



آزمون مرحله اول سی‌امین المپیاد ریاضی

کشور

دانش‌آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۰ سؤال پاسخ دهید. جواب این سؤالات یک عدد حداکثر پنج رقمی است و شما باید ارقام آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰ بود شما باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰
--	---	---	---	---

خوانا بنویسید، چون پاسخ شما توسط ماشین خوانده خواهد شد. البته لازم نیست کاملاً شبیه نمونه بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «۶» هم ایرادی ندارد ولی به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمره مثبت دارد. در مورد این ۱۰ سؤال پاسخ نادرست نمره منفی ندارد.

۱. فرض کنید a ، b و c اعدادی طبیعی باشند که $ac = ۲۰۱۲$ ، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b برابر ۱ و کوچک‌ترین مضرب مشترک b و c برابر ۱۳۹۰ است. مقدار $a + b + c$ چند است؟



۲. اخیراً سه شهر نمکستان، سماقستان و فلفلستان که از توابع شکرستان هستند از طریق خط راه‌آهن مستقیماً به شکرستان متصل شده‌اند. جهان‌گردی سفر خود را از نمکستان شروع کرده و ۱۲ بلیط قطار دارد و می‌خواهد از همه بلیط‌های خود استفاده کند. اگر او بخواهد دقیقاً یک بار به سماقستان وارد شود به چند روش می‌تواند سفر خود را انجام دهد؟ (توجه کنید که بین نمکستان، سماقستان و فلفلستان مسیر مستقیم وجود ندارد.)

۳. مجموع اعداد حقیقی نامنفی a ، b و c برابر ۳۰ است. بیش‌ترین مقدار ممکن $۳ab + ۴bc$ چه قدر است؟

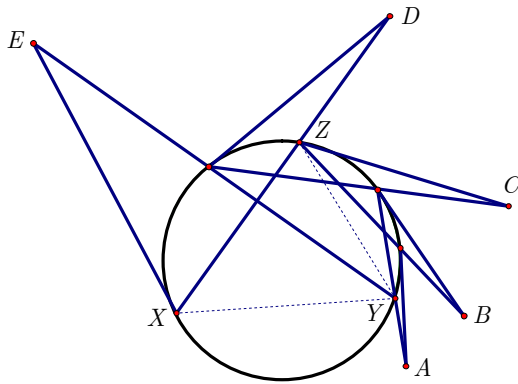
۴. به چند حالت می‌توان در عبارت $۷ \pm \dots \pm ۲ \pm ۱$ مثبت‌ها و منفی‌ها را تعیین کرد که حاصل مثبت باشد؟

۵. در دو طرف خیابان اصلی شهر هجده چراغ برق در دو ردیف نه تایی مقابل هم نصب شده‌اند. فاصله بین دو چراغ متوالی پنجاه متر و عرض خیابان ده متر است. بعضی از چراغ‌ها خاموش شده‌اند اما در فاصله کمتر از شصت متر از هر چراغ خاموش حداکثر سه چراغ خاموش دیگر وجود دارد. تعداد چراغ‌های خاموش حداکثر چندتا است؟



آزمون مرحله اول سی امین المپیاد ریاضی

کشور



۶. شش نقطه روی یک دایره قرار دارند و با رسم برخی خطوط مماس و خطوط واصل آنها، شکل روبه‌رو حاصل شده است. اگر زوایای \hat{A} ، \hat{B} ، \hat{C} ، \hat{D} و \hat{E} ، به ترتیب، برابر با ۴، ۷، ۱۰، ۱۳ و ۱۶ درجه باشند، اندازه زاویه \hat{XYZ} را بر حسب درجه بنویسید. (اگر پاسخ عدد صحیح نیست، جزء صحیح آن را بنویسید.)

