۱) چند تا عدد صحیح x که $۹ < x < ۱۵$ وجود دارد که دنباله‌ی متناهی

$$۱, ۲, ۶, ۷, ۹, x, ۱۵, ۱۸, ۲۰$$

مشتمل بر هیچ سه‌جمله‌ای نباشد که تشکیل یک تصاعد عددی بدهند؟

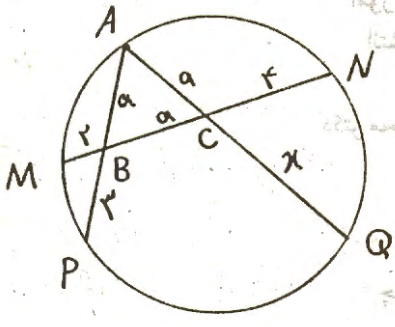
الف ـ صفر　　ب ـ ۱　　ج ـ ۲　　د ـ ۳　　هـ ـ ۵

۲) دنباله‌ی $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$ «برگشتی خطی» نامیده می‌شود اگر و فقط اگر اعداد صحیح p و q موجود باشند که $a_{n+۲} = pa_{n+۱} + qa_n$. دو جمله‌ی بعدی در دنباله‌ی $۲, ۵, ۱۴, ۴۱, \ldots$ کدام‌یک از دو عدد زیر است با این شرط که این دنباله «برگشتی خطی» باشد؟

الف ـ ۲۸ و ۸۲　　ب ـ ۲۸ و ۱۲۳　　ج ـ ۱۳۶ و ۳۲۸　　د ـ ۱۲۲ و ۳۶۵　　هـ ـ ۲۴۴ و ۴۸۷

۳) عدد a طبیعی بوده و b و c صحیح‌اند. اگر معادله‌ی $P(x) = ax^۲ + bx + c = ۰$ دو ریشه‌ی متمایز در فاصله‌ی باز $(۰, ۱)$ داشته باشد، حداقل مقدار a کدام است؟

الف ـ ۲　　ب ـ ۳　　ج ـ ۴　　د ـ ۶　　هـ ـ ۷



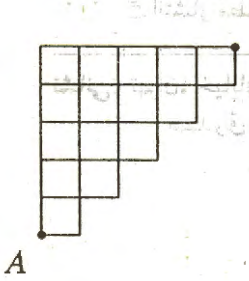
۴) دایره‌ی Ω به شعاع r و مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع a درون آن مفروض است اگر A روی محیط دایره باشد و ضلع BC دایره را در نقاط N و M، و AB و AC دایره را به‌ترتیب در نقاط P و Q قطع کنند و $\overline{BP} = ۳$، $\overline{MB} = ۲$، و $\overline{CN} = ۴$، آن‌گاه مقدار $\overline{CQ}$ کدام است؟

الف ـ ۴　　ب ـ ۴٫۵　　ج ـ ۵　　د ـ ۵٫۵　　هـ ـ با اطلاعات مسئله نمی‌توان آن را به‌دست آورد.

۵) عددهای طبیعی $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، و ... به این صورت تعریف شده‌اند که $a_۱ = ۱$ و $a_{n+۱} = ۲a_n + ۵$. کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند در بین a_iها ظاهر شود؟

الف ـ ۵۶۲۳۰۱　　ب ـ ۷۸۶۴۲۷　　ج ـ ۱۶۴۸۵　　د ـ ۳۱۲۳　　هـ ـ ۵۱۵۱۹

۶) تعداد مسیرهای از نقطه‌ی A به B را بیابید در صورتی که بدانیم در هر مرحله می‌توان فقط یک گام به راست یا یک گام به سمت بالا برداشت.

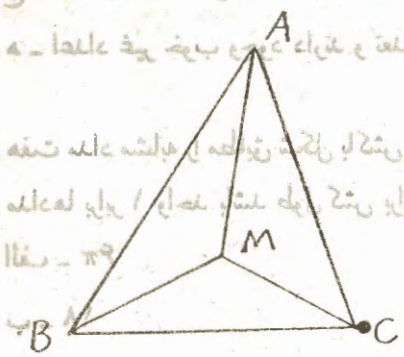


الف ـ ۶۱　　ب ـ ۱۳۲　　ج ـ ۱۲۶　　د ـ ۱۲۷　　هـ ـ ۶۲

۷) چند عدد طبیعی وجود دارد که مقسوم‌علیه حداقل یکی از اعداد $۱۲^{۵۰}$، $۴۵^{۲۰}$، و $۵۰^{۱۰۰}$ باشد؟

الف ـ ۱ ب ـ ۲۶۳۱۲ ج ـ ۲۶۳۱۳ د ـ ۲۶۱۵۱ ه ـ ۲۶۱۵۰

۸) نقطه‌ی M درون مثلث غیرمتساوی‌الساقین ABC مفروض است. کدام جمله‌ی زیر در مورد مقدار $MA + MB + MC$ درست است؟



الف ـ همیشه از بزرگ‌ترین ضلع مثلث، کوچک‌تر است.

ب ـ همیشه از جمع دو ضلع بزرگ‌تر مثلث، کوچک‌تر است.

ج ـ همیشه از جمع دو ضلع کوچک‌تر مثلث، بزرگ‌تر است.

د ـ همیشه از ۳ برابر شعاع دایره‌ی محیطی، بزرگ‌تر است.

ه ـ از جمع دو ارتفاع بزرگ‌تر، کوچک‌تر است.

۹) از روی عدد a می‌توانیم به b برسیم، اگر $\frac{\text{ک‌م‌م}[a,b]}{\text{ب‌م‌م}(a,b)}$ عددی اول باشد و می‌نویسیم $a \to b$. کدام‌یک از گزینه‌های زیر غلط است؟

الف ـ با آغاز از هر عدد $a \in \mathbb{N}$ با زنجیره‌ای مثل $a \to b \to c \to \cdots \to k$ می‌توان به هر $k \in \mathbb{N}$ای رسید.

ب ـ با هر عدد $a \in \mathbb{N}$ و اعداد $b_1, \ldots, b_m$ که داده شده‌اند، زنجیره‌ای با آغاز از a وجود دارد که همه‌ی b_iها در آن ظاهر شوند و هر کدام یک‌بار.

ج ـ با آغاز از هر عدد $a \in \mathbb{N}$، زنجیره‌ای وجود دارد که تنها شامل مضارب a باشد و همه‌ی مضارب a در آن ظاهر شوند. (زنجیره‌ای نامتناهی)

د ـ با آغاز از هر عدد $a \in \mathbb{N}$، می‌توان زنجیره‌ای یافت که همه‌ی اعداد مربع کامل در آن آمده باشند. (زنجیره‌ای نامتناهی)

ه ـ با آغاز از هر عدد $a \in \mathbb{N}$، می‌توان زنجیره‌ای یافت که همه‌ی اعداد آن کمتر از b باشند و همه‌ی اعداد کمتر از b در آن آمده باشند، هر یک دقیقاً یک‌بار ($a > b$ عددی داده‌شده است).

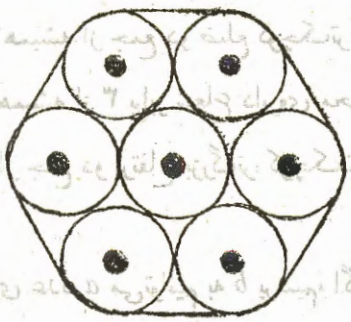
۱۰) فرض کنیم $a_{۱۳۷۹}, \ldots, a_2, a_1$ همان اعداد $۱۳۷۹, \ldots, 2, 1$ هستند که با یک ترتیب دل‌خواه ظاهر شده‌اند. تعریف می‌کنیم: $f_i = |a_i - i|$ و قرار می‌دهیم: $L = f_1 \times f_2 \times \cdots f_{۱۳۷۹}$. با درنظر گرفتن تمام ترتیب‌ها، L مساوی چند تا از اعداد ۱ تا ۱۰ می‌تواند باشد؟

الف ـ هیچ مقدار ب ـ ۳ ج ـ ۵ د ـ ۷ ه ـ تمام مقادیر

۱۱) فرض کنید a_1 عددی طبیعی باشد و a_{n+1} را برابر بزرگ‌ترین عامل اول در $a_n + 1$ تعریف کنیم. a_1 را خوب می‌نامیم اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ متناظر با آن، سرانجام متناوب باشد. کدام حکم درست است؟

الف ـ تعداد اعداد خوب، متناهی است.
ب ـ تعداد اعداد غیر خوب، نامتناهی است.
ج ـ همه‌ی اعداد خوب هستند.
د ـ همه‌ی اعداد غیرخوب هستند.
هـ ـ اعداد غیر خوب وجود دارند و تعداد آن‌ها متناهی است.

