتدا در خانه ۱ است. حرکت کردن در این

جدول براساس قواعد زیر است: (منظور از یک حرکت، رفتن از یک خانه به

خانه مجاورش است).

● اگر به خانه ای که در آن R نوشته شده است وارد شود، باید در حرکت بعد به سمت راست بپیچد. (سمت

راست و چپ نسبت به مسیر خودش محاسبه می شود).

● اگر به خانه ای که در آن L نوشته شده است وارد شود، باید در حرکت بعد به سمت چپ بپیچد.

● اگر به خانه ای که در آن S نوشته شده است وارد شود، باید در حرکت بعد مستقیم به حرکت خود ادامه دهد.

● اگر به خانه ای خالی وارد شود، در حرکت بعد می تواند به هر یک از چار خانه مجاورش برود.

توجه کنید که این فرد هیچگاه نباید از جدول خارج شود. حداقل تعداد حرکات لازم برای رسیدن به خانه ۲

چند تا است؟

(ج) ۱۱

(ب) ۹

(الف) ۷

(ه) ممکن نیست

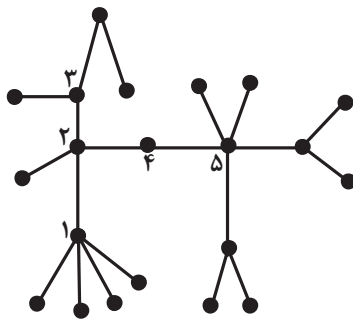
(د) ۱۳

۳۷. برای نمایش یک عدد فقط مجاز به استفاده از رقم ۱، عمل جمع و توان هستیم. استفاده از پرانتز فقط برای دسته‌بندی مجاز است. مثلاً $1 + (1 + 1)^{(1+1)}$ یک نمایش عدد ۵ است. برای نمایش عدد ۳۵ حداقل چند ۱ لازم است؟

- الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱
د) ۱۲ ه) ۱۳

۳۸. قطعه شکلاتی به طول m و به عرض n به صورتی شیار داده شده که به واحدهای 1×1 تقسیم شده است. در صورتی که یک قطعه شکلات را از روی یکی از خطوط عمودی یا افقی به دو قطعه تقسیم کنیم می‌گوییم که آن را «شکسته‌ایم». اگر برای تبدیل قطعه اولیه به قطعات 1×1 ، حداکثر تعداد شکستن لازم را با B و حداقل آن را با b نمایش دهیم کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- الف) $B = mn$, $b = mn - 1$ ب) $b = B = mn - 1$
ج) $B = mn - 1$, $b = m + n - 1$ د) $B = mn$, $b = m + n - 1$
ه) $B = (m - 1)(n - 1)$, $b = m + n - 2$



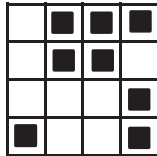
۳۹. نقشه چند روستا و راه‌های بین آنها به صورت روبه‌رو داده شده است. قرار است چاه آبی در یکی از این روستاها برای استفاده مشترک همه آنها ساخته شود. با توجه به این که طول همه راه‌ها مساوی است، چاه در کدام روستا ساخته شود تا مجموع فواصل طی شده از همه روستاها به چاه کمترین باشد؟

- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳
د) ۴ ه) ۵

۴۰. یک مهره شاه در صفحه شطرنجی تمام ۸ خانه اطراف خود را تهدید می‌کند. به چند طریق می‌توان ۳ مهره غیر متمایز شاه را در یک صفحه 3×3 قرار داد به قسمی که هیچ کدام همدیگر را تهدید نکنند؟

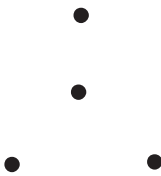
- الف) ۵ ب) ۷ ج) ۹
د) ۸ ه) ۱۰

سؤال های بله - خیر (۲۰ سؤال)

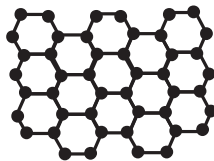


۴۱. خانه های جدول مقابل را می خواهیم با عددهای ۱ تا ۳ چنان پر کنیم که در هر سطر (و همچنین در هر ستون) اگر مثلاً k تا خانه خالی وجود دارد، عددهای ۱ تا k (البته نه لزوماً به همین ترتیب) قرار بگیرند. آیا این عمل امکان پذیر است؟

۴۲. چهار نقطه زیر را در نظر بگیرید. دو نفر به نام های اکبر و باقر به ترتیب زیر با هم بازی می کنند. ابتدا اکبر شروع به بازی می کند و پس از آن یک در میان به نوبت بازی می کنند. هر یک از دو بازی کن در نوبت خودش بین دو نقطه دلخواه که تا حالا به هم وصل نشده اند یک پاره خط راست می کشد. اولین کسی که باعث ایجاد یک مثلث در شکل بشود بازنده است. آیا اکبر می تواند چنان حرکت کند که همیشه بازی را برود؟



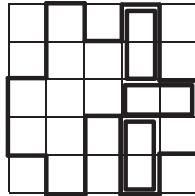
۴۳. ۶ سکه در یک ردیف قرار داده شده اند. وضعیت پشت و رو بودن هر یک از سکه ها دلخواه است. در هر مرحله می توانیم ۵ تا از این سکه ها را به دلخواه انتخاب کرده، هر پنج تا را برگردانیم. آیا با تکرار این عمل می توانیم هر ۶ سکه را به طرف پشت برگردانیم؟



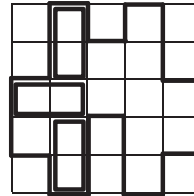
۴۴. در شبکه روبه رو آیا می توانیم از یک رأس (دایره های سیاه) شروع کنیم و مسیری را طی کنیم که در آن از هر یک از رأس های دیگر دقیقاً یک بار بگذریم و دوباره به همان رأس اولیه برسیم؟

۴۵. در شکل «الف» می بینید که سه صابون در دیوارها محصور شده اند. می خواهیم وضعیت را به حالت «ب» تبدیل کنیم. برای این کار حق داریم به صابون ها در جهت های افقی و یا عمودی ضربه بزنیم. صابون ها در جهت ضربه حرکت می کنند تا به یک مانع (دیوار یا صابون دیگر) برسند و سپس می ایستند. دقت کنید که

صابون‌ها حق دوران ندارند. آیا می‌توان این کار را انجام داد؟



ب



الف

۴۶. ۱۳۷۶ سنگریزه و دو بازی‌کن داریم. هر بازی‌کن در نوبت خود می‌تواند ۱ یا ۲ یا ۴ سنگریزه برای خود بردارد.

کسی که آخرین سنگریزه را بردارد برنده است. آیا فرد دوم می‌تواند طوری بازی کند که حتماً برنده شود؟

۴۷. ۵ نفر با وزن‌های ۸۰، ۸۰، ۴۰، ۳۰ و ۲۰ کیلوگرم در یک طرف رودخانه ایستاده‌اند و قایقی دارند که ظرفیت آن

۸۰ کیلوگرم است. آیا آنها می‌توانند با استفاده از این قایق به‌سوی دیگر رودخانه بروند؟ (در هر بار رد شدن قایق از

رودخانه باید حداقل یک نفر برای هدایت آن در قایق باشد).

۴۸. در کشوری تعدادی شهر وجود دارد و بعضی از شهرها با جاده به هم متصل شده‌اند. می‌خواهیم به هر یک از این

شهرها یک مجموعه از عددهای صحیح را نسبت دهیم، به‌طوری که مجموعه‌های نسبت داده شده به هر دو شهری

که به هم با یک جاده به‌طور مستقیم متصل‌اند با هم اشتراک ناتهی داشته باشند و اشتراک مجموعه‌های نسبت

داده شده به هر دو شهری که با جاده‌ای به‌صورت مستقیم به هم متصل نیستند، تهی باشد. آیا این کار همواره

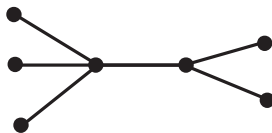
ممکن است؟

۴۹. یک ردیف از عددهای ۱ تا ۱۰ به ما داده شده است. دو عمل زیر را می‌توانیم بر روی هر ردیف انجام دهیم:

● عنصر اول و دوم ردیف را جابه‌جا کنیم.

● عنصر اول ردیف را برداشته، آن را در آخر ردیف قرار دهیم.

آیا با استفاده از دو عمل فوق، می‌توانیم ردیف داده شده را مرتب کنیم؟



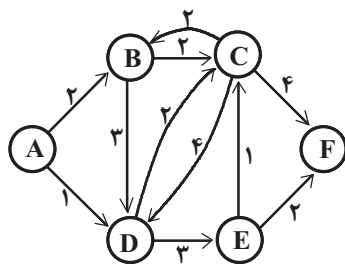
۵۰. آیا می‌توان به رئوس شکل روبه‌رو اعداد از ۰ تا ۶ را طوری نسبت

داد که به‌ازای هر یک از اعداد ۱ تا ۶، پاره‌خطی وجود داشته باشد که

قدر مطلق تفاضل دو سر آن مساوی عدد موردنظر باشد؟

۵۱. رشته اعداد طبیعی را از ۱ شروع کرده و با هم جمع می‌زنیم. آیا ممکن است پس از جمع کردن چند عدد، به مجموعی سه رقمی با ارقام یکسان برسیم؟

۵۲. در یک مدرسه میانگین نمرات دانش‌آموزان سال سوم بیشتر از میانگین نمرات دانش‌آموزان سال چهارم است. در مدرسه دیگری هم میانگین نمرات دانش‌آموزان سال سوم بیشتر از میانگین نمرات دانش‌آموزان سال چهارم است. میانگین دانش‌آموزان سال سوم و چهارم را در مجموع هر دو مدرسه با هم حساب کرده‌ایم. در این جا میانگین نمرات دانش‌آموزان سال چهارم از سوم بیشتر شده است. آیا حتماً در محاسبات اشتباه کرده‌ایم؟



۵۳. شهرهای A و B و C و D و E و F در شکل توسط خیابان‌های یک‌طرفه‌ای که هر یک را با یک پیکان نشان داده‌ایم به هم وصل شده‌اند. مقدار مصرف بنزین برای عبور از یک خیابان عددی است که روی آن خیابان نوشته شده است. آیا می‌توان سفری را از رأس A شروع کرد و با عبور از خیابان‌ها و مصرف دقیقاً ۲۱ واحد بنزین به شهر F رسید؟

۰	۳	۲
۴	۵	۲
۴	۷	۳

۵۴. جدول 3×3 ی روبه‌رو با عددهای صحیح پر شده است. در هر مرحله می‌توانیم به دو خانه مجاور در این جدول یک عدد صحیح اضافه نموده و یا از آنها یک عدد صحیح را کم کنیم. آیا با این روش می‌توان تمام خانه‌های این جدول را صفر نمود؟

۵۵. در یک میهمانی ۷ نفر حضور دارند. می‌دانیم که هر نفر حداقل با سه نفر دیگر آشناست. آیا همواره می‌توان این ۷ نفر را به گونه‌ای دور یک میز نشانند که هر دو نفری که در کنار هم نشسته‌اند با هم آشنا باشند؟

۵۶. دو گروه از افراد که هر گروه دارای سه نفر است و برای هر فرد یک مجموعه ۲ عضوی از عددهای طبیعی اختصاص داده شده است را در نظر می‌گیریم. هر فرد می‌تواند یکی از این دو عدد اختصاص یافته به خود را انتخاب کند. می‌خواهیم انتخاب‌ها چنان باشد که هیچ دو نفری از دو گروه متفاوت عددهای یکسانی را انتخاب نکرده باشند. آیا این کار همواره ممکن است؟

۵۷. ۲۰ تیم به صورت دوره ای با هم بازی کرده اند. یعنی هر دو تیمی با هم دقیقاً یک بازی انجام داده اند. یک ترتیب دلخواه از این تیم ها را در نظر می گیریم. اگر در این ترتیب دو تیم متوالی X و Y (به ترتیب) باشند که X از Y باخته باشد، جای X و Y را عوض می کنیم. آیا این عمل می تواند تا بی نهایت ادامه داشته باشد؟

۵۸. یک ماشین در اختیار داریم که یک عدد را به عنوان ورودی دریافت می کند و پس از دریافت این عدد، یک عدد را به عنوان خروجی می دهد. می دانیم که گزاره های زیر برقرارند. منظور از $\overline{MN}$ در این جا این است که دو عدد M و N را پشت سر هم بنویسیم. برای مثال اگر $M = ۲۷۳$ و $N = ۱۲۳۴$ باشد، $\overline{MN} = ۲۷۳۱۲۳۴$ است.

- اگر ورودی، $\overline{2N}$ باشد، خروجی N خواهد بود.

- اگر خروجی ماشین به ازای ورودی M ، عدد N باشد، خروجی ماشین به ازای ورودی $\overline{3M}$ ، عدد $\overline{N2N}$ است.

آیا عددی وجود دارد که اگر آن را به عنوان ورودی به ماشین بدهیم، همان عدد را به عنوان خروجی بگیریم؟

۵۹. با توجه به تعاریف مسأله قبل، آیا عددی مانند N وجود دارد که اگر آن را به عنوان ورودی به ماشین بدهیم، عدد $\overline{vN}$ را به عنوان خروجی دریافت کنیم؟

۶۰. مداری داریم که سه عدد A و B و C را به عنوان ورودی دریافت کرده، مقدار $A \times B + C$ را به عنوان خروجی می دهد. به تعداد کافی از این مدار در اختیار داریم. آیا می توانیم مقدار

$$a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

را به کمک ۷ عدد از این مدارها محاسبه کنیم؟

پاسخ تشریحی

هشتمین المپیاد کامپیوتر

۱. علی ۱۲ تیر بیش از سهمیه خود شلیک کرده است و چون با به هدف زدن یک تیر دو تیر جایزه می گیرد، بنابراین علی ۶ بار به هدف زده است.

۲. تعداد امتحان ها را n و مجموع نمرات غیر از نمره امتحان آخر را x در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \frac{x+97}{n} = 90 \\ \frac{x+73}{n} = 87 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 90n - x = 97 \\ 87n - x = 73 \end{cases} \Rightarrow 3n = 24 \Rightarrow n = 8$$

۳. دنباله خواسته شده به صورت $\dots, 16, 8, 4, 2, 1$ می باشد. یادآوری می شود که:

$$x^0 + x^1 + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

۴. a دو عدد منتخب یا هر دو زوج هستند و یا هر دو فرد، بنابراین:

$$a = \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \end{pmatrix} = 2450$$

b یکی از اعداد منتخب زوج و دیگری فرد است، بنابراین:

$$b = \begin{pmatrix} 50 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 1 \end{pmatrix} = 2500$$

۵. اگر خانه * از جدول شماره ۱ را با ۳ پر کنیم آنگاه جدول به شکل جدول شماره ۲ و اگر آن خانه را با ۴ پر کنیم آنگاه آن جدول به شکل جدول شماره ۳ خواهد شد.

۱	۲		
*	۱	۲	
		۱	

شماره ۱

۱	۲	۴	۳
۳	۱	۲	۴
۴	۳	۱	۲
۲	۴	۳	۱

شماره ۲

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

شماره ۳

۶. تعداد اعداد بزرگتر یا مساوی ۱۵ در اعداد داده شده ۹ عدد می باشد که همه آنها را انتخاب می کنیم. مجموع اعداد منتخب از میانگین ۱۵ به اندازه $۱ + ۳ + ۱ + ۰ + ۱ + ۸ + ۱ + ۰ + ۲ + ۶$ یعنی ۲۲ واحد بیشتر دارد پس از اعداد باقی مانده نیز تعدادی (از بزرگ به کوچک) چنان انتخاب می کنیم که مجموع کمبودهای آنها از ۱۵ کمتر یا مساوی ۲۲ باشد. به این منظور اعداد زیر را نیز انتخاب می کنیم:

۱۴، ۱۴، ۱۳، ۱۲، ۱۲، ۱۱، ۹

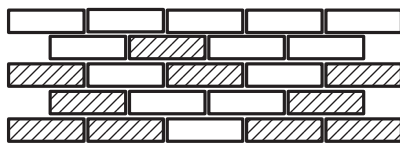
مجموع کمبودهای اعداد انتخاب شده از ۱۵ برابر ۲۰ می باشد که اگر عدد بعدی یعنی ۸ نیز انتخاب شود آنگاه مجموع این کمبودها برابر ۲۷ شده و از ۲۲ بزرگتر می شود، بنابراین علاوه بر ۹ عدد ذکر شده، ۷ عدد دیگر نیز می توانیم انتخاب کنیم.

۷. راه حل اول: زیرمجموعه های 0 و 1 عضوی همگی مطلوب هستند. به غیر از زیرمجموعه های $\{1, 2\}$ ، $\{2, 3\}$ ، $\{3, 4\}$ ، $\{4, 5\}$ و $\{5, 6\}$ همه زیرمجموعه های دو عضوی مطلوب هستند. از بین زیرمجموعه های سه عضوی فقط زیرمجموعه های $\{1, 2, 5\}$ ، $\{1, 3, 6\}$ ، $\{1, 4, 6\}$ و $\{2, 4, 6\}$ مطلوب هستند. بنابراین تعداد زیرمجموعه های مطلوب برابر $4 + [{}^6_2 - 5] + [{}^6_1] + [{}^6_0]$ یعنی ۲۱ می باشد.

راه حل دوم: مسأله را در حالت کلی برای مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ حل می کنیم. تعداد زیرمجموعه های مطلوب را در این حالت a_n در نظر می گیریم و این زیرمجموعه ها را به دو دسته تقسیم می کنیم:

(I) آنهایی که n را دارند. هیچ یک از این زیرمجموعه ها $n - 1$ را ندارند و مابقی اعضای آنها اعضای

مطلوبی از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, n-2\}$ می باشد که تعداد این زیرمجموعه ها برابر a_{n-2} می باشد.
 (II) آنهایی که n را ندارند. در این حالت هر یک از زیرمجموعه ها، زیرمجموعه های مطلوبی از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ می باشد که تعداد این زیرمجموعه برابر a_{n-1} می باشد.
 بنابراین رابطه $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ برقرار است که چون $a_1 = 2$ و $a_2 = 3$ مقادیر a_3, a_4, a_5, a_6 به ترتیب برابر ۵، ۸، ۱۳ و ۲۱ به دست می آیند.



۸. آجرهای برداشته شده در شکل مقابل هاشور

خورده است.

هر آجر حداکثر دو آجر از ردیف بالایی خود را محافظت می کند، چون از ردیف بالا حق حذف هیچ

آجری را نداریم پس در ردیف دوم از بالا حداقل سه آجر برای محافظت از پنج آجر بالایی باقی می ماند.
 برای محافظت از سه آجر، در ردیف سوم از بالا حداقل دو آجر باقی می ماند و چون این دو آجر پیش هم نیستند در ردیف پایینی آن یعنی ردیف چهارم حداقل دو آجر باید باقی بماند. در ردیف آخر نیز باقی ماندن حداقل یک آجر الزامی است. پس تعداد کل آجرهای باقی مانده حداقل $1 + 2 + 2 + 3 + 5$ یعنی ۱۳ بوده و در نتیجه تعداد آجرهای حذف شده حداکثر ۱۰ می تواند باشد.

۹. چون در هر سال حداکثر یکی از محصولات سال قبل کشت می شود، بنابراین در هر سال هر دو محصول کاشته نشده در سال قبل کشت می شود. بنابراین محصولات کاشته شده در سال دوم کدو، نخود و لوبیا و محصولات کاشته شده در سال سوم ذرت، کلم و لوبیا می باشد.

۱۰. اگر افراد به ترتیب شماره هایشان در صف قرار گیرند آنگاه مجموع زمان های معطلی برابر:

$$10 \times 1 + 9 \times 2 + 8 \times 3 + \dots + 1 \times 10$$

یعنی ۲۱۸ دقیقه و اگر به ترتیب عکس شماره هایشان در صف قرار گیرند آنگاه مجموع زمان های معطلی برابر $1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \dots + 10 \times 10$ یعنی ۳۸۵ دقیقه خواهد بود. حالت اول حداقل مجموع زمان های معطلی را دارد زیرا اگر نفر i ام بعد از نفر j ام ($i < j$) در صف قرار گیرند با جابه جایی آن دو نفر مجموع کل معطلی به اندازه $j - i$ دقیقه کاهش می یابد. به همین ترتیب ثابت می شود که حالت دوم نیز حداکثر مجموع زمان های معطلی را دارد.

۱۱. جمله «من احمق هستم» را هر دو نفر تبه کار باهوش و تبه کار احمق می توانند بگویند. جمله «من درست کار احمق هستم» را فقط تبه کار باهوش می تواند بگوید.

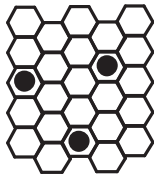
جمله «من دست کار باهوش هستم» را هر سه نفر درست کار باهوش، درست کار احمق و تبه کار باهوش می توانند بگویند.

و بالاخره جمله «من تبه کار هستم» را هر دو نفر درست کار احمق و تبه کار احمق می توانند بگویند.

۱۲. از دو مکالمه اول معلوم می شود که یکی از دو نفر A و B راستگو و دیگری دروغگو است. اگر B راستگو باشد پس گفته او صحت دارد یعنی A گفته است: «من یک درست کار احمق یا یک تبه کار باهوش هستم»، که اگر A دروغگو باشد این جمله را نمی تواند بیان کند.

بنابراین A راستگو و B دروغگو است. چون A راستگو است پس جمله او یعنی «B احمق است» صحت دارد، یعنی B احمق درست کار می باشد (به خاطر دروغگو بودنش). و چون B دروغگو است پس جمله او یعنی «A تبه کار است» نادرست بوده و A درست کار است. چون A راستگو است پس او درست کار باهوش می باشد.

۱۳. هر وزیر حداکثر دو خانه از خانه های غیر ستون خود را تهدید می کند، چون در هر ستون پنج



خانه وجود دارد، پس در صورت موجود بودن وزیر در ستون های ۱ و ۲ خانه ای از ستون k تهدید نشده باقی می ماند، بنابراین وجود حداقل ۳ وزیر الزامی است. با سه وزیر مطابق شکل مقابل می توان تمام خانه ها را تهدید کرد:

۱۴. در دوریل بالا و پایین دنباله ای نزولی وجود دارد، پس دنباله خروجی در درون خون دو دنباله نزولی دارد. دنباله الف را به دنباله های نزولی «۱، ۲، ۳» و «۴، ۵» دنباله ج را به دنباله های نزولی «۱» و «۲، ۳، ۴، ۵» دنباله د را به دنباله ای نزولی «۱، ۴» و «۲، ۳، ۵» و بالاخره دنباله ه را به دنباله های نزولی «۱، ۲» و «۳، ۴، ۵» و «۱» تجزیه می کنیم. ولی گزینه ب امکان تجزیه شدن به دو دنباله نزولی را ندارد.

۱۵. راه حل اول: با رسم یک دایره از یک نقطه تقاطع تا تقاطع بعدی یک و فقط یک ناحیه اضافه می شود. چون هر دایره، دایره دیگر را حداکثر در دو نقطه قطع می کند پس تعداد کل نقاط تقاطع دایره جدید با دایره های قبل حداکثر $2n$ شده و در نتیجه تعداد نواحی ایجاد شده حداکثر $2n$ می باشد.

راه حل دوم: یک دایره صفحه را به دو ناحیه تقسیم می کند که با رسم دایره دوم به صورت متقاطع با دایره اول تعداد نواحی برابر ۴ شده و تعداد آن نواحی از ۲ به ۴ تغییر می کند. بنابراین به ازای $n = 1$ جواب مورد نظر ۲ شده و گزینه های الف و هرد می شوند. با رسم دایره سوم به صورت متقاطع با هر دو دایره قبل تعداد نواحی از ۴ به ۸ افزایش می یابد یعنی به ازای $n = 2$ جواب مورد نظر ۴ می شود، بنابراین گزینه های ب و ج نیز رد می شوند.

۱۶. اگر رقم یکان x برابر ۰ باشد آنگاه رقم یکان y ، ده حالت، اگر رقم یکان x برابر ۱ باشد آنگاه رقم یکان y ، نه حالت (غیر از ۹)، اگر رقم یکان x برابر ۲ باشد آنگاه رقم یکان y ، هشت حالت، ... و بالاخره اگر رقم یکان x برابر ۹ باشد آنگاه رقم یکان y ، یک حالت (فقط ۰) می تواند داشته باشد پس رقم یکان دو عدد بر روی هم $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ یعنی ۵۵ حالت، به همین ترتیب رقم دهگان و صدگان دو عدد هر یک بر روی هم ۵۵ حالت و رقم هزارگان نیز فقط یک حالت «۱، ۱» را دارا هستند، بنابراین تعداد اعداد مطلوب برابر 55^3 می باشد.

۱۷. چهار نمایش مورد نظر به شکل های ۲۵، ۳۵، ۱۷۵ و ۱۸۵ می باشد.

۱۸. به ازای انتخاب هر سه نقطه یک مثلث پدید می آید مگر آن که آن سه نقطه در یک امتداد باشند. در شکل داده شده شش دسته سه تایی در یک امتداد مشاهده می شود، بنابراین تعداد مثلث های مطلوب برابر $6 - \binom{7}{3}$ یعنی ۲۹ می باشد.

۱۹. تعداد شهرهای استان را n در نظر می گیریم، بنابراین تعداد جاده ها برابر $\frac{(n-1) \times 3 + 1}{2}$ یا $\frac{3n-2}{2}$ می باشد. شرط لازم برای آن که عدد به دست آمده صحیح باشد آن است که n

زوج باشد. به ازای $n = 4$ به شکل  و به ازای $n = 6$ به شکل  می رسمیم.

برای این که سؤال فقط یک گزینه صحیح داشته باشد حدس بر این است که منظور طراح آن بوده است که بین هیچ دو شهری دو جاده متمایز وجود ندارد یعنی $n = 4$ نمی تواند درست باشد.

۲۰. بدترین حالت این است که همه مکعب ها به غیر از مکعب های زیری به روی میز منتقل شده و سپس همه آنها در یک ردیف بر روی هم چیده شوند، برای قسمت اول ۷ حرکت و برای قسمت دوم ۱۰ حرکت لازم است.

۲۱. دروس A، C، I و G به ترتیب در ترم های اول، دوم، سوم و چهارم گذرانده می شوند. دروس E، B و F نیز به ترتیب در ترم های اول، دوم و سوم گذرانده می شوند. برای دروس D و H سه حالت متفاوت به ترتیب به شکل های (دوم، سوم) یا (دوم، چهارم) و یا (سوم، چهارم) می تواند وجود داشته باشد.

۲۲. ماتریس مطلوب به شکل مقابل می باشد:

۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰
۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	۰
۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰
۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	۰
۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	۰
۰	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	۰
۰	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	۰
۰	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	۰
۰	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	۰

۲۳. برای ساختن رشته bbbbbbbaaaa از روی رشته babababba، ۹ مرحله لازم است زیرا b ها از سمت چپ به ترتیب از روی ۰، ۱، ۲، ۳ و ۳ عدد a رد شده اند که مجموعاً ۹ جابه جای می شود. به همین ترتیب معلوم می شود که برای ساختن دنباله aaaabbbbb از روی دنباله داده شده ۱۱ مرحله لازم است.

۲۴. تعداد پاره خط متصل به هر نقطه را درجه آن نقطه می نامیم. به ازای هر دو نقطه با درجه فرد یک بار

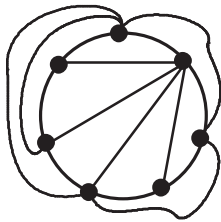
قلم از روی کاغذ برداشته می شود، چون تعداد این نقاط ۱۰ می باشد پس حداقل چهار بار قلم از روی کاغذ برداشته می شود (برداشت آخر از روی کاغذ نباید شمرده شود).

۲۵. ابتدا با توجه به قضیه اولر ثابت می کنیم تعداد جاده های مورد نظر نمی تواند بیش از ۸ جاده باشد. قضیه اولر به یکی از دو صورت زیر بیان می شود:

(I) اگر v تعداد رئوس، e تعداد یال ها و f تعداد وجوه یک چند وجهی باشد آنگاه $e + 2 = v + f$.

(II) اگر v تعداد رئوس، e تعداد یال ها و f تعداد نواحی موجود در یک گراف همبند باشد (ناحیه نامحدود خارجی نیز شمرده می شود) آنگاه $e + 2 = v + f$.

هر ناحیه در دور خود حداقل سه یال دارد، بنابراین تعداد یال های موجود در دور تمام نواحی حداقل برابر $3f$ می باشد ولی چون هر یال دقیقاً مرز دو ناحیه می باشد، با این شمارش هر یک از آنها دو بار شمارش می شوند، بنابراین:



$$2e \geq 3f \Rightarrow 2e \geq 3(e + 2 - v) \Rightarrow e \leq 15$$

چون در شکل داده شده ۷ یال رسم شده پس حداکثر ۸ یال

دیگر مطابق شکل مقابل می توان رسم کرد:

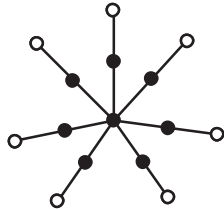
۲۶. به نظر می رسد که باید علامت ها را یک در میان به جمع تبدیل کرد زیرا در غیر این صورت حداقل دو علامت ضرب پشت سر هم قرار گرفته و عدد به سمت مینیمم شدن سوق پیدانمی کند. بنابراین مینیمم مقدار A برابر $8 + 7 \times 2 + 3 \times 4 + 6 \times 5$ یعنی ۶۴ خواهد شد.

۲۷. رقم یکان یکی از چهار حالت ۳، ۴، ۸ یا ۹ و رقم دهگان یکی از دو حالت ۳ یا ۵ را می تواند داشته باشد، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر برابر ۸ می باشد.

