آزمون مرحله‌ی اول دوازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آبان ماه ۱۳۷۳

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. فرض کنیم a، b و c اعداد حقیقی باشند که

$$۹a + ۱۱b + ۲۹c = ۰$$

ثابت کنید $ax^۳ + bx + c = ۰$ در $[۰, ۲]$ یک ریشه دارد.

۲. اگر $a > b$ اعداد طبیعی بوده و n یک عدد طبیعی باشد به طوری که $\frac{a+n}{b}$ و $\frac{b+n}{a}$ اعداد طبیعی باشند و $d = (a, b)$، ثابت کنید

$$۲d \leqslant (n + ۱)\sqrt{a - b}$$

۳. روی مربع $ABCD$ نقاط K و N روی AB و AD به‌ترتیب داده شده‌اند به طوری که

$$AK \times AN = ۲BK \times DN$$

اضلاع CK و CN قطر BD را در نقاط L و M قطع می‌کنند. ثابت کنید نقاط K، L، M، N و A روی یک دایره هستند.

۴. تعداد سی‌وسه عدد طبیعی داده شده است که عوامل اول آنها فقط از اعداد ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ تشکیل شده است. ثابت کنید حاصلضرب حداقل دوتای آنها مربع کامل است.

۵. یک نقطهٔ p درون یک $۲n$ضلعی محدب قرار دارد. از هر رأس به نقطهٔ p وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا یکی از اضلاع را قطع کند. ثابت کنید یک ضلع وجود دارد که هیچ‌یک از این خطوط آنرا قطع نمی‌کند. (قطع کردن امتداد اضلاع مورد نظر نیست).

۶. صفحهٔ P و نقطهٔ M روی آن و دو نقطهٔ A و B در یک طرف آن مفروضند. از نقطهٔ M خطی در صفحهٔ P رسم کنید که از A و B به یک فاصله باشد.

راه حل‌های آزمون مرحله‌ی اول دوازدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آبان ماه ۱۳۷۳

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. اگر $f(x)=ax^{۳}+bx+c$، داریم $f(۰)=c$ و $f(۲)=۸a+۲b+c$. در این صورت

$$\begin{aligned}
۰&=۹a+۱۱b+۲۹c\\
&=f(۰)+f(۲)+a+۹b+۲۷c\\
&=f(۰)+f(۲)+۲۷\left(\frac{a}{۲۷}+\frac{b}{۳}+c\right)\\
&=f(۰)+f(۲)+۲۷f\left(\frac{۱}{۳}\right)
\end{aligned}$$

لذا $f(۰)+۲۷f(\frac{۱}{۳})+f(۲)=۰$.

اگر یکی از مقادیر $f(۰)$، $f(۲)$ ویا $f(\frac{۱}{۳})$ صفر باشد، مسأله حل شده است؛ در غیر این صورت دوتا از این مقادیر دارای عمتهای مختلفی هستند و در نتیجه، معادله یک ریشه در یکی از فواصل $[۰,\frac{۱}{۳}]$، $[\frac{۱}{۳},۲]$ ویا $[۰,۲]$ دارد.

۲. داریم

$$\frac{a+n}{b}-\frac{b+n}{a}=\frac{a^{۲}-b^{۲}+n(a-b)}{ab}$$

چون $d^{۲}\mid ab$، $d^{۲}\mid a^{۲}$ و $d^{۲}\mid b^{۲}$؛ بنابراین $d^{۲}\mid n(a-b)$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}
d^{۲}\leqslant n(a-b)&\Longrightarrow d\leqslant\sqrt{n(a-b)}\\
\sqrt{n}\leqslant\frac{n+۱}{۲}&\Longrightarrow d\leqslant\frac{n+۱}{۲}\sqrt{a-b}\\
&\Longrightarrow ۲d\leqslant(n+۱)\sqrt{a-b}
\end{aligned}$$

۳. ضلع مربع را برابر یک واحد می‌گیریم. داریم

$$\angle BKC+\angle DNC=\frac{۳\pi}{۴}$$

راه حل‌های آزمون مرحله‌ی اول دوازدهمین المپیاد ریاضی

زیرا اگر بگیریم

$$a = BK = \operatorname{cotg}\angle BKC$$
$$b = DN = \operatorname{cotg}\angle DNC$$

و با توجه به اینکه $(۱-a)(۱-b) = ۲ab$،

$$\operatorname{tg}(\angle BKC + \angle DNC) = \frac{a+b}{ab-۱} = -۱ = \operatorname{tg}\frac{۳\pi}{۴}$$

یعنی $\angle BKC + \angle DNC = \frac{۳\pi}{۴}$. حال داریم

$$\angle BLK = \frac{۳\pi}{۴} - \angle BKL = \angle DNC$$
$$= \angle BCM = \angle BAM$$

پس

$$\angle KLM + \angle KAM = \angle KLM + \angle BLK = \pi$$

پس M، L، K و A روی یک دایره هستند. همچنین L، M، N و A روی یک دایره هستند. بنابراین N، M، L و K و A روی یک دایره هستند.