۱۲) هفت مداد مشابه را مطابق شکل باکش بسته‌ایم. اگر شعاع مدادها برابر ۱ واحد باشد طول کش برابر است با:



الف ـ 6π
ب ـ ۱۸
ج ـ $12 + \pi$
د ـ $12 + 2\pi$
هـ ـ $18 + 2\pi$

۱۳) در یکی از اقمار سیاره‌ی مریخ مردم برای انتخاب رئیس این‌گونه عمل می‌کنند که اگر n نفر نامزد ریاست باشند، هر فرد به‌هنگام رأی دادن بر حسب علاقه‌ی خود امتیازهای متفاوتی از بین اعداد ۱ تا n به هر کدام از نامزدها نسبت می‌دهد. سپس امتیازهای هر کدام از نامزدها را جمع می‌زنند و کسی که بیش‌ترین امتیاز را بیاورد رئیس می‌شود. در این دوره سه نفر A، B، و C نامزد شده‌اند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

الف ـ اگر بیشتر مردم (بیش از نصف) A را بر B ترجیح دهند و بیشتر مردم B را بر C ترجیح دهند، آنگاه بیشتر مردم A را بر C ترجیح می‌دهند.
ب ـ اگر بیشتر مردم A را بر B ترجیح دهند و بیشتر مردم A را بر C ترجیح دهند، A رئیس می‌شود.
ج ـ اگر کمتر از نصف مردم A را هم بر B و هم بر C ترجیح دهند، ممکن است A رئیس شود.
د ـ اگر همه‌ی کسانی که A را بر B ترجیح می‌دهند، C را بر A ترجیح دهند، ممکن است B رئیس شود.
هـ ـ اگر ابتدا بین هر سه و سپس بین دو نفری که بیشترین امتیازها را کسب کرده‌اند، انتخابات برگزار شود (انتخابات دومرحله‌ای)، ممکن است نتایج آن با نتایج انتخابات یک‌مرحله‌ای متفاوت باشد.

۱۴) تعداد جواب‌های معادله‌ی $a^2 + b^2 = c^2 + 3$ در اعداد طبیعی چند تاست؟

الف ـ صفر
ب ـ ۲
ج ـ ۴
د ـ ۸
هـ ـ بی‌نهایت

۱۵) فرض کنید صفحه‌ی شطرنجی $2n \times 2n$ را بخواهیم با یک عدد موزاییک 2×2 و $n^2 - 1$ تا موزاییک 1×4 بپوشانیم. کدام یک از احکام زیر، درست است؟

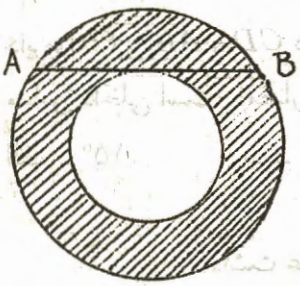
الف ـ به‌ازای همه‌ی nها، می‌توان این کار را کرد.

ب ـ به‌جز برای متناهی تا n، می‌توان این کار را کرد.

ج ـ به‌جز برای متناهی تا n، هرگز نمی‌توان این کار را کرد.

د ـ فقط برای nهای فرد می‌توان این کار را کرد.

هـ ـ برای nهای مربع کامل می‌توان این کار را کرد.



۱۶) در شکل مقابل می‌دانیم طول پاره‌خط AB برابر ۱۴ واحد است. اگر مساحت قسمت هاشور خورده را S بنامیم، در مورد S قوی‌ترین حکم کدام است؟

الف ـ $49\pi \le S \le 98\pi$ ب ـ $14\pi \le S \le 49\pi$

ج ـ $S = 49\pi$ د ـ $S \ge 14\pi$ هـ ـ $S \le 98\pi$

۱۷) بین ۱۰۰ دانش آموز ۷ آزمون برگزار کرده‌ایم، و در هیچ یک از آزمون‌ها هیچ دو دانش‌آموزی نمره‌ی مساوی نگرفته‌اند. هر دانش‌آموزی که حداقل در یکی از امتحانات نفر اول شده باشد و یا حداقل در ۴ آزمون بین ۶ نفر اول باشد جایزه می‌گیرد. هم‌چنین این شرط را نیز داریم که هر دانش‌آموزی حداکثر یک جایزه می‌گیرد. حداکثر چند دانش‌آموز می‌توانند جایزه بگیرند؟

الف ـ ۱۵ نفر ب ـ ۱۴ نفر ج ـ ۱۳ نفر د ـ ۱۲ نفر هـ ـ ۷ نفر

۱۸) فرض کنید $a, b, c > 0$ و داشته باشیم $a + b = c$. حداقل مقدار عبارت $A = \dfrac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2 b^2}$ کدام است؟

الف ـ ۹ ب ـ ۱۵ ج ـ ۱۸ د ـ ۲۱ هـ ـ ۳

۱۹) برای هر $m \in \mathbb{N}$، f_m را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$f_1 = 1, f_2 = 11, f_3 = 111, \ldots \quad \text{مثلاً،} \quad f_m = \underbrace{111\ldots1}_{m \text{ بار}}$$

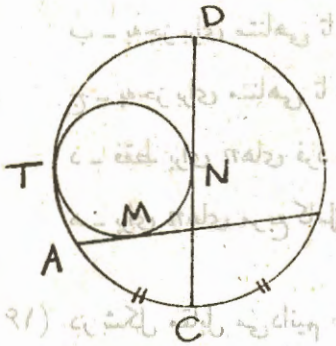
چندتا از f_mها را می‌توان به‌صورت مجموع دو مربع کامل از اعداد طبیعی غیرصفر نوشت؟

الف ـ ۰ ب ـ ۱ ج ـ ۲ د ـ ۳ هـ ـ بی‌نهایت

۲۰) اعداد ۱, ۲, ۳, . . . , ۶۱ را طوری در یک ردیف نوشته‌ایم که هر عدد مجموع اعداد قبل از خود را می‌شمارد. اگر عدد اول در این ردیف ۶۱ و عدد دوم ۱ باشد، عدد سوم کدام‌یک از اعداد زیر است؟

الف ـ ۲ ب ـ ۴ ج ـ ۳۰ د ـ ۳۱ هـ ـ نمی‌توان پیدا کرد.

۲۱) دایره‌ی C روی صفحه مفروض است. چهار نقطه‌ی A, C, B, D طوری روی دایره‌ی C قرار دارند که داریم:



$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BD} = ۶۰^\circ = ۲\overset{\frown}{AC}$$

دایره‌ی C' بر AB و CD در نقاط M و N و بر دایره‌ی C در نقطه T مماس داخلی است. مقدار زاویه‌ی $\widehat{MTN}$ کدام است؟

الف ـ ۱۵° ب ـ ۲۰° ج ـ ۲۲٫۵° د ـ ۲۷٫۵° هـ ـ ۳۰°

۲۲) داشت عباس‌قلی‌خان پسری — پسر بی‌ادب و بی‌هنری
اسم او بود علی‌مردان‌خان — اهل منزل ز دستش به امان

علی‌مردان از دست عباس‌قلی‌خان گریخته و داخل حوضی به شعاع ۱ پریده. عباس‌قلی‌خان از آن رو که به فن شنا آشنا نیست، در لبه‌ی حوض ایستاده. سرعت دویدن او چهار برابر سرعت شناکردن علی‌مردان است، اما بیرون از حوض علی‌مردان سریع‌تر از وی می‌دود. حداقل فاصله‌ی آن دو چه‌قدر باشد تا علی‌مردان بتواند خود را به لبه‌ی حوض رسانده و فرار کند؟

الف ـ ۸ ب ـ $۲ - \frac{\pi}{۴}$ ج ـ $\frac{\pi}{۲}$

د ـ خوشبختانه هیچ‌گاه نمی‌تواند فرار کند. هـ ـ متأسفانه همیشه می‌تواند فرار کند.