۲۸. اگر مرکز وسطی غیر فعال شود، آنگاه هر ۷ شهر متصل به آن فعال و هر ۷ شهر انتهایی غیر فعال می شوند، یعنی در این صورت فقط یک حالت انتخاب وجود دارد.

اگر مرکز وسطی فعال شود، آنگاه هر یک از ۷ شاخه یکی از دو وضعیت $\bullet - \bullet - \circ$ یا $\bullet - \circ - \bullet$ را

می تواند داشته باشد (● نشانه فعال بودن و ○ نشانگر غیرفعال بودن مرکز می باشد). از 2^7 حالت ایجاد شده فقط حالت مقابل قابل قبول نیست. زیرا با غیرفعال کردن مرکز وسطی خیابانی با دو سر غیرفعال یافت نمی شود.

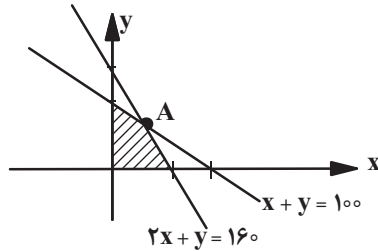


بنابراین تعداد کل حالات برابر $1 + 2^7 - 1$ یعنی ۱۲۸ می باشد.

۲۹. در مرحله پنجم هر ۸ عدد موجود بر روی دایره برابر ۳ می شود که از آن مرحله به بعد وضعیت تغییر نمی کند، بنابراین جواب مطلوب برابر 8×3 یعنی ۲۴ می باشد.

۳۰. فرض می کنیم x کیلو پرتقال و y کیلو سیب خریده باشد آنگاه:

$$x + y \leq 100, \quad 200x + 100y \leq 16000 \quad \text{یا} \quad 2x + y \leq 160$$



اگر نامعادله های فوق را در محورهای مختصات نمایش داده و اشتراک آنها را هاشور بزیم شکل مقابل به دست می آید:

می خواهیم $30x + 20y$ ماکزیمم

شود، خط $30x + 20y = k$ را چنان رسم می کنیم که از نقطه A بگذرد در این صورت حاصل $30x + 20y$ ماکزیمم مقدار خود را خواهد داشت. از تلاقی دو خط $x + y = 100$ و $2x + y = 160$ مختصات نقطه A به صورت $(40, 60)$ پیدا می شود که در این حالت حاصل $30x + 20y$ برابر ۲۶۰۰ می شود.

۳۱.

برای هر یک از حالات I و II جدول نتایج به شکل زیر می باشد:

	A	B	C	D	E
A		A	A	A	A
B	A		B	B	B
C	A	B		C	C
D	A	B	C		—
E	A	B	C	—	

I

	A	B	C	D	E
A		A	A	A	—
B	A		B	B	—
C	A	B		C	—
D	A	B	C		D
E	—	—	—	D	

II

اگر نتیجه هر مسابقه ای برد و باخت باشد آنگاه مجموعاً ۳ امتیاز به تیم ها داده می شود و چون در کل ۱۰ بازی انجام می شود پس در صورت عدم موجود بودن تساوی در بازی ها مجموع امتیازات تیم ها ۳۰ می شود. مجموع امتیازات حالت III برابر ۲۹ می باشد به این معنا که فقط یکی از مسابقات به تساوی کشیده شده است در حالی که تیم آخر دو تساوی دارد (چون دو امتیاز دارد) و این تناقض بیانگر آن است که دنباله III نمی تواند امتیاز تیم ها باشد.

۳۲. تعداد مثلث ها برابر $1 + \underbrace{4 + 4 + 4 + \dots + 4}_{n \text{ تا}}$ می باشد بنابراین:

$$1 + 4n = 45 \Rightarrow n = 11$$

۳۳. تعداد اعداد مطلوب $9 \times 9 \times 9$ می باشد. به خاطر تقارن معلوم می شود که $\frac{1}{9}$ این اعداد دارای رقم یکان ۱، $\frac{1}{9}$ آنها دارای رقم یکان ۲، ... و بالاخره $\frac{1}{9}$ آنها دارای رقم یکان ۹ می باشند. رقم دهگان و صدگان نیز چنین است، بنابراین:

$$? = (1 + 2 + \dots + 9) \times 81 + (1 + 2 + \dots + 9) \times 10 \times 81 + (1 + 2 + \dots + 9) \times 100 \times 81 = 404595$$

۳۴.

صبح	بعد از ظهر
شنبه	د
یکشنبه	
دوشنبه	B
سه شنبه	د
چهارشنبه	د - A
پنجشنبه	د

با توجه به جدول مقابل معلوم است که او کار خود را در روز شنبه انجام داده است بنابراین فقط گزاره II صحیح است.

۳۵. با توجه به جدول قبل معلوم می شود که یکی از معلم ها به همراه دفتر دار فقط در روزهای شنبه و چهارشنبه در مدرسه حضور دارند.

۴	۵	۱۲	۱۳	۲۰
R			R	b
۳	۶	۱۱	۱۴	۱۹
L	S	L	R	L
۲	۷	۱۰	۱۵	۱۸
	L	S	L	L
۱	۸	۹	۱۶	۱۷
a	R		R	

۳۶. در جدول مقابل برای رسیدن به خانه b اگر از خانه ۱۳ وارد شویم لازم است به خانه ۱۳ از خانه ۱۴ وارد شویم. برای وارد شدن به خانه ۱۳ از ۱۴ به طوری که به راست بپیچیم باید از خانه ۱۹ وارد شویم. برای این که باگردش به چپ از ۱۹ به ۱۴ وارد

شویم باید از خانه ۱۸ به خانه ۱۹ وارد شویم و اگر به همین ترتیب ادامه دهیم دنباله حرکت به شکل زیر خواهد بود که ۱۳ حرکت می باشد:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \rightarrow 15 \rightarrow 18 \rightarrow 19 \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow 20$

اگر برای ورود به خانه b از خانه ۱۹ وارد شویم آنگاه دنباله حرکت به شکل زیر خواهد بود که ۱۱ حرکت می باشد:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow 19 \rightarrow 20$

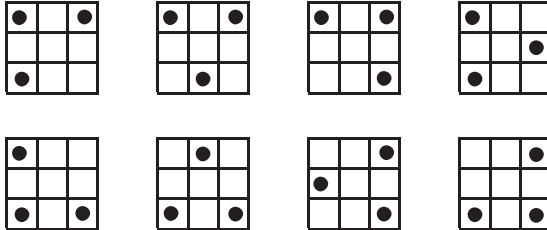
۳۷. بهترین حالت نمایش به شکل زیر می باشد:

$$(1+1)^{(1+1+1+1)} + (1+1+1)$$

۳۸. اگر $m=n=1$ آنگاه $b=B=0$ ، که با جاگذاری گزینه های الف، ج و د رد می شوند. اگر $m=2$ و $n=1$ آنگاه $b=B=1$ که با جاگذاری گزینه ه نیز رد می شود.

۳۹. با فرض این که چاه در روستای ۱ باشد با انتقال چاه از روستای ۱ به ۲ راه ۵ روستا هر کدام یک واحد اضافه شده ولی در عوض راه ۱۶ روستا هر کدام یک واحد کم خواهد شد، بنابراین روستای ۲ بهتر از روستای ۱ است. با انتقال چاه از روستای ۲ به روستای ۳ راه ۴ روستا هر کدام یک واحد کم شده ولی در عوض راه ۱۷ روستا هر کدام یک واحد اضافه می شود، بنابراین روستای ۲ بهتر از روستای ۳ می باشد. با انتقال چاه از روستای ۲ به روستای ۴ راه ۱۱ روستا هر کدام یک واحد اضافه شده ولی در عوض راه ۱۰ روستا هر کدام یک واحد کم خواهد شد، بنابراین روستای ۲ بهتر از روستای ۴ است. به همین ترتیب ثابت می شود که روستای ۲ از روستای ۵ نیز بهتر است.

۴۰. تمام حالات در اشکال زیر نمایش داده شده‌اند:



۴۱. جدول مطلوب مطابق شکل زیر می‌باشد:

۱	●	●	●
۲	●	●	۱
۳	۱	۲	●
●	۲	۱	●

۴۲. کافی است باقر در هر مرحله دو نقطه X و Y را به هم وصل کند که در آن X و Y دو رأسی است که اکبر در آن مرحله غیر آن دو رأس را به هم وصل کرده است.

۴۳. I) اگر پنج سکه به رو باشند با انتخاب آن پنج سکه و برگرداندن آنها، به شش سکه پشت خواهیم رسید.

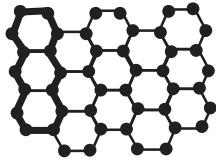
II) اگر دو سکه به رو و چهار سکه به پشت باشند آنگاه با انتخاب چهار سکه پشت و یک سکه رو و برگرداندن آنها، پنج سکه رو و یک سکه پشت خواهیم رسید، سپس مثل حالت I عمل می‌کنیم.

III) اگر سه سکه به رو و سه سکه به پشت باشند آنگاه با انتخاب سه سکه رو و دو سکه پشت و برگرداندن آنها، به دو سکه رو و چهار سکه پشت خواهیم رسید، سپس مثل حالت II عمل می‌کنیم.

IV) اگر چهار سکه به رو و دو سکه به پشت باشند آنگاه با انتخاب دو سکه پشت و سه سکه رو و برگرداندن آنها، به سه سکه رو سه سکه پشت خواهیم رسید، سپس مثل حالت III عمل می‌کنیم.

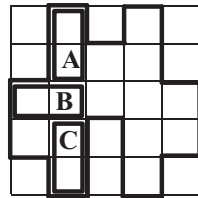
V) اگر یک سکه به رو و پنج سکه به پشت باشند آنگاه با انتخاب سکه رو و چهار سکه پشت و برگرداندن آنها، به چهار سکه رو و دو سکه پشت خواهیم رسید، سپس مثل حالت IV عمل می‌کنیم.

VI) اگر شش سکه به رو باشند آنگاه با انتخاب پنج سکه رو و برگرداندن آنها، به پنج سکه پشت و یک سکه رو خواهیم رسید، سپس مثل حالت V عمل می‌کنیم.



۴۴. هر دو رأسی که فقط شامل دو یال باشند، هر دو یالشان در مسیر شرکت می‌کند، بنابراین قسمت پر رنگ قسمتی از مسیر مطلوب می‌باشد، و اما هر نقطه‌ای نقطه شروع باشد راه برگشتی برای آن وجود ندارد.

۴۵. الگوریتم حرکات به شکل زیر می‌باشد:



B به راست - B به پایین

A به پایین - A به راست

A به بالا - C به بالا - B به بالا

B به چپ - B به پایین

C به پایین - A به پایین - C به راست - C به بالا

B به بالا - B به راست

۴۶. در حالت کلی اگر تعداد سنگریزه‌ها مضربی از ۳ باشد نفر دوم و در غیر این صورت نفر اول می‌تواند برنده باشد. اگر تعداد سنگریزه‌ها $3n$ باشد و نفر اول ۱ یا ۴ سنگریزه بردارد نفر دوم با برداشتن ۲ سنگریزه باز تعداد سنگریزه‌ها را $3k$ نگه داشته و در نهایت برنده می‌شود و اگر نفر اولی ۲ سنگریزه بردارد نفر دوم با برداشتن ۱ سنگریزه باز تعداد سنگریزه‌ها را $3k$ کرده و برنده می‌شود. اگر تعداد سنگریزه‌ها $3k+r$ ($r=1$ یا 2) باشد آنگاه نفر اول با برداشتن r سنگریزه تعداد سنگریزه‌ها را به $3k$ رسانده و ابتکار عمل را به دست می‌گیرد.

۴۷. الگوریتم حرکت به صورت زیر می‌باشد (در ابتدا فرض می‌کنیم همه در سمت چپ رودخانه باشند):

۲۰ و ۳۰ با هم به سمت راست رفته و ۳۰ پیاده شده و ۲۰ برمی‌گردد.

۲۰ و ۴۰ با هم به سمت راست رفته و ۴۰ پیاده شده و ۲۰ برمی‌گردد.

۲۰ در سمت چپ پیاده شده و ۸۰ به سمت راست رفته پیاده شده و ۳۰ سوار می‌شود.

۳۰ به سمت چپ آمده، پیاده می‌شود و ۸۰ سوار شده به سمت راست می‌رود.

۸۰ در سمت راست پیاده شده و ۴۰ سوار شده به سمت چپ می‌آید.

۴۰ نفر ۲۰ را سوار کرده، به سمت راست آورده، آن را پیاده می کند و به سمت چپ بر می گردد و نفر ۳۰ را سوار کرده و با هم به سمت راست رفته و در آنجا پیاده می شوند.

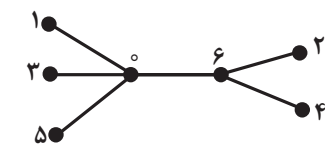
۴۸. به هر یک از جاده ها یک عدد صحیح متمایز از اعداد متناظر به جاده های دیگر، نسبت می دهیم. کافی است به هر یک از رئوس مجموعه ای نسبت دهیم که فقط شامل تمام اعداد جاده های متصل به آن رأس باشد.

۴۹. با الگوریتم زیر می توان جای هر دو عضو دلخواه مانند i و j با فرض این که i قبل از j باشد را عوض کرد:

- ابتدا با توجه به عمل دوم تمام اعضای قبل از i را به انتهای دنباله به ترتیب انتقال می دهیم.
- با توجه به عمل اول جای i و عضو بعد از آن را عوض کرده و سپس با توجه به عمل دوم آن را به انتهای دنباله انتقال می دهیم و این کار را تا جایی ادامه می دهیم که i و j مجاور باشند، در این مرحله خود i را به انتها منتقل می کنیم.
- با توجه به عمل اول جای j و عضو بعد از آن را عوض کرده و سپس با توجه به عمل دوم آن را به انتهای دنباله انتقال می دهیم و کار را تا جایی ادامه می دهیم که جای خالی i و j زیر شود.
- با توجه به عمل دوم تا جای ممکن اعضا را به انتها انتقال می دهیم تا ترتیب اولی ظاهر شود با این تفاوت که جای i و j عوض شده باشد.

با الگوریتم بالا ابتدا ۱ را به ابتدا، سپس ۲ را به جایگاه دوم و ... انتقال می دهیم.

۵۰. یکی از جواب های مطلوب مطابق شکل مقابل باشد:



۵۱. مجموع اعداد ۱ تا n برابر با $\frac{n(n+1)}{2}$ می باشد:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \overline{aaaa} \Rightarrow n(n+1) = 2 \times 111 \times a = 6 \times 37 \times a$$

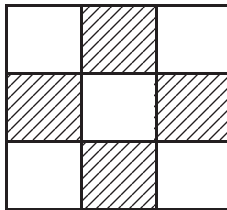
با توجه به تساوی فوق و این که ۳۷ عددی اول است معلوم می شود که $6a$ برابر ۳۶ و در نتیجه a برابر ۶ خواهد بود. بنابراین به ازای $n = ۳۶$ مجموع خواسته شده برابر ۶۶۶ می شود.

۵۲. مثال مورد نظر به شکل زیر می باشد:

در مدرسه اول فقط ۱۰ دانش آموز سال سوم با معدل ۱۶ و ۱۰۰ دانش آموز در سال چهارم با معدل ۱۵ موجود باشد. در مدرسه دوم نیز ۱۰ دانش آموز سال سوم با معدل ۱۰ و یک دانش آموز سال چهارم با معدل ۹ موجود باشد. در این صورت معدل دانش آموزان سال سوم برابر ۱۳ و معدل دانش آموزان سال چهارم برابر ۱۴/۹۴ خواهد شد.

۵۳. یکی از مسیرهای مطلوب A B C B C B C D E F می باشد.

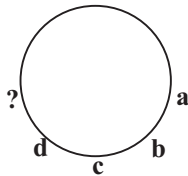
۵۴. اگر جدول را مطابق شکل مقابل شطرنجی کنیم، معلوم می شود که در هر مرحله اگر به مجموع اعداد



سفید k واحد اضافه شود به مجموع اعداد سیاه نیز k واحد اضافه خواهد شد. در ابتدا مجموع اعداد سفید ۱۴ و مجموع اعداد سیاه برابر ۱۶ می باشد. بنابراین هرگز آن دو عدد به طور توأم نمی توانند صفر شوند.

۵۵. فرض می کنیم a با همه افراد، b, c و d دو به دو با هم و e, f و g نیز دو به دو با هم آشنا باشند و هیچ

آشنایی دیگری موجود نباشد.



بدون این که به کلیت مسأله لطمه ای وارد شود فرض می کنیم سمت

چپ a نفر b باشد، در این صورت سمت چپ b یا باید c نشسته باشد و یا

d . در حالت اول نفر بعدی (نفر چهارم) d و در حالت دوم نفر بعدی c

خواهد شد، ولی معلوم است که فردی که با d (یا c) آشنا باشد پیدا نمی شود تا در جایگاه پنجم بنشینیم.

۵۶. اگر به اعضای هر دو گروه مجموعه های یکسانی مانند نفر اول $\{1, 2\}$ ، نفر دوم $\{1, 3\}$ و نفر

سوم $\{2, 3\}$ دهیم آنگاه انتخاب مطلوب ممکن نخواهد بود.

۵۷. در ترتیب مورد نظر تمام زوج هایی مانند (x, y) که x از y بخته و در آن ترتیب x قبل از y (نه لزوماً

بلافاصله) را در نظر می گیریم. می دانیم این تعداد زوج عددی محدود است. با عمل اشاره شده در صورت

مسأله، در هر مرحله تعداد زوج های مورد اشاره یکی کم شده و بالاخره بعد از مدتی به صفر خواهد رسید.

۵۸. فرض می‌کنیم $N = 3$ ، در این صورت با توجه به گزاره اول معلوم می‌شود که خروجی ماشین برای ورودی ۲۳ عدد ۳ می‌باشد.

با توجه به گزاره دوم معلوم می‌شود که خروجی ماشین به ازای ورودی ۳۲۳ عدد ۳۲۳ خواهد شد.

۵۹. اگر ورودی را ۲۷۳ بگیریم با توجه به گزاره اول خروجی ۷۳ می‌شود و با توجه به گزاره دوم به ازای ورودی ۳۲۷۳ خروجی ۷۳۲۷۳ می‌شود که همان خواسته مسئله می‌باشد.

۶۰. ورودی مدار اول به ترتیب a_p ، x و a_e می‌باشد.

ورودی مدار دوم به ترتیب خروجی مدار اول، x و a_h می‌باشد.

ورودی مدار سوم به ترتیب خروجی مدار دوم، x و a_e می‌باشد.

...

ششمین المپیاد کامپیوتر

اردیبهشت ۷۵

هر جواب درست ۴ نمره مثبت و هر جواب نادرست ۱ نمره منفی دارد.

۱. ۱۵ عدد گلوله با وزن های دو به دو متفاوت و سه ترازوی دو کفه ای سالم بدون وزنه داده شده اند. با استفاده از هر یک از این ترازوها می توان وزن دو گلوله را با هم مقایسه کرد. در هر مرحله می توان از تعدادی از ترازوها به طور همزمان جهت توزین این گلوله ها استفاده کرد. با حداقل چه تعداد مراحل می توان سنگین ترین گلوله را مشخص کرد؟

(ج) ۹

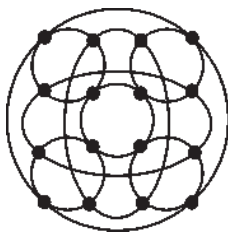
(ب) ۶

(الف) ۵

(ه) ۱۴

(د) ۱۳

۲. ۱۶ کامپیوتر مطابق شکل به هم ارتباط داده شده اند. هر کامپیوتر می تواند در هر ثانیه یک فایل اطلاعاتی را فقط



به یکی از کامپیوترهایی که به آن مربوط است منتقل کند،

برای این که یک فایل اطلاعاتی جدید که فقط در یکی از

کامپیوترها موجود است، به تمام کامپیوترها منتقل شود،

حداقل چند ثانیه وقت لازم است؟

(ب) ۴ ثانیه

(الف) ۳ ثانیه

(د) ۶ ثانیه

(ج) ۵ ثانیه

(ه) بسته به این که فایل اولیه روی کدام کامپیوتر باشد زمان فرق می کند

۳۰

المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)

۳. فرض کنید b_0, b_{q-1}, b_q نمایش عدد b در مبنای ۲ باشد. عدد b بر ۳ بخش پذیر است اگر و تنها اگر:

(الف) $b_1 = b_0 = 1$

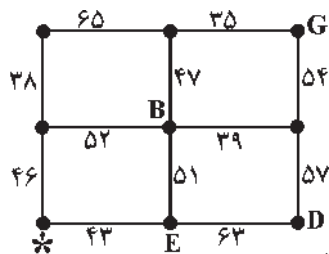
(ب) مجموع b_i ها بر ۹ بخش پذیر باشد

(ج) مجموع b_i ها بر ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۹ بخش پذیر نباشد

(د) مقدار $b_0 - b_1 + b_2 - \dots$ صفر باشد

(ه) مقدار $b_0 - b_1 + b_2 - \dots$ بر ۳ بخش پذیر باشد

۴. در کشوری ۹ شهر با نام های A تا I وجود دارد. بین این شهرها جاده هایی کشیده شده است. نقشه این جاده ها



همراه با طول آنها در شکل زیر نشان داده شده است، ولی

متأسفانه نام ۵ تا از این شهرها از نقشه پاک شده است.

اطلاعات زیر را در مورد شهرها می دانیم:

• C و D دورترین شهرها هستند.

• کوتاه ترین فاصله بین B و C برابر با کوتاه ترین فاصله بین E و I است.

• کوتاه ترین فاصله بین H و F، یکی بیشتر از کوتاه ترین فاصله بین E و H است.

• کوتاه ترین فاصله بین A و B، دو برابر کوتاه ترین فاصله بین B و H است. شهری که در شکل با ستاره

مشخص شده است، کدام شهر است؟

(الف) A (ب) C (ج) F (د) H (ه) I

۵. می خواهیم مقدار دو متغیر A و B را با هم عوض کنیم. کدام یک از برنامه های زیر این کار را انجام می دهند؟

(الف) $A = A - B$	(ب) $A = A - B$	(ج) $A = A + B$	(د) $A = B$	(ه) الف و ج
$B = A + B$	$B = A - B$	$B = A - B$	$B = A$	
$A = B - A$	$A = A - B$	$A = A + B$		

۶. برای انجام یک پروژه می خواهیم ۶ دانش آموز را گروه بندی کنیم به طوری که هر گروه یا تک نفره باشد یا شامل ۲

دانش آموز، به چند طریق این کار ممکن است؟

(الف) ۷۶ (ب) ۶۴

(ج) ۱۹۶ (د) ۳۵

(ه) ۹۰

۷. محمد متوجه شد که امسال سن او برابر مجموع رقم های سال تولد اوست. سن او در چه محدوده ای است؟

- (الف) ۱۱ تا ۱۴ (ب) ۱۵ تا ۱۹
(ج) ۲۱ تا ۲۵ (د) ۲۶ تا ۲۹
(ه) ۳۱ تا ۳۶

۸. در یک مسابقه فوتبال ۱۰ تیم شرکت کرده اند. هر دو تیم یک بار مسابقه می دهند. هر برد دو امتیاز، هر مساوی یک امتیاز و هر باخت صفر امتیاز دارد. حداکثر اختلاف امتیاز برای دو تیم که رتبه های متوالی را کسب کرده اند چه قدر می تواند باشد؟

- (الف) ۸ (ب) ۱۰ (ج) ۱۲ (د) ۱۵ (ه) ۱۸

۹. عمل شماره یک از رشته $abcdef$ ، رشته $adbecf$ و عمل شماره دو از رشته $abcdef$ ، رشته $daebfc$ را تولید می کند. با استفاده پی در پی و دلخواه از این دو عمل و با شروع از رشته $abcdef$ کدام یک از رشته های زیر را نمی توان به دست آورد.

- (الف) $dbafec$ (ب) $fcbeda$ (ج) $cabefd$ (د) $efdcab$ (ه) $fedcba$

۱۰. تعداد اعداد ۳ رقمی که مجموع ارقام آنها برابر با ۱۵ باشد چه قدر است؟

- (الف) ۶۹ (ب) ۱۲۵ (ج) ۷۳ (د) ۹۰ (ه) ۱۲۶

۱۱. برای مقادیر صحیح $x \geq 0$ و $y \geq 0$ ، تابع $A(x, y)$ را به این صورت تعریف می کنیم:

$$A(0, y) = y + 1$$

$$A(x + 1, 0) = A(x, 1)$$

$$A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$$

مقدار $A(1, y)$ برای کلیه مقادیر نامنفی y چقدر است؟

- (الف) ۲ (ب) $1 + y$ (ج) $2 + y$ (د) $3 + 2y$ (ه) هیچ کدام

۱۲. تمام اعداد طبیعی را پشت سر هم نوشته ایم. ۱۳۷۵ امین رقم این دنباله چیست؟ (اعداد طبیعی از ۱ شروع می شوند).

- (الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۹

۳۲

المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)

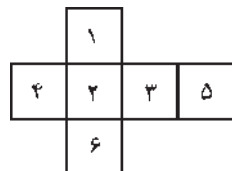
۱۳. در یک گردش دوستانه ۱۷۰ نفر شرکت دارند که وزن ۱۵۰ نفر آنها ۵۰ کیلوگرم و وزن ۲۰ نفر آنها ۱۰۰ کیلوگرم می باشد. آنها می خواهند با استفاده از یک قایق که ظرفیت آن ۱۰۰ کیلوگرم است از یک رودخانه عبور کنند. حداقل چند بار باید قایق عرض رودخانه را طی کند تا همه آنها به طرف دیگر رودخانه برسند؟

- (الف) ۱۸۹
(ب) ۱۹۰
(ج) ۳۳۹
(د) ۳۸۰
(ه) ۳۷۹

۱۴. تعداد ۵ نقطه را روی قطر یک نیم دایره و ۵ نقطه دیگر را روی کمان آن قرار داده ایم (نقاط روی گوشه ها قرار ندارند)، به چند حالت می توان چهارضلعی ای تشکیل داد که رئوسش این نقاط باشند؟

- (الف) ۲۰۰
(ب) ۲۱۰
(ج) ۲۰۵
(د) ۱۵۵
(ه) ۲۰۹

۱۵. یک تاس که شکل باز شده آن را می بینید، روی میز قرار دارد و علی و مجید دو طرف آن نشسته اند. علی دو وجه



عمودی و وجه بالایی را می بیند و مجید دو وجه عمودی دیگر و وجه بالایی را.

مجموع اعدادی که علی می بیند برابر ۱۰ و مجموع اعدادی که مجید می بیند برابر

۱۴ است. عدد روی وجه پایین برابر است با:

- (الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) ۶

۱۶. خروجی برنامه زیر کدام است؟

۱ - مقدار sum را مساوی صفر قرار بده.

۲ - به ازای هر I از ۱ تا ۱۳۷۵ کارهای زیر را انجام بده:

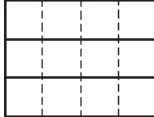
۱.۲ - به ازای هر J از ۱ تا I کار زیر را انجام بده:

۱.۱.۲ - به مقدار sum به اندازه I اضافه کن.

۳ - رقم یکان sum را چاپ کن.

- (الف) ۱ (ب) ۳ (ج) ۵ (د) ۷ (ه) ۹

۱۷. یک تکه کاغذ به شکل زیر در اختیار داریم:



دو نفر با نام های A و B به این صورت بازی می کنند: A در نوبت خودش یک تکه

کاغذ را انتخاب کرده، با یک برش مستقیم روی یکی از خطوطی که با نقطه چین مشخص

شده اند، آن را به دو تکه تقسیم می کند. سپس B نیز در نوبت خود همین کار را با یکی از

تکه های کاغذ و خطوطی که به صورت کامل (غیر نقطه چین) کشیده شده اند انجام می دهد. هر یک از بازیکنان که در

نوبت خود نتواند بازی کند، بازنده محسوب می شود.

کدام یک از گزاره های زیر درست تر است؟

(الف) اگر A بازی را شروع کند، می تواند برنده شود

(ب) اگر B بازی را شروع کند، می تواند برنده شود

(ج) در هر صورت A می تواند برنده شود

(د) در هر صورت B می تواند برنده شود

(ه) هر بازیکنی که بازی را شروع کند می تواند برنده شود

۱۸. در یک جلسه امتحان، m ردیف صندلی و در هر ردیف n صندلی قرار گرفته است. روی هر یک از صندلی ها یک

دانش آموز نشسته است. در ابتدای امتحان هر دانش آموز با دانش آموز جلو، عقب، سمت راست، و سمت چپ خود

(در صورت وجود) دست می دهد. اگر بدانیم که در مجموع ۱۴۸ بار عمل دست دادن انجام شده است، کدام یک از

عددهای زیر می تواند برابر با تعداد دانش آموزان باشد؟

(الف) ۳۶ (ب) ۶۴

(ج) ۸۴ (د) ۹۶

(ه) هیچ کدام

۱۹. کدام یک از عبارات منطقی زیر معادل با عبارت $(B \wedge \sim D) \vee (\sim C \wedge D)$ است؟

(الف) $(B \vee \sim C) \wedge (\sim D \vee D)$ (ب) $(B \vee \sim D) \wedge (C \vee D)$

(ج) $(B \vee D) \wedge (\sim C \vee \sim D)$ (د) $(B \vee \sim D) \wedge (\sim C \vee D)$

(ه) $(B \vee D) \wedge (C \vee \sim D)$

۲۰. a یک آرایه ۱۹۹۶ تایی است که اعداد ۱ تا ۱۹۹۶ به ترتیب در آن قرار دارند. بعد از اجرای پردازش زیر مقدار درایه اول این آرایه چیست؟

۱ - به ازای ۱ از ۱ تا ۱۳۷۵ کارهای زیر را انجام بده:

۱.۱ - به ازای j از ۲ تا ۱۹۹۶ کار زیر را انجام بده:

۱.۱.۱ - مقدار خانه های اول و jام را جابه جا کن.