۷. فرض کنید a و b اعدادی طبیعی باشند که تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت a ، b و ab ، به ترتیب، برابر با ۳، ۴ و ۸ باشد. عدد b^2 چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

۸. به چند طریق می‌توان ۴ مهره در یک جدول 4×4 قرار داد که در هر سطر و در هر ستون دست‌کم یک مهره وجود داشته باشد؟

۹. در مثلث ABC داریم $\angle BAC = 60^\circ$ ، $AB = 7\sqrt{3}$ و $AC = 14\sqrt{3}$. نقطه متغیر X را روی پاره‌خط BC در نظر می‌گیریم. از نقطه X دو خط به موازات AB و AC رسم می‌کنیم تا به ترتیب AB و AC را در نقاط Y و Z قطع کنند. طول پاره‌خط BX چه قدر باشد تا پاره‌خط YZ کم‌ترین طول ممکن را داشته باشد؟

۱۰. چند جمله‌ای $P(x)$ برابر است با مجموع x^n ‌هایی که $1 \leq n \leq 120$ و n بر دست‌کم یکی از اعداد ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد. این چند جمله‌ای چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟



آزمون مرحله اول سی‌امین المپیاد ریاضی

کشور

دانش‌آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۵ سؤال پنج‌گزینه‌ای پاسخ دهید. در این قسمت پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره منفی دارد.

۱. یک جسم به شکل مکعب مستطیل با ارتفاع ۳ و قاعده ۶×۴ روی زمین قرار دارد. نقطه A روی ضلعی از قاعده که طول آن ۶ است قرار دارد. جسم را حول ضلع مقابل آن روی زمین می‌غلتانیم و این کار را در همان جهت آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا جسم یک دور کامل بچرخد. نقطه A چه مسافتی را در فضای طی کرده است؟

- الف) ۳π ب) ۴π ج) ۶π د) ۸π ه) ۱۲π

۲. سه مجموعه A ، B و C را در نظر بگیرید. کدامیک از گزینه‌ها، برابر مجموعه اعضای است که دست‌کم عضو دو تا از این سه مجموعه است؟

- الف) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$ ب) $A \cup B \cup C \cup (A \cap B \cap C)$
 ج) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$ د) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C)$
 ه) گزینه‌های ج و د هر دو صحیح هستند.

۳. به چند روش می‌توان مجموعه $\{۱, ۲, \dots, ۳۰\}$ را دو قسمت کرد که حاصل ضرب اعضای آن‌ها با یکدیگر برابر باشد؟

- الف) این کار ممکن نیست. ب) بین ۱ و ۱۰ روش
 ج) بین ۱۱ و ۱۰۰ روش د) بین ۱۰۱ و ۱۰۰۰ روش
 ه) بیش از ۱۰۰۰ روش

۴. مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ABC به زاویه رأس A و طول ۱۰ ساق مفروض است. نقطه D خواه در صفحه مفروض است به طوری که، نقطه A داخل مثلث BCD قرار می‌گیرد. نیم‌سازهای داخلی زوایای $\angle BAD$ و $\angle CAD$ را رسم می‌کنیم تا اضلاع BD و CD را به ترتیب، در نقاط E و F قطع کنند. اگر مرکز ثقل مثلث BCD واقع بر پاره‌خط EF باشد، طول پاره‌خط AD چه قدر است؟

- الف) ۱۰ ب) ۱۵ ج) ۲۰ د) ۳۰ ه) بستگی به مکان D دارد.

۵. چندجمله‌ای $x^4 - x^2 - 2x - 1$ را در نظر بگیرید. مجموعه x ‌هایی که به ازای آن‌ها این چندجمله‌ای نامنفی است، چه شکلی دارد؟

- الف) یک پاره‌خط ب) دو پاره‌خط
 ج) یک پاره‌خط و یک نیم‌خط د) یک پاره‌خط و دو نیم‌خط
 ه) دو نیم‌خط



آزمون مرحله اول سی امین المپیاد ریاضی

کشور

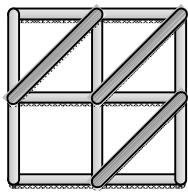
۶. به چند طریق می توان دو عدد طبیعی a و b را از بین اعداد ۱ تا ۱۰ انتخاب کرد که کسر

$$\frac{a+b}{a-b}$$

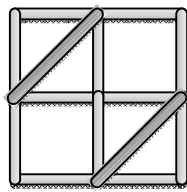
عددی طبیعی باشد؟

- الف) ۱۹ (ب) ۲۴ (ج) ۲۸ (د) ۲۹ (ه) ۳۴

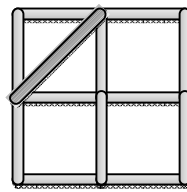
۷. فرض کنید با لولا کردن تعدادی قطعه چوبی به طول های یک متر و $\sqrt{2}$ متر چهار شکل زیر را ساخته ایم به طوری که قطعات می توانند آزادانه در صفحه، دور لولاها بچرخند. چند تا از این شکل ها می توانند با حرکت قطعه چوبها تغییر شکل دهند؟