۲۳) دو نفر مشغول خوردن تخمه از یک ظرف هستند. قرار است که به‌نوبت از آن ظرف تخمه بردارند. هر نفر مجاز به برداشتن ۱، ۲، یا ۵ تخمه در نوبت خودش است. هر کس که آخرین تخمه (یا تخمه‌ها) را بردارد برنده است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف ـ در صورتی که تعداد تخمه‌ها در شروع تخمه‌خوری ۱۳۷۷ باشد، نفر دوم برنده است.

ب ـ در صورتی که تعداد تخمه‌ها در شروع تخمه‌خوری ۱۳۷۸ باشد، نفر دوم برنده است.

ج ـ در صورتی که تعداد تخمه‌ها در شروع تخمه‌خوری ۱۳۷۹ باشد، نفر دوم برنده است.

د ـ در صورتی که تعداد تخمه‌ها در شروع تخمه‌خوری بیش از ۲۰۰۰ باشد، نفر اول برنده است.

هـ ـ در صورتی که تعداد تخمه‌ها در شروع تخمه‌خوری بیش از ۲۰۰۰ باشد، نفر دوم برنده است.

۲۴) برای اعداد حقیقی و مثبت x، y، و z داریم $xyz(x+y+z)=1$. حداقل مقدار عبارت $(x+y)(y+z)$ کدام‌یک از مقادیر زیر است؟

الف ـ $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ب ـ $\frac{1}{2}$ ج ـ $\frac{4}{\sqrt{3}}$ د ـ ۲ هـ ـ $\frac{5}{2}$

۲۵) فرض کنید شخصی یک عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ را انتخاب کرده باشد. می‌توانیم هر بار به او یک عدد بدهیم و او بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این عدد و عدد اولیه را به ما بگوید. با چند مرحله حتماً می‌توانیم عدد او را بیابیم؟

الف ـ ۱۰۰ ب ـ $\binom{100}{2}$ ج ـ به‌تعداد اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰

د ـ به‌تعداد اعداد مرکب کوچک‌تر از ۱۰۰ هـ ـ هیچ‌کدام

۲۶) در یک کارخانه هر کارگر با تعدادی از کارگرها دوست است و به‌اندازه‌ی میانگین حقوق همه‌ی دوستانش، حقوق می‌گیرد. کدام گزینه درست است؟

الف ـ کارگری وجود دارد که به‌اندازه‌ی میانگین بقیه‌ی کارگرها حقوق می‌گیرد.

ب ـ حقوق هیچ کارگری بیشتر از دو برابر حقوق عباس‌قلی جوش‌کار (عباس‌قلی‌خان!) نیست.

ج ـ حقوق همه‌ی کارگرها برابر است.

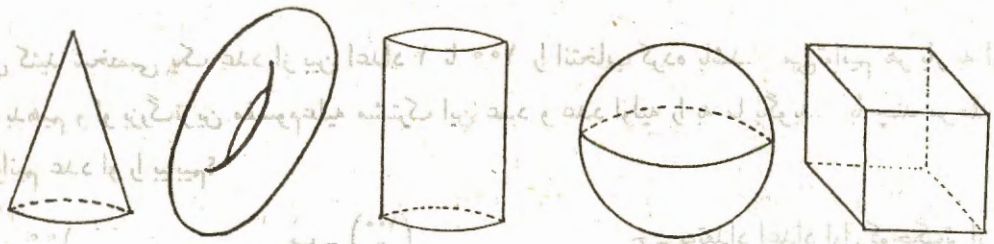
د ـ حقوق هر دو دوست برابر است، ولی حقوق همه لزوماً برابر نیست.

هـ ـ هیچ‌کدام

سؤال‌های ۲۷ تا ۳۰ با توجه به توضیحاتی که قبل از آن‌ها آمده است، حل می‌شوند. پیش از خواندن صورت سؤال‌ها، ابتدا متنی که به هر قسمت مربوط می‌شود را با دقت کافی مطالعه کنید. این سؤال‌ها به‌گونه‌ای طرح شده‌اند که یک موضوع جدید را با بیان ساده معرفی می‌کنند و توانایی درک مفاهیم را می‌سنجند. توجه داشته باشید که نمره‌ی مثبت و منفی‌ای که برای هر یک از این سؤال‌ها در نظر گرفته می‌شود دو برابر سؤال‌های عادی است.

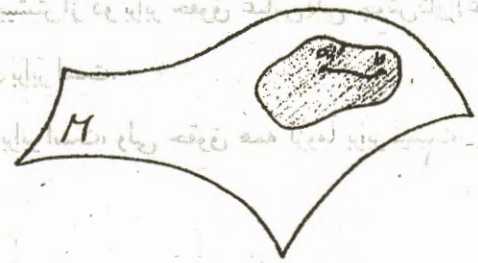
با توجه به توضیحات زیر به دو سؤال ۲۷ و ۲۸ پاسخ دهید.

منظور از یک «رویه» شکلی است که در آن حول و حوش هر نقطه، شبیه صفحه‌ای احتمالاً کج و کوله است، مثل سطح یک مکعب، کره، استوانه، چنبره (تیوپ ماشین) و یا یک مخروط.



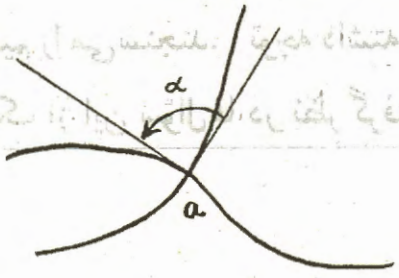
یک «رویه» را «هموار» می‌گوییم اگر در هیچ نقطه‌ای شکستگی یا تیزی نداشته باشد. همه‌ی مثال‌های بالا غیر از مکعب و مخروط هموار هستند.

می‌توان ثابت کرد که اگر a نقطه‌ای روی «رویه‌ی هموار» M باشد، ناحیه‌ای کوچک اطراف a وجود دارد که اگر b نقطه‌ای از این ناحیه باشد، آن‌گاه a و b را می‌توان با یک خم داخل رویه طوری به هم وصل کرد که طول این خم کمترین مقدار ممکن باشد.

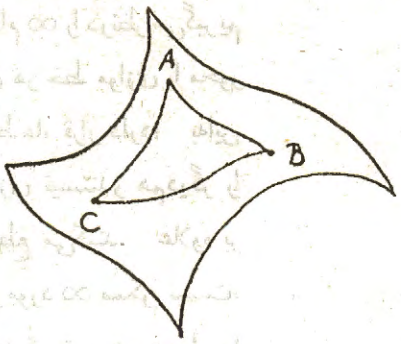


با کنار هم گذاشتن این خم‌های کوچک، به‌طوری که شکستگی به‌وجود نیاید، خم‌های بلندتری ساخته می‌شود که به نوعی نقش خط‌ها را در صفحه بازی می‌کنند. به این خم‌ها «شبه‌خط» می‌گوییم). می‌توان نشان داد که «شبه‌خط»های کره همان دایره‌های عظیمه‌اند.

منظور از یک «خم هموار» مسیر حرکت یک متحرک است که تیزی ندارد. یعنی در هر نقطه می‌توان مماسی بر آن رسم کرد. فرض کنید دو خم هموار در نقطه‌ی a همدیگر را قطع کرده باشند. منظور از زاویه‌ی این دو خم زاویه‌ی بین مماس‌های آنها است.