الف) ۱۳۷۵ ب) ۶۲۲ ج) ۶۲۱ د) ۱۹۹۶ ه) ۱

۲۱. عبارات ریاضی را می توان به صورت دیگری هم نوشت: مثلاً $a + b$ را می توان به صورت $ab +$ و $a - b * c$ را به صورت $abc -$ نوشت. این نوع نوشتاری عبارات را گونه پسوندی می گویند. تعریف گونه پسوندی عبارات به صورت زیر است. در این تعریف یک عبارت فقط شامل متغیرهای تک حرفی و عملگرهای $+$ ، $-$ ، $*$ ، $/$ و $!$ (به معنی تغییر علامت) است.

● یک متغیر یک عبارت پسوندی است.

● اگر E یک عبارت پسوندی باشد، $E!$ هم یک عبارت پسوندی است به معنی تغییر علامت E .

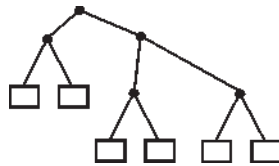
● اگر E و F دو عبارت پسوندی باشند، $EF +$ ، $EF -$ ، $EF *$ و $EF /$ نیز عبارات پسوندی هستند. (به ترتیب یعنی انجام عمل های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم روی E و F) کدام یک از عبارات های زیر عبارت پسوندی نیست؟

الف) $a!b!*cd+-$ ب) $ab!*c/d+!$
ج) $abc!+d/*c-$ د) $ab/c!+d*$
ه) $abcde!+/*$

۲۲. با توجه به تعریف سؤال قبل، عبارت پسوندی $abc!def*/+/-$ معادل کدام عبارت زیر است که به صورت

معمولی نوشته شده است؟

الف) $a - \frac{b}{-c + \frac{d}{c*f}}$ ب) $\frac{a-b}{-c + \frac{d}{c*f}}$ ج) $\frac{\frac{a-b}{-c+d}}{e*f}$
د) $a - \frac{b}{\frac{-c+d}{c} * f}$ ه) $a - \frac{b}{-c + \frac{d}{c} * f}$



۲۳. شکل مقابل را در نظر بگیرید:

فرض کنید که n سنگریزه در اختیار داریم. این عمل ها را می توانیم با

این سنگریزه ها انجام دهیم:

- یک سنگریزه روی یکی از نقاطی که در شکل با مربع نمایش داده شده اند بگذاریم.
- در صورتی که در مورد یکی از نقاطی که در شکل با دایره نمایش داده شده اند، روی تمام نقاط پایین تر از آن که با استفاده از یک خط مستقیم به آن وصل شده اند، سنگریزه وجود داشته باشد. می توانیم تمام سنگریزه های روی این نقاط پایین تر را برداریم و تنها یکی از آنها را روی آن نقطه قرار دهیم. از سنگریزه های برداشته شده می توان مجدداً استفاده کرد.

می خواهیم با استفاده از این اعمال یک سنگریزه روی نقطه بالایی قرار دهیم. کمترین مقدار n که برای آن بتوان این کار را انجام داد برابر است با:

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۶ ه) ۱۱

۲۴. دنباله های زیر را که از راست به چپ نوشته شده اند در نظر بگیرید. این دنباله ها به این صورت ساخته شده اند: دنباله اول ۱ است. چون دنباله اول شامل یک «یک» است، دنباله دوم ۱، ۱ است. چون دنباله دوم شامل دو «یک» است، دنباله سوم ۱، ۲ است. چون دنباله سوم شامل یک «دو» و یک «یک» است، دنباله چهارم ۱، ۲، ۱، ۱ است. چون دنباله چهارم شامل یک «یک»، یک «دو» و دو «یک» متوالی است. دنباله پنجم ۱، ۱، ۲، ۲، ۱ است. و به همین صورت بقیه دنباله ها نیز ساخته می شوند. اولین دنباله ای که در آن عدد ۴ ظاهر می شود، دنباله شماره چند است؟

الف) ۱۰ ب) ۱۲ ج) ۸ ه) هیچ کدام
د) ۱۶

۱
۱، ۱
۱، ۲
۱، ۱، ۲، ۱
۱، ۲، ۲، ۱، ۱، ۱
۱، ۱، ۲، ۲، ۱، ۳

۲۵. یک رشته از ۱۹۹۶ رقم، از سمت چپ با رقم ۶ شروع می شود. می دانیم که هر یک از عدد هایی که با در نظر گرفتن دو رقم متوالی در این رشته به دست می آیند، بر ۱۷ و یا بر ۲۳ بخش پذیرند. آخرین رقم سمت راست این دنباله چند است؟

الف) ۴ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۹

۲۶. یک رشته مخصوص به این صورت تعریف می شود:

• a یک رشته مخصوص است.

• اگر S یک رشته مخصوص باشد، Sa و Sbb نیز رشته های مخصوص هستند. تعداد رشته های مخصوصی که

دقیقاً از ۷ حرف تشکیل شده اند چندتا است؟

- (الف) ۲
(ب) ۷
(ج) ۸
(د) ۱۳
(ه) ۱۲۸

۲۷. تعداد عددهای طبیعی چهار رقمی کوچکتر از ۱۳۷۵ که رقم های آن از چپ به راست صعودی هستند، مانند

عددهای ۱۳۳۴ یا ۱۲۳۴ چندتا است؟

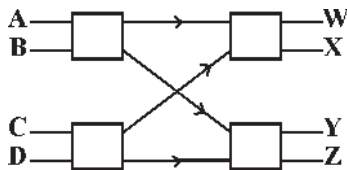
- (الف) ۱۰۳
(ب) ۱۰۹
(ج) ۱۳۵
(د) ۳۳
(ه) ۲۴۳

۲۸. در شکل زیر هر یک از مربع های یک کلید است که می تواند دو وضعیت مختلف داشته باشد: یا ورودی ها را

به صورت مستقیم به خروجی انتقال دهد، و یا آنها را جابه جا کند، یعنی ورودی بالا را به خروجی پایین بفرستد و

ورودی پایین را به خروجی بالا.

از حالت های زیر کدام را می توان با تعیین وضعیت کلیه کلیدها، به دست آورد؟



۱- A به X ، B به Y ، C به Z و D به W وصل باشد.

۲- A به Y ، B به Z ، C به W و X وصل باشد.

۳- A به Z ، B به X ، C به Y و D به W وصل باشد.

- (الف) فقط ۱
(ب) فقط ۲
(ج) فقط ۳
(د) ۱ و ۳
(ه) ۲ و ۳

۲۹. فرض کنید که ۵ خانه با شماره های ۰ تا ۴ وجود دارند که در ابتدا همگی خالی هستند. الگوریتم زیر یک عدد i را در این جدول قرار می دهد:

۱- X را مساوی باقیمانده i بر ۵ قرار بده.

۲- اگر خانه X ام خالی است، i را در این خانه قرار بده. پایان.

۳- یکی به مقدار X اضافه کن.

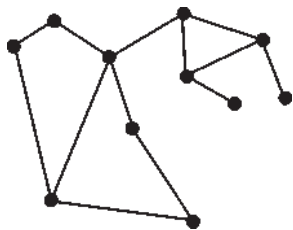
۴- اگر $X = 5$ ، X را مساوی با ۰ قرار بده.

۵- به مرحله ۲ برگرد.

اگر با استفاده از الگوریتم فوق، به ترتیب عددهای ۱۳، ۸، ۲۴، ۱۰ و ۳ را وارد این خانه کنیم، در انتها چه عددی در خانه دوم قرار گرفته است؟

الف) ۳ (ب) ۸ (ج) ۱۰ (د) ۱۳ (ه) ۲۴

۳۰. در نقشه زیر شهرها را با دایره و جاده های بین آنها را با پاره خط نشان داده ایم. می خواهیم در تعدادی از شهرها



مرکز کنترل ترافیک ایجاد کنیم به قسمی که به ازای هر جاده لااقل

یکی از دو شهر متصل به آن دارای مرکز کنترل ترافیک باشد.

حداقل تعداد مراکز لازم چندتاست؟

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۱۰

مسئله های بله - خیر

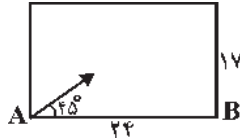
پاسخ هر یک از مسائل زیر «بله» یا «خیر» است که هر جواب درست ۳ نمره مثبت و هر جواب نادرست ۳ نمره منفی دارد.

۳۱. در نقشه مسئله ۳۰ حداقل تعداد شهرهایی که بین هیچ دو تایی از آنها جاده مستقیم وجود ندارد با b و حداقل تعداد مراکز کنترل ترافیک را با a نشان می دهیم. آیا می توان نقشه ای رسم کرد که در آن $a + b$ از تعداد شهرها بیشتر باشد؟

۳۸

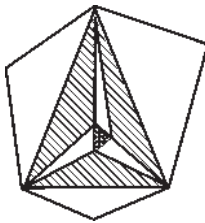
المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)

۳۲. از نقطه A واقع در گوشه جعبه ای به ابعاد ۱۷×۲۴ متر گلوله ای با زاویه ۴۵° درجه نسبت به اضلاع پرتاب



می شود. این گلوله در برخورد با هر ضلع مانند شعاع نور با همان زاویه برخورد منعکس می شود. با فرض این که سرعت گلوله ثابت و برابر $\sqrt{۲}$ متر در ثانیه باشد، آیا گلوله در کمتر از ۵ دقیقه به نقطه B می رسد؟

۳۳. یک مثلث بندی، افرازی از سطح یک n ضلعی به مثلث ها است به نحوی که برای هر دو مثلث یکی از حالات زیر



برقرار باشد:

۱- دو مثلث دقیقاً در یک ضلع کامل مشترک باشند.

۲- دو مثلث دقیقاً در یک رأس مشترک باشند.

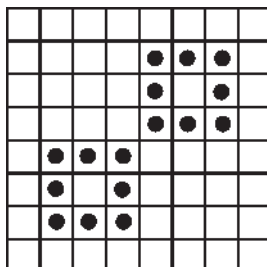
۳- دو مثلث هیچ اشتراکی نداشته باشند.

می خواهیم هر یک از این مثلث ها را با یکی از دو رنگ سیاه و سفید رنگ کنیم به نحوی که هر دو مثلث مشترک در یک ضلع، رنگ متفاوت داشته باشند و در ضمن اضلاع n ضلعی متعلق به مثلث های سفید باشند. به عنوان مثال در شکل چنین مثلث بندی ای برای یک ۶ ضلعی داده شده است. آیا می توان یک مثلث بندی با شرایط فوق برای یک ۸ ضلعی ارائه داد؟

۳۴. سه نفر با نام های مجید، علی و محمد برای قرعه کشی بین خودشان از روش زیر استفاده می کنند:

هر سه نفر به طور همزمان عددی بین ۱ تا ۴ انتخاب می کنند. اگر باقیمانده تقسیم مجموع این سه عدد بر ۳ مساوی ۰، ۱ یا ۲ باشد به ترتیب مجید، علی و محمد برنده می شوند. آیا این قرعه کشی منصفانه است؟ (آیا احتمال برنده شدن هر سه نفر یکسان است؟)

۳۵. در صفحه زیر تعداد ۱۶ مهره در خانه های مشخص شده قرار دارند. یک اسب در این صفحه به این صورت



حرکت می کند که دو خانه در امتداد افقی (یا عمودی) و یک خانه در امتداد عمودی (یا افقی). می خواهیم از یکی از خانه های بدون مهره با اسب شروع به حرکت کنیم و پس از ۱۶ بار حرکت هر ۱۶ مهره را توسط اسب بگیریم. هر بار که اسب در خانه با مهره فرود می آید آن مهره را می گیرد. آیا عمل فوق امکان پذیر است یا خیر؟

۳۶. آیا می توان ۶ گلوله را طوری در مرکز خانه های یک صفحه شطرنجی 3×3 قرار داد که هیچ سه گلوله ای در یک راستای افقی یا عمودی یا قطری نباشند؟

۳۷. آیا می توان یک جدول 5×5 را با عددهای صحیح به گونه ای پر کرد که مجموع همه عددها مثبت باشد، ولی مجموع هر ۴ عددی که تشکیل یک زیر جدول 2×2 می دهند منفی باشد؟

۳۸. آیا می توان با چسباندن چهار مربع 1×1 به هم، یک کاشی ساخت که با ۱۶ عدد از این کاشی ها نتوان یک اتاق 8×8 را فرش کرد؟ هر دو مربعی که به هم چسبیده باشد باید در تمام ضلع اشتراک داشته باشند نه در قسمتی از آن.

۳۹. ظرفی با گنجایش ۱۰ لیتر پر از شیر داریم. آیا می توان فقط به کمک یک ظرف ۷ لیتری و یک ظرف ۳ لیتری، ۵ لیتر شیر برداشت؟

۴۰. سالنی به مساحت ۷ متر مربع داریم. می خواهیم سه تکه موکت به شکل های دلخواه و هریک به مساحت ۳ متر مربع سفارش دهیم. آیا می توان این سه تکه موکت را به گونه ای سفارش داد که بتوان طوری آنها را در سالن پهن کرد که مساحت سطحی که هر دو موکت روی هم قرار گرفته اند اکیداً کمتر از یک متر مربع باشد؟

پاسخ تشریحی

ششمین المپیاد کامپیوتر

۱. در هر مرحله حداکثر وضعیت سه گلوله از نظر سبک بودن مشخص شده و از جمع گلوله ها خارج می شوند. مراحل اول، دوم، سوم و چهارم از هر سه ترازو استفاده کرده و در هر مرحله ۳ گلوله سبک توسط سه ترازو شناسایی شده و از مجموع گلوله ها حذف می شوند پس در این چهار مرحله مجموعاً ۱۲ گلوله از مجموع گلوله ها حذف می شوند. پس تا انتهای این مرحله ۳ گلوله باقی است. در یک مرحله از یک ترازو استفاده کرده و یک گلوله سبک دیگر را شناسایی می کنیم. و بالاخره در مرحله آخر از دو گلوله باقی مانده سبکترین و سنگین ترین آنها را با یک بار وزن کردن مشخص می کنیم. پس برای این کار مجموعاً ۶ مرحله نیاز است.

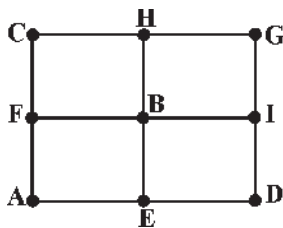
۲. در انتهای ثانیه های اول، دوم و سوم به ترتیب حداکثر ۲، ۴ و ۸ کامپیوتر می توانند فایل اطلاعاتی جدید را دارا باشند. پس برای اینکه همه کامپیوترها، فایل اطلاعاتی جدید را دارا باشند حداقل ۴ ثانیه وقت لازم است. ثابت می کنیم در ۴ ثانیه این کار عملی است. برای این منظور فایل اطلاعاتی جدید را بر روی کامپیوتر A_1 فرض می کنیم. این فایل در انتهای ثانیه های اول تا چهارم به ترتیب ذیل منتقل خواهند شد:

ثانیه سوم	ثانیه دوم	ثانیه اول
$A_1 \longrightarrow A_5$	$A_1 \longrightarrow A_3$	$A_1 \longrightarrow A_2$
$A_2 \longrightarrow A_8$	$A_2 \longrightarrow A_9$	
$A_3 \longrightarrow A_7$		
$A_4 \longrightarrow A_{15}$		
$A_5 \longrightarrow A_{11}$		
$A_6 \longrightarrow A_{13}$		
$A_{10} \longrightarrow A_{14}$		
$A_{12} \longrightarrow A_{16}$		

A_1 می تواند هر کدام از کامپیوترهای موجود باشد. به عنوان مثال یک نمونه از شماره گذاری کامپیوترها در مقابل آمده است:

۶	۲	۹	۱۲
۳	۱	۴	۷
۱۰	۵	۱۱	۱۴
۱۳	۸	۱۵	۱۶

۳. در حالت کلی قابل اثبات است که اگر $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, a_p$ نمایش عدد a در مبنای n باشد، آنگاه عدد a بر $n+1$ بخش پذیر است اگر و تنها اگر مقدار $\dots - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$ بر $n+1$ بخش پذیر باشد. کافی است بسط عدد در مبنای n را بنویسید.



۴. با توجه به اطلاعات مسأله، نامگذاری شهرها به شکل زیر می باشد و در نتیجه شهری که با ستاره مشخص شده است A می باشد.

۵. اگر مقادیر متغیرهای A و B را در ابتدا به ترتیب α و β بنامیم، مقادیر A و B بعد از اجرای برنامه های ب، ج و د به ترتیب به صورت: $\langle \alpha - 2\beta, \beta \rangle$ ، $\langle \alpha + 2\beta, \alpha \rangle$ و $\langle \beta, \beta \rangle$ خواهد شد.

۶. در اجرای این پروژه یا هیچ گروه دو نفره ای وجود ندارد و یا یک گروه دو نفره، یا دو گروه دو نفره، و یا سه گروه دو نفره وجود دارد پس تعداد حالات ممکن عبارتند از:

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{2} \binom{4}{2} \div 2! + \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} \div 3! = 1 + 15 + 45 + 15 = 76$$

۷. با توجه به اینکه امسال (سال برگزاری این دوره المپیاد) ۱۳۷۵ می باشد، پس سال تولد محمد ۱۳۵۸ می باشد که سن او برابر با ۱۷ و مجموع $۱ + ۳ + ۵ + ۸$ نیز ۱۷ می باشد.

۸. حداکثر امتیاز موقعی است که تیم اول همه ۹ تیم را ببرد. در این صورت مجموع امتیازات این تیم برابر با ۱۸ امتیاز می شود. برای اینکه اختلاف امتیاز تیم اول با تیم دوم حداکثر باشد باید تیم دوم با بقیه ۸ تیم مساوی کرده باشد در این صورت تیم دوم دارای ۸ امتیاز است. پس اختلاف مورد نظر حداکثر ۱۰ امتیاز می باشد.

۹. گزینه های الف، ب، ج و د را می توان به دست آورد. مراحل به دست آوردن هر کدام از رشته ها عبارتند از:

$$۱) abcdef \xrightarrow{۲} daebfc \xrightarrow{۱} dbafec$$

$$۲) abcdef \xrightarrow{۱} adbecf \xrightarrow{۱} aedcbf \xrightarrow{۲} cabefd \xrightarrow{۱} ceafbd \xrightarrow{۲} fcbed$$

$$۳) abcdef \xrightarrow{۱} adbecf \xrightarrow{۱} aedcbf \xrightarrow{۲} cabefd$$

$$۴) abcdef \xrightarrow{۱} adbecf \xrightarrow{۲} eacdfb \xrightarrow{۱} edafcb \xrightarrow{۱} efdcab$$

گزینه ها را با استفاده از دو عمل فوق نمی توان به دست آورد.

۱۰. از بین ۱۰ رقم موجود، سه تایی هایی که مجموع آنها برابر با ۱۵ باشد عبارتند از:

$$۱) (۰, ۶, ۹) \quad ۲) (۰, ۷, ۸) \quad ۳) (۱, ۵, ۹) \quad ۴) (۱, ۶, ۸) \quad ۵) (۱, ۷, ۷)$$

$$۶) (۲, ۴, ۹) \quad ۷) (۲, ۵, ۸) \quad ۸) (۲, ۶, ۷) \quad ۹) (۳, ۳, ۹) \quad ۱۰) (۳, ۴, ۸)$$

$$۱۱) (۳, ۵, ۷) \quad ۱۲) (۳, ۶, ۶) \quad ۱۳) (۴, ۴, ۷) \quad ۱۴) (۴, ۵, ۶) \quad ۱۵) (۵, ۵, ۵)$$

در هر کدام از ۱۵ حالت فوق تعداد اعداد سه رقمی به ترتیب عبارتند از ۴، ۴، ۶، ۶، ۳، ۶، ۶، ۳، ۳، ۶، ۳، ۳، ۶ و ۱. پس مجموعاً ۶۹ عدد موجود است. روش دوم برای حل این مسئله آن است که تعداد جواب های صحیح معادله مشروط $x_1 + x_2 + x_3 = ۱۵$ با شروط $۰ \leq x_3 \leq ۹$ ، $۰ \leq x_2 \leq ۹$ و $۱ \leq x_1 \leq ۹$ را به دست آوریم که برابر با ۶۹ می شود.

$$۱۱. A(۱, y) = A(۰ + ۱, (y - ۱) + ۱) = A(۰, A(۱, y - ۱)) = A(۱, y - ۱) + ۱$$

در تساوی های فوق ابتدا از فرض سوم و سپس از فرض اول استفاده شده است. به استقرا ثابت

$$A(۱, y) = A(۱, ۰) + y \quad \text{می شود که:}$$

و اما با توجه به فرض دوم مسئله، $A(۱, ۰)$ به شکل زیر به دست می آید:

$$A(۱, ۰) = A(۰ + ۱, ۰) = A(۰, ۱) = ۱ + ۱ = ۲$$

$$A(۱, y) = ۲ + y$$

پس:

۱۲. در ابتدا ۹ رقم (اعداد یک رقمی)، سپس ۱۸۰ رقم (اعداد دو رقمی) نوشته می شوند. پس تا قبل از نوشته شدن اولین عدد سه رقمی مجموعاً ۱۸۹ رقم نوشته شده است. پس از اعداد سه رقمی مجموعاً باید ۱۸۹ - ۱۳۷۵ یعنی ۱۱۸۶ رقم نوشته شود. خارج قسمت تقسیم ۱۱۸۶ بر ۳ برابر ۳۹۵ می باشد. پس به تعداد ۳۹۵ عدد سه رقمی یعنی از ۱۰۰ تا ۴۹۴ را نیز می نویسیم. در این حال مجموعاً $۳ \times ۳۹۵ + ۱۸۹$ یعنی ۱۳۷۴ رقم به کار رفته است. پس ۱۳۷۵ امین رقم ۴ می باشد (رقم صدگان عدد ۴۹۵).

۱۳. در ابتدا باید توجه داشت که قایق بدون راننده نمی تواند باشد. در هر رفت حداکثر ۲ نفر به سمت دیگر رودخانه رفته و حداقل یک نفر به سمت اول رودخانه برمی گردد. پس در هر رفت و برگشت حداکثر یک نفر از سمت اول رودخانه به سمت دیگر رودخانه منتقل می شود. ۱۵۰ نفر که وزن آنها ۵۰ کیلوگرم می باشد را در نظر می گیریم. شخص A از این گروه را راننده فرض می کنیم. A باید ۱۴۹ نفر را در ۱۴۹ مرحله (مجموعاً ۲۹۸ حرکت) به سمت دیگر رودخانه ببرد و برای بردن ۲۰ نفر دیگر به سمت اول رودخانه برگردد. A در سمت اول رودخانه پیاده می شود و یکی از افراد مجموعه ۲۰ نفری که وزن هر کدام از آنها ۱۰۰ کیلوگرم است به سمت دیگر رودخانه می رود و یکی از افراد ۵۰ کیلوگرمی قایق را به سمت اول رودخانه برمی گرداند و نیز پیاده شده و یکی دیگر از افراد ۱۰۰ کیلوگرمی به سمت دیگر رودخانه منتقل می شوند و به همین ترتیب همه این ۲۰ نفر به سمت دیگر رودخانه منتقل می شود و ۲۰ نفر از افراد ۵۰ کیلوگرمی به سمت اول رودخانه برمی گردند (با شمردن شخص A مجموعاً ۲۱ نفر در سمت اول رودخانه موجودند). پس تا حالا $۲۹۸ + ۴۰$ یعنی ۳۳۸ حرکت انجام گرفته است. باز شخص A، ۲۰ نفر موجود در سمت اول رودخانه را در ۳۹ حرکت به سمت دیگر رودخانه منتقل می کند (بار آخر خود در سمت مقصد پیاده شده و لازم نیست که قایق به سمت اول رودخانه برگردد). پس مجموعاً قایق $۳۳۸ + ۳۹$ یعنی ۳۷۷ بار عرض رودخانه را طی کرده است. که متأسفانه هیچ کدام از گزینه ها جواب صحیح نمی باشند.

۱۴. از چهار رأس این چهار ضلعی یا هیچ کدام از رئوس بر روی قطر قرار ندارند و یا یک یا دو رأس از آن بر روی قطر قرار دارند. پس تعداد چهار ضلعی های مورد نظر عبارتند از:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 + 50 + 100 = 155$$

۱۵. اگر وجه بالایی را a و وجه پایین را b و چهار وجه عمودی را c, d, e و f بنامیم آنگاه خواهیم داشت:

$$a + c + d = 10$$

$$\Rightarrow 2a + c + d + e + f = 24$$

$$a + e + f = 14$$

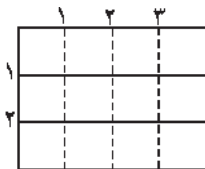
از طرف دیگر می دانیم:

$$a + b + c + d + e + f = 21$$

پس $a - b = 3$. اما با توجه به شکل، 6 با 1 و 3 با 4 و 5 با 2 در مقابل یکدیگر قرار دارند. پس در وجه بالایی عدد 5 و در وجه پایینی عدد 2 نوشته شده است.

۱۶. برنامه داده شده مجموع $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + 1375^2$ را حساب می کند. مجموع فوق برابر $\frac{1375 \times 1376 \times 2751}{6}$ یعنی $917 \times 668 \times 1375$ می باشد که رقم یکان آن صفر می باشد که متأسفانه هیچ کدام از گزینه ها صحیح نمی باشد.

۱۷. در هر صورت A می تواند برنده شود. خطوط تکه کاغذ را به شکل زیر شماره گذاری می کنیم. اگر B شروع کننده باشد به ناچار از یکی از سطرها 1 یا 2 کاغذ را به دو تکه تقسیم می کند. فرض می کنیم این شخص سطر 1 را برش داده و تکه کاغذ را به دو تکه a (قسمت بالایی) و b (قسمت پایینی) تقسیم کند. در این صورت شخص A از یکی از ستون های 1 و یا 3 تکه a ، آن را به دو تکه تقسیم می کند. B ناچاراً سطر 2 از تکه b را برش می دهد و بازنده می شود زیرا چیزی برای برش دادن برای مرحله بعد برای او باقی نمی ماند.



اگر A شروع کننده باشد ابتدا او تکه کاغذ را از ستون 2 برش می دهد. B یکی از دو تکه را از سطر 1 یا 2 به دو تکه تقسیم می کند. شخص A تکه کوچکتر را انتخاب کرده و آن را به دو قسمت تقسیم می کند. شخص B در نوبت خود سه بار دیگر می تواند تکه کاغذها را برش دهد و چیزی برای برش برای او باقی نخواهد ماند در صورتی که در هر مرحله برای شخص A تکه کاغذ برای برش افزایش پیدا می کند.

۱۸. چهار نفری که در گوشه ها نشسته اند با 2 نفر دست می دهند. تمام افرادی که در کناره ها نشسته اند (غیر از افراد گوشه ای) با 3 نفر دست می دهند و بقیه افراد با 4 نفر دست می دهند. پس:

$$\frac{4 \times 2 + [(m-2) + (m-2) + (n-2) + (n-2)] \times 3 + (n-2)(m-2) \times 4}{2} = 148$$

$$\Rightarrow 2mn - m - n = 148 \Rightarrow (2n - 1)(2m - 1) = 297$$

این معادله در مجموعه اعداد طبیعی سه دسته جواب دارد: $(2, 50)$, $(5, 17)$ و $(6, 14)$.
چون مجموع دانش آموزان برابر با mn می باشد پس مجموع دانش آموزان یکی از اعداد 100 , 85 و 84 می باشد. با توجه به گزینه ها، گزینه ج صحیح است.

$$(B \wedge \sim D) \vee (\sim C \wedge D) \quad .19$$

$$\equiv [B \vee (\sim C \wedge D)] \wedge [\sim D \vee (\sim C \wedge D)]$$

$$\equiv [(B \vee \sim C) \wedge (B \vee D) \wedge (\sim D \vee \sim C) \wedge (\sim D \vee D)]$$

$$\equiv (B \vee \sim C) \wedge (\sim D \vee \sim C) \wedge (B \vee D)$$

$$\equiv [\sim C \vee (B \wedge \sim D)] \wedge (B \vee D)$$

$$\equiv [\sim C \wedge (B \vee D)] \vee [(B \wedge \sim D) \wedge (B \vee D)]$$

$$\equiv [\sim C \wedge (B \vee D)] \vee [\sim D \wedge B \wedge (B \vee D)]$$

$$\equiv [\sim C \wedge (B \vee D)] \vee (\sim D \wedge B) \vee F \quad \text{قانون جذب:}$$

$$\equiv [\sim C \wedge (B \vee D)] \vee [(\sim D \wedge B) \vee (\sim D \wedge D)]$$

$$\equiv [\sim C \wedge (B \vee D)] \vee [\sim D \wedge (B \vee D)]$$

$$\equiv (B \vee D) \wedge (\sim C \vee \sim D)$$

۲۰. به ازای $i = 1$ خروجی الگوریتم به صورت زیر می باشد:

۱۹۹۵, ۱, ۲, ..., ۱۹۹۶

به ازای $i = 2$ خروجی الگوریتم به صورت زیر می باشد:

۱۹۹۴, ۱۹۹۵, ۱, ۲, ..., ۱۹۹۶

به ازای $i = 3$ خروجی الگوریتم به صورت زیر می باشد:

۱۹۹۳, ۱۹۹۴, ۱۹۹۵, ۱, ۲, ..., ۱۹۹۶

و بالاخره به ازای $i = 1375$ خروجی الگوریتم به صورت زیر می باشد:

۶۲۱, ۶۲۲, ..., ۱۹۹۵, ۱۹۹۶, ۱, ۲, ..., ۶۲۳

پس مقدار درایه اول برابر با ۶۲۲ می باشد.