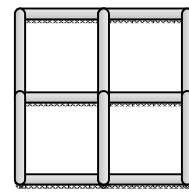
۴ (ه)



۳ (د)

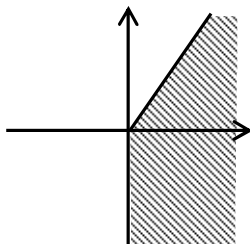


۲ (ج)

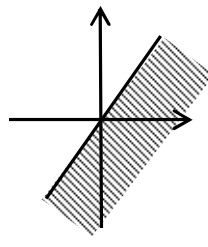


الف) هیچ کدام (ب) ۱

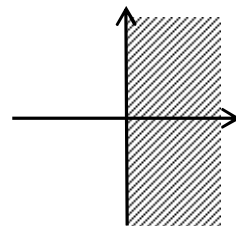
۸. مجموعه نقاطی از صفحه که دارای نمایشی به شکل $(x^2 + y^2, xy)$ هستند، که x و y اعدادی حقیقی هستند، کدام گزینه است؟ (شکلها تقریبی هستند).



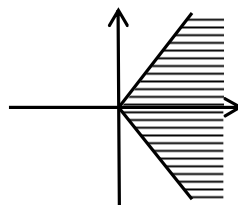
(ج)



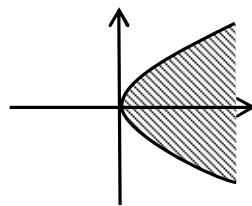
(ب)



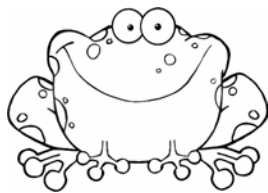
الف)



(ه)



(د)



۹. یک وزغ و یک ملخ در فاصله ۲ متری یکدیگر قرار دارند. وزغ در هر ثانیه ۲۵ یا ۵۰ سانتی متر به سمت ملخ، روی زمین، حرکت می کند و ملخ نیز در هر ثانیه ۲۵ یا ۵۰ سانتی متر به سمت وزغ می پرد. در صورتی که این دو روی زمین به هم برسند، وزغ ملخ را می خورد و می ایستد. به چند روش ممکن است ملخ خورده شود؟

- الف) ۸ (ب) ۱۷ (ج) ۱۸ (د) ۲۴ (ه) ۳۲



آزمون مرحله اول سی‌امین المپیاد ریاضی

کشور

۱۰. فرض کنید چهار خط در فضا داده شده‌اند که دو تا از آن‌ها متقاطع‌اند و به جز آن دو، نه هیچ دو خطی متقاطع هستند و نه موازی. حداکثر چند خط در فضا وجود دارد که هر چهار تای آن‌ها را قطع کند؟

- (الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) بی‌نهایت (ه) هیچ خطی نمی‌تواند هر چهار تا را قطع کند.

۱۱. بزرگ‌ترین عدد حقیقی a که برای هر دو عدد حقیقی x و y که $xy^2 + 4x^2y + 5 = 0$ و $x > 0$ داشته باشیم $ax < y$ ، کدام است؟

- (الف) $-\sqrt[3]{8}$ (ب) -4 (ج) 0 (د) 4 (ه) $\sqrt[3]{8}$

۱۲. به چند طریق می‌توان سه عدد طبیعی x ، y و z را انتخاب کرد که $xy + yz + zx = xyz$ ؟

- (الف) ۷ (ب) ۴ (ج) ۲ (د) ۱ (ه) ممکن نیست.



۱۳. رستوران «مرغ تخم‌طلا» هر روز تنها یکی از غذاهای نیم‌رو، املت و تخم‌مرغ آب‌پز را ارائه می‌کند! مدیر رستوران می‌خواهد برنامه هفتگی را طوری تنظیم کند که غذای هیچ دو روز متوالی یکی نباشد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟ (توجه کنید که روز بعد از جمعه، شنبه است!)