اگر سه نقطه‌ی روی یک «رویه‌ی هموار» را دوبه‌دو با شبه‌خط‌ها به‌هم وصل کنیم یک «مثلث» به‌وجود می‌آید. مجموع سه زاویه‌ی یک «مثلث» می‌تواند ۱۸۰° نباشد!



۲۷) کدام گزینه درست است؟

الف ـ از هر دو نقطه‌ی کره حداکثر ۲ شبه‌خط می‌گذرد.

ب ـ مجموع زوایای یک «مثلث» روی کره به شعاع یک مقداری ثابت و بیشتر از ۱۸۰° است.

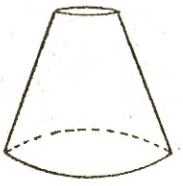
ج ـ مجموع زوایای یک «مثلث» روی کره عددی بین ۱۸۰° و ۹۰۰° است.

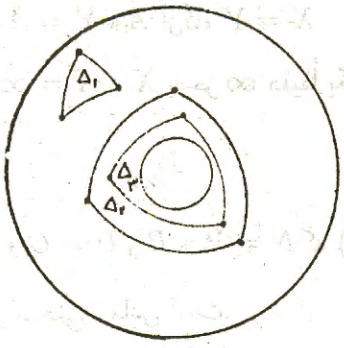
د ـ مجموع زوایای یک «مثلث» روی کره به شعاع یک‌تناسب با مساحت داخل مثلث است.

هـ ـ الف و ج

۲۸) کدام گزینه درست است؟

فرض کنید M یک مخروط ناقص باشد (یعنی مخروطی که سر آن را بریده‌اند). اگر $\triangle_1$، $\triangle_2$، و $\triangle_3$ «مثلث‌هایی» به شکل زیر روی M باشند، کدام درست است؟ (تصویر از بالا است.)





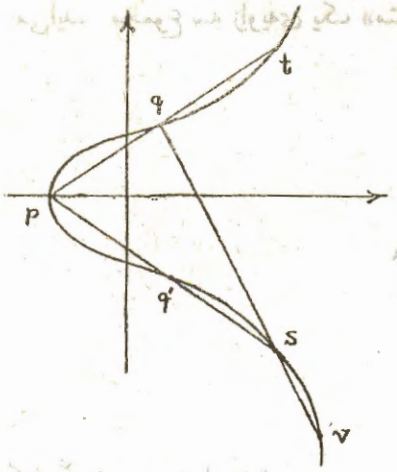
۱) مجموع زوایای $\triangle_1$، ۱۸۰° است.

۲) مجموع زوایای $\triangle_2$ و $\triangle_3$ برابر است.

۳) مجموع زوایای $\triangle_2$ از دوتای دیگر بیشتر است.

الف ـ ۱ و ۳ ب ـ ۱ و ۲ ج ـ ۲ د ـ ۳ هـ ـ هیچ‌کدام

با توجه به توضیحات زیر به دو سؤال ۲۹ و ۳۰ پاسخ دهید.



منحنی $y^2 = x^3 + 1$ را در صفحه درنظر بگیرید. به‌طور نمادین یک موجود به نام ∞ را درنظر می‌گیریم و قرارداد می‌کنیم که ∞ روی هر خط موازی با محور yها، و فقط روی همین خط‌ها، قرار دارد! به‌این ترتیب این خط‌ها دیگر موازی نیستند و هم‌دیگر را دقیقاً در یک نقطه (∞) قطع می‌کنند. علاوه بر این دیگر به‌کار بردن شهود در مورد ∞ ممکن نیست، چون ∞ هم در بالای صفحه است و هم در پایین! مجموعه‌ی نقاط منحنی به‌همراه ∞ را M می‌نامیم.

برای دو نقطه‌ی A و B در M، خط گذرنده از A و B را درنظر می‌گیریم. اگر این خط از نقطه‌ی سومی از M گذشت، قرینه‌ی آن نقطه نسبت به محور xها را با $A * B$ نشان می‌دهیم. اگر روی خط مورد نظر نقطه‌ی دیگری از M نبود ولی در یکی از نقاط A و B خط بر منحنی مماس بود، نقطه‌ی برخورد سوم را همان محل تماس فرض کنید. درضمن تعریف می‌کنیم $\infty * \infty = \infty$. می‌توان نشان داد که $A * B$ همواره تعریف می‌شود و در تعریف آن ابهامی نیست (یعنی هیچ خطی M را در ۴ نقطه قطع نمی‌کند). به‌علاوه می‌توان نشان داد که $A * (B * C) = (A * B) * C$. توجه کنید که وصل کردن A به A با یک خط یعنی رسم مماس بر منحنی در نقطه‌ی A. هم‌چنین تعریف می‌کنیم که $A^n = \underbrace{A * A * \cdots * A}_{n \text{ بار}}$

۲۹) کدام گزینه غلط است؟

الف ـ عضو $E \in M$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر $A \in M$ داریم $A * E = A$

ب ـ برای هر $A, B \in M$، $x \in M$ وجود دارد که $A * X = B$

ج ـ اگر $A * Y = A * X$ آن‌گاه $X = Y$

د ـ معادله‌ی $X * X = \infty$ به‌جز ∞ دقیقاً یک جواب دیگر دارد.

هـ ـ هیچ‌کدام

۳۰) فرض کنید $U = Q * S$ و $N = V * P$ که $P = (-1, 0)$. کدام گزینه غلط است؟

الف ـ NS بر منحنی مماس است.

ب ـ مماس بر منحنی در Q از $U * P$ می‌گذرد.

ج ـ $S = (U * P) * T$

د ـ تنها یک خط عمودی مماس بر منحنی وجود دارد.

هـ ـ اگر $A^{11} = A^7$ و $A^{15} = A^{20}$ آن‌گاه $A = \infty$

«موفق باشید»

پاسخ مرحله اول «هجدهمین دوره» المپیاد ریاضی کشور

۱ ـ ب

فقط دنباله‌ی ۲۰ , ۱۸ , ۱۵ , ۱۴ , ۹ , ۷ , ۶ , ۲ , ۱ مشتمل به هیچ سه‌تایی که تشکیل تصاعد عددی بدهند نیست. برای حالت‌هایی که $a \in \{10, 11, 12, 13\}$ مثال‌های نقض زیر را می‌آوریم.

$a = 10$	۲ , ۶ , ۱۰	۲ , ۱۰ , ۱۸	۱۰ , ۱۵ , ۲۰	
$a = 11$	۲ , ۱۱ , ۲۰	۷ , ۹ , ۱۱	۷ , ۱۱ , ۱۵	
$a = 12$	۲ , ۷ , ۱۲	۶ , ۹ , ۱۲	۶ , ۱۲ , ۱۸	۹ , ۱۲ , ۱۵
$a = 13$	۱ , ۷ , ۱۳	۶ , ۱۳ , ۲۰		

۲ ـ د

$$a_3 = pa_2 + qa_1 \Rightarrow 14 = 5p + 2q \qquad (1)$$

$$a_4 = pa_3 + qa_2 \Rightarrow 41 = 14p + 5q \qquad (2)$$

از رابطه (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $p = 4 \ , \ q = -3$

در نتیجه: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$

$$a_5 = 4a_4 - 3a_3 = (4\times41) - (3\times14) = 122$$

$$a_6 = 4a_5 - 3a_4 = (4\times122) - (3\times41) = 365$$

۳ ـ د

مبین p مثبت است پس $b^2 - 4ac$ در نتیجه $b^2 - 4ac \geq 1$ زیرا a و b و c صحیح هستند. p دو ریشه‌ی متمایز بین صفر و یک دارد بنابه روابط بین ریشه‌ها و ضرایب داریم: $0 < \frac{c}{a} < 1$ و $\frac{b}{a} < 0$