۲۱. گزینه ج یک عبارت پسوندی نیست چون بعد از $abc!$ یک عمل به صورت $+$ نمایش داده شده است در صورتی که دو عمل نیاز است.

۲۲. معادل پسوندی گزینه های ب، ج، د و ه به ترتیب به صورت $ab-c!d+ef*//$ ، $ab-c!def*+/$ ، $ab-c!d+ef*//$ و $abc!d+e/f*+/-$ می باشد.

۲۳. با سه سنگریزه این کار عملی است.

۲۴. عدد ۴ هرگز ظاهر نخواهد شد. زیرا اولین ۴ وقتی ظاهر خواهد شد که در سطر قبلی ۴ عدد ۱ یا ۲ و یا ۳ به صورت متوالی ظاهر شده باشد. به عنوان مثال اگر ۴ عدد ۲ ظاهر شده باشد و عدد بعد از این ۲ ها a و عدد قبل از ۲ ها b باشد، آنگاه این دنباله دو حالت خواهد داشت:

حالت اول: سطر قبل از این دنباله شامل ... a «۲» و دو «۲» و دو « b » و ... می باشد که طریقه شمارش درست نیست چون ۲ ها را با هم نشمرده ایم یعنی یکبار گفته ایم a تا «۲» و بلافاصله گفته ایم دو تا «۲» که صحیح نمی باشد.

حالت دوم: سطر قبل از این دنباله شامل ... « a » و دو «۲» و دو «۲» و b ... می باشد که باز طریقه شمارش درست نیست چون در شمارش دو تا «۲» و دو تا «۲» بلافاصله پشت سر هم آمده اند.

۲۵. اعداد دو رقمی که بر یکی از دو عدد ۱۷ و ۲۳ بخش پذیر باشند عبارتند از: ۱۷، ۲۳، ۳۴، ۴۶، ۵۱، ۶۸، ۶۹، ۸۵ و ۹۲. برای اینکه شرط مسأله برقرار باشد، عددهایی که با در نظر گرفتن دو رقم متوالی به دست می آیند باید یکی از ۹ عدد فوق باشند. در ساختن رشته باید دقت کرد که رقم ۷ نباید ظاهر شود زیرا بعد از ۷ هیچ رقمی نمی توان قرار داد تا عدد دو رقمی حاصل بر یکی از دو عدد ۱۷ و ۲۳ بخش پذیر باشد. رقم ۱ نیز نباید در رشته باشد زیرا اگر رقم ۱ در رشته ظاهر شود بعد از آن باید ۷ باشد که تناقض است. رقم ۵ نیز نباید در رشته باشد زیرا اگر رقم ۵ در رشته ظاهر شود بعد از آن باید ۱ ظاهر شود که تناقض است. رقم ۸ نیز نباید در رشته باشد زیرا اگر رقم ۸ در رشته ظاهر شود بعد از آن باید ۵ ظاهر شود که تناقض است پس رشته به صورت زیر می باشد:

۶۹۲۳۴۶۹۲۳۴۶ ...

یعنی ارقام ۶، ۹، ۲، ۳ و ۴ با تناوب ۵ تکرار می شوند چون باقیمانده ۱۹۹۶ بر ۵ برابر با ۱ می باشد پس آخرین رقم دنباله ۱۹۹۶ رقمی برابر با ۶ می باشد.

۲۶. تعداد رشته های مخصوصی که دقیقاً از ۷ حرف تشکیل شده اند عبارتند از:

aaaaaaa, aaaaabb, aaaabba, aaabbaa, aabbaaa, abbaaaa, aaabbbb, aabbbba, aabbabb, abbabba, abbaabb, abbbbaa, abbbbbbb

پس مجموعاً ۱۳ رشته مخصوص ۷ حرفی می توان تولید کرد. اگر دقت کنید خواهید فهمید که اگر f_n نشانگر تعداد رشته های مخصوص n حرفی باشد آنگاه رابطه $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ برقرار است.

۲۷. تعداد اعدادی که با دو عدد ۱ شروع شده و دو رقم انتهایشان مشابهند برابر با ۹ می باشد.

تعداد اعدادی که با دو عدد ۱ شروع شده و دو رقم انتهایشان مشابه نیستند برابر با $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ می باشد.

تعداد اعدادی که با ۱۲ شروع شده و دو رقم انتهایشان مشابهند برابر با ۸ می باشد.

تعداد اعدادی که با ۱۲ شروع شده و دو رقم انتهایشان مشابه نیستند برابر با $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ می باشد.

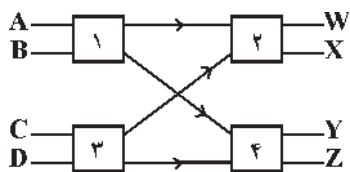
تعداد اعدادی که با ۱۳ شروع شده و دو رقم انتهایشان مشابهند برابر با ۷ می باشد.

تعداد اعدادی که با ۱۳ شروع شده و دو رقم انتهایشان مشابه نیستند برابر با $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ می باشد.

پس تعداد اعداد کوچکتر از ۱۴۰۰ و با شرط مذکور برابر با $9 + \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} + 8 + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + 7 + \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

یعنی ۱۰۹ عدد می باشد که با کسر اعداد ۱۳۷۹، ۱۳۸۸، ۱۳۷۹، ۱۳۷۸ و ۱۳۷۷ یعنی ۶ عدد از تعداد فوق، تعداد مورد نظر ۱۰۳ عدد به دست می آید.

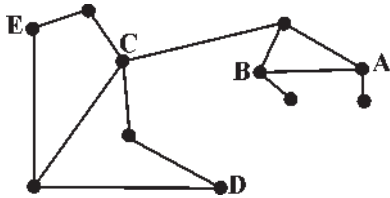
۲۸. حالت های ۱ و ۳ هر دو می توانند به دست آیند. در حالت اول، باید کلیدهای ۱ و



۴ مستقیم و کلیدهای ۲ و ۳ معکوس عمل کنند. در حالت سوم نیز هر چهار کلید باید معکوس عمل کنند.

۲۹. در خانه های ۰ تا ۴ به ترتیب اعداد ۲۴، ۱۰، ۳، ۱۳ و ۸ قرار می گیرند. پس در خانه دوم عدد ۳ موجود است.

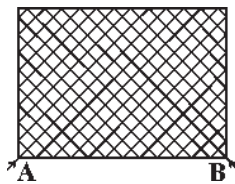
۳۰. در نقشه شهرهایی که باید در آنها مراکز کنترل ترافیک ایجاد کرد با A, B, C, D و E نمایش داده شده اند؛ یعنی پنج شهر.



۳۱. شهرها را به دو دسته A و B تقسیم می کنیم. B شامل شهرهایی است که بین هیچ دوتایی از آنها جاده مستقیم وجود ندارد و تعداد آنها حداکثر ممکن را دارد معلوم است که تعداد این شهرها برابر با b می باشد. اگر بخواهیم تعداد مراکز کنترل ترافیک حداقل باشد کافی است به تمام شهرهای دسته A مرکز کنترل ترافیک اختصاص دهیم. ضمناً لازم نیست به هیچ کدام از اعضای مجموعه B مرکزی اختصاص دهیم زیرا هر کدام از آنها حداقل به یکی از اعضای مجموعه A مستقیماً جاده دارند (چون در غیر این صورت عضوی از A که به هیچ کدام از اعضای B جاده نداشته باشد جزء مجموعه B قرار می گرفت). پس تعداد اعضای A حداکثر برابر با a می باشد. پس $a + b$ از تعداد شهرها بیشتر نیست.

۳۲. برای اینکه گلوله به نقطه B برسد باید گلوله مسیر موربی شکل را طی کند. طول این مسیر برابر است با:

$$[2(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16)+8(17)] \times \sqrt{2} \\ = 408\sqrt{2}$$



پس گلوله در مدت ۴۰۸ ثانیه که بیشتر از ۵ دقیقه است به نقطه B می رسد.

۳۳. تعداد اضلاع مثلث های سفید از تعداد اضلاع مثلث های سیاه به اندازه تعداد اضلاع چندضلعی بیشتر است. برای یک ۸ ضلعی تعداد اضلاع مثلث های سفید ۸ واحد از تعداد اضلاع مثلث های سیاه بیشتر است. چون هم تعداد اضلاع مثلث های سفید بر ۳ بخش پذیر است و هم تعداد اضلاع مثلث های سیاه پس اینکه اختلاف آنها ۸ واحد باشد امکان پذیر نیست.

۳۴. مجموع سه عدد، یکی از اعداد ۳، ۴، ...، ۱۲ می باشد. تعداد کل حالات برابر با $4 \times 4 \times 4$ یعنی ۶۴ حالت می باشد. تعداد حالاتی که مجموع اعداد انتخابی ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ باشد به ترتیب برابر با ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۲، ۱۰، ۶، ۳ و ۱ می باشد. به عنوان مثال مجموع سه عدد انتخابی وقتی برابر با ۱۰ خواهد شد که یکی از سه نفر عدد ۲ و دو نفر دیگر عدد ۴ را انتخاب کنند و یا یکی از آنها عدد ۴ و دو نفر دیگر عدد ۳ را انتخاب کنند که مجموعاً ۶ حالت زیر می شود:

$$(2, 4, 4) - (4, 2, 4) - (4, 4, 2) - (4, 3, 3) - (3, 4, 3) - (3, 3, 4)$$

پس احتمال اینکه باقیمانده تقسیم مجموع سه عدد بر ۳ برابر با ۰ باشد عبارت است از احتمال اینکه مجموع سه عدد یکی از اعداد ۳، ۶، ۹، ۱۲ باشد و آن احتمال برابر است با:

$$\frac{1}{64} + \frac{10}{64} + \frac{10}{64} + \frac{1}{64} = \frac{22}{64}$$

احتمال اینکه باقیمانده تقسیم مجموع سه عدد بر ۳ برابر با ۱ باشد عبارت است از احتمال اینکه

$$\frac{3}{64} + \frac{12}{64} + \frac{6}{64} = \frac{21}{64}$$

مجموع سه عدد یکی از اعداد ۴، ۷ و ۱۰ باشد و آن برابر است با:

و بالاخره احتمال اینکه باقیمانده تقسیم مجموع سه عدد بر ۳ برابر با ۲ باشد عبارت است از احتمال

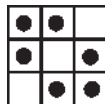
$$\frac{6}{64} + \frac{12}{64} + \frac{3}{64} = \frac{21}{64}$$

اینکه مجموع سه عدد یکی از اعداد ۵، ۸ و ۱۱ باشد و آن برابر است با:

				۱۲	۱۷	۱۴	
				۱۵		۱۱	
				۱۰	۱۳	۱۶	
	۶	۹	۴				
	۳		۷				
	۸	۵	۲				
				۱			

۳۵. کافی است مطابق جدول زیر مهره از خانه ۱ شروع

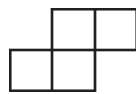
کرده و به ترتیب در خانه های ۲، ۳، ...، ۱۷ فرود آید.



۳۶. مطابق شکل مقابل:

۱	۱	۱	۱	۱
۱	-۴	۱	-۴	۱
۱	۱	۱	۱	۱
۱	-۴	۱	-۴	۱
۱	۱	۱	۱	۱

۳۷. به عنوان مثال یک نمونه در شکل زیر مشاهده می شود:



۳۸. به عنوان مثال نمونه ای از نوع چسباندن در شکل

مقابل مشاهده می شود:

۳۹. الگوریتم کار به شکل زیر است:

- دو بار پیمانه ۳ لیتری را پر کرده و در پیمانه ۷ لیتری خالی می کنیم.
- بار دیگر پیمانه ۳ لیتری را پر کرده و آن را تا جایی که پیمانه ۷ لیتری پر شود، درون آن خالی می کنیم (بدیهی است که در درون پیمانه سه لیتری، دو لیتر شیر باقی خواهد ماند).
- پیمانه ۷ لیتری را در درون پیمانه ۱۰ لیتری خالی می کنیم.
- ۲ لیتر شیر موجود در پیمانه سه لیتری را در درون پیمانه ۷ لیتری می ریزیم.
- پیمانه ۳ لیتری را از پیمانه ۱۰ لیتری که محتوی ۸ لیتر شیر است پر کرده و در پیمانه ۷ لیتری خالی می کنیم.
- پایان.

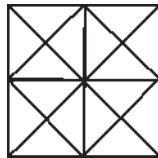
۱/۷	۰/۵	۱/۸۰
D	C	A
۰/۸	E	۰/۷
	F	۱/۵

۴۰. مطابق شکل زیر:

- موکت شماره ۱ شامل ناحیه های A و B و C می باشد.
- موکت شماره ۲ شامل ناحیه های B و E و F می باشد.
- موکت شماره ۳ شامل ناحیه های C و D و E می باشد.

هفتمین المپیاد کامپیوتر

بهمن ۷۵



۱. چند مثلث در شکل مقابل وجود دارد؟

(ب) ۴۰

(الف) ۳۶

(د) ۴۴

(ج) ۴۲

(ه) ۴۸

۲. منظور از $\lfloor x \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x و منظور از $\lceil x \rceil$ ، کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا

مساوی x است. از گزاره های زیر کدام درست هستند؟

I. $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ اگر و فقط اگر x عدد صحیح باشد.

II. $\lceil x \rceil + 1 = \lfloor x \rfloor$ اگر و فقط اگر x عدد صحیح نباشد.

III. $\lceil y \rceil = \lceil x \rceil$ برای هر x و y .

IV. $\lfloor -x \rfloor = \lceil x \rceil$ - برای هر x

(ب) فقط I و IV

(الف) فقط IV

(د) فقط I، II، IV

(ج) فقط I، II، III

(ه) I، II، III، IV

۳. حداکثر چند زیرمجموعه از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ می توان انتخاب کرد، به طوری که اجتماع هیچ دو

زیر مجموعه انتخاب شده مساوی مجموعه X نشود؟

(ه) ۲۶

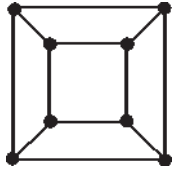
(د) ۲۰

(ج) ۱۶

(ب) ۱۰

(الف) ۸

۴. در شکل مقابل هر نقطه یک کامپیوتر و هر خط، یک سیم ارتباطی است که دو کامپیوتر را به هم متصل می کند.



یک «خرابی منظم» در سیستم هنگامی به وجود می آید که از هر کامپیوتر دقیقاً یکی از سیم های ارتباطی اش قطع شده باشد. به چند حالت ممکن است خرابی منظم در این سیستم روی دهد؟

(ه) ۱۰

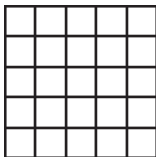
(د) ۹

(ج) ۸

(ب) ۷

(الف) ۶

۵. به چند طریق می توان چهار تا از خانه های شکل زیر را رنگ کرد که خانه های رنگ شده به شکل زیر باشند؟



(ب) ۴۴

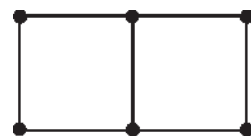
(الف) ۴۸

(د) ۲۴

(ج) ۶۰

(ه) ۳۶

۶. نقشه خیابان های شهری به صورت شکل زیر است. (هر یک از دایره ها نشان دهنده یکی از میدان های شهر و هر خط نشان دهنده یک خیابان است.) می خواهیم همه خیابان های این شهر را یک طرفه کنیم، به طوری که از هر یک



از میدان های شهر با استفاده از این خیابان ها بتوان به هر میدان دیگری رفت. به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

(ج) ۸

(ب) ۶

(الف) ۳

(ه) ۱۲۸

(د) ۶۴

۷. تیم های کشورهای ایران، امارات، کویت و عربستان در یک مسابقه دوره های شرکت کرده اند، یعنی هر دو تیم دقیقاً یک بار با هم بازی کرده اند، در هر بازی، تیم برنده ۲ امتیاز و بازنده صفر امتیاز می گیرد. اگر نتیجه بازی مساوی باشد هر تیم صاحب یک امتیاز می شود. فردی که نتایج بازی را نمی داند رادیو را روشن می کند. گوینده خبر به آن جا رسیده است که می گوید: «... و کویت چهارم شد. پس هیچ دو تیم دارای مجموع امتیاز مساوی نشدند و تنها بازی ای که با نتیجه مساوی خاتمه یافت بازی امارات و عربستان بود» با این اطلاعات مجموع امتیاز و رتبه تیم ایران را پیدا کنید.

(ج) ۴ امتیاز، رتبه دوم

(ب) ۴ امتیاز، رتبه اول

(الف) ۶ امتیاز، رتبه اول

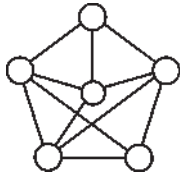
(ه) ۲ امتیاز، رتبه سوم

(د) ۲ امتیاز، رتبه دوم

۸. در شکل زیر می خواهیم در هر یک از دایره ها یکی از عددهای ۱ تا ۶ را بنویسیم (هر عدد در یک خانه) به طوری

که مجموع قدر مطلق تفاضل عددهای نوشته شده در دایره هایی که به هم متصل اند،

مینیمم باشد. این مقدار مینیمم چقدر است؟



(ه) ۳۵

(د) ۲۶

(ج) ۲۵

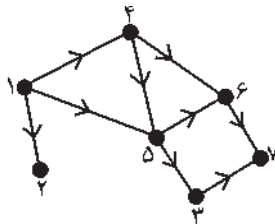
(ب) ۲۴

(الف) ۲۲

۹. برای انجام پروژه خاصی به انجام هفت کار مختلف نیازمندیم. ترتیب انجام کارها در شکل زیر آمده است، به این

صورت که $a \rightarrow b$ نشان می دهد که کار a باید قبل از کار b

صورت گیرد. این پروژه را به چند ترتیب مختلف می توان انجام داد؟



(ج) ۱۲

(ب) ۱۵

(الف) ۱۸

(ه) ۶

(د) ۹

۱۰. تعداد $\frac{n(n+1)}{2}$ گوی به شکل مثلثی به ضلع n گوی چیده شده اند. وقتی که یک گوی را از قاعده این مثلث بر

می داریم، تمام گوی هایی که در سطر بالایی با آن در تماس اند نیز برداشته می شوند و به همین ترتیب کار ادامه پیدا می کند، تا بالاترین گوی هم برداشته شود. می دانیم که با برداشتن یک گوی از قاعده مثلث مجموعاً ۲۵ گوی

برداشته شده است. n چند بوده و چندمین گوی از قاعده مثلث برداشته شده است؟

(ب) $n = ۱۰$ و گوی چهارم قاعده

(الف) $n = ۱۱$ و گوی سوم قاعده

(د) $n = ۹$ و گوی پنجم قاعده

(ج) $n = ۱۰$ و گوی سوم قاعده

(ه) $n = ۹$ و گوی چهارم قاعده

۱۱. در یک جدول ۴×۴ ، عددهای ۱ تا ۴ به صورتی نوشته شده اند که در هیچ سطر و هیچ ستونی عدد تکراری وجود

ندارد، عددهای نوشته شده در چهار تا از خانه های این جدول را،

مطابق شکل زیر می دانیم. عدد موجود در خانه ای که با * مشخص شده

است، چه می تواند باشد؟

۱			
	۲		
		*	۳
			۲

(ب) ۴

(الف) ۱

(د) ۲

(ج) ۳

(ه) با اطلاعات فوق، نمی توان مقدار این خانه را به صورت یکتا تعیین کرد.

۱۲. سه دهکده A، B و C به ترتیب روی یک خط راست واقع شده اند. فاصله A و B، ۱ کیلومتر و فاصله B و C، ۴ کیلومتر است. مقدار مصرف روزانه سوخت در A، B و C به ترتیب ۲۰۰، ۳۰۰ و ۴۰۰ لیتر است. می خواهیم یک انبار سوخت برای این سه دهکده تأسیس کنیم، به طوری که هزینه روزانه حمل سوخت به این دهکده ها مینیمم باشد. این انبار سوخت باید در کجا قرار گیرد؟ (هزینه حمل متناسب با حجم سوخت حمل شده و فاصله طی شده است.)

(الف) در دهکده B (ب) در نقطه وسط BC

(ج) بین B و C و در فاصله ۱/۵ کیلومتری B (د) در نقطه وسط AB

(ه) بین B و C و در فاصله ۵/۰ کیلومتری B

۱۳. حداکثر چند تا از دایره های شکل زیر را می توان پر کرد به طوری که هیچ چهار دایره پر شده ای رئوس یک مربع



یا مستطیل با اضلاع افقی و عمودی نباشند؟

(ج) ۸

(ب) ۷

(الف) ۶

(ه) ۱۰

(د) ۹

۱۴. عددهای ۱ تا ۱۳۷۵ در یک ردیف نوشته شده اند. یک نفر از ابتدای این اعداد شروع می کند و عدد اول را خط می زند. عدد دوم را باقی می گذارد و عدد سوم را هم خط می زند و به همین ترتیب یک در میان عددها را خط می زند. سپس دوباره از اول لیست شروع می کند و اولین عددی را که خط نخورده است خط می زند و به همین صورت یک در میان عددهایی را که خط نخورده اند خط می زند. پس از آن دوباره از اول شروع می کند و همین کار را تا جایی ادامه می دهد که فقط یک عدد باقی بماند. آن یک عدد چند است؟

(ه) ۵۱۲

(د) ۶۸۲

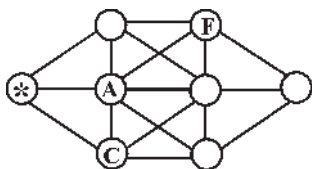
(ج) ۶۸۷

(ب) ۱۰۲۴

(الف) ۱۳۷۴

۱۵. حروف A تا H را در هشت دایره شکل زیر قرار داده ایم با این شرط که حرف های قرار گرفته در دو دایره ای که با یک خط مستقیم به هم متصل اند از نظر الفبایی متوالی نباشند. در دایره ای که با * مشخص شده است، چه حرفی

قرار گرفته است؟



(ب) E

(الف) D

(د) H

(ج) G

(ه) چنین کاری امکان پذیر نیست

۱۶. با ارقام ۳، ۵ و ۷ به چند طریق می توان یک عدد چهاررقمی ساخت که بر ۳ بخش پذیر باشد؟ (تکرار ارقام مجاز است).

الف) ۲۱ (ب) ۲۷ (ج) ۱۸ (د) ۲۴ (ه) ۱۹

۱۷. تعدادی عدد را روی یک ردیف نوشته ایم. می دانیم که هر عدد (به جز عددهای اول و آخر)، یکی بیشتر از واسطه حسابی دو عدد مجاورش است. اگر عدد اول در این ردیف ۱، و عدد هفتم ۱۳ باشد، عدد پنجم چند است؟

الف) ۹ (ب) ۱۳ (ج) ۱۵ (د) ۱۶ (ه) ۱۷

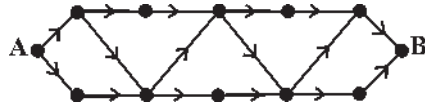
۱۸. برای هر جایگشت P_1, P_2, P_3, P_4 از مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ ، مجموع $|P_1 - P_2| + |P_3 - P_4|$ را حساب می کنیم. مجموع همه مقادیر محاسبه شده برای همه جایگشت های مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ ، چقدر است؟

الف) ۴۸ (ب) ۶۴ (ج) ۸۰ (د) ۹۲ (ه) ۱۲۰

۱۹. تعداد رشته هایی از صفر و یک به طول ۷ که شامل ۱۰۱۰۱ باشند چند تا است.

الف) ۸ (ب) ۱۰ (ج) ۱۱ (د) ۱۲ (ه) هیچ کدام

۲۰. در شکل مقابل چند مسیر از A به B وجود دارد؟



الف) ۸ (ب) ۱۳ (ج) ۱۶ (د) ۳۲ (ه) ۸۱

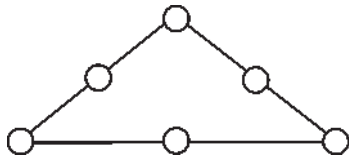
۲۱. در هر یک از خانه های جدول زیر، یک رقم بین صفر تا ۹ نوشته شده است. می دانیم که حاصل جمع عددهای نوشته شده در هر سه خانه متوالی برابر با ۲۰ است. مقدار X چقدر است؟

			۹				X				۷		

الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۷ (ه) ۹

۵۸

المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)



۲۲. اعداد ۱ تا ۶ روی اضلاع یک مثلث (شکل مقابل) باید طوری قرار داده شوند که مجموع اعداد روی هر ضلع مثلث مساوی n باشد. n چه مقادیری می تواند باشد؟

(ج) ۹, ۱۱, ۱۳

(ب) ۱۰, ۱۱

(الف) ۹, ۱۲

(ه) ۸, ۱۰, ۱۲

(د) ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲

۲۳. در قسمتی از یک برنامه، دستورات زیر نوشته شده اند:

اگر $A < B$ ، مقدار F را محاسبه کن، در غیر این صورت، اگر $C > D$ ، مقدار G را محاسبه کن.فرض کنید که به طور متوسط در ۷۵ درصد از موارد، شرط $A > B$ ، و در ۵۰ درصد از موارد شرط $C > D$ برقرار است. اگر دستورات فوق ۱۰۰۰۰ بار انجام شوند، به طور متوسط هر یک از مقادیر F و G چند بار محاسبه می شوند؟(ب) F ، ۷۵۰۰ بار و G ، ۱۲۵۰ بار(الف) F ، ۲۵۰۰ بار و G ، ۳۷۵۰ بار(د) F ، ۷۵۰۰ بار و G ، ۵۰۰۰ بار(ج) F ، ۷۵۰۰ بار و G ، ۳۷۵۰ بار(ه) F ، ۹۳۷۵ بار و G ، ۱۲۵۰ بار۲۴. در مربع زیر می خواهیم مسیری از خانه A به خانه B پیدا کنیم که مجموع اعداد خانه های روی آن مینیمم

				B
	۴	۸	۴	۱
	۱۵	۱۰	۶	۵
	۵	۱۱	۹	۱۰
A	۱	۷	۱۲	۶

باشد. این مقدار مینیمم چقدر است؟ (در هنگام پیمودن مسیر، از هر خانه

فقط می توان به خانه ای رفت که یک ضلع مشترک با آن داشته باشد.)

(ج) ۳۸

(ب) ۳۷

(الف) ۳۶

(ه) ۴۰

(د) ۳۹

۲۵. در جدول 3×3 ی زیر، عددهای طبیعی به صورتی نوشته شده بودند که مجموع اعداد هر ستون، و مجموع

اعداد هر قطر و مجموع اعداد هر سطر این مربع عدد ثابتی بود. متأسفانه تمام این عددها به جز سه عددی که در

شکل نشان داده شده، پاک شده اند. در خانه ای که با علامت * مشخص شده، چه عددی قرار داشته است؟

*	۷	۱۲
۳		

(ب) ۱۳

(الف) ۶

(د) ۲۳

(ج) ۱۷

(ه) ۲۴

۲۶. الگوریتم زیر را در نظر بگیرید. در این الگوریتم n یک عدد طبیعی و A یک آرایه است که عنصر i ام آن را با $A[i]$ نشان می‌دهیم.

۱- $A[1]$ را مساوی با صفر و $A[2]$ را مساوی با یک قرار بده.

۲- برای هر i از ۲ تا n کار زیر را انجام بده:

۱.۲- برای هر j از ۱ تا 2^{i-1} کار زیر را انجام بده:

۱.۱.۲- $A[j]$ را مساوی با $2^{i-1} + [2^i - j + 1]$ قرار بده.

کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد مقدار آرایه A پس از اجرای این الگوریتم، درست است؟

(الف) دنباله اعداد صفر تا $2^n - 1$ به ترتیب صعودی در A قرار دارد

(ب) هر دو عدد متوالی از آرایه A در مبنای ۲ دقیقاً در یک رقم متفاوت هستند

(ج) آرایه A شامل عناصر تکراری است

(د) عناصر اول تا 2^{n-1} ام آرایه A به ترتیب صعودی و بقیه عناصر به ترتیب نزولی هستند

(ه) «ج» و «د» درست‌اند

۲۷. در شماره‌گذاری صفحات کتابی ۱۹۹۷ بار عدد ۱ به کار رفته است. تعداد صفحات این کتاب در چه محدوده‌ای است؟

(ب) ۲۲۰۰ - ۲۰۰۰

(الف) ۳۲۰۰ - ۳۰۰۰

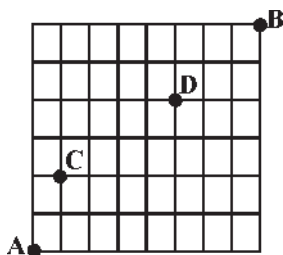
(د) ۳۷۰۰ - ۳۵۰۰

(ج) ۲۷۰۰ - ۲۵۰۰

(ه) ۵۲۰۰ - ۵۰۰۰

۲۸. در شکل زیر چند مسیر از A به B وجود دارد که از C می‌گذرد ولی از D نمی‌گذرد؟ (در طول مسیر فقط

می‌توان به سمت راست یا بالا حرکت کرد.)