۴. فرض کنید اعداد مورد نظر $n_۱$، $n_۲$، ... و $n_{۳۳}$ باشند و

$$n_i = ۲^{a_i} \times ۳^{b_i} \times ۵^{c_i} \times ۷^{d_i} \times ۱۱^{e_i}$$

داریم

$$n_i \times n_j = ۲^{a_i+a_j} \times ۳^{b_i+b_j} \times ۵^{c_i+c_j} \times ۷^{d_i+d_j} \times ۱۱^{e_i+e_j}$$

$n_i \times n_j$ وقتی مربع کامل است که توانهای عوامل اول آن زوج باشند؛ یعنی (a_i, a_j)، (b_i, b_j)، (c_i, c_j)، (d_i, d_j) و (e_i, e_j) زوجیت یکسان داشته باشند.

حال برای هر پنج‌تایی $T_k = (a_k, b_k, c_k, d_k, e_k)$، که در آن $k = ۱, ۲, \ldots, ۳۳$، قرار می‌دهیم

$$a'_k = a_k \bmod ۲, \quad b'_k = b_k \bmod ۲, \quad c'_k = c_k \bmod ۲$$
$$d'_k = d_k \bmod ۲, \quad e'_k = e_k \bmod ۲$$

که منظور از $a_k \bmod ۲$ باقیماندهٔ a_k بر ۲ است. سپس $(a_k, b_k, c_k, d_k, e_k)$ را با $(a'_k, b'_k, c'_k, d'_k, e'_k)$ جایگزین می‌کنیم. ولی هر a'_k، b'_k، c'_k، d'_k و e'_k برابر ۰ یا ۱ است و تعداد پنج‌تاییهای $(a'_k, b'_k, c'_k, d'_k, e'_k)$ برابر $۲^۵ = ۳۲$ می‌شود. در نتیجه، دو پنج‌تایی $(a_k, b_k, c_k, d_k, e_k)$ و $(a_r, b_r, c_r, d_r, e_r)$ وجود دارند به طوری که $a_r \equiv a_k \pmod ۲$، $b_r \equiv b_k \pmod ۲$، $c_r \equiv c_k \pmod ۲$، $d_r \equiv d_k \pmod ۲$ و $e_r \equiv e_k \pmod ۲$. یعنی $n_r \times n_k$ مربع کامل است.

۵. از یک رأس به P وصل می‌کنیم و فرض می‌کنیم که یکی از اضلاع را قطع کرده باشد. $۲n-۱$ رأس باقی می‌ماند که در دو طرف این خط واقعند. بنابراین تعدادی از رأسها در یک طرف و تعدادی در طرف دیگر قرار می‌گیرند و تعداد رأسهای یک طرف بیش از طرف دیگر است. خطوطی که از رأسهای طرف کمتر به P وصل می‌شوند، اضلاع طرف دیگر را که بیشتر هستند، قطع می‌کنند. لذا در طرفی که بیشتر رأس دارد یک ضلع وجود دارد که به‌وسیلهٔ این خطوط قطع نمی‌شود.

راه حل‌های آزمون مرحله‌ی اول دوازدهمین المپیاد ریاضی

۶. صفحهٔ عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم تا P را در خط Δ قطع کند. سپس از B، C (وسط AB) و A بر صفحهٔ P عمود می‌کنیم تا آن را به‌ترتیب در B'، C' و A' قطع کنند. حال به قطر MC' دایره‌ای رسم می‌کنیم تا Δ را در N قطع کند. خط MN جواب است. از وسط A و B به MN عمود می‌کنیم تا آن را در K و F قطع کند. بنابر قضیهٔ سه عمود، $A'K$ و $B'K$ نیز بر MN عمودند. حال از C' به N وصل می‌کنیم؛ چون N در نیمدایره محاط شده است، پس $C'N$ بر MN عمود است. ولی $C'N$، $B'F$ و $A'K$ چون هر سه بر MN عمودند، باهم موازی هستند و چون C' وسط $A'B'$ است، لذا N نیز وسط KF است. اما N روی Δ یعنی صفحهٔ عمودمنصف AB است، پس $NB = AN$. حال دو مثلث BFN و AKN برابربند، زیرا $NB = AN$، $NF = NK$ و $F = K = ۹۰°$. پس $BF = AK$ و در نتیجه BF و AK برابر خواهند شد؛ لذا MN خط مطلوب است.

اگر دایره، خط Δ را در دو نقطه قطع کند، دو جواب داریم، اگر Δ بر دایره مماس باشد یک جواب داریم و اگر این دو یکدیگر را قطع نکنند، جوابی نخواهیم داشت.