با توجه به مثبت بودن a داریم: $a > c > 0$ و $b < 0$. از طرفی چون a مثبت است مقدار $p(x)$ در دو سر بازه‌ی $(0 , 1)$ مثبت خواهد بود به‌ویژه $p(1) > 0$ در نتیجه $a+c > -b$. طرفین این نامساوی مثبت هستند که اگر آنها را مجذور کنیم داریم: $a^2 + 2ac + c^2 > b^2$. در نتیجه $(a - c)^2 > b^2 - 4ac$ که مجدداً از آنجاکه a و b و c صحیح هستند نتیجه می‌گیریم که: $a - c \geq 2$. یعنی $c \leq a - 2$

اینک اگر $a \leq 4$ بگیریم تنها سه حالت ممکن خواهد بود:

$$\begin{matrix} a = 4 \\ c = 2 \end{matrix} \Rightarrow 4 > b^2 - 32 > 0$$

$$\begin{matrix} a = 4 \\ c = 1 \end{matrix} \Rightarrow 9 > b^2 - 16 > 0$$

$$\begin{matrix} a = 3 \\ c = 1 \end{matrix} \Rightarrow 4 > b^2 - 12 > 0$$

ولی در هیچ‌کدام از حالت‌های فوق مقدار صحیحی برای b به‌دست نمی‌آید و در نتیجه $a \geq 5$ می‌باشد که در این حالت مشکلی پیش نمی‌آید و چند جمله‌ای $5x^2 - 5x + 10$ برای حالت $a = 5$ و چندجمله‌ای $6x^2 - 5x + 1$ برای حالت $a = 6$ در شرایط موردنظر صدق می‌کنند.

۴ـ ج

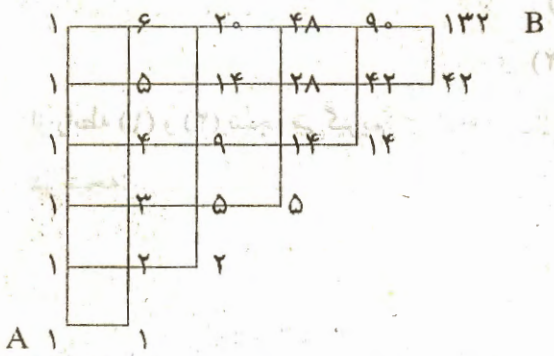
بنابر قوت داریم:

$$\begin{cases} 3a = 2(a+4) \Rightarrow a = 8 \\ ax = 4(a+2) \Rightarrow 8x = 40 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

۵ـ ب

در این دنباله همواره $a_n \overset{3}{\equiv} 1$. در بین گزینه‌های داده شده فقط عدد ۷۸۶۴۲۷ به هنگ ۳ با ۱ هم‌نهشت می‌باشد پس تنها این عدد می‌تواند در بین a_i ها ظاهر شود.

۶ـ ب



توجه کنید که برای هر سه‌تایی X ـــ Y ـــ Z تعداد مسیرهای مورد قبول از A به X برابر تعداد راه‌های A به Y به اضافه‌ی تعداد راه‌های از A به Z است و چون در ردیف اول عددهای سست داده شده ۱ است (تعداد راه‌های A به آنها ۱ است) با پرکردن جدول به عدد ۱۳۲ می‌رسیم.

۷ـ د

برای به‌دست آوردن جواب مسئله کافی است با توجه به اصل شمول و عدم شمول تعداد مقسوم‌علیه‌های هر سه عدد را با هم جمع کرده بعد تعداد مقسوم‌علیه‌های ب.م.م دو به‌دوی آنها را از مجموع به‌دست آمده کم کرده و در انتها تعداد مقسوم‌علیه‌ها مشترک هر سه عدد را به حاصل اضافه نماییم.

$12^{50} = 2^{100} \times 3^{50} \Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های $= 101 \times 51$

$45^{20} = 5^{20} \times 3^{40} \Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های $= 21 \times 41$

$50^{100} = 2^{100} \times 5^{200} \Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های $= 101 \times 201$

$(12^{50}, 45^{20}) = 3^{40} \Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های $(12^{50}, 45^{20}) = 41$

$(۱۲^{۵۰}, ۵۰^{۱۰۰}) = ۲^{۱۰۰}$ ⇒ تعداد مقسوم‌علیه‌های $(۱۲^{۵۰}, ۵۰^{۱۰۰})$ = ۱۰۱

$(۴۵^{۲۰}, ۵۰^{۱۰۰}) = ۵^{۲۰}$ ⇒ تعداد مقسوم‌علیه‌های $(۴۵^{۲۰}, ۵۰^{۱۰۰})$ = ۲۱

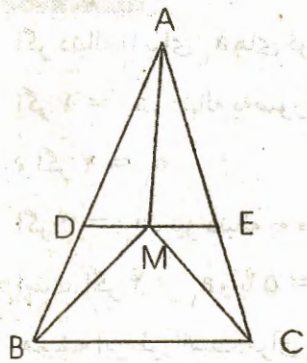
$(۴۱^{۲۰}, ۵۰^{۱۰۰}, ۱۲^{۵۰}) = ۱$ ⇒ تعداد مقسوم‌علیه‌های $(۴۵^{۲۰}, ۵۰^{۱۰۰}, ۱۲^{۵۰})$ = ۱

در نتیجه جواب مسئله برابر است با:

$$(۱۰۱\times۵۱) + (۲۱\times۴۱) + (۱۰۱\times۲۰۱) - (۱۰۱+۴۱+۲۱) + ۱ = ۲۶۱۵۱$$

۸ـ ب

چون اگر DE || BC داریم:



$$MC < ME + EC$$

$$MB < MD + BD$$

$$MA < \max\{AD , AE\}$$

$$DE < \min\{AD , AE\}$$

با جمع زدن ۴ نامساوی فوق داریم:

$$MA + MB + MC < AB + AC$$

(در راه حل فوق فرض شده است که BC کوچکترین ضلع مثلث است.)

۹ـ د

$a = ۱$, $b = ۴$

نمی‌توان چنین زنجیره‌ای یافت.

دو حالت داریم $\begin{cases} ۱ \to ۲ \to X \\ ۱ \to ۳ \to X \end{cases}$

الف) تک تک عوامل a را حذف می‌کنیم و تک تک عوامل k را اضافه می‌کنیم.

ب) یک سری اعداد اول خیلی بزرگ درنظر می‌گیریم (بزرگتر از همه‌ی b_i ها). a را در یکی از آنها ضرب می‌کنیم و بعد عوامل a را کم کم حذف می‌کنیم و عوامل $b_۱$ را جایگزین می‌کنیم و در آخرین مرحله، آن عامل اولِ خیلی بزرگ را برمی‌داریم تا به $b_۱$ برسیم. به همین روش می‌توان از $b_۱$ به $b_۲$ رسید تا .....

ج) چون تکرارشدن اشکالی ندارد، می‌شود ابتدا از ۱ به ۲ رفت و بعد به ۱ برگشت. از ۱ به ۳ رفت و بعد دوباره به ۱ برگشت و به همین شکل در هر مرحله از ۱ به b می‌رویم (طبق الف) و بعد به ۱ برمی‌گردیم ... پس همه‌ی جملات این دنباله را در a ضرب می‌کنیم.

د) با روشی که در ابتدای قسمت (ج) گفتیم، زنجیره‌ای نامتناهی شامل همه‌ی اعداد به‌دست می‌آید.

۱۰ـ ج

ثابت می‌کنیم که L هیچ یک از اعداد فرد را نمی‌تواند بگیرد در حالی‌که کلیه‌ی اعداد زوج بین ۱ تا ۱۰ را می‌تواند بگیرد.

اینکه L زوج است بدیهی است چون داریم: $\sum f_i = \sum (a_i - i) = ۰$

پس $\sum_{i=1}^{1999} (f_i)$ زوج است و چون مجموع فرد عدد، یک عدد زوج شده حتماً یکی از آنها زوج است پس L که حاصلضرب این اعداد است هم باید زوج شود همچنین بدیهی است که L تمام مقادیر زوج را می‌گیرد چون کافی است جایگشت $(1998, 1999) = (2k+4, 2k+5)(2k+2, 2k+3)(1, 2, 3, \ldots, 2k+1)$ را درنظر بگیریم مقداری که برای این جایگشت به‌دست می‌آید 2k است پس کلیه‌ی مقادیر زوج بین ۱ تا ۱۰ را می‌توان پوشاند. پس L می‌تواند با ۵ تا از اعداد ۱ تا ۱۰ مساوی شود.