(ب) ۱۵۰

(الف) ۵۱

(د) ۴۵۰

(ج) ۱۸۰

(ه) ۵۴۰

۶۰

المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)

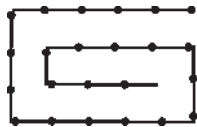
۲۹. دیوارهای خارجی یک باغ، مستقیم هستند و هر یک از این دیوارها با دو دیوار مجاورش یک زاویه قائمه می‌سازد. این دیوارها با هم یک دور بسته را می‌سازند که باغ را محصور می‌کند. اگر بدانیم که طول دیوارهای این باغ، به ترتیب برابر با ۱۲، ۵، ۱۰، ۴، ۲، ۳ و ۷ است، مساحت این باغ چقدر است؟

الف) ۷۴ (ب) ۸۴ (ج) ۱۳۵ (د) ۵۳ (ه) ۷۷

۳۰. یک هفت ضلعی محدب داریم و همه قطرهای آن را رسم کرده‌ایم. می‌دانیم که هیچ سه قطری هم‌رس نیستند مگر در رئوس. تعداد مثلث‌های تولید شده‌ای که دقیقاً یک رأس آنها از رئوس هفت ضلعی است برابر است با:

الف) ۲۱ (ب) ۱۰۵ (ج) ۷۰ (د) ۱۴۰ (ه) ۳۵

۳۱. از یک مستطیل شطرنجی با اضلاع ۳×۵ که اضلاع مربع‌های آن چوب کبریت هستند. بعضی از چوب کبریت‌ها را بر می‌داریم تا مارپیچی مانند شکل زیر با ۲۳ چوب کبریت به دست آید. اگر همین کار را با مستطیل شطرنجی دیگری انجام دهیم و ۸۷ چوب کبریت باقی بماند، اضلاع این مستطیل چقدر بوده است؟



الف) ۷×۱۰ (ب) ۷×۱۱ (ج) ۶×۱۱ (د) ۸×۱۰ (ه) ۷×۹

۳۲. فردی به تازگی وارد کشوری شده است و در مورد ارزش سکه‌های این کشور چیزی نمی‌داند. یک بار که او جنسی می‌خرد، فروشنده باقیمانده پولش را که برابر با ۲۸ واحد است، به صورت چهار سکه به او می‌دهد. یک بار دیگر، فروشنده ۲۱ واحد را به صورت پنج سکه به او می‌دهد. می‌دانیم که در این کشور تنها سه نوع سکه وجود دارد و در هر دو مورد، سکه‌هایی که این فرد دریافت کرده است، شامل هر سه نوع سکه می‌شود، پرارزش‌ترین سکه، معادل چند واحد ارزش دارد؟

الف) ۵ (ب) ۸ (ج) ۱۰ (د) ۱۱ (ه) ۱۵

۳۳. به چند طریق می‌توان ده توپ یکسان را در ده جعبه متمایز جای داد به طوری که دقیقاً ۳ جعبه خالی باشد؟

الف) $۵! \begin{bmatrix} ۹ \\ ۳ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۷ \\ ۳ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱۶ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$ (ه) $۷! \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$

۳۴. سه سبد به تعداد مساوی سیب دارند. مینا یک سیب از یکی از سبدها بر می دارد و در یک سبد دیگر می گذارد. سپس مریم ۲ سیب از سبد دلخواه خودش برداشته، در یک سبد دیگر می گذارد، و بعد مهرنوش ۴ سیب از سبد دلخواه خودش برداشته، در سبد دیگر می گذارد، در پایان یکی از سبدها ۲ برابر سبد دیگر و ۳ برابر سبد سوم سیب دارد. در ابتدا در هر سبد چند سیب وجود داشته است؟

الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۲۱ د) ۲۲ ه) ۳۳

۳۵. یک کامپیوتر دارای یک «ثبات» (ثبت کننده) است که می تواند یک عدد صحیح را نگهداری کند و یک حافظه، که می تواند تعدادی متغیر را در خود ذخیره کند. این کامپیوتر دارای دستورات زیر است:

● $LOAD\ x$: مقدار ثبات را مساوی با متغیر x قرار می دهد.

● $STORE\ x$: مقدار متغیر x را برابر با مقدار ثبات قرار می دهد.

● $ADD\ x$: مقدار ثبات را با مقدار متغیر x جمع کرده، حاصل را در ثبات ذخیره می کند.

● $MULT\ x$: مقدار ثبات را در مقدار متغیر x ضرب کرده، حاصل را در ثبات ذخیره می کند.

برنامه زیر به این کامپیوتر داده می شود. در انتهای کار این برنامه مقدار ذخیره شده در Z ، برحسب مقادیر اولیه

$LOAD\ b$	متغیرها، چقدر است؟
$MULT\ c$	
$STORE\ t_1$	الف) $t_1(bc + a) + t_1$
$ADD\ a$	ب) $(a + bc)^2 + bc$
$STORE\ t_2$	ج) $2bc + a^2$
$MULT\ t_2$	د) $(a + bc) + bc$
$ADD\ t_1$	ه) $a + 2bc$
$STORE\ z$	

۳۶. حال برنامه زیر را در نظر بگیرید. در انتهای اجرای این برنامه، مقدار ذخیره شده در ثبات، برحسب مقادیر اولیه متغیرها، چقدر است؟

$LOAD\ a$	اولیه متغیرها، چقدر است؟
$ADD\ b$	
$STORE\ x$	الف) $a(a + b)^4 + a(a + b)^3$
$MULT\ x$	ب) $(a + b)[(a + b)^2 + (a + b)]$
$STORE\ z$	ج) $az(x + z)$
$ADD\ x$	د) $a[(a + b)^3 + (a + b)^2]$
$MULT\ a$	ه) $a(a + b)^4$
$MULT\ z$	

۳۷. هر رشته از ارقام صفر تا نه را یک عدد اصلی می نامیم، مثل ۰۱۰۷ یا ۱۵۷ . نمایش صفر شماری یک عدد اصلی را به این صورت تعریف می کنیم:

- نمایش صفر شماری هر عدد اصلی یک رقمی i ، i تا صفر پشت سر هم است.
- برای به دست آوردن نمایش صفر شماری یک عدد اصلی با بیش از یک رقم، نمایش صفر شماری هر رقم را مطابق با دستور فوق نوشته و بین نمایش هر دو رقم یک ۱ قرار می دهیم. (مثال: نمایش صفر شماری عددی سه رقمی ۴۱۲ به صورت ۰۰۰۰۱۰۱۰۰ است).

در میان اعداد اصلی با تعداد ارقام کمتر از ۴ ، چند عدد وجود دارند که تعداد رقم های آنها با تعداد رقم های نمایش صفر شماری شان برابر باشد؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۶ ه) ۸

۳۸. نمایش یک شماری یک عدد اصلی با تبدیل کردن همه صفرهای نمایش صفر شماری آن به یک و همه یک های نمایش صفر شماری آن به صفر به دست می آید. چند عدد اصلی وجود دارند که نمایش اصلی آنها عیناً مثل نمایش یک شماری آنها باشد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ∞

۳۹. آرایه A تا i به ترتیب با عددهای ۱ تا ۶ پر شده است. پس از اجرای الگوریتم زیر عدد ۶ در کدام خانه خواهد بود؟

۱ - به ازای i از ۱ تا ۱۳۷۵ کارهای زیر را انجام بده:

۱.۱ - به ازای j از ۱ تا ۳ این کار را انجام بده:

۱.۱.۱ - اگر $A[j]$ از $A[j + ۳]$ بزرگتر است، جایشان را عوض کن.

۲.۱ - به ازای j از ۱ تا ۵ این کار را انجام بده:

۱.۲.۱ - اگر $A[j]$ از $A[j + ۱]$ کوچک تر است، جایشان را عوض کن.

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

۴۰. رشته مخصوص را به صورت زیر تعریف می کنیم:

- a یک رشته مخصوص است.
- b یک رشته مخصوص است.
- اگر S یک رشته مخصوص باشد aSa و bSb نیز رشته های مخصوص هستند. کدام یک از خواص زیر در مورد رشته های مخصوص درست است؟

(الف) هر رشته مخصوص متقارن است

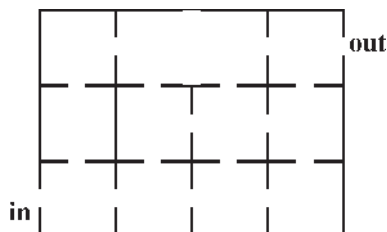
(ب) در هر رشته مخصوص قدر مطلق تفاوت تعداد a ها با تعداد b ها برابر یک است

(ج) هر رشته مخصوص به شکل WaW یا WbW است به طوری که W رشته مخصوص از a و b باشد

(د) «الف» و «ب» و «ج» درست هستند

(ه) «الف» و «ج» درست هستند

مسئله های بله - خیر



۴۱. آیا می توان از در ورودی تالار زیر وارد و از در

خروجی خارج شد به طوری که هر یک از غرفه ها

دقیقاً یک بار بازدید شوند؟

۴۲. افراد A و B و C و D در باره دروغگو یا راستگو بودن افراد x, y, z و W به این صورت اظهار نظر کرده اند:

• A می گوید: x دروغگو است یا z راستگو است.

• B می گوید: z دروغگو است یا w دروغگو است.

• C می گوید: x راستگو است یا y راستگو است.

• D می گوید: y دروغگو است یا w راستگو است.

آیا امکان دارد که همه اظهار نظرهای فوق درست باشند؟

۴۳. دو ماشین در اختیار داریم که هر یک، یک کارت را که بر روی آن یک عدد مثل a نوشته شده است، به عنوان ورودی دریافت می کند و یکی از آنها یک کارت که بر روی آن عدد $a + 3$ نوشته شده است و دیگری یک کارت که بر روی آن عدد $2a$ نوشته شده است را تولید می کند. در ابتدا یک کارت که بر روی آن عدد ۱ نوشته شده است در اختیار داریم آیا می توان با استفاده از این ماشین ها یک کارت ایجاد کرد که بر روی آن عدد ۱۲ نوشته شده باشد؟

۴۴. یک بازی را به این صورت تعریف می کنیم که بازیکن A در هر نوبت یک عدد فرد و بازیکن B در هر نوبت یک عدد زوج که قبلاً انتخاب نشده باشد را از بین عددهای ۱ تا ۶ انتخاب می کنند. اولین بازیکنی که پس از نوبتش، مجموع همه عددهای انتخاب شده توسط هر دو بازیکن بر ۳ قابل قسمت شود، بازنده است. آیا بازیکن اول می تواند طوری بازی کند که همواره برنده شود؟

۴۵. آیا می توان ۷ خانه از صفحه شطرنجی 8×8 را علامت گذاری کرد، به طوری که هر خانه علامت گذاری شده، با تعداد فردی از خانه های علامت گذاری شده همسایه باشد؟ (دو خانه تنها وقتی همسایه به حساب می آیند که یک ضلع مشترک داشته باشند).

۴۶. در اداره ای، هر روز هر یک از کارمندان در یک ساعت مشخص وارد اداره می شود و تا ساعت مشخصی در اداره می ماند. (ساعت کاری افراد مختلف می تواند متفاوت باشد). اگر دو نفر در یک زمان در اداره باشند، حتماً همدیگر را می بینند. در مورد پنج کارمند A, B, C, D و E می دانیم که:

● C, A کارمندان B و D را می بیند ولی E را نمی بیند.

● A و B هیچگاه همدیگر را نمی بینند.

● A ، کارمند D را و B ، کارمند E را می بیند.

آیا D و E همدیگر را می بینند؟

۴۷. در شکل زیر، نقطه ها متناظر با ۱۱ کار هستند و $A \rightarrow B$ بدین معنی است که قبل از اتمام کار A ، کار B



نمی تواند شروع شود. دو کارگر داریم که هر یک می تواند هر کار را در یک ساعت انجام دهد. آیا با استفاده از این دو کارگر می توان با رعایت شرط فوق، تمام کارها را در مدت حداکثر ۶ ساعت انجام داد؟

۴۸. آیا می توان ۵ نقطه با مختصات صحیح روی یک محور پیدا کرد که فاصله دو به دوی آنها (بدون ترتیب) عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ باشد؟

۴۹. آیا می توان عددهای صفر تا ۱۲۷ را به دو دسته چنان تقسیم کرد که هر دو عددی که نمایش آنها در مبنای دو دقیقاً در یک رقم با هم تفاوت دارند در یک دسته نباشند؟

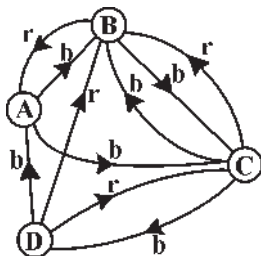
۵۰. در یک مسابقه شطرنج که به صورت دوره ای برگزار می شود (یعنی هر دو بازیکن با هم دقیقاً یک بار رو به رو می شوند) ۵ بازیکن A, B, C, D و E شرکت کرده اند. تاکنون نتایج زیر به دست آمده است:

A از B و C برده است و B و D با هم مساوی کرده اند. با توجه به این که هر برد ۱ امتیاز، مساوی ۰/۵ امتیاز و باخت صفر امتیاز دارد. آیا بازیکن B هنوز شانس قهرمانی دارد؟ (اگر دو تیم صدر جدول امتیاز مساوی داشته باشند، تیمی که دیگری را برده باشد قهرمان است و اگر نتیجه بازی آن دو مساوی بوده باشد هیچ کدام قهرمان نمی شوند).

۵۱. در بازی A ، دو بار تاس انداخته می شود و در صورتی که لااقل یک بار ۱ بیاید برنده می شویم. در بازی B ، چهار بار تاس انداخته می شود و در صورتی که لااقل دو بار ۱ بیاید برنده می شویم. آیا احتمال برد در بازی A بیشتر از احتمال برد در بازی B است؟

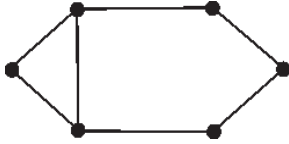
۵۲. آیا می توان ۱۳ زیر مجموعه $A_1, A_2, \dots, A_{13}$ از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ را طوری پیدا کرد که به ازای هیچ i و j ($i \neq j$)، شرط $A_i \subseteq A_j$ برقرار نباشد؟

۵۳. در شکل زیر خط هایی که با r مشخص شده اند، قرمز و آنهایی که با b مشخص شده اند آبی هستند. آیا با توجه



به جهت هایی که روی خط ها مشخص شده اند، مسیری از A به D وجود دارد که رنگ خط های آن به ترتیب آبی، آبی، آبی، قرمز و آبی باشد؟

۵۴. دو نفر این بازی را روی شکل زیر انجام می دهند هر کدام از این دو بازیکن در نوبت خودش یکی از دایره هایی را که تاکنون رنگ نشده است با یکی از دو رنگ آبی یا قرمز رنگ می کند، به شرطی که هیچگاه دو دایره ای که با یک خط به هم متصل اند با یک رنگ رنگ آمیزی نشوند. کسی که نتواند در نوبت خودش دایره ای را رنگ کند، بازنده بازی محسوب می شود. آیا بازیکن اول می تواند طوری بازی کند که همواره برنده شود؟



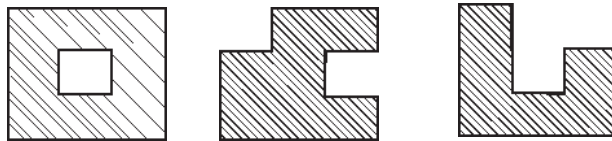
۵۵. تعداد ۱۶ سنگریزه و سه بازیکن داریم. بازیکن اول در هر نوبت می تواند ۱ یا ۲ یا ۳ سنگریزه بردارد و بازیکنان دوم و سوم هر کدام در هر نوبت ۱ یا ۲ سنگریزه. بازیکنی که آخرین سنگریزه را بردارد برنده است. آیا اگر بازیکنان دوم و سوم با هم متحد شوند می توانند بازیکن اول را شکست دهند و یکی از خودشان برنده شود؟

۵۶. در شکل زیر، در هر ردیف یک جایگشت دلخواه از عددهای ۱ تا ۵ را می نویسیم. سپس قدرمطلق تفاضل عددهایی را که زیر هم نوشته شده اند به دست می آوریم و پنج عدد به دست آمده را با هم جمع می کنیم. آیا این حاصل جمع ممکن است عدد ۷ باشد؟

_____	_____	_____	_____	_____
_____	_____	_____	_____	_____

۵۷. آیا می توان در هر یک از ۹ خانه خالی متوالی، یکی از عددهای ۲، ۳ یا ۵ را قرار داد، به طوری که هیچگاه حاصل ضرب چند عدد متوالی، یک مربع کامل نباشد؟

۵۸. آیا می توان حجمی ایجاد کرد که از پهلوی، روبه رو و بالا به شکل های زیر دیده شود؟



۵۹. ۸ سکه در یک ردیف قرار دارند. در هر حرکت می توان یک سکه را از روی دو سکه (مجاور یا روی هم) عبور داد به شرط آن که سومین سکه، بعد از آنها وجود داشته باشد تا روی آن بنشینند و یک ستون دو سکه ای تشکیل دهد. برای مثال در شکل زیر سکه های A و B می توانند روی سکه C قرار گیرند. آیا با ۴ حرکت می توان ۴ ستون دو سکه ای تشکیل داد؟



۶۰. شعبده بازی سه شیء الف، ب و ج را در مقابل سه فرد a، b و c قرار می دهد و از آنها می خواهد که هر کدام یکی از ۳ شیء را بدون اطلاع شعبده باز بردارند. سپس شعبده باز به فرد a یک مداد، به فرد b دو مداد و به فرد c سه مداد می دهد. آنگاه ۳۰ مداد دیگر را در ظرفی قرار می دهد و از سه فرد مزبور می خواهد که در غیاب او، آن که شیء الف را دارد به همان تعدادی که قبلاً مداد گرفته است از مدادهای داخل ظرف بردارد، آن که شیء ب را برداشته است به اندازه دو برابر تعداد مدادهایی که قبلاً گرفته است، مداد بردارد و آن که شیء ج را دارد چهار برابر تعداد مدادهایی که دارد مداد بردارد. شعبده باز از اتاق خارج می شود و پس از بازگشت تعداد مدادهای باقیمانده در ظرف را ۱۸ عدد می بیند. آیا شعبده باز می تواند با این اطلاعات مشخص کند که هر فردی چه شیئی را در اختیار دارد؟

پاسخ تشریحی

هفتمین المپیاد کامپیوتر

۱. تمام مثلث های موجود در شکل قائم الزاویه می باشند. ضلع مربع بزرگ را ۲ در نظر می گیریم. به تعداد ۱۶ عدد مثلث قائم الزاویه با طول وتر واحد وجود دارد. به تعداد ۱۶ عدد مثلث با ضلع زاویه قائمه واحد وجود دارد. (در داخل هر مربع به ضلع واحد ۴ عدد). به تعداد ۸ مثلث با طول وتر ۲ وجود دارد. (۴ عدد از آنها رأسشان اواسط اضلاع مربع و وترهایشان اضلاع مربع می باشد و ۴ عدد دیگر از آنها رأسشان اواسط اضلاع مربع بوده و وترهایشان پاره خط هایی هستند که اواسط اضلاع مقابل را به هم وصل می کنند). و بالاخره به تعداد ۴ عدد مثلث که طول ضلع زاویه قائمه آنها برابر با ۲ بوده و رأسشان رأس مربع و وترهایشان قطرهای مربع می باشند وجود دارد. در نتیجه در مجموع ۴۴ مثلث در شکل دیده می شود.

۲. I صحیح است زیرا اگر x عدد صحیح باشد هم $[x]$ و هم $\lceil x \rceil$ هر دو با خود x برابرند.

II نیز صحیح است زیرا اگر x صحیح نباشد آن را به صورت $x = m + r$ می نویسیم که در آن m یک عدد صحیح است و $0 < r < 1$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\lceil x \rceil = \lceil m + r \rceil = m + 1, \quad \lfloor x \rfloor = \lfloor m + r \rfloor = m$$

III غلط است. مثال نقض $x = 4$ و $y = 2/2$ می باشد در این صورت خواهیم داشت؛

$$\lfloor 4 \rfloor - \lceil 2/2 \rceil = 4 \times 3 = 12$$

$$\lceil 4 \rceil - \lfloor 2/2 \rfloor = 4 \times 2 = 8$$

IV صحیح است. زیرا اگر x صحیح باشد در این صورت خواهیم داشت:

$$-[x] = -x$$

$$[-x] = -x$$

و اگر x صحیح نباشد آن را به صورت $x = m + r$ می نویسیم که در آن m یک عدد صحیح بوده و $0 < r < 1$ در این صورت خواهیم داشت:

$$-[x] = -[m + r] = -m$$

$$[-x] = [-m - r] = [-m + 1 - 1 - r] = [(-m - 1) + (1 - r)]$$

چون $0 < 1 - r < 1$ ، پس خواهیم داشت:

$$[-x] = (-m - 1) + 1 = -m$$

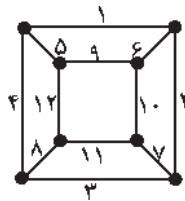
۳. بدیهی است که هر چه تعداد اعضای زیرمجموعه های انتخابی کمتر باشد بهتر است. بدین منظور برای انتخاب زیرمجموعه های فوق زیرمجموعه های ۰، ۱ و ۲ عضوی را که تعداد آنها $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ در مجموع ۱۶ زیرمجموعه می باشند را انتخاب می کنیم.

۴. مطابق شکل سیم ها را از ۱ تا ۱۲ شماره گذاری می کنیم دسته سیم هایی که می توانیم حذف کنیم تا به منظور فوق برسیم عبارتند از:

$$(2, 4, 10, 12), (2, 4, 9, 11), (1, 7, 8, 9), (1, 3, 10, 12), (1, 3, 9, 11),$$

$$(5, 6, 7, 8), (4, 6, 7, 12), (3, 5, 6, 11), (2, 5, 8, 10)$$

پس مجموعاً ۹ حالت ممکن است.



۵. خانه های رنگ شده را به شکل

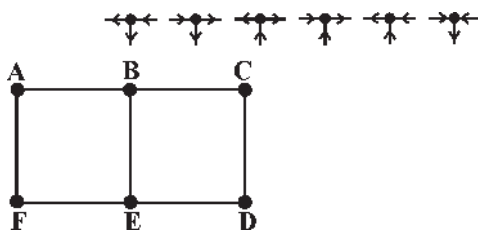
	۴	
۱	۲	۳

 شماره گذاری می کنیم. اگر خانه ۴ بالای شکل

باشد بدیهی است که خانه های ۱، ۲ و ۳ در سطرها ۱، ۲، ۳ و ۴ شکل اصلی می توانند قرار گیرند و خانه های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب در ستون های (۱، ۲، ۳)، (۱، ۳، ۴) و (۳، ۴، ۵) می توانند جابه جا شوند پس در این حالت مجموعاً $4 \times 3 = 12$ نوع رنگ آمیزی می تواند باشد. اگر خانه ۴ پایین، سمت

راست و یا سمت چپ شکل باشد نیز ۱۲ نوع رنگ آمیزی موجود خواهد بود. پس کل تعداد حالات برابر ۱۲×۴ یعنی ۴۸ حالت خواهد بود.

۶. با توجه به شکل بدیهی است که جهت مسیرهای AB، AF و FE وابسته به همدیگر و نیز جهت مسیرهای BC، CD و ED وابسته به هم می باشند؛ یعنی اگر جهت مسیر AB از A به سمت B باشد، آنگاه مسیر FA از F به سمت A و مسیر EF از E به سمت F خواهند بود فلذا کافی است جهت مسیرهای منتهی به B را تعیین کنیم در آن صورت جهت مسیرهای دیگر خود به خود تعیین خواهند شد. پس تعداد حالات ممکن برابر با تعداد حالاتی است که می توان جهت مسیرهای منتهی به B را تعیین کرد. جهت مسیرهای منتهی به B یکی از حالات زیر است:

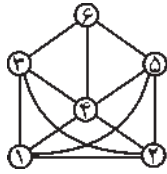


پس تعداد حالات ممکن برابر با ۶ می باشد.

۷. بدیهی است که هم مجموع امتیازات امارات و هم عربستان هر دو فرد است از طرف دیگر تعداد کل بازی ها ۶ بازی می باشد که معلوم می شود مجموع امتیازات چهار تیم برابر با ۱۲ می باشد.

پس امتیازات هر کدام از تیم های امارات و عربستان $(۱, ۳)$ ، $(۱, ۵)$ ، $(۳, ۵)$ می تواند باشد. $(۱, ۳)$ نمی تواند باشد زیرا در این صورت تیم اول ۶ امتیاز و تیم کویت ۲ امتیاز خواهند داشت که با آخر بودن کویت در تضاد است. $(۱, ۵)$ نیز نمی تواند باشد زیرا در این صورت به تیم اول ۶ امتیاز و به تیم آخر صفر امتیاز خواهد رسید. یعنی امتیاز چهار تیم به ترتیب ۶، ۵، ۱ و ۰ خواهد بود که امکان ندارد زیرا نتیجه بازی تیم های اول و دوم تساوی نمی باشد پس یکی از آنها صفر امتیاز از بازی می گیرد و حداکثر امتیازش ۴ می تواند باشد. پس نتایج مسابقات به شکل زیر است:

۵ امتیاز	الف) عربستان (یا امارات)
۴ امتیاز	ب) ایران
۳ امتیاز	ج) امارات (یا عربستان)
۰ امتیاز	د) کویت



۸. مینیمم حالت برابر با ۲۴ است. یکی از حالاتی که مینیمم را تولید می کنند در شکل مقابل آمده است:

۹. اگر کار شماره ۲ را در نظر بگیریم بقیه ۶ کار به دو صورت:

$1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 7$ و $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7$

قابل انجام است. حال اگر توجه کنیم کار شماره ۲ بعد از کار شماره ۱ در هر مرحله قابل اجراست؛ یعنی بر هر دو مورد بالا ۶ حالت ممکن است اتفاق افتد (یعنی کار شماره ۲ بعد از هر کدام از کارهای شماره ۱، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ می تواند انجام گیرد). پس در کل، تعداد حالات ممکن برای انجام پروژه ۱۲ می باشد.

۱۰. شکل برداشته شده یک متوازی الاضلاع $m \times n$ می شود. چون ۲۵ را فقط به صورت 5×5 می توان



نوشت پس متوازی الاضلاع حذف شده به شکل مقابل می باشد که تکمیل آن برای تبدیل به مثلث متساوی الاضلاع فقط به یک طریق امکان پذیر است که در آن مثلث $n = 9$ و گوی حذف شده پنجمین گوی قاعده می باشد.

۱	۳	۲	۴
۴	۲	۱	۳
۲	۴	۳	۱
۳	۱	۴	۲

۱۱. عدد موجود در خانه مورد نظر ۳ می باشد. (مطابق جدول زیر)

۱۲. موقعیت انبار را در نقطه D در نظر می گیریم و فرض می کنیم فاصله D تا B برابر با x باشد در این صورت فاصله D تا C برابر با $4 - x$ خواهد بود (اگر D بین A و B باشد این فاصله برابر با $4 + x$ خواهد بود).

کل هزینه مصرفی عبارت خواهد بود با:



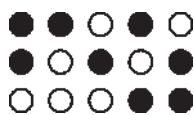
$$e = (1+x)200 + x \times 300 + (4-x)400$$

$$= 200 + 200x + 300x + 1600 - 400x = 100x + 1800$$

بدیهی است مقدار فوق وقتی مینیمم خواهد بود که مقدار x برابر با صفر باشد یعنی موقعیت منبع در

محل دهکده B باشد.

۱۳. اگر ستونی هر سه دایره اش پر باشد در این صورت واضح است که از هر کدام از چهار ستون دیگر فقط یکی از دایره هایشان می تواند پر باشد زیرا در غیر این صورت مربع یا مستطیل با چهار رأس پر پیدا خواهد شد. در این صورت 4×2 دایره سفید موجود خواهد بود که معلوم می شود ۷ دایره پر وجود دارد. و اما اگر هیچ ستونی هر سه دایره اش پر نباشد در این صورت یکی از ستون ها (مثلاً اول) که دو دایره اش پر می باشد را در نظر می گیریم. به عنوان مثال فرض می کنیم دو سطر اول ستون اول پر باشند بدیهی است که در چهار ستون دیگر دو سطر اول و دوم توأمأ نباید پر باشند و همچنین از ۴ دایره مربوط به

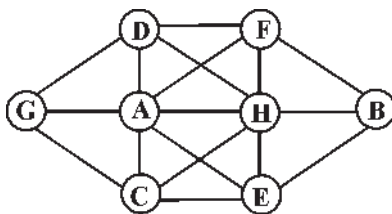


سطر آخر چهار ستون پایانی حداکثر ۲ دایره می تواند پر باشد. پس کل

دایره های پر $2 + 4 + 2$ یعنی ۸ دایره می تواند باشد که نمونه ای از آن در

شکل زیر نمایان است:

۱۴. در مرحله اول اعداد فرد خط خورده و مضارب ۲ باقی می ماند. در مرحله دوم مضارب ۴ (2^2) باقی می ماند. در مرحله سوم مضارب ۸ (2^3) باقی می ماند و ... و بالاخره در مرحله دهم 1024 (2^{10}) باقی می ماند.



۱۵. با توجه به جدول مقابل در خانه مورد نظر حرف G

می تواند باشد.

۱۶. یک عدد موجود است که هر چهار رقم آن ۳ باشد. ($\frac{4!}{4!}$)

چهار عدد موجود است که سه رقم آن ۵ و یک رقم آن ۳ باشد. ($\frac{4!}{3!1!}$)

چهار عدد موجود است که سه رقم آن ۷ و یک رقم آن ۳ باشد. ($\frac{4!}{3!1!}$)

شش عدد موجود است که دو رقم آن ۵ و دو رقم دیگرش ۷ باشد. ($\frac{4!}{2!2!}$)

و بالاخره دوازده عدد موجود است که دو رقم آن ۳، یک رقم آن ۵ رقم دیگرش برابر با ۷ باشد. ($\frac{4!}{2!1!1!}$)

پس کل اعداد مورد نظر برابر با ۲۷ می باشد.