۱۱ - ج

اگر دنباله را برای a_1 های کوچک بنویسیم متوجه‌ی نکته‌ای می‌شویم:

اگر $a_1 = 1$، دنباله به‌صورت روبرو است: $1, 2, 3, 2, 3, \ldots$

و اگر $a_1 = 2$ $2, 3, 2, 3, \ldots$

اگر $a_1 = 3$، نیز دنباله به صورت $3, 2, 3, 2, \ldots$

است. اگر $a_1 = 4$ و یا $a_1 = 5$ باز هم به تناوب ۳ , ۲ در دنباله خواهیم رسید. پس می‌توانیم حدس بزنیم که همیشه این‌طور است. برای اثبات حدس، از استقرا استفاده می‌کنیم.

برای $a_1 \leq 3$ حکم در بالا، ثابت شد. حالا اگر حکم برای $1 \leq a_1 \leq n$ درست باشد $(n \geq 3)$ آن را برای $a_1 = n+1$ ثابت می‌کنیم. اگر $n+2$ اول نباشد داریم

$$a_2 \leq \frac{n+2}{2} \leq n$$

پس دنباله‌ای که از a_2 شروع می‌شود، متناوب خواهد شد (بنابر فرض استقرا) پس این اتفاق برای a_1 هم خواهد افتاد.

اگر $n+2$ اول باشد آنگاه $n+3$ اول نخواهد بود (چون $n \geq 3$) پس

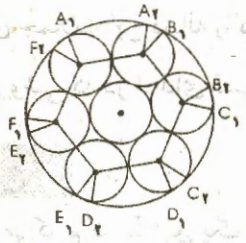
$$a_2 = n+2 \ , \ a_3 \leq \frac{n+3}{2} \leq n$$

با استقرا، حکم ثابت است.

یعنی تمام اعداد، خوبند!

۱۲ - د

محیط کش را می‌توان به ۶ پاره‌خط مماس بر دوایر که طول هر کدام ۲ می‌باشد و ۶ کمان که روی هم یک دایره به شعاع یک می‌سازند تقسیم کرد.



$$\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = \overline{C_1C_2} = \overline{D_1D_2} = \overline{E_1E_2} = \overline{F_1F_2} = 2$$

$$X = \overset{\frown}{A_2B_1} + \overset{\frown}{B_2C_1} + \overset{\frown}{C_2D_1} + \overset{\frown}{D_2E_1} + \overset{\frown}{E_2F_1} + \overset{\frown}{F_2A_2} = 2\pi$$

در نتیجه طول کش برابر است با:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} + \overline{D_1D_2} + \overline{E_1E_2} + \overline{F_1F_2} + X = 6 \times 2 + 2\pi = 12 + 2\pi$$

۱۳ - الف و ب

هم گزینه‌ی (الف) و هم گزینه‌ی (ب) جواب است (هرچند قرار است فقط یک گزینه جواب باشد!)

نادرستی گزینه‌ی (الف):

C C A B B

A A B C C

B B C A A

بیشتر مردم C را بر A ترجیح می‌دهند ⟵ ولی { بیشتر مردم A را بر B ترجیح می‌دهند ؛ بیشتر مردم B را بر C ترجیح می‌دهند }

نادرستی گزینه‌ی (ب):

A A A B B

B B B C C

C C C A A

A رئیس نمی‌شود { امتیاز A = ۱۱ ؛ امتیاز B = ۱۲ } { بیشتر مردم A را بر B ترجیح می‌دهند ؛ بیشتر مردم A را بر C ترجیح می‌دهند }

(ج):

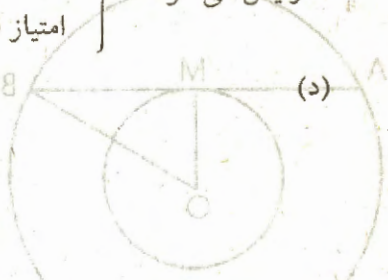
A A B B C

B B A A A

C C C C B

A رئیس می‌شود { امتیاز A = ۱۲ ؛ امتیاز B = ۱۱ } کمتر از نصف مردم A را هم بر B و هم بر C ترجیح می‌دهند.

(د)



C B B

A S C ⟵ B رئیس می‌شود

B C A

(هـ) B B A A A تک مرحله‌ای ⟵ B رئیس می‌شود

C C B B B

A A C C C دو مرحله‌ای ⟵ A رئیس می‌شود

۱۲ ـ هـ

قرار دهید: $c = b + ۱$. در نتیجه داریم:

$$a^۲ + b^۲ = (b + ۱)^۲ + ۳ \Rightarrow a^۲ = ۲b + ۴$$

پس اگر $a = 2k$ داریم: $4k^2 = 2b + 4$

یعنی $b = 2k^2 - 2$ و با فرض $c = b + 1 = 2k^2 - 1$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} a = 2k \\ b = 2k^2 - 2 \\ c = 2k^2 - 1 \end{cases}$$ به‌ازای هر $k \in N$ این جواب‌ها برای (a,b,c) در معادله صدق می‌کنند پس این معادله بی‌نهایت جواب دارد.

$$(2k)^2 + (2k^2 - 2)^2 = (2k^2 - 1)^2 + 3$$

۱۵ ـ د

صفحه را به صورت ستونی سیاه و سفید (یکی در میان) رنگ می‌کنیم. چون مربع ۲×۲، و مستطیل‌های سطری ۱×۴ به تعداد مساوی از خانه‌های سفید و سیاه را می‌پوشانند، پس تعداد مستطیل‌های ۱×۴ ستونی که تماماً در خانه‌های سفید قرار دارند با آنهایی که کاملاً در خانه‌های سیاه قرار می‌گیرند، برابر است. پس تعداد کل مستطیل‌های ۱×۴ ستونی زوج است.

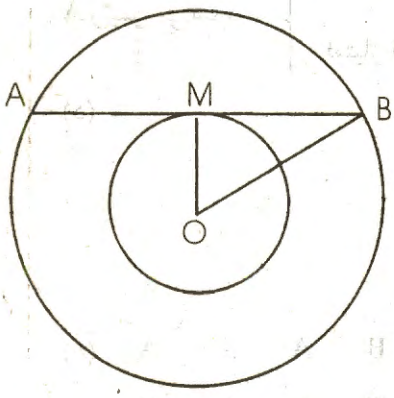
با همین استدلال، تعداد کل مستطیل‌های ۱×۴ سطری هم زوج است پس $n^2 - 1$ که تعداد مستطیل‌های ۱×۴ است زوج است، یعنی n فرد است.

حالا نشان می‌دهیم برای n های فرد، می‌توان این کار را کرد.

در واقع پوشاندن یک مستطیل ۲×۲n (که n فرد است) به وسیله‌ی یک مربع ۲×۲ و $n-1$ مستطیل ۱×۴ ساده است. پوشاندن مستطیل ۴×۲n با مستطیل‌های ۱×۴ هم ساده است و چون n فرد است پس با کنار هم گذاشتن یک مستطیل ۲×۲n و تعدادی مستطیل ۴×۲n، مربع ۲n×۲n حاصل می‌شود.

۱۶ ـ ج

فرض کنید شعاع دایره‌ی کوچک r و شعاع دایره‌ی بزرگ R باشد.



$$\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = r$$

$$\overline{BM}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OM}^2 = R^2 - r^2 = 49 \qquad (1)$$

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $S = 49\pi$

۱۷ ـ الف

ماکزیمم وقتی می‌شود که:

الف) هیچ دانش‌آموزی بیش از یک بار اول نشود.

ب) ۳۵ محل از رتبه‌ی دوم تا ششم، در ۷ آزمون، با ۸ دانش‌آموز (غیر رتبه اول) که هر کدام حداقل ۴ بار ظاهر می‌شوند پرگردد.

رتبه \ آزمون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱	T	U	V	W	X	Y	Z
۲	A	B	C	D	E	F	G
۳	H	A	B	C	D	E	F
۴	G	H	A	B	C	D	E
۵	F	G	H	A	B	C	D
۶	E	F	G	H	—	—	—

پس حداکثر ۱۵ دانش‌آموز می‌توانند جایزه بگیرند.

۱۸ ـ ج

به کمک اتحاد زیر داریم:

$$a + b = c \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2 + ab + b^2)^2$$

(اثبات: با توان رساندن به‌دست می‌آید.)

پس چون $a + b = c$ داریم:

$$A = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2} = \frac{2(a^2 + ab + b^2)^2}{a^2b^2} = 2\left(\frac{a^2 + ab + b^2}{ab}\right)^2$$

امّا $\frac{a^2 + ab + b^2}{ab} \geq 3$ زیرا $(a - b)^2 \geq 0$. پس

$$A \geq 2 \times 9 = 18$$

برای حالت تساوی قرار می‌دهیم: $a = b = 1 \ , \ c = 2$

۱۹ ـ الف

$$f_m = \underbrace{11 \ldots . 1}_{m \text{ بار}}$$

$$m \geq 2 \Rightarrow f_m \overset{4}{\equiv} 11 \overset{4}{\equiv} 3 \qquad (1)$$

$$x \in N \Rightarrow \begin{cases} x^2 \overset{4}{\equiv} 0 \\ x^2 \overset{4}{\equiv} 1 \end{cases} \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که برای $m \geq 2$ تساوی $f_m = x^2 + y^2$ نمی‌تواند برقرار باشد حالت $m=1$ نیز واضح است.

۲۰ ـ الف

داریم: $1 + 2 + 3 + \ldots + 61 = \frac{61 \times 62}{2} = 61 \times 31$

در ردیف موردنظر عدد سومی را a و عدد آخری را b می‌نامیم. می‌خواهیم a را پیدا کنیم: با توجه به فرض مسأله داریم:

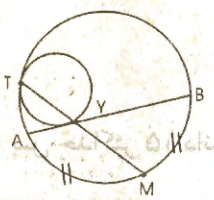
$a \mid ۶۱+۱ = ۲\times۳۱$ و $b \mid ۱+۲+ \ldots + ۶۱-b \Rightarrow b \mid ۱+۲+ \ldots + ۶۱ = ۶۱\times۳۱$

چون ۶۱ و ۳۱ هر دو عدد اولند به‌دست می‌آید:

$(a = ۲$ یا $a = ۳۱)$ و $(b = ۶۱$ یا $b = ۳۰)$

اما $b = ۶۱$ **قابل قبول** نیست زیرا ۶۱ قبلاً در خانه‌ی اول آمده پس به‌دست می‌آید $b = ۳۱$. حالا که خانه‌ی آخر یعنی b برابر **۳۱ شد** پس $a = ۳۱$ هم امکان ندارد پس $a = ۲$ جواب موردنظر می‌باشد.

۲۱ - ج



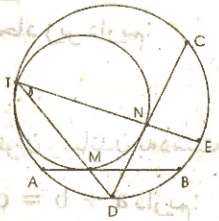
با توجه به شکل و بنابر قضیه‌ای می‌دانیم:

$$AM = BM$$

پس TM از C یعنی وسط AB می‌گذرد.

و طبق استدلال فوق اگر E وسط کمان DC باشد، E و N و T روی یک خط هستند پس:

کمان‌های $BE = y$ و $DE = z$ و $AC = CB = x$ را در نظر می‌گیریم داریم:



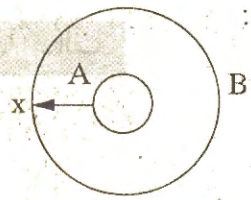
$$\begin{cases} x = ۳۰^\circ \\ z = x+y = ۳۰+y \\ y+z = ۶۰^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} y = ۱۵^\circ \\ x = ۳۰^\circ \\ z = ۴۵^\circ \end{matrix} \Rightarrow \alpha = \frac{x+y}{۲} = \frac{۴۵}{۲} = ۲۲/۵^\circ$$

۲۲ - د

فرض کنید $r < \frac{۱}{۴}$ (مقدار دقیق آن را بعداً مشخص خواهیم کرد.)

اگر علی‌مردان خان روی دایره‌ای به مرکز وسط حوض و شعاع r بچرخد، سرعت‌زاویه‌ای‌اش از عباس‌قلی‌خان بیشتر خواهد بود. پس می‌تواند کاری کند که وضعیت روبرو رخ دهد:



A، علی‌مردان خان و B، عباس‌قلی‌خان است. حال اگر علی‌مردان خان مستقیم به سمت x شنا کند باید مسیری به طول $r - ۱$ را طی کند. عباس قلی‌خان هم برای رسیدن به نقطه x باید مسیری به طول π را طی کند. نشان می‌دهیم r را می‌توان طوری انتخاب کرد که $\pi > ۴(۱-r)$. یا به عبارتی $r > ۱ - \frac{\pi}{۴}$. برای وجود چنین r‌ای باید داشته باشیم $۱ - \frac{\pi}{۴} < \frac{۱}{۴}$. یعنی $\pi > ۳$. که این هم درست است.

۲۳ - الف

با استقرا نشان می‌دهیم که اگر n یعنی تعداد تخمه‌ها به‌صورت $۳k$ باشد نفر دوم برنده است و در غیر این‌صورت نفر اول برنده خواهد بود.

برای $n = ۱$ و $n = ۲$ واضح است که نفر اول برنده خواهد بود.

برای $n = ۳$ اگر نفر اول یک تخمه بردارد، نفر دوم ۲ تخمه برمی‌دارد و اگر نفر اول ۲ تخمه بردارد نفر دوم یک تخمه برخواهد داشت پس برای $n = ۳$ نفر دوم برنده خواهد بود.

حال فرض می‌کنیم که حکم برای اعداد ۱ تا $۳k$ برقرار باشد ما حکم را برای اعداد $۳k+۱$ و $۳k+۲$ و $۳(k+۱)$ ثابت می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که حکم به‌ازای هر n برقرار است.

اگر تعداد تخمه‌ها $3k+1$ باشد نفر اول یعنی A، ۱ تخمه برمی‌دارد. در وضعیت جدید تعداد تخمه‌ها $3k$ می‌باشد و A نفر دوم خواهد شد و شخص B نفر اول می‌باشد پس طبق فرض استقرا A برنده می‌شود.
اگر تعداد تخمه‌ها $3k+2$ باشد نفر اول یعنی A، ۲ تخمه برمی‌دارد. در وضعیت جدید تعداد تخمه‌ها $3k$ می‌باشد و A نفر دوم خواهد شد و B نفر اول می‌باشد و طبق فرض استقرا A برنده می‌شود.
اگر تعداد تخمه‌ها $3(k+1)$ باشد نفر اول یعنی A اگر ۱ یا ۲ و یا ۵ تخمه بردارد در وضعیت جدید به‌ترتیب $3k+2$ یا $3k+1$ یا $3(k-1)+1$ تخمه باقی می‌ماند و چون در این وضعیت A نفر دوم و B نفر اول است طبق فرض استقرا B برنده خواهد شد.
پس طبق استقرای حکم برای هر n برقرار می‌باشد و گزینه‌ی (الف) گزینه‌ی صحیح می‌باشد.

۲۴ ـ د

داریم:

$$(x+y)(y+z) = xy + xz + y^2 + yz = xz + y(x+y+z) = xz + \frac{1}{xz}$$

و با توجه به اینکه $(\sqrt{xz} - \frac{1}{\sqrt{xz}})^2 \geq 0$ نامساوی $xz + \frac{1}{xz} - 2 = (\sqrt{xz} - \frac{1}{\sqrt{xz}})^2 \geq 0$ برقرار می‌باشد پس حداقل مقدار عبارت $(x+y)(y+z)$ برابر ۲ است.