۱۷. اعداد را به صورت ۱۳ و e و d و c و b و a و ۱ در نظر می گیریم. خواهیم داشت:

$$a = \frac{1+b}{2} + 1 \Rightarrow 1+b = 2a-2 \Rightarrow b = 2a-3$$

$$b = \frac{a+c}{2} + 1 \Rightarrow 2a-3 = \frac{a+c}{2} + 1 \Rightarrow a+c = 4a-8 \Rightarrow c = 3a-8$$

$$c = \frac{b+d}{2} + 1 \Rightarrow 3a-8 = \frac{2a-3+d}{2} + 1 \Rightarrow 2a-3+d = 6a-18 \Rightarrow d = 4a-15$$

$$d = \frac{c+e}{2} + 1 \Rightarrow 4a-15 = \frac{3a-8+e}{2} + 1 \Rightarrow 3a-8+e = 8a-32 \Rightarrow e = 5a-24$$

$$e = \frac{d+13}{2} + 1 \Rightarrow 5a-24 = \frac{4a-15+13}{2} + 1 \Rightarrow 4a-2 = 10a-50 \Rightarrow 6a = 48 \Rightarrow a = 8$$

پس جمله پنجم یعنی d برابر با ۱۵-۸×۴ یعنی ۱۷ می باشد.

۱۸.

$$S = |1-2| + |3-4|$$

$$+ |1-2| + |4-3|$$

$$+ |1-3| + |2-4|$$

$$+ |1-3| + |4-2|$$

$$+ \dots$$

$$+ \dots$$

$$+ |4-3| + |1-2|$$

$$+ |4-3| + |2-1|$$

$$\Rightarrow S = 8 \times \{|1-2| + |1-3| + |1-4| + |2-3| + |2-4| + |3-4|\} = 80$$

۱۹. رشته های مورد نظر به سه صورت x_1y_1 یا $1^01^01y_2$ یا x_2y_2 می باشند. چون

برای هر کدام از x_i و y_i ها دو حالت ۰ و ۱ را می توانیم اختصاص دهیم پس برای هر کدام از حالات فوق

$2 \times 2 = 4$ رشته می توانیم بسازیم که در مجموع ۱۲ رشته می شود ولی در یک مورد رشته های ساخته

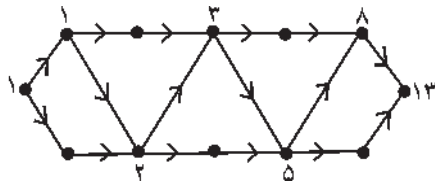
شده در دو حالت اول با هم یکی می شوند و آن موقعی است که حالت زیر اتفاق بیفتد.

$$x_1y_1 = 01 \text{ و } x_2y_2 = 10$$

که با کسر این حالت تعداد رشته های مورد نظر ۱۱ رشته خواهد بود.

۷۵

پاسخ تشریحی هفتمین المپیاد کامپیوتر



۲۰. تعداد طرق رسیدن به هر نقطه برابر مجموع
تعداد طرقی است که به گره های قبلاز آن می توان
رسید. در شکل مقابل تعداد طرق رسیدن به هر
نقطه بر روی آن نوشته شده است:

۲۱. مطابق با جدول زیر خانه ها را نام گذاری می کنیم.

a	b	c	۹	d	e	f	x	g	h	i	۷	j	k

طبق فر داریم:

$$h + i + 7 = 20 \Rightarrow g = 7$$

$$g + h + i = 20$$

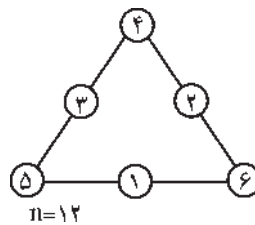
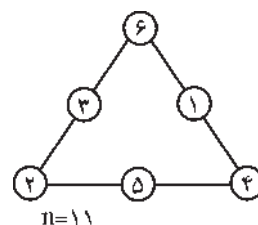
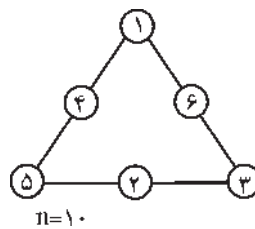
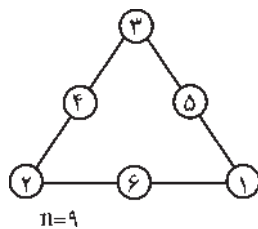
$$9 + d + e = 20 \Rightarrow f = 9$$

$$d + e + f = 20$$

و همچنین

$$x = 4 \text{ پس } f + x + g = 20$$

۲۲. n هر کدام از اعداد ۱۰، ۱۱، ۱۲ می توانند باشند که نمونه ای برای هر کدام از آنها در اشکال زیر مشخص است.



۲۳. واضح است که به طور متوسط $\frac{75}{100} \times 10000$ یعنی 7500 بار شرط $A > B$ محقق می شود. پس به طور متوسط F ، 7500 بار محاسبه می شود. از 2500 حالت باقیمانده به طور متوسط 50 درصد $C > D$ می شود. پس به طور متوسط $\frac{50}{100} \times 2500$ بار یعنی 1250 بار مقدار G محاسبه می شود.

۲۴. کوتاه ترین مسیر در شکل زیر نشان داده شده است که مجموع اعداد مورد نظر برابر با 37 می باشد.

		۴	→ ۱
		۶	
۵	۱۱	۹	
۱۸			

۲۵. خانه های جدول را مطابق شکل نامگذاری می کنیم. خواهیم داشت:

$$x + 3 + c = 3 + a + b \Rightarrow b - c = x - a$$

$$a + c + 12 = a + b + 3 \Rightarrow b - c = 9 \Rightarrow x - a = 9$$

$$a + d + 7 = x + 7 + 12 \Rightarrow d = 12 + x - a = 21$$

$$3 + a + b = 7 + a + d \Rightarrow b = 28 - 3 = 25$$

$$x + a + c = 12 + b + c \Rightarrow x + a = 12 + 25 = 37$$

x	۷	۱۲
۳	a	b
c	d	e

۲۳	۷	۱۲
۳	۱۴	۲۵
۱۶	۲۱	۵

با مقایسه با تساوی $x - a = 9$ و $x = 23$ و $a = 14$

حاصل خواهند شد. پس جدول به شکل روبه رو خواهد شد.

۲۶. به ازای $1, 2, \dots, 16$ z خواهیم داشت:

$$A(1) = 0$$

$$A(2) = 1$$

$$A(3) = 3$$

$$A(4) = 2$$

$$A(5) = 6$$

$$A(6) = 7$$

$$A(7) = 5$$

$$A(8) = 4$$

$$A(9) = 12$$

$$A(10) = 13$$

$$A(11) = 15$$

$$A(12) = 14$$

$$A(13) = 10$$

$$A(14) = 11$$

$$A(15) = 9$$

$$A(16) = 8$$

غلط بودن گزینه های الف، د و ه واضح است. برای به دست آوردن $A(2^n + 1)$ تا $A(2^{n+1})$ باید مقادیر $A(2^n)$ تا $A(1)$ را (نه به ترتیب) با مقدار ثابت 2^n جمع کرد. پس اگر $A(2^n)$ تا $A(1)$ عضو تکراری نداشته باشد به استقرا معلوم می شود که $A(2^n + 1)$ تا $A(2^{n+1})$ نیز عضو تکراری نخواهد داشت، ضمن اینکه به عنوان مثال از $A(1)$ تا $A(8)$ عضو تکراری وجود ندارد (پایه استقراء). پس گزینه ج نیز غلط می باشد.

و اما گزینه ب صحیح است. استدلال، مشابه استدلال فوق است چون هر دو عدد متوالی از $A(1)$ تا $A(8)$ در مبنای ۲ دقیقاً در یک رقم متفاوت هستند پس اگر آنان را با 2^3 (در مبنای ۲ به صورت ۱۰۰۰) جمع کنیم فقط رقم آخر از سمت چپ آنان از صفر به ۱ تغییر خواهند یافت ...

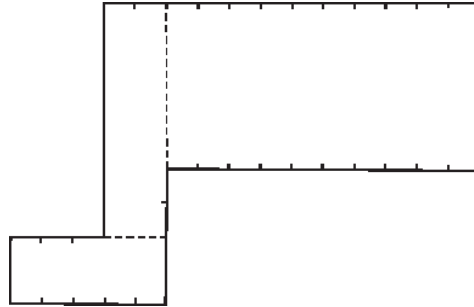
۲۷. از عدد ۰۰۰ تا ۹۹۹ مجموعاً ۳۰۰۰ رقم به کار رفته است چون از هر رقم به تعداد یکسانی به کار رفته است پس از ۰ تا ۹۹۹ مجموعاً $\frac{3000}{10}$ یعنی ۳۰۰ رقم ۱ به کار رفته است به همین ترتیب از ۱۰۰۰ تا ۱۹۹۹ به تعداد ۳۰۰ + ۱۰۰۰ مرتبه رقم ۱ به کار رفته است. از ۲۰۰۰ تا ۲۹۹۹ نیز ۳۰۰ مرتبه رقم ۱ به کار رفته است. پس مجموعاً از ۰ تا ۲۹۹۹ به تعداد ۱۹۰۰ بار رقم ۱ به کار رفته است. از ۳۰۰۰ تا ۳۲۰۰ مجموعاً ۱۴۰ بار رقم ۱ به کار رفته است. پس تعداد صفحات کتاب در همین محدوده قرار دارد.

۲۸. در یک شبکه $m \times n$ برای رفتن از گوشه سمت چپ و پایین به گوشه سمت راست و بالا با شرایط مسأله (جهت حرکت فقط به سمت راست یا بالا) $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ مسیر وجود دارد. زیرا اگر حرکت به سمت بالا را با U و حرکت به سمت راست با R نمایش دهیم تعداد مسیرها برابر با تعداد حالات چیدن m عدد U و n عدد R در پیش همدیگر می باشد که برابر با $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ می باشد. در این مسأله از C به B مجموعاً $\frac{11!}{4!7!}$ مسیر و از A به C مجموعاً $\frac{3!}{2!1!}$ مسیر وجود دارد. همین طور تعداد مسیرهای موجود بین C و D برابر با $\frac{6!}{2!4!}$ و تعداد مسیرهای بین D و B برابر با $\frac{5!}{2!3!}$ می باشد. لذا تعداد مسیرها با شرایط مسأله برابر خواهد بود با:

$$\frac{3!}{2!1!} \times \left[\frac{11!}{4!7!} - \frac{5!}{2!3!} \times \frac{6!}{2!4!} \right] = 540$$

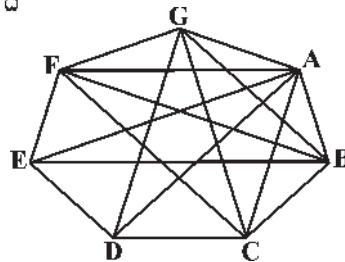
۲۹. باغ به شکل زیر می باشد، اگر آن را به سه مستطیل تقسیم کنیم مساحت آن برابر خواهد بود با:

$$۵ \times ۱۰ + ۲ \times ۷ + ۲ \times ۵ = ۷۴$$



۳۰. قطرهای گذرنده، از رأس A را در نظر می گیریم. این قطرهای بر روی قطرهای GC, BE, BF, BG و GD و CF به ترتیب ۴، ۳، ۲، ۳ و ۲ نقطه تلاقی ایجاد می کنند و در نتیجه تعداد مثلث های مورد نظر متناظر به رأس A برابر خواهد بود با:

$$\binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} + \binom{2}{2} = ۱۵$$



پس تعداد کل مثلث های مورد نظر برابر با ۷×۱۵ یعنی ۱۰۵ مثلث خواهد بود.

۳۱. اگر داخلی ترین شاخه مارپیچ را x عدد چوب کبریت در نظر بگیریم تعداد کل چوب کبریت ها پس از n پیچ برابر خواهد بود با:

$$m = (x-1) + (2+x) + (3+x+1) + (4+x+2) + \dots + (n+x+n-2)$$

مرحله اول مرحله دوم مرحله سوم مرحله چهارم مرحله nام

$$\Rightarrow m = nx + n(n-1) - 1 \Rightarrow ۸۷ = n(x+n-1) - 1 \Rightarrow n(x+n-1) = ۸۸$$

۸۸ را به سه نوع می توان به صورت حاصل ضرب عوامل مثبتش نوشت:

I. $۸۸ = ۲ \times ۴۴$

II. $۸۸ = ۴ \times ۲۲$

III. $۸۸ = ۸ \times ۱۱$

I. $n(x+n-1) = 2 \times 44 \Rightarrow n=2, x=43$ پس در هر مورد خواهیم داشت:

در این حالت مستطیل مورد نظر 1×43 خواهد بود:

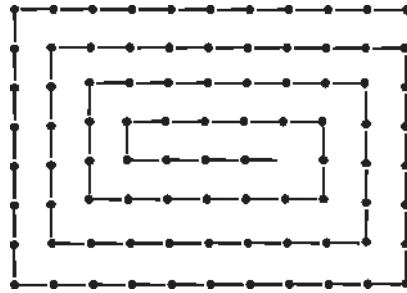
II. $n(x+n-1) = 44 \times 2 \Rightarrow n=4, x=19$

در این حالت مستطیل مورد نظر 3×21 خواهد بود:

III. $n(x+n-1) = 8 \times 11 \Rightarrow n=8, x=4$

در این حالت مستطیل مورد نظر 7×10 خواهد بود که یکی از جوابهاست و جواب مورد انتظار

مسئله همین حالت بوده است. برای این حالت شکل زیر رسم شده است:



۳۲. ارزش سکه ها به ترتیب برابر با ۲، ۴، ۱۱ می باشند که در بار اول برای تشکیل ۲۸ ریال از هر کدام از دو سکه اول یک عدد و از سکه سوم دو عدد استفاده شده است. در بار دوم برای تشکیل ۲۱ ریال از سکه اول سه عدد و از هر کدام از سکه های دیگر یک عدد استفاده شده است.

۳۳. در ابتدا باید ۳ جعبه از ۱۰ جعبه فوق را انتخاب کنیم تا خالی باشند. قرار دادن ۱۰ توپ در هفت جعبه به طوری که در هر جعبه حداقل یک توپ باشد برابر با تعداد جواب معادله:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 10$ در مجموعه اعداد طبیعی می باشد که برابر است با $\binom{9}{6}$. پس تعداد حالات مطلوب برابر با $\binom{10}{3} \binom{9}{6}$ می باشد که حاصل آن با $5! \binom{9}{3}$ مساوی است.

۳۴. تعداد سیب ها در هر کدام از سبدها را در مرحله اول k می گیریم. اگر تعداد سیب ها در هر کدام از سبدها را در انتها برابر با $\frac{x}{3}$ و $\frac{x}{3}$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 3k \Rightarrow 11x = 18k$$

کمترین مقداری که x و k به خود می پذیرند به ترتیب برابر با ۱۸ و ۱۱ می باشد. یعنی در ابتدا تعداد سیب ها در هر کدام از سبدها برابر با ۱۱ بوده است. بدیهی است که غیر از این حالت جواب دیگری وجود ندارد چرا که اختلاف k و x حداکثر باید ۷ باشد (چون بعد از سه مرحله به تعداد سیب های یک سبد حداکثر ۷ سیب اضافه شده است) در صورتی که اگر $x > ۱۸$ باشد در این صورت اختلاف x و k بیشتر از ۷ می شود.

۳۵. در هر مرحله مقدار ثبات را می نویسیم:

$$\begin{array}{lll} ۱) ? = b & ۲) ? = bc & ۳) t_1 = bc \\ ۴) ? = bc + a & ۵) t_2 = bc + a & ۶) ? = (bc + a)^2 \\ ۷) ? = (bc + a)^2 + bc & ۸) z = (bc + a)^2 + bc & \end{array}$$

۳۶. در هر مرحله مقدار ثبات را می نویسیم:

$$\begin{array}{lll} ۱) ? = a & ۲) ? = a + b & ۳) x = a + b \\ ۴) ? = (a + b)^2 & ۵) z = (a + b)^2 & ۶) ? = (a + b)^2 + (a + b) \\ ۷) ? = a(a + b)^2 + a(a + b) & & \\ ۸) ? = [a(a + b)^2 + a(a + b)](a + b)^2 = a(a + b)^4 + a(a + b)^3 & & \end{array}$$

۳۷. در میان اعداد یک رقمی فقط عدد ۱ چنین خاصیتی را دارد که نمایش صفرشماری آن ۰ می باشد. در میان اعداد دو رقمی اعداد ۰۱ و ۱۰ چنین خاصیتی را دارند که نمایش صفرشماری آنان به ترتیب برابر با ۱۰ و ۰۱ می باشند. در میان اعداد سه رقمی اعداد ۰۰۱، ۰۱۰، ۱۰۰ چنین خاصیتی را دارند که نمایش صفرشماری آنان به ترتیب برابر با ۱۱۰، ۱۰۱ و ۰۱۱ می باشند. پس در مجموع ۶ عدد دارای خاصیت مورد اشاره می باشد.

۳۸. تمام اعدادی که از n صفر و یک تشکیل شده باشند چنین خاصیتی را دارند پس ∞ عدد با خاصیت مورد نظر وجود دارد.

۳۹. خروجی برنامه بعد از مرحله ۱.۱.۱- و خروجی نهایی برای $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ در جدول زیر آمده است:

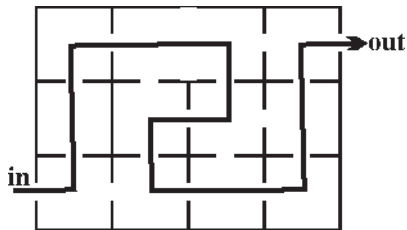
	$A(1)$	$A(2)$	$A(3)$	$A(4)$	$A(5)$	$A(6)$
	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$i=1$	{	۱	۲	۳	۴	۵
		۲	۳	۴	۵	۶
$i=2$	{	۲	۳	۱	۵	۶
		۳	۲	۵	۶	۱
$i=3$	{	۳	۲	۱	۶	۴
		۳	۲	۶	۴	۵
$i=4$	{	۳	۲	۱	۴	۵
		۳	۲	۴	۵	۶
$i=5$	{	۳	۲	۱	۵	۶
		۳	۲	۵	۶	۴
$i=6$	{	۳	۲	۱	۶	۴
		۳	۲	۶	۴	۵

همان طور که مشاهده می شود خروجی برنامه به ازای $i=2$ و $i=5$ با یکدیگر، و همچنین خروجی برنامه به ازای $i=3$ و $i=6$ نیز با یکدیگر برابر می شوند. یعنی خروجی برنامه برای $i=3k$ ($k \geq 2$) همان خروجی برنامه به ازای $i=3$ و خروجی برنامه برای $i=3k+1$ ($k \geq 2$) همان خروجی برنامه به ازای $i=4$ و بالاخره خروجی برنامه برای $i=3k+2$ ($k \geq 1$) همان خروجی برنامه به ازای $i=2$ می باشد و چون $1375 = 3k + 1$ پس خروجی برنامه به ازای $i=1375$ همان خروجی برنامه به ازای $i=4$ می باشد، فلذا عدد ۶ در خانه پنجم قرار دارد.

۴۰. گزینه الف درست است، زیرا a و b هر دو متقارن هستند. اگر S متقارن باشد، آنگاه $S' = aSa$ و یا $S' = bSb$ نیز متقارن خواهد بود.

گزینه ب نادرست است زیرا aaa رشته مخصوص است و تفاوت تعداد a ها با تعداد b ها برابر با ۱ نیست. گزینه ج نادرست است. به عنوان مثال های نقض می توان به رشته های مخصوص baaab و babab اشاره کرد که هیچ کدام به صورت waw یا wbw نیستند.

پس معلوم می شود که در نهایت گزینه «الف» درست است.



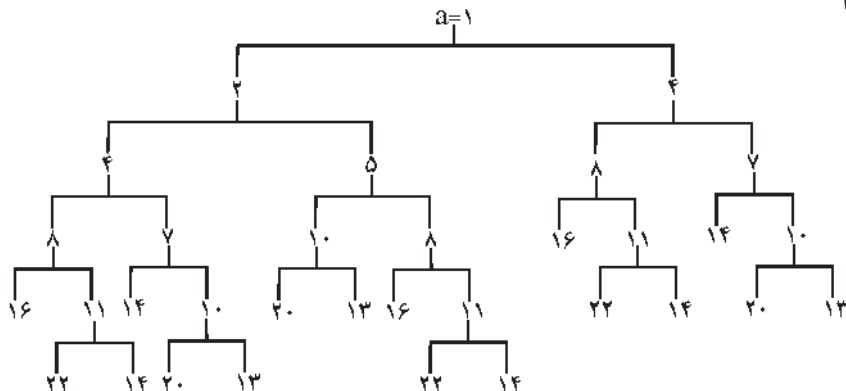
۴۱. مسیر مورد نظر در شکل زیر مشخص است.

۴۲. اگر یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد آنگاه هر چهار نفر A, B, C و D اظهار نظر درستی کرده‌اند.

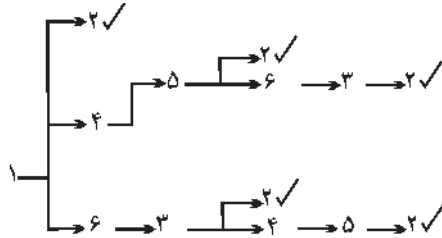
حالت اول	حالت دوم
X: راستگو	X: دروغگو
Y: دروغگو	Y: راستگو
Z: راستگو	Z: دروغگو
W: دروغگو	W: راستگو

۴۳. نمودار زیر را به ازای $a = 1$ رسم می‌کنیم هر کجا خروجی بزرگتر از ۱۲ شد آن شاخه را ادامه

نمی دهیم:

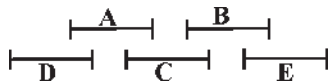


۴۴. در نمودار زیر جواب مشخص است:



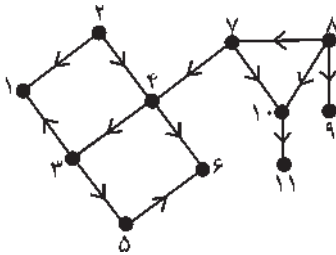
۴۵. اگر a یا b در ضلع x همسایه باشد بدیهی است که در شمارش تعداد اضلاعی که باعث همسایگی دو خانه شده اند اضلاعی مانند x دوبار حساب می شوند. پس اگر تعداد کل اضلاع ۷ خانه را که باعث همسایگی آنان با خانه های علامت گذاری شده دیگر شده اند را بشماریم باید زوج باشد. پس هر کدام از ۷ خانه نمی تواند با تعداد فردی از خانه های علامت گذاری شده همسایه باشد. زیرا تعداد ۷ تا عدد فرد هرگز زوج نمی شود.

۴۶. شکل زیر نمودار ساعت کاری آن پنج نفر را نشان می دهد:



۴۷. کارها را مطابق شکل از ۱ تا ۱۱ شماره گذاری می کنیم و در هر ساعت کاری که هر کدام از دو نفر باید انجام بدهند را مشخص می کنیم:

	نفر اول	نفر دوم
ساعت اول :	۲	۸
ساعت دوم :	۷	۹
ساعت سوم :	۱۰	۴
ساعت چهارم :	۱۱	۳
ساعت پنجم :	۵	۱
ساعت ششم :	۶	



۴۸. نقاط را از چپ به راست x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 می نامیم. در این صورت مجموع دویه دوی آنها برابر

خواهد بود با:



$$(i \neq j) \sum_{i,j} x_i x_j = 4x_1 x_2 + 6x_2 x_3 + 6x_3 x_4 + 4x_4 x_5$$

$$= 2(2x_1 x_2 + 3x_2 x_3 + 3x_3 x_4 + 2x_4 x_5) = 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 47$$

در تساوی فوق سمت راست عددی فرد و سمت چپ عددی زوج است. پس تساوی هرگز برقرار نیست.

۴۹. اعداد از صفر تا ۱۲۷ در مبنای ۲ به صورت ۰۰۰۰۰۰ تا ۱۱۱۱۱۱ نمایش داده می شوند. به جای نوشتن این ۱۲۸ عدد به ترتیب صعودی، کافی است آنان را چنان نوشت که هر دو عدد متوالی دقیقاً در یک رقم متفاوت باشند. در این صورت اگر اعداد به دست آمده یک در میان در یک رقم متفاوت باشند در این صورت اگر اعداد به دست آمده یک در میان در یک دسته و باقیمانده اعداد را در دسته دیگر قرار دهیم مسلم است که در یک دسته هیچ دو عدد پیدا نمی شود که دقیقاً در یک رقم با هم تفاوت داشته باشند. یا به طریق دیگر می توان مسأله را بیان کرد به این صورت که اعدادی که دارای تعداد زوجی «۱» هستند را در یک دسته و اعدادی که دارای تعداد فردی «۱» هستند را در دسته دیگر قرار می دهیم. بدیهی است که در یک دسته هرگز دو عدد نمی توان یافت که دقیقاً در یک رقم با هم تفاوت داشته باشند. زیرا چنین دو عددی در تعداد یک هایشان فقط یک واحد اختلاف دارند.

	A	B	C	D	E	امتیاز
A		A	A	D	E	۲
B	A		B	—	B	۲/۵
C	A	B		C	C	۲
D	D	—	C		—	۲
E	E	B	C	—		۱/۵

۵۰. اگر جدول اتمام بازی ها به شکل مقابل باشد بدیهی است که B قهرمان می شود. (تیم های نوشته شده در جدول یعنی تلاقی یک سطر با ستون نشانگر تیم برنده آن بازی است و «—» نشانگر آن است که در بازی آن سطر و ستون برنده و بازنده ای وجود ندارد و نتیجه بازی تساوی است.)

۵۱. تعداد حالاتی که در بازی A حداقل یک بار ۱ بیاید برابر است با:

تعداد حالاتی که دوبار یک بیاید + تعداد حالاتی که دقیقاً یک بار یک بیاید:

$$= \binom{2}{1} \binom{5}{1} + 1 = 11$$

پس احتمال برد در بازی A برابر $\frac{11}{6^2}$ می باشد.

تعداد حالاتی که در بازی B حداقل دوبار ۱ بیاید برابر است با:

تعداد حالاتی که چهار بار یک بیاید + تعداد حالاتی که دقیقاً سه بار یک بیاید + تعداد حالاتی که

دقیقاً ۲ بار یک بیاید:

$$\left[\binom{4}{2} \binom{5}{1} + \binom{4}{2} \binom{5}{2} \times 2 \right] + \left[\binom{4}{3} \binom{5}{1} + \binom{4}{4} \binom{5}{0} \right] = 163$$

پس احتمال برد در بازی B برابر $\frac{163}{6^4}$ می باشد.

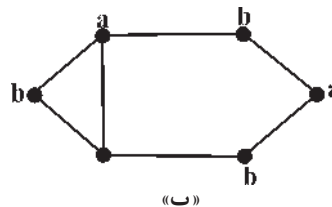
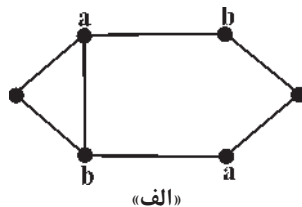
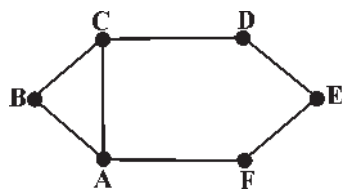
چون $\frac{163}{6^4} < \frac{11}{6^2}$ پس احتمال برد در بازی A بیشتر است.

۵۲. حداکثر ۱۰ مجموعه با خاصیت مورد نظر می توان پیدا کرد (زیرمجموعه های ۲ عضوی یا زیرمجموعه های سه عضوی مجموعه).

۵۳. زیرا قسمت آخر (پنجم) مسیر مورد نظر باید آبی بوده و به D ختم شود که تنها مسیر CD می باشد. قسمت ماقبل آخر (چهارم) مسیر مورد نظر باید قرمز بوده و به C ختم شود که تنها مسیر DC این خاصیت را دارد و اما هیچ مسیر جدیدی (آبی رنگ) وجود ندارد که به D ختم شده باشد. تذکر، اگر مجاز باشیم از یک خط دو بار عبور کنیم آنگاه جواب این مسأله مثبت است و مسیر مورد نظر به صورت زیر می باشد:

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow D$$

۵۴. معلوم است که در هر حال از سه رأس A، B و C دقیقاً دو رأس و از سه رأس D، E و F حداقل دو رأس قابل رنگ کردن می باشند؛ یعنی بازی یا بعد از رنگ کردن رأس چهارم پایان می پذیرد و یا بعد از رنگ کردن رأس پنجم، که به ترتیب دو شکل الف و ب به دست می آید:



(در حالت الف اگر به جای دو رأس A و C، دو رأس A و B و یا دو رأس B و C رنگ شوند نیز بحث عوض نمی شود.)

در حالت الف نفر دوم و در حالت ب نفر اول برنده می شود، بنابراین اگر نفر دوم کار می کند که رنگ دو رأس D و F متفاوت باشند، آنگاه نفر دوم برنده خواهد شد.

۵۵. بازیکن اول در ابتدا یک سنگریزه بر می دارد و سنگریزه های باقیمانده ۱۵ عدد می شوند. اگر بازیکن دوم i سنگریزه و بازیکن سوم j سنگریزه بردارند ($1 \leq i, j \leq 2$) بازیکن اول $5 - (i + j)$ سنگریزه بر می دارد ($1 \leq 5 - (i + j) \leq 3$). اگر همین رویه را بازیکن اول ادامه دهد در انتهای بازی برنده می شود.

۵۶. اعدادی که در زیر هم نوشته شده اند متناظر می نامیم. پس مجموعاً پنج جفت عدد متناظر داریم. از پنج جفت عدد موجود، تعداد جفت هایی که یکی از اعضایشان فرد و یکی از اعضایشان زوج می باشد زوج است. پس مجموع قدرمطلق تفاضل هایشان زوج می باشد (چون مجموع تعداد زوجی از اعداد فرد، زوج می شود) مجموع قدرمطلق تفاضل های بقیه جفت اعداد نیز زوج می باشد. پس مجموع مورد نظر همیشه زوج است.

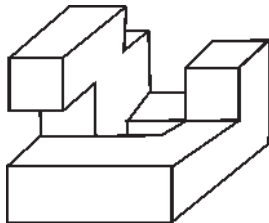
۵۷. اگر در دو خانه متوالی عدد یکسانی، شد آنگاه حاصل ضرب آن دو عدد متوالی مربع کامل خواهد شد، بنابراین در هر دو خانه متوالی دو عدد متمایز وجود دارد. به همین ترتیب در هر چهار خانه متوالی نمی توان دقیقاً دو عدد چید، زیرا در این صورت از هر یک دقیقاً دو تا وجود دارد (اگر از یکی سه تا و از دیگری یک عدد، باشد آنگاه حداقل دو تا از آن سه تایی مجاور هم خواند شد که خلاف حالت قبل است). که حاصل ضربشان مربع کامل می شود. پس معلوم می شود در هر چهار خانه متوالی هر سه عدد به کار رفته اند. بنابراین در ۸ خانه اول ۳ تا a ، ۳ تا b و ۲ تا c به کار رفته است (a ، b و c همان اعداد ۲، ۳ و ۵ می باشند ولی نه لزوماً به همان ترتیب) معلوم است که یکی از c ها در یکی از چهار خانه اول قرار دارد بنابراین با توجه به این که در هر چهار خانه متوالی c وجود دارد:

(I) اگر c در خانه اول و یا دوم باشد آنگاه در یکی از خانه های هفتم و هشتم a و در دیگری b وجود دارد که با حذف آن دو، حاصل ضرب اعداد موجود در ۶ خانه اول مربع کامل خواهد شد.

(II) اگر c در خانه سوم باشد، آنگاه با حذف دو خانه اول و دوم یکی از آنها a را شامل است و دیگری b را، حاصل ضرب اعداد موجود در ۶ خانه سوم تا هشتم مربع کامل خواهد شد.

با توجه به حالت بندی های فوق توزیع اعداد با شرایط داده شده حتی در ۸ خانه متوالی نیز ناممکن است.

۵۸. حجم مورد نظر مطابق شکل زیر می باشد.



۵۹. اگر سکه ها را از سمت چپ به ترتیب A, B, C, D, E, F, G و H نشان دهیم، ترتیب حرکات به شرح

زیر می باشد: $\textcircled{A} \quad \textcircled{B} \quad \textcircled{C} \quad \textcircled{D} \quad \textcircled{E} \quad \textcircled{F} \quad \textcircled{G} \quad \textcircled{H}$

ابتدا D بر روی G قرار می گیرد. سپس F بر روی B قرار می گیرد (چون D از جای خودش حذف شده است). در حرکت سوم E بر روی H قرار می گیرد. (با عبور کردن از روی دو سکه G و D) و در نهایت C با عبور کردن از روی دو سکه B و F بر روی A قرار می گیرد.

۶۰. از ظرف مجموعاً ۱۲ مداد برداشته شده است پس باید معادله $4x + 2y + z = 12$ را حل کنیم که در آن x, y و z هر کدام برابر با یکی از اعداد ۱، ۲ و ۳ می باشند. بدیهی است که z باید زوج باشد. پس $z = 2$. و از آن جا خواهیم داشت $2x + y = 5$ که جواب منحصر به فرد $y = 3$ و $x = 1$ را داراست. آن که دو مداد در اختیار دارد (b) از درون ظرف به همان تعدادی که مداد در دست دارد برداشته است پس شیء الف را در اختیار دارد. آن که سه مداد در اختیار دارد (c) دو برابر تعداد مدادهای موجود در دستش را از ظرف برداشته است پس شیء ب را در اختیار دارد. و بالاخره a شیء ج را در اختیار دارد.

پنجمین المپیاد کامپیوتر

مهر ۷۴

هر جواب درست ۱ نمره مثبت و هر جواب نادرست $\frac{1}{4}$ نمره منفی دارد.

۱. ۱۰ نقطه متمایزی روی محیط یک دایره قرار دارد. تعداد ۵ ضلعی هایی که می توان با این نقاط ساخت چند تا است؟

(الف) ۳۰۲۴۰ (ب) ۶۰۴۸ (ج) ۲۵۲ (د) ۱۰۰۸ (ه) ۱۲۰

۲. ۴ نفر راننده که هر کدام یک اتومبیل دارند در یک محل کار می کنند. این ۴ نفر به چند طریق می توانند

اتومبیل های خود را با هم عوض کنند به قسمی که هیچ کدام اتومبیل خود را نرانند؟

(الف) ۲۰ (ب) ۹ (ج) ۱۸ (د) ۶ (ه) ۴

۳. در مربع 3×3 مقابل، اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ۹ را طوری قرار می دهیم که حاصل جمع

هر ستون و هر سطر و هر قطر با هم برابر باشند. مجموع اعداد واقع در چهار گوشه

این مربع چیست؟

۹		

(الف) ۲۰ (ب) ۲۴ (ج) ۱۸ (د) ۳۰ (ه) ۲۵

۴. مبلغ ۳۶ تومان پول را بین سه برادر تقسیم کرده ایم. به هر یک از آنها به اندازه سن خود پول برحسب تومان

رسیده است. برادر کوچکتر نصف پول خود را به تساوی بین دو برادر دیگر تقسیم می کند. برادر میانی و بعد برادر

بزرگتر همین کار را انجام می دهند. در پایان پول هر سه برادر مساوی می شود. برادر میانی چند سال دارد؟

(الف) ۱۰ (ب) ۱۰/۵ (ج) ۱۱ (د) ۱۱/۵ (ه) ۱۲

۵. یک مکعب به ضلع ۳ را در نظر بگیرید که در مرکز هر یک از مکعب های کوچک آن یک نقطه گذاشته شده است (مجموعاً ۲۷ نقطه) چند تا مجموعه سه تایی از این نقاط روی یک خط مستقیم قرار دارند؟

الف) ۴۸ (ب) ۳۶ (ج) ۴۹ (د) ۴۳ (ه) ۳۷

۶. تعداد اعداد سه رقمی بزرگتر از ۵۳۰ که ارقام متمایز دارند کدام است؟

الف) ۲۰۱ (ب) ۲۴۰ (ج) ۳۴۵ (د) ۳۳۵ (ه) ۳۳۶

۷. از نقشه شبکه راه های یک استان اطلاعات زیر را به دست آورده ایم: از هر شهری می توان به سایر شهرها مسافرت کرد. کمترین فاصله بین دو شهر ۲۸ کیلومتر است. بیشترین فاصله بین دو شهر ۱۳۷۴ کیلومتر است. تعداد شهرها ۷ تا است. شهری وجود دارد که مستقیماً به ۳ شهر دیگر جاده دارد. اگر طول کل جاده هایی که بین این ۷ شهر کشیده شده است n کیلومتر باشد، آنگاه:

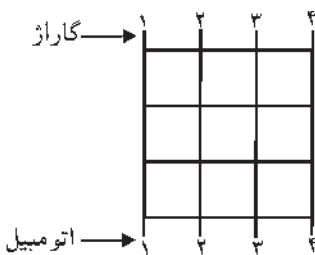
الف) $n \geq 1430$ (ب) $n \leq 2748$

ج) $n = 1402$ (د) $n \geq 1402$

ه) $1374 \leq n \leq 2748$

۸. می خواهیم ۸ کتاب یکسان را بین ۴ نفر تقسیم کنیم به قسمی که به نفر دوم حداکثر ۲ کتاب و به نفر سوم حداقل ۲ کتاب و به سایر نفرات حداقل ۱ کتاب برسد. تعداد حالات ممکن برابر است با:

الف) ۳۱ (ب) ۳۵ (ج) ۷۰ (د) ۶۵ (ه) ۵۶



۹. نقشه خیابان های شهری به شکل مقابل است. (خیابان های عمودی رو به بالا یک طرفه اند) می خواهیم اتومبیل های ۱ تا ۴ را به گاراژهایی که در شکل نشان داده شده است ببریم، به طوری که از هر خیابان حداکثر یک اتومبیل عبور کند. کدام یک از دنباله های زیر (از چپ به راست) می تواند شماره های اتومبیل ها در گاراژهای ۱ تا ۴ باشد؟

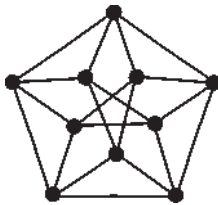
الف) ۱, ۳, ۴, ۲ (ب) ۳, ۱, ۴, ۲

ج) ۲, ۱, ۴, ۳ (د) ۲, ۳, ۱, ۴

ه) هیچ کدام

۱۰. یک صفحه شطرنجی نامتناهی را در نظر بگیرید. مهره اسب در این صفحه به این صورت حرکت می‌کند که دو خانه در یک جهت (افقی یا عمودی) و یک خانه در جهت دیگر حرکت می‌کند. حداقل تعداد حرکت‌های لازم برای این که اسب بتواند خود را از خانه $(0, 0)$ به خانه $(1374, 1374)$ برساند، چقدر است؟

- الف) ۴۵۸ ب) ۹۱۶ ج) ۱۳۷۵
د) ۶۸۷ ه) ۱۳۷۴



۱۱. در شکل مقابل دایره‌های سیاه را رأس و هر پاره خط بین دو

دایره سیاه را یک یال می‌نامیم. کدام یک از گزاره‌های زیر در

مورد آن صحیح است؟

الف) می‌توان رأس‌های آن را با ۴ رنگ متفاوت چنان رنگ کرد که

رنگ هر دو رأس که با یک یال به هم متصلند متفاوت باشد

ب) می‌توان اعداد ۱ تا ۱۰ را به رأس‌های آن نسبت داد به قسمی که رأس شماره i به رأس‌های $i-1$ و

$i+1$ وصل باشد $(2 \leq i \leq 9)$ و رأس ۱ نیز به ۱۰ وصل باشد

ج) می‌توان این شکل را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد (رأس‌ها را نقطه و یال‌ها را پاره خط

در نظر بگیرید)

د) هر سه مورد فوق صحیح است

ه) هیچ کدام از موارد فوق صحیح نیست

۱۲. خروجی الگوریتم زیر چند است؟ (منظور از $A[i]$ در این الگوریتم عنصر i ام یک دنباله به نام A است.)

۱- به ازای i از ۱ تا ۵ مقدار $A[i]$ را مساوی i قرار بده.

۲- به ازای i از ۳ تا ۹ کارهای زیر را انجام بده.

۱.۲- به ازای j از ۱ تا ۵ کارهای زیر را انجام بده.

۱.۱.۲- در صورتی که $1 \leq i - j \leq 5$ ، جای $A[j]$ و $A[i - j]$ را با هم عوض کن.

۳- مقدار $A[5]$ را چاپ کن.

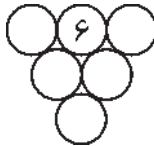
- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳
د) ۴ ه) ۵

۱۳. تعدادی از دانش آموزان یک مدرسه در یک اردوی یک هفته ای شرکت کردند. در هر روز ۳ نفر از دانش آموزان مسئولیت تهیه غذا را برعهده داشتند. پس از پایان اردو معلوم شد که هیچ دو نفر از دانش آموزان بیش از یک بار با هم مسئول تهیه غذا نبوده اند. اگر n تعداد دانش آموزان شرکت کننده در اردو باشد، آنگاه:

الف) $n = ۲۱$ ب) $n = ۷$

ج) $n \geq ۷$ د) $n < ۹$

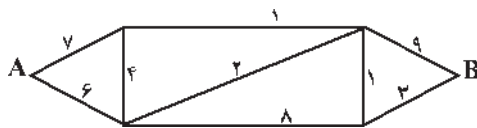
ه) $n \geq ۹$



۱۴. ۶ دایره مقابل داده شده است: می خواهیم اعداد ۱ تا ۵ را در دایره های خالی بنویسیم به طوری که عدد نوشته شده در هر دایره تفاضل اعداد نوشته شده در دو دایره بالایی آن باشد. به چند طریق می توان این کار را انجام داد.

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۵. بین منبع آب A و مصرف کننده B به صورت زیر لوله کشی شده است: عددی که بر روی هر لوله نوشته شده



است، نشان دهنده حداکثر ظرفیت انتقال آن لوله (لیتر بر ثانیه) است. مصرف کننده حداکثر چند لیتر بر ثانیه آب دریافت خواهد کرد؟

الف) ۱۳ ب) ۷

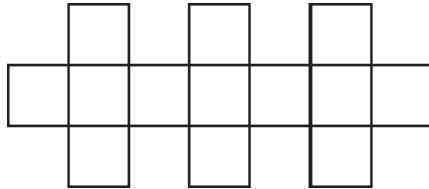
ج) ۱۲ د) ۴۱

ه) ۱۱

مسأله های بله - خیر

پاسخ هر یک از مسائل زیر «بله» یا «خیر» است که هر جواب درست یک نمره مثبت و هر جواب نادرست یک نمره منفی دارد.

۱۶. در یک صفحه شطرنجی مربع به ضلع ۱۳۷۴ متر آیا می توان یک چندضلعی با اضلاع افقی و عمودی که طول هر ضلع آن برحسب متر عدد صحیح باشد رسم کرد که محیط آن ۱۹۹۵ متر شود؟



۱۷. در شکل زیر که از ۴۰ عدد چوب کبریت ساخته

شده ۱۳ مربع 1×1 دیده می شود: آیا می توان با

برداشتن ۹ چوب کبریت، شکلی ایجاد کرد که در آن

هیچ مربعی دیده نشود؟

۱۸. ۱۱ سنگریزه در اختیار داریم. دو بازیکن با این سنگریزه ها این بازی را انجام می دهند:

هر بازیکن در نوبت خودش ۱، ۲، ۳ یا ۴ سنگریزه بر می دارد. وقتی که سنگریزه ها تمام شد، تعداد

سنگریزه هایی که هر یک از بازیکنان برداشته اند را می شماریم. هر بازیکن که به تعداد زوجی سنگریزه برداشته

بود، برنده است. آیا بازیکن اول می تواند طوری بازی کند که حتماً برنده شود؟

۱۹. یک دنباله $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ متنوع نامیده می شود، اگر این شرایط برقرار باشند:

• برای هر i ($0 \leq i \leq n$)، a_i و a_{i+1} متفاوت باشند.

• اگر $n > 1$ ، دنباله $a_0, a_1, \dots, a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ نیز یک دنباله متنوع باشد. ($\lfloor x \rfloor$ یعنی بزرگترین عدد صحیح

کوچکتر یا مساوی x)

برای مثال A, B, C, A, D, C یک دنباله متنوع است.

اگر $a_i \in \{A, B, C\}$ ، آیا دنباله متنوع $a_0, a_1, \dots, a_{1374}$ وجود دارد به طوری که دنباله

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{1374}$ نیز متنوع باشد؟

۲۰. در یک نقشه شبکه راه های منطقه، هر شهر دقیقاً به سه شهر دیگر به طور مستقیم جاده دارد. آیا امکان دارد

که با بستن یکی از این جاده ها ارتباط بعضی از شهرها را با بعضی از شهرهای دیگر قطع کرد؟

۲۱. برای هر عدد صحیح غیر منفی n ، عدد a_{n+1} از a_n براساس قانون زیر به دست می آید:

اگر آخرین رقم سمت راست عدد a_n از ۵ بیشتر باشد، $a_{n+1} = 9a_n$. در غیر این صورت، رقم سمت راست a_n را

کنار می گذاریم و ارقام باقیمانده نمایشگر a_{n+1} است. اگر a_{n+1} شامل هیچ رقمی نباشد، کار پایان می یابد. آیا

به ازای هر a_0 دلخواه این فرایند پایان پذیر است؟

۲۲. یک نوار داریم که به n خانه تقسیم شده است. خانه‌ها را به ترتیب از ۱ تا n شماره گذاری کرده ایم. دو عدد مهره در خانه‌های n و $n-1$ قرار گرفته اند. دو بازیکن بازی زیر را انجام می دهند:

هر بازیکن در نوبت خود می تواند یکی از مهره‌ها (هر کدام) را برداشته و در یک خانه خالی با شماره کمتر قرار دهد. بازیکنی که آخرین حرکت را انجام دهد برنده است. در صورتی که $n=9$ باشد آیا نفر اول می تواند طوری بازی کند که همیشه برنده باشد؟

۲۳. یک ماتریس $M_{3 \times 3}$ در نظر بگیرید که درایه‌هایش از علائم $\{<, >, =\}$ باشد. ساختن توابع f و g با خواص زیر مورد نظر است.

• اگر مقدار M_{ij} مساوی $<$ باشد، آنگاه $f(i) < g(j)$.

• اگر مقدار M_{ij} مساوی $>$ باشد، آنگاه $f(i) > g(j)$.

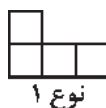
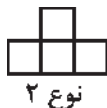
• اگر مقدار M_{ij} مساوی $=$ باشد، آنگاه $f(i) = g(j)$.

ماتریس 3×3 زیر که مؤلفه‌هایش مشخص شده اند تعریف شده است:

$$\begin{bmatrix} < & < & = \\ = & < & > \\ < & < & > \end{bmatrix}$$

آیا برای ماتریس فوق توابع f و g با خواص مورد نظر را می توان یافت؟

□ موازی یک‌هایی از انواع زیر وجود دارند:



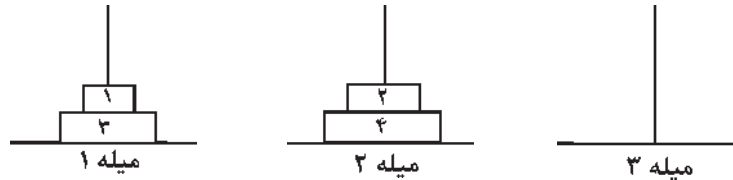
منظور از فرش کردن یک صفحه با موازی یک‌ها پوشاندن تمام خانه‌های صفحه با موازی یک‌هاست، به طوری که موازی یک‌ها روی هم قرار نگیرند.

۲۴. آیا با موازی یک‌هایی از نوع ۱ می توان یک صفحه شطرنجی 6×6 را فرش کرد؟

۲۵. آیا با موازی یک‌هایی از نوع ۲ می توان یک صفحه شطرنجی 6×6 را فرش کرد؟

۲۶. آیا با موزاییک‌هایی از نوع ۲ می‌توان یک صفحه شطرنجی 100×100 را فرش کرد؟

□ سه میله با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ و چهار مهره سوراخدار با شماره‌های ۱ تا ۴ مطابق شکل زیر داده شده است:



می‌خواهیم با حرکت دادن این مهره‌ها و رعایت قواعد زیر کلیه مهره‌ها را به صورت زیر بر میله سوم ببریم:



● در هر حرکت تنها یک مهره حرکت داده شود.

● هیچ‌گاه مهره با شماره بزرگتر بر روی مهره با شماره کوچکتر قرار نگیرد.

۲۷. آیا می‌توان با کمتر از ۱۱ حرکت این کار را انجام داد؟

۲۸. در صورتی که ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ داشته باشیم به طوری که مهره‌های ۱، ۳ و ۵ در میله اول و مهره‌های ۲ و ۴ در میله دوم باشند، آیا می‌توان با کمتر از ۲۲ حرکت این مسئله را حل کرد؟

۲۹. آرایه a با n عنصر به صورت صعودی مرتب شده است. می‌خواهیم ببینیم که آیا عنصر x در آرایه a وجود دارد یا خیر. برای این کار الگوریتم زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

۱- i را مساوی با ۱ و z را مساوی با n قرار بده.

۲- k را مساوی با $\left\lfloor \frac{i+z}{2} \right\rfloor$ قرار بده.

۳- اگر $a_k < x$ ، در این صورت i را مساوی با $k+1$ قرار بده، در غیر این صورت z را مساوی با $k-1$ قرار بده.

۴- اگر $a_k = x$ ، در این صورت x در آرایه a وجود دارد؛ به مرحله «۷» برو.

۵- اگر $i \geq z$ ، در این صورت x در آرایه a وجود ندارد؛ به مرحله «۷» برو.

۶- برو به مرحله «۲».

۷- پایان.

آیا این الگوریتم برای تمام مقادیر x درست کار می‌کند؟

۳۰. اگر الگوریتم فوق را به صورت زیر تغییر دهیم، پاسخ چیست؟

۱- i را مساوی با ۱ و j را مساوی با n قرار بده.

۲- k را مساوی با $\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor$ قرار بده.

۳- اگر $a_k > x$ ، در این صورت j را مساوی با k قرار بده، در غیر این صورت i را مساوی با $k + 1$ قرار بده.

۴- اگر $j \neq i$ ، در این صورت به مرحله «۲» برو.

۵- اگر $a_{\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor} = x$ ، در این صورت x در آرایه a وجود دارد؛ به مرحله «۷» برو.

۶- در غیر این صورت x در آرایه a وجود ندارد.

۷- پایان.

پاسخ تشریحی

پنجمین المپیاد کامپیوتر

۱. بدیهی است که با هر ۵ نقطه یک پنج ضلعی ساخته می شود، پس تعداد آنها برابر $\binom{10}{5}$ یا ۲۵۲ می باشد.

۲. تعداد طرق تقسیم ۴ اتومبیل بین ۴ نفر به طوری که X صاحب اتومبیل خود باشد را با $|X|$ ، تعداد آن طرق به طوری که هم X صاحب اتومبیل خود و هم Y صاحب اتومبیل خود باشند را با $|X \cap Y|$ ، ... نمایش می دهیم، بنابراین:

$$\begin{aligned} ? &= |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}| = |M| - |A| - |B| - |C| - |D| \\ &\quad + |A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| \\ &\quad + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D| \\ &\quad - |A \cap B \cap C| - |A \cap B \cap D| \\ &\quad - |A \cap C \cap D| - |B \cap C \cap D| \\ &\quad + |A \cap B \cap C \cap D| \\ &= 4! - 4(3!) + 6(2!) - 4(1!) + (0!) = 9 \end{aligned}$$

۳. چون مجموع اعداد از ۱ تا ۹ برابر ۴۵ می باشد، بنابراین معلوم است که مجموع اعداد واقع در هر سطر،

هر ستون و نیز قطرهای برابر ۱۵ می باشد. خواهیم داشت:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$a + e + i = 15$$

$$b + e + h = 15$$

$$c + e + g = 15$$

$$d + e + f = 15$$

$$(a + b + c + d + e + f + g + h + i) + 3e = 60 \Rightarrow 45 + 3e = 60 \Rightarrow e = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} a + e + i = 15 \\ c + e + g = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow a + i + c + g = 20$$

۸	۳	۴
۱	۵	۹
۶	۷	۲

نمونه ای از شکل پر شده به صورت مقابل می باشد:

$x =$ سن برادر بزرگتر

۴. راه حل اول:

$y =$ سن برادر میانی

$z =$ سن برادر کوچکتر

$$x + y + z = 36 \quad (1)$$

پول سه برادر بعد از مرحله اول به ترتیب برابر با $x + \frac{z}{4}$ ، $y + \frac{z}{4}$ و $\frac{z}{4}$ خواهد بود.

پول سه برادر بعد از مرحله دوم به ترتیب برابر با $\frac{16x + 4y + 5z}{16}$ ، $\frac{4y + z}{8}$ و $\frac{4y + 9z}{16}$ خواهد بود.

پول سه برادر بعد از مرحله سوم به ترتیب برابر با $\frac{16x + 4y + 5z}{32}$ ، $\frac{16x + 36y + 13z}{64}$ و

$\frac{16x + 20y + 14z}{64}$ خواهد بود. پس باید داشته باشیم:

$$\frac{16x + 20y + 14z}{64} = \frac{16x + 36y - 13z}{64} = \frac{16x + 4y + 5z}{32} \quad (2)$$

با مقایسه رابطه های (۲) و رابطه (۱) به جواب $x = ۱۹/۵$ و $y = ۱۰/۵$ و $z = ۶$ خواهیم رسید، پس $y = ۱۰/۵$ می باشد.

راه حل دوم: در پایان پول هر سه برادر با هم برابر شده است پس در پایان مرحله سوم هر کدام از آنان $\frac{۳۶}{۳}$ یعنی ۱۲ تومان خواهند داشت. قبل از این مرحله (پایان مرحله دوم) برادر بزرگتر یقیناً ۲۴ تومان داشته است (چون نصف پولش را برای خودش نگه داشته و نصف پولش را بین دو برادرش تقسیم کرده است). چون برادر بزرگتر نصف پولش را بین دو برادر دیگر به تساوی تقسیم کرده است پس به هر کدام از آنان ۶ تومان داده است. پس قبل از شروع مرحله پایانی پول برادر بزرگتر ۲۴ تومان، پول برادر میانی ۶ تومان و پول برادر کوچکتر ۶ تومان بوده است. با همین استدلال در ابتدای مرحله دوم برادر بزرگتر ۲۱ تومان، برادر میانی ۱۲ تومان و برادر کوچکتر ۳ تومان دارا هستند و بالاخره در ابتدای مرحله اول برادر بزرگتر $۱۹/۵$ تومان، برادر میانی $۱۰/۵$ تومان و برادر کوچکتر ۶ تومان پول دارند.

۵. مکعب کوچک را مطابق شکل از ۱ تا ۲۷ شماره گذاری می کنیم. ۲۷ مجموعه سه تایی عبارتند از $\{(۱, ۲, ۳), (۴, ۵, ۶), (۷, ۸, ۹), (۱۰, ۱۱, ۱۲), (۱۳, ۱۴, ۱۵), (۱۶, ۱۷, ۱۸), (۱۹, ۲۰, ۲۱), (۲۲, ۲۳, ۲۴), (۲۵, ۲۶, ۲۷)\}$ (مکعب هایی که فقط در یک وجه مشترکند).

۱۸ مجموعه سه تایی عبارتند از $\{(۱, ۵, ۹), (۱, ۶, ۱۰), (۱, ۱۴, ۱۸), (۲, ۳, ۷), (۲, ۴, ۱۵), (۳, ۴, ۱۳), (۳, ۷, ۱۶), (۴, ۱۰, ۱۷), (۴, ۱۳, ۲۲), (۵, ۹, ۱۸), (۵, ۱۶, ۲۵), (۶, ۱۰, ۱۹), (۶, ۱۷, ۲۶), (۷, ۱۴, ۲۱), (۷, ۱۶, ۲۳), (۸, ۱۸, ۲۴), (۸, ۲۵, ۲۷)\}$ و بالاخره ۴ مجموعه سه تایی عبارتند از:

$\{(۱, ۱۴, ۲۷), (۱, ۱۹, ۲۶), (۲, ۱۵, ۲۴), (۳, ۱۳, ۲۲)\}$

			۲۷	۱۸	۹
		۲۶	۱۷	۸	۹
۲۵	۱۶	۷	۷	۸	۶
۲۲	۱۳	۴	۴	۵	۳
۱۹	۱۰	۱	۱	۲	۳

پس روی هم ۴۹ مجموعه سه تایی با خاصیت فوق موجود است.

۶. تعداد اعداد بزرگتر از ۵۹۹ با خاصیت مورد نظر برابر با $\begin{bmatrix} ۸ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۹ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ یعنی

۲۸۸ عدد می باشد و تعداد اعداد بین ۶۰۰ و ۵۲۹ با خاصیت مورد نظر برابر $\begin{bmatrix} ۸ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۶ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ یعنی ۴۸

عدد می باشد که مجموعاً ۳۳۶ عدد می شود که اگر عدد ۵۳۰ را از این مجموعه خارج کنیم جواب مورد نظر یعنی ۳۳۵ به دست خواهد آمد.

۷. برای گزینه های «ب» و «ج» و «ه» مثال نقضی مانند شکل «الف» و برای گزینه «الف» مثال نقضی مانند شکل «ب» وجود دارد. در ضمن شکل «ب» حداقل جاده ممکن را دارا می باشد.



۸. تعداد حالات ممکن برابر تعداد جواب های صحیح معادله زیر است:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \quad (x_1, x_4 \geq 1, \quad x_2 \leq 2, \quad x_3 \geq 2)$$

به این معنی که به نفر i ام ($i = 1, 2, 3, 4$)، x_i کتاب برسد.