۲۵ ـ ه

نشان می‌دهیم که یک سؤال کافی است. توجه کنید که $2^7 = 128 > 100$
پس اگر $1 \leq a \leq 100$، p عددی اول و $p^k \mid a$ آنگاه $k \leq 7$. حال اگر $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ اعداد اول از ۱ تا ۱۰۰ باشند. m را به‌صورت روبرو تعریف می‌کنیم: $m = p_1^7 p_2^7 \ldots p_n^7$
واضح است که $(n, m) = n$
پس کافی است در اولین سؤال عدد m را بگوییم.

۲۶ ـ د

می‌توان هر کارگر را با یک نقطه نمایش داد و در صورتی که دو کارگر دوست باشند نقطه‌های متناظر آنها را به‌هم وصل کرد. با این کار یک گراف به‌دست می‌آید، که شامل یک یا چند مؤلفه همبندی است. مثال زیر نشان می‌دهد که گزینه‌های (الف)، (ب) و (ج) نادرست هستند.

عباس قلی‌خان

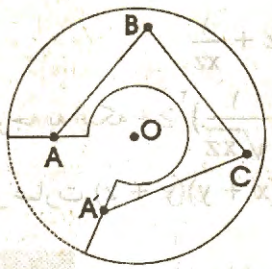
توجه کنید که میانگین حقوق همه‌ی کارگرها $\frac{9}{5}$ است.
حال نشان می‌دهیم که (د) درست است. در واقع حقوق افراد یک مؤلفه همبندی گراف، مقدار ثابتی است. فرض کنید در یک مؤلفه بیشترین مقدار حقوق M باشد. حقوق رأس‌های متصل به این رأس از M تجاوز نمی‌کند و در ضمن میانگین این مقدار هم M است. پس حقوق همه دوستان این کارگر M است. با تکرار همین کار نتیجه می‌شود که حقوق همه افراد یک مؤلفه همبندی برابر M است.

۲۷ ـ ج

از دو نقطه‌ی متقاطع بی‌نهایت دایره‌ی عظیمه می‌گذرد. پس گزینه‌ی (الف) نادرست است. اگر سه نقطه روی یک دایره‌ی عظیمه باشند تشکیل یک مثلث با سه زاویه‌ی 180° می‌دهد که مجموع زوایای آن 540° است. اگر مثلثی کوچک روی کره رسم کنیم، مجموع زوایای آن نزدیک 180° است. پس گزینه‌ی (ب) نیز نادرست است. با توجه به نکته‌ی اخیر نادرست بودن گزینه‌ی (د) هم نتیجه می‌شود. توجه کنید که وقتی مساحت مثلث به صفر نزدیک شود مجموع زوایای آن به 180° نزدیک می‌شود.

اگر کمی دقت کنید می‌بینید که هر سه نقطه نشان دهنده‌ی دو مثلث بر روی کره هستند. این دو مثلث با هم سطح کره را می‌پوشانند و مجموع زاویه‌های دو مثلث روی هم، $3\times360^\circ$ یعنی 1080° است. حال اگر مساحت یکی از این دو به صفر نزدیک شود مجموع زوایایش به 180° نزدیک می‌شود و همیشه از این مقدار بیشتر است. در این وضعیت مجموع زوایای مثلث دیگر به $180^\circ - 1080^\circ$ یعنی 900° نزدیک می‌شود و همیشه از این مقدار کمتر است. پس گزینه (ه) صحیح است.

۲۸ ـ ب

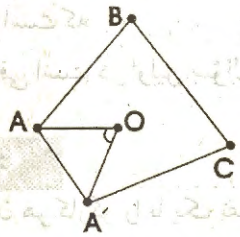


اگر ABC مثلثی باشد که دور رأس مخروط چرخیده با پاره‌کردن مخروط و مسطح کردن آن به شکل روبرو می‌رسیم.

توجه کنید که با این کار طول خم‌ها تغییر نمی‌کند و در نتیجه شبه‌خطها به خط تبدیل می‌شوند. (A و A' در واقع یک نقطه روی مخروط ناقص هستند.)

با انجام کار اخیر مثلثی مثل Δ_1 به یک مثلث معمولی تبدیل می‌شد. پس مجموع زوایای Δ_1، 180° است (گزاره ۱)

حال نشان می‌دهیم مجموع زوایای ABC، $\pi + \theta$ است که $\theta = \hat{AOA'}$. (θ مستقل از مثلث است).



$$\text{مجموع زوایای ABC} = \hat{BAO} + \hat{OA'C} + \hat{B} + \hat{C}$$
$$= \hat{BAA'} - \hat{OAA'} + \hat{AA'C} - \hat{AA'O}$$
$$+ \hat{B} + \hat{C} = 2\pi - \hat{OAA'} - \hat{AA'O}$$
$$= \pi + \theta$$

پس گزاره ۲ نیز صحیح است.

۲۹ ـ ب

$$N * S = (V * P) * S = V * (P * S) = V * Q = T$$

پس قرینه‌ی T نسبت به محور xها، محل برخورد NS با منحنی است. پس محل سوم برخورد NS، قرینه‌ی T یعنی S است. یعنی NS در S بر منحنی مماس است پس (الف) صحیح است.

به‌علاوه

$$(U * P) * T = ((Q * S) * P) * (P * Q') = Q * (S * P) * P * Q'$$
$$= Q * Q * P * Q' = (Q * Q') * P * Q'$$
$$= (\infty * P) * Q = P * Q = S$$

پس (ج) هم درست است.

(د) هم درست است چراکه مماس در P عمودی است و اگر در Q مماس عمودی باشد، Q و قرینه‌ی Q برهم

منطبق‌اند و لذا Q همان P است.

اگر $A * X = A * Y = Z$ آنگاه قرینه Z را Z' بنامید. پس AZ' خم را در نقطه X و Y قطع می‌کند پس X و Y قرینه‌ی Z' نسبت به A هستند که یکتا است پس $X = Y$ حال

$$A^{۷} = A^{۱۱} \Rightarrow A^{۷} * \infty = A^{۷} * A^{۴} \Rightarrow \infty = A^{۴}$$

$$A^{۱۵} = A^{۲۰} \Rightarrow A^{۱۵} * \infty = A^{۱۵} * A^{۵} \Rightarrow \infty = A^{۵}$$

$$\Rightarrow A^{۴} = A^{۵} \Rightarrow A^{۴} * \infty = A^{۴} * A \Rightarrow \infty = A$$

پس (هـ) هم درست است.

اما اگر مماسی بر منحنی در Q از $U * P$ بگذرد مماس در Q' از قرینه‌ی $U * P$ می‌گذرد و لذا

$$Q' * Q' = U * P$$

$$U * P = Q * S * P = Q * Q \Rightarrow Q' * Q' = Q * Q$$

یعنی مماس در Q همان مماس در Q' است و این تناقض است. پس گزینه غلط (ب) است.

۳۰ ـ هـ

$\infty * A$ را محاسبه می‌کنیم. خط عمودی گذرا از A، خطی است که از ∞ هم می‌گذرد و منحنی را در قرینه‌ی A، یعنی A'، قطع می‌کند. قرینه‌ی A' نسبت به محور xها A است پس $A * \infty = A$. قرار دهید $E = \infty$ تا (الف) نتیجه شود.

برای (ب)، B' را قرینه‌ی B فرض کنید. پس کافی است X چنان باشد که AX، M را در B' قطع کند یا معادلاً AB'، M را در X قطع کند یا $X' = A * B'$ که X' قرینه‌ی X است و این طبق اطلاعات داده شده همیشه یک X می‌دهد.

(ج) در راه حل سؤال ۲۹ نشان داده شد.

اگر $X * X = \infty$، مماس در X از ∞ می‌گذرد پس مماس در X عمودی است و این همان قسمت (د) از سؤال ۲۹ می‌باشد که ثابت شد صحیح است پس همه‌ی گزینه‌ها درست هستند.

کلید پاسخ به سؤالات مرحله‌ی اول هجدهمین المپیاد ریاضی کشور

سال تحصیلی ۷۹-۱۳۷۸