حالا باید تعداد جواب های معادله بالا را بیابیم.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8 - x_4 \quad (x_1, x_4 > 0, \quad x_2 > 1, \quad x_3 = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2)$$

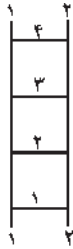
$$\Rightarrow \text{تعداد جواب} = C(8 - x_4 - 0 - 0 - 1, 3 - 1)$$

$$= C(8 - x_4 - 0 - 0 - 1 - 1, 2)$$

$$= C(6 - x_4, 2)$$

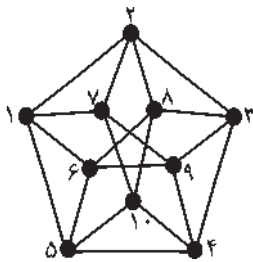
$$= C(6, 2) + C(5, 2) + C(4, 2) = 15 + 10 + 6 = 31$$

۹. نقشه خیابان ها شامل ۱۲ خیابان عمودی و ۱۲ خیابان افقی است. بدیهی است که برای رسیدن به گاراژها هر کدام از اتومبیل ها سه خیابان عمودی و در مجموع ۱۲ خیابان عمودی را طی می کنند. پس تمام ۱۲ خیابان عمودی توسط اتومبیل ها طی می شود. دو ستون اول را در نظر می گیریم. فرض می کنیم اتومبیل شماره ۱ از خیابان افقی شماره i ($1 \leq i \leq 4$) به سمت راست رفته و یکی از اتومبیل های دیگر از خیابان افقی شماره j ($1 \leq j \leq 4$) به سمت چپ برود. بدیهی است که $j \neq i$ زیرا در غیر این صورت از این خیابان یک ماشین به سمت چپ و یک ماشین به سمت راست رفته است که مخالف فرض است.

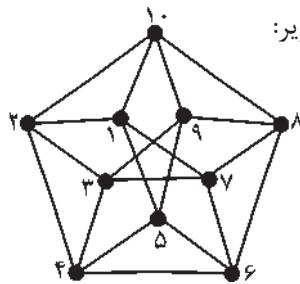


اگر $i > j$ ، آنگاه در ستون اول خیابان عمودی بین سطر i و j توسط هیچ اتومبیلی طی نمی شود و اگر $i < j$ ، آنگاه در ستون اول خیابان عمودی بین سطر i و j توسط دو اتومبیل طی می شود که مخالف فرض است. بدین ترتیب ثابت می شود که اتومبیل i فقط به گاراژ i می تواند برود.

۱۰. از خانه (۰, ۰) تا خانه (۱۳۷۴, ۱۳۷۴) به تعداد ۱۳۷۴ خانه در راستای عمودی و ۱۳۷۴ خانه در راستای افقی و در مجموع ۲۷۴۸ خانه فاصله وجود دارد. در هر حرکت سه خانه توسط اسب طی می شود، پس برای رسیدن به خانه مورد نظر حداقل $\frac{2748}{3}$ یعنی ۹۱۶ حرکت لازم است. با ۹۱۶ حرکت می توان به خانه مورد نظر رسید. کافی است یک حرکت در راستای افقی (دو خانه در جهت افقی و یک خانه در جهت عمودی) و یک حرکت در راستای عمودی (دو خانه در جهت عمودی و یک خانه در جهت افقی) انجام داد و این عمل را ۹۱۶ مرتبه متوالیاً تکرار کرد.



۱۱. گزینه «الف» صحیح است. کافی است رأس های ۱، ۳ و ۱۰ زرد باشند. رأس های ۲ و ۴ سبز باشند. رأس های ۵، ۸ و ۹ قرمز باشند. و بالاخره رأس های ۶ و ۷ آبی باشند.



گزینه «ب» نیز صحیح است. مطابق شکل زیر:

و بالاخره گزینه «ج» نیز صحیح است. مراحل رسم شکل به طریق زیر می باشد:

$۱ \Rightarrow ۷ \Rightarrow ۳ \Rightarrow ۹ \Rightarrow ۵ \Rightarrow ۱ \Rightarrow ۱۰ \Rightarrow ۹ \Rightarrow ۸ \Rightarrow ۷ \Rightarrow ۶ \Rightarrow ۵ \Rightarrow ۴ \Rightarrow ۳ \Rightarrow ۲ \Rightarrow ۱۰ \Rightarrow ۸ \Rightarrow ۶ \Rightarrow ۴ \Rightarrow ۲ \Rightarrow ۱$

۱۲.

$$A[5] = 5$$

۱۳. مسأله درست کردن هفت مجموعه سه عضوی از اشیاء $a_1, a_2, \dots, a_n$ می باشد به طوری که هیچ دو مجموعه ای بیش از یک عضو مشترک نداشته باشند. حداقل n می تواند ۷ باشد، زیرا اگر n برابر با ۶ باشد از شش عضو متمایز یکی از آنان حداقل در ۴ مجموعه تکرار شده است (زیرا اگر چنین نباشد حداکثر عضوها $3 \times 6 = 18$ یعنی ۱۸ عضو خواهد بود در صورتی که ۷ مجموعه روی هم ۲۱ عضو دارند). این ۴ مجموعه را A_1, A_2, A_3, A_4 و عضو مشترک را a_1 در نظر می گیریم. اگر این چهار مجموعه علاوه بر a_1 به ترتیب شامل a_2, a_3, a_4, a_5 باشند چون در a_1 مشترک هستند پس هیچ دو مجموعه از این ۴ مجموعه غیر از a_1 عضو مشترک دیگری نباید داشته باشند در صورتی که تنها عضو باقیمانده a_6 می باشد و ناچاراً عضوهای سوم سه مجموعه از ۴ مجموعه عضوهای تکراری خواهند پذیرفت که تناقض است.

ثابت می کنیم اگر $n = 7$ باشد این کار عملی است. نمونه ای از مجموعه های مطلوب عبارتند از:

$$A_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$A_2 = \{a_1, a_4, a_5\}$$

$$A_3 = \{a_1, a_6, a_7\}$$

$$A_4 = \{a_2, a_4, a_6\}$$

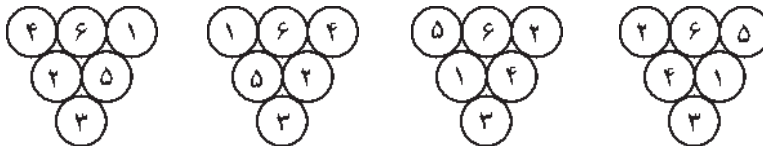
$$A_5 = \{a_2, a_5, a_7\}$$

$$A_6 = \{a_3, a_6, a_7\}$$

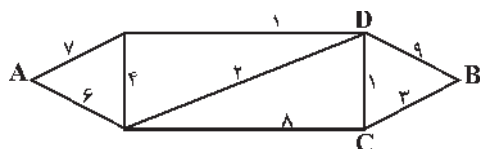
$$A_7 = \{a_3, a_5, a_6\}$$

پس $n \geq 7$

۱۴. به ۴ طریق زیر این کار عملی است:



۱۵. با توجه به شکل زیر حداکثر ۴ لیتر آب به نقطه D می رسد. پس از لوله DB که ظرفیت آن ۹ لیتر است حداکثر ۴ لیتر در ثانیه آب به مصرف کننده B سرآید می شود. از لوله CB نیز که حداکثر ظرفیت



آن ۳ لیتر است اگر ۳ لیتر در ثانیه آب به مصرف کننده B برسد حداکثر آبی که به مصرف کننده خواهد رسید ۷ لیتر در ثانیه می باشد.

۱۶. یکی از رأس های این ۱۹۹۵ ضلعی را A می نامیم. از A حرکت کرده و محیط چندضلعی را طی می کنیم تا دوباره به A برگردیم. اگر مسیر حرکت را برداری در نظر بگیریم بدیهی است که مجموع بردارها صفر می باشد. درستی مطالب زیر واضح است:

۱. مجموع بردارهای در جهت راست با مجموع بردارهای در جهت چپ قرینه اند.
۲. مجموع بردارهای در جهت بالا با مجموع بردارهای در جهت پایین قرینه اند.
۳. اگر مجموع اندازه های بردارهای در سمت راست، چپ، بالا و پایین به ترتیب برابر با a ، b ، c و d باشند، آنگاه $a = b$ و $c = d$ و همچنین:

$$1995 = a + b + c + d = 2a + 2c = 2(a + c)$$

چون a و c هر دو صحیح اند پس تساوی فوق هرگز نمی تواند برقرار باشد.

	۱		۲		۳	
۴		۵		۶		۷
	۸		۹		۱۰	

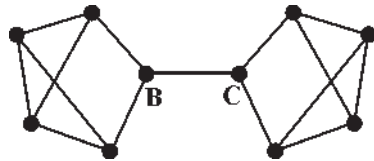
۱۷. برای از بین بردن مربع های ۱، ۲، ... و ۱۰ باید حداقل یکی از اضلاع آنها حذف شود. چون این ده مربع هیچ ضلع مشترکی ندارند پس باید حداقل ۱۰ چوب کبریت حذف شود.

۱۸. مراحل بازی به شکل زیر است:

۱. بازیکن اول ۴ سنگریزه بر می دارد.
۲. بازیکن دوم i سنگریزه بر می دارد.
۳. اگر $i = 4$ باشد، بازیکن اول ۲ سنگریزه دیگر بر می دارد و برنده می شود.
- اگر $i = 3$ باشد، بازیکن اول ۴ سنگریزه دیگر بر می دارد و برنده می شود.
- اگر $i = 2$ باشد، بازیکن اول ۴ سنگریزه دیگر بر می دارد و برنده می شود.
- اما اگر $i = 1$ باشد، بازیکن اول ۱ سنگریزه دیگر بر می دارد. باز متناسب با اینکه بازیکن دوم در مرحله بعد چند سنگریزه بردارد، حالات زیر پیش می آید:
- اگر بازیکن دوم ۱ سنگریزه بردارد، بازیکن اول ۳ سنگریزه برداشته و برنده می شود.
- اگر بازیکن دوم ۲ سنگریزه بردارد، بازیکن اول ۳ سنگریزه باقیمانده را برداشته و برنده می شود.

اگر بازیکن دوم ۳ سنگریزه بردارد، بازیکن اول ۱ سنگریزه برداشته و برنده می شود.
و بالاخره اگر بازیکن دوم ۴ سنگریزه بردارد، بازیکن اول تنها سنگریزه باقیمانده را برداشته و برنده می شود.

۱۹. بدون اینکه به کلیت مسأله لطمه ای وارد شود a_0 را A و a_1 را B در نظر می گیریم. a_p نمی تواند B باشد (شرط اول)، A نیز نمی تواند باشد (زیرا در غیر این صورت a_0 و a_p متفاوت نمی شوند)، پس $a_p = C$. a_p نمی تواند A باشد (چون a_0 و a_p باید متنوع باشد)، C نیز نمی تواند باشد (شرط اول)، پس $B = a_p$. A نمی تواند B باشد (شرط اول) C نیز نمی تواند باشد (چون a_p و a_0 طبق شرط دوم باید متنوع باشد) و اما a_p ، A نیز نمی تواند باشد زیرا در این صورت دنباله $a_0, a_p, a_p, \dots$ به صورت $A, C, A, \dots$ در می آید که اگر آن را به صورت $b_0, b_1, b_p, \dots$ در نظر بگیریم چون $b_0 = b_p$ می شود، پس متنوع نیست.



۲۰. اگر نقشه شبکه به شکل مقابل باشد با بستن مسیر BC ارتباط شهرهای سمت چپ با شهرهای سمت راست قطع خواهد شد.

۲۱. اگر a_0 یکی از اعداد یک رقمی باشد حکم واضح است. حال ثابت می کنیم اگر حکم برای اعداد از ۱ تا k برقرار باشد، برای $k+1$ نیز برقرار است. اگر رقم آخر عدد $(k+1)$ کوچکتر یا مساوی ۵ باشد با کنار گذاشتن آن رقم، عدد حاصل کوچکتر از $(k+1)$ خواهد بود و طبق فرض ادامه فرایند پایان پذیر خواهد بود. و اما اگر رقم آخر عدد $(k+1)$ بزرگتر از ۵ باشد در این صورت $9(k+1)$ به یکی از ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ ختم خواهد شد که با کنار گذاشتن این رقم حاصل از $k+1$ کوچکتر خواهد بود و باز بنا به فرض این فرایند پایان پذیر خواهد بود.

۲۲. لم: اولین بازیکنی که یک مهره در یکی از خانه های i ($i \leq 4$) قرار دهد بازنده است.

اثبات: حالات زیر را در نظر می گیریم:

۱. بازیکن x یک مهره در خانه ۱ قرار می دهد در این صورت بازیکن y مهره دیگر را در خانه ۲ قرار داده

و برنده می شود.

۲. بازیکن x یک مهره در خانه ۲ قرار می دهد در این صورت بازیکن y مهره دیگر را در خانه ۱ قرار داده و برنده می شود.

۳. بازیکن x مهره A را در خانه ۳ قرار می دهد. در این صورت بازیکن y مهره B را در خانه ۴ قرار می دهد، حال اگر x یکی از مهره ها را در خانه ۱ (یا ۲) قرار دهد، آنگاه y مهره دیگر را در خانه ۲ (یا ۱) قرار داده و برنده می شود.

۴. بازیکن x مهره A را در خانه ۴ قرار می دهد. در این صورت بازیکن y مهره B را در خانه ۳ قرار می دهد و همانند بند ۳ واضح است که y برنده می شود.

طریقه بازی: بازیکن اول مهره موجود در خانه شماره ۹ را در خانه ۷ قرار می دهد. بازیکن دوم به دو طریق زیر می تواند بازی کند (با توجه به لم واضح است که اگر یکی از مهره ها را در یکی از خانه های ۱ تا ۴ قرار دهد بازنده می شود):

الف) یکی از مهره ها را در خانه ۶ قرار می دهد. در این صورت بازیکن اول مهره دیگر را در خانه شماره ۵ قرار می دهد اینجاست که بازیکن دوم به ناچار یکی از مهره ها را در یکی از خانه های ۱ تا ۴ قرار می دهد و با توجه به لم، بازنده می شود.

ب) یکی از مهره ها را در خانه ۵ قرار می دهد. در این صورت بازیکن اول مهره دیگر را در خانه شماره ۶ قرار می دهد. سپس بازیکن دوم به ناچار یکی از مهره ها را در یکی از خانه های ۱ تا ۴ قرار داده و با توجه به لم، بازنده می شود.

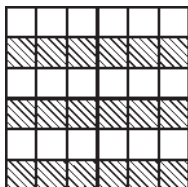
۲۳. با توجه به اطلاعات مسأله می توان نتیجه گرفت که:

$$g(2) > f(2) = g(1) > f(3) > f(1) = g(3)$$

بدیهی است که بی نهایت تابع با شرایط فوق می توان در نظر گرفت به عنوان مثال:

$$f: \{(1, 2), (2, 10), (3, 6)\}$$

$$g: \{(1, 10), (2, 20), (3, 2)\}$$



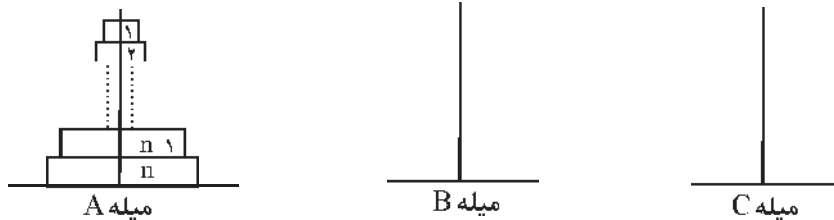
۲۴. صفحه 6×6 را به شکل مقابل رنگ بندی می کنیم، معلوم است که هر موزاییکی از نوع ۱ یا سه خانه سفید و یک خانه سیاه را پوشانده است و یا سه خانه سیاه و یک خانه سفید را. بنابراین به خاطر مساوی بودن تعداد

خانه های سفید و سیاه لازم است تعداد موزاییک هایی که سه خانه سفید و یک خانه سیاه را پوشش می دهند با تعداد موزاییک هایی که سه خانه سیاه و یک خانه سفید را پوشش می دهند برابر باشند که چنین امری محال است، چون تعداد کل موزاییک ها ۹ عدد می باشد.

۲۵. اگر صفحه 6×6 را به صورت شطرنجی رنگ بندی کنیم و مثل استدلال سؤال قبل عمل کنیم معلوم خواهد شد که فرش بندی صفحه 6×6 با موزاییک هایی از نوع ۲ نیز غیر ممکن است.

۲۶. چون یک مربع 4×4 را می توان با موزاییک از نوع ۲ فرش کرد پس با کنار هم گذاشتن ۶۲۵ عدد از این مربع های 4×4 می توان صفحه شطرنجی 100×100 را به دست آورد.

۲۷. اگر n مهره به ترتیب شماره در داخل میله A باشند و دو میله B و C خالی باشند، آنگاه حداقل با ۱ - 2^n حرکت می توان مهره ها را از A به C منتقل کرد به طوری که مهره های با شماره بزرگتر هرگز روی مهره های با شماره کوچکتر قرار نگیرند.



اثبات: فرض می کنیم با حداقل حرکت h_{n-1} بتوان $n-1$ مهره با شرایط مذکور را از A به C منتقل کرد. ابتدا $n-1$ مهره را با h_{n-1} حرکت از A به B منتقل می کنیم. فقط مهره n در داخل میله A باقی می ماند. با یک حرکت مهره n را به C منتقل می کنیم و با h_{n-1} حرکت $n-1$ مهره دیگر را از B به C انتقال می دهیم. پس مجموع حرکات برای چنین کاری برابر $h_{n-1} + 1 + h_{n-1}$ یعنی $2h_{n-1} + 1$ خواهد بود. پس:

$$h_n = 2h_{n-1} + 1 \quad (1)$$

می دانیم:

$$h_1 = 1, h_2 = 3, h_3 = 7, \dots$$

$$h_n = 2^n - 1$$

با استفاده از رابطه بازگشتی (۱) معلوم می شود که:

برای حل مسأله مورد نظر الگوریتم زیر را پیاده می کنیم:

- مهره ۱ را به میله ۳ منتقل می کنیم (یک حرکت).
 - مهره ۲ را به میله ۱ منتقل می کنیم (یک حرکت).
 - مهره ۱ را به میله ۱ منتقل می کنیم (یک حرکت).
 - مهره ۴ را به میله ۳ منتقل می کنیم (یک حرکت).
 - مهره ۱ تا ۳ را به میله ۳ منتقل می کنیم (با توجه به لم، ۷ حرکت).
- پس مجموعاً ۱۱ حرکت می شود و با کمتر از این، ممکن نیست.

۲۸. برای حل مسأله الگوریتم زیر را پیاده می کنیم:

- مهره ۲ را به میله ۳ منتقل می کنیم (یک حرکت).
 - مهره ۱ را به میله ۳ منتقل می کنیم (یک حرکت).
 - مهره ۳ را به میله ۲ منتقل می کنیم (یک حرکت).
 - مهره ۱ را به میله ۱ منتقل می کنیم (یک حرکت).
 - مهره ۲ را به میله ۲ منتقل می کنیم (یک حرکت).
 - مهره ۱ را به میله ۲ منتقل می کنیم (یک حرکت).
 - مهره ۵ را به میله ۳ منتقل می کنیم (یک حرکت).
 - مهره ۱ تا ۴ را به میله ۳ منتقل می کنیم (با توجه به لم، ۱۵ حرکت).
- پس مجموعاً ۲۲ حرکت می شود و با کمتر از این، ممکن نیست.

۲۹. به عنوان مثال اگر اعداد ما ۲۰، ۱۰، ۴ و ۲ بوده و $x = 20$ باشد به سادگی قابل بررسی است که این الگوریتم در خروجی خود عدد $x = 20$ را عضوی از آرایه a معرفی نخواهد کرد.

۳۰. اگر آرایه a با همان عناصر مثال قبل فرض شود و $x = 10$ باشد، باز خروجی الگوریتم چنان است که $x = 10$ در آرایه a موجود نیست.

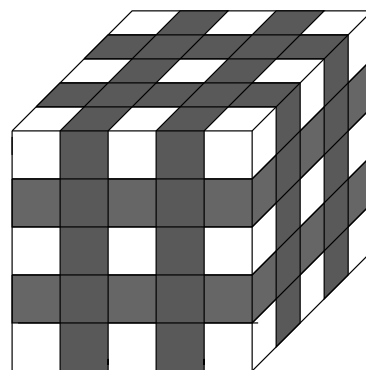
چهارمین المپیاد ملی کامپیوتر ایران

مسئله ۱ ۱۰ نمره

ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n می توان 7^n دایره به شعاع واحد را درون یک دایره به شعاع 3^n جا داد به طوری که هیچ دو دایره ای متقاطع نباشند. (هر دو دایره حداکثر در یک نقطه می توانند با هم اشتراک داشته باشند).

مسئله ۲ ۱۰ نمره

یک مکعب با اضلاع به طول $2n + 1$ از $(2n + 1)^3$ مکعب با اضلاع به طول واحد تشکیل شده است. وجوه خارجی این مکعب را با نوارهای یک در میان رنگ می زنیم. به عنوان مثال در شکل زیر یک مکعب $5 \times 5 \times 5$ به طور مطلوب رنگ آمیزی شده است:



تعداد مکعبهای به ضلع واحد که هیچ یک از وجوه آنها رنگ نشده است را بیابید.

چهارمین المپیاد ملی کامپیوتر ایران

مسئله ۳

۲۰ نمره

سیزده گلوله سفید رنگ در یک ردیف با فاصله مساوی از یکدیگر قرار داده شده اند. A و B بازی زیر را با همدیگر انجام می دهند:

ابتدا A تعداد k گلوله سفید رنگ را انتخاب کرده، با رنگ آبی رنگ می کند. سپس B تعداد k گلوله سفید رنگ را انتخاب کرده، با رنگ قرمز رنگ می کند. پس از این کار A گلوله های سفیدی را برمی دارد که به یک گلوله آبی نزدیکتر باشند تا به یک گلوله قرمز. همچنین B گلوله های سفیدی را برمی دارد که به یک گلوله قرمز نزدیکتر باشند تا به یک گلوله آبی. گلوله سفیدی که نزدیکترین فاصله اش با گلوله های آبی و قرمز مساوی باشد برداشته نمی شود. برنده بازی کسی است که بیشترین تعداد گلوله های سفید را بردارد.

اثبات کنید که به ازای $k = 1, 2, 6$ ، A می تواند در این بازی برنده شود.

در بیان اثبات دقیق بوده و حتی الامکان با رسم شکل توضیح دهید.

مسئله ۴

۱۰ نمره

شش نفر با نامهای A, B, C, D, E و F را در نظر بگیرید. از این افراد تعدادی راستگو و تعدادی دروغگو هستند. برای تشخیص افراد دروغگو سؤال هایی از این افراد پرسیده ایم. بدین صورت که از فرد X پرسیده ایم که آیا Y راستگو است و یا دروغگو. این را هم می دانیم که راستگو همواره درست جواب می دهد ولی دروغگو ممکن است درست یا نادرست جواب دهد. از این سؤالات اطلاعات زیر بدست آمده است:

(۱) A می گوید: C دروغگو است.

(۲) B می گوید: C راستگو و A دروغگو است.

(۳) C می گوید: D راستگو و E دروغگو است.

(۴) D می گوید: F راستگو است.

(۵) E می گوید: F راستگو و C دروغگو است.

(۶) F می گوید: B دروغگو است.

اگر بدانیم که تعداد دروغگوها از دو نفر بیشتر نیست، افراد دروغگو را با ذکر استدلال مشخص کنید.

مسئله ۵

۲۰ نمره

n یک عدد طبیعی دلخواه است. یک ترتیب دلخواه از اعداد ۱ تا n که در آن هر یک از اعداد ۱ تا n دقیقاً یک بار آمده باشد را یک جایگشت از $\{1, 2, \dots, n\}$ می نامیم. می گوئیم جایگشت $p_1, p_2, \dots, p_n$ در دنباله $a_1, a_2, \dots, a_k$ ظاهر شده است اگر اندیسهای $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq k$ وجود داشته باشند به طوری که برای

چهارمین المپیاد ملی کامپیوتر ایران

هر $1 \leq j \leq n$ داشته باشیم $a_{ij} = p_j$. به عنوان مثال جایگشت $1, 3, 2$ در دنباله $3, 2, 3, 1, 2, 3$ ظاهر شده است.

یک دنباله از اعداد 1 تا n یک **دنباله جالب** نامیده می شود اگر هر جایگشت دلخواهی از $\{1, 2, \dots, n\}$ در این دنباله ظاهر شده باشد.

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n حداقل یک دنباله جالب به طول $2^n - 1$ وجود دارد.

مسئله ۶ ۱۵ نمره

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید. این الگوریتم روی سه آرایه a و b و c عملیاتی را انجام می دهد. عنصر i ام آرایه a را در این الگوریتم با نماد $a[i]$ نشان داده ایم.

(۱) عدد n را از ورودی دریافت کن.

(۲) برای هر $0 \leq i \leq 5$ ، $a[i]$ را مساوی $5 - i$ و $b[i]$ را مساوی باقیمانده تقسیم $i + 3$ بر 6 قرار بده.

(۳) مراحل زیر را n بار تکرار کن:

(۳-۱) برای هر $0 \leq i \leq 5$ قرار بده:

(۳-۲) برای هر $0 \leq i \leq 5$ قرار بده:

(۳-۳) برای هر $0 \leq i \leq 5$ قرار بده:

(۳-۴) برای هر $0 \leq i \leq 5$ قرار بده:

(۴) مقدار $a[1]$ را چاپ کن.

(۵) پایان

اگر ورودی برنامه $n = 1373$ باشد، خروجی برنامه چند است؟

چهارمین المپیاد ملی کامپیوتر ایران

مسأله ۷ ۱۵ نمره

یک صفحه شطرنجی 4×4 با دو خانه A و B مطابق شکل زیر داده شده است. یک روبات می خواهد طبق شرایط زیر از A به B برود:

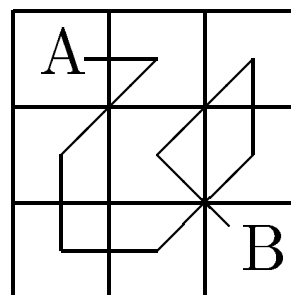
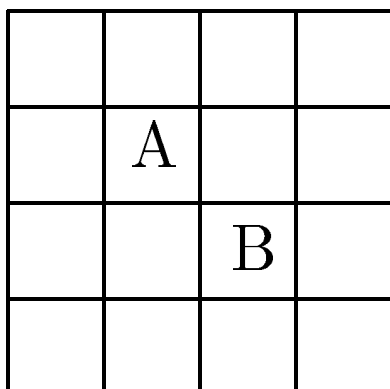
(۱) روبات در هر مرحله فقط می تواند از یک خانه به یکی از خانه های مجاورش (در یکی از جهتهای افقی، عمودی و یا مورب) برود.

(۲) روبات پس از هر حرکت باید جهت حرکتش در مرحله بعد را عوض کند.

(۳) روبات در مسیر حرکتش از A به B باید به هر یک از خانه ها دقیقاً یک بار برسد.

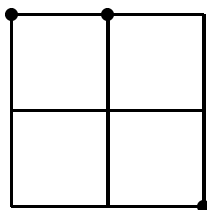
به عنوان مثال شکل زیر یک مسیر برای رسیدن از A به B در یک صفحه شطرنجی 3×3 را نشان می دهد.

یک مسیر برای رسیدن از A به B در صفحه شطرنجی 4×4 زیر پیدا کرده، شکل آن را در برگه پاسخنامه رسم کنید.



مسأله ی ۸ ۱۵ نمره

یک شبکه $n \times n$ مجموعه نقاطی از صفحه است که دارای مختصات صحیح هستند و هر یک از مختصات آنها عددی بزرگتر یا مساوی ۱ و کوچکتر یا مساوی n است. یک زیرمجموعه از نقاط یک شبکه را یک می نامیم اگر در بین تمام پاره خطهایی که می توان بین دو به دو آنها کشید هیچ دو تایی دارای طول مساوی نباشند. به عنوان مثال شکل زیر یک مجموعه عجیب در شبکه 3×3 را نشان می دهد:



(۱) در یک شبکه 4×4 یک مجموعه عجیب شامل ۴ نقطه پیدا کنید.

(۲) ثابت کنید که در هر شبکه $n \times n$ هر مجموعه عجیب حداکثر دارای n نقطه است.

مسأله ی ۹ ۳۰ نمره

یک ماتریس از اعداد طبیعی داده شده است. ابتدا هریک از سطرهای این ماتریس را از سمت چپ به راست به صورت صعودی مرتب می کنیم. سپس هریک از ستونهای این ماتریس را از بالا به پایین به صورت صعودی مرتب می کنیم.

ثابت کنید که در ماتریس حاصل سطرها به صورت صعودی مرتب شده باقی می ماند. توضیحات خود را دقیق و با رسم شکل ارائه نمایید.

مسأله ی ۱۰ ۲۰ نمره

یک صفحه شطرنج 8×8 را در نظر بگیرید. یک قرار دادن ۸ مهره در این صفحه است به طوری که هیچ دو تایی از این مهره ها در یک سطری یا در یک ستون قرار نگرفته باشند.

۶۴ عدد صحیح متفاوت را در خانه های صفحه شطرنج قرار دهید به طوری که برای هر چیدن پراکنده مجموع اعداد نوشته شده در خانه هایی که در آنها مهره قرار گرفته است برابر با مقدار ثابت ۱۰۰ باشد.

مسأله ی ۱۱ ۳۵ نمره

یک جایگشت $p_1, p_2, \dots, p_n$ از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ یک نامیده می شود اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ شرایط زیر برقرار باشد:

الف) اگر $2i \leq n$ ، آنگاه $p_i \leq p_{2i}$ ،

ب) اگر $2i + 1 \leq n$ ، آنگاه $p_i \leq p_{2i+1}$.

(۱) ثابت کنید که اگر p یک جایگشت خوب باشد، برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $p_1 \leq p_i$.

(۲) ثابت کنید که اگر p یک جایگشت خوب باشد، تعداد اعضای مجموعه

$$\{i \mid 1 \leq i \leq n, p_i \geq p_2\}$$

بزرگتر یا مساوی با $\frac{n-1}{2}$ است.

(۳) اگر $n = 2^k - 1$ باشد، T_k را مساوی با تعداد جایگشتهای خوب مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ تعریف می کنیم. یک رابطه بازگشتی برای محاسبه T_k پیدا کنید.