- (الف) ۷۸ (ب) ۸۴ (ج) ۱۲۶ (د) ۱۶۸ (ه) ۱۹۲

۱۴. چند زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی، در دستگاه معادلات روبه‌رو صدق می‌کند؟

$$\begin{cases} x^2 + y = xy^2 \\ y^2 + x = yx^2 \end{cases}$$

- (الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۵

۱۵. فرض کنید چهارضلعی محدب $ABCD$ محیطی نیست؛ یعنی دایره‌ای وجود ندارد که بر هر چهار ضلع آن مماس باشد. دایره‌هایی را در نظر بگیرید که بر سه ضلع از این چهارضلعی مماس هستند. چند تا از این دایره‌ها کاملاً داخل چهارضلعی قرار می‌گیرند؟

- (الف) بسته به چهارضلعی، گاهی دو تا، گاهی سه تا و گاهی چهار تا (ب) گاهی دو تا و گاهی سه تا (ج) گاهی یکی و گاهی دو تا (د) همواره دو تا (ه) همواره یکی

به نام او

راه حل سؤالات مرحله اول سی‌امین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۹۰

سؤالات کوتاه پاسخ بر اساس کد یک.

۱. تجزیه‌ی 2012 به عوامل اول به صورت $2012 = 2^2 \times 503$ است که چون $ac = 2012$ پس باید دقیقاً یکی از a و c بر 503 بخش پذیر باشد. حالت $c \mid 503$ با توجه به این که $[b, c] = 1390$ و این که 1390 بر 503 بخش پذیر نیست امکان ندارد. پس $a \mid 503$ و لذا حالت‌های زیر را داریم.
- الف. $a = 503$ و $c = 4$. از آن جا که $[b, c] = 1390$ بر $c = 4$ بخش پذیر نیست امکان ندارد.
- ب. $a = 1006$ و $c = 2$. از آن جا که $[b, c] = 1390$ مقدار b برابر 695 و یا 1390 است که چون a و b طبق فرض مسئله عامل مشترک ندارند تنها حالت $b = 695$ قابل قبول است که در این حالت $a + b + c = 1703$.
- پ. $a = 2012$ و $c = 1$. از آن جا که $[b, c] = 1390$ ، b باید برابر 1390 باشد که با $(a, b) = 1$ تناقض دارد.

بنابراین پاسخ مسئله 1703 است.

۲. در سفر اول مجبوریم به شکرستان برویم. در ۱۱ سفر بعدی، در سفرهای فرد به یکی از توابع شکرستان می‌رویم و در سفرهای زوج به شکرستان بازمی‌گردیم. پس تنها سفرهای فرد که شش تا هستند را بررسی می‌کنیم. می‌دانیم که دقیقاً یکی از این سفرها به سماقستان است. برای انتخاب این سفر از بین ۶ سفر ۶ حالت داریم. برای مقصد هر کدام از ۵ سفر دیگر هم ۲ گزینه‌ی نمکستان و فلفلستان وجود دارد. پس طبق اصل ضرب پاسخ مسئله $6 \times 2^5 = 192$ است.

۳. بیش‌ترین مقدار ممکن برای $3ab + 4bc$ برابر ۹۰۰ است. برای اثبات این حکم ابتدا یک لم را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم. برای هر دو عدد حقیقی x و y ، $4xy \leq (x + y)^2$.

اثبات. $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 \geq 0$.

$$3ab + 4bc = 4(a+c)b - ab \leq 4(a+c)b \leq ((a+b)+c)^2 = 900$$

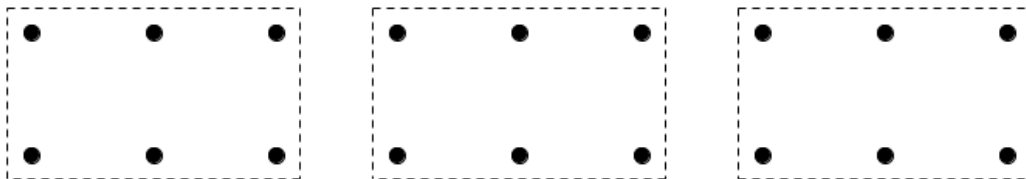
و تساوی زمانی است که $ab = 0$ و $a+c = b = 15$ و لذا $a = 0$ و $b = c = 15$.

۴. دقت کنید که اگر در چنین عبارتی مجموع اعدادی که علامت آنها منفی است برابر S باشد، عدد حاصل برابر $28 - 2S$ خواهد بود. ($28 = 1 + 2 + \dots + 7$)

به علاوه دقت کنید اگر با یک ترکیب از مثبت و منفی‌ها به عددی مثبت برسیم، اگر به جای مثبت‌ها منفی و به جای منفی‌ها مثبت قرار دهیم به عددی منفی می‌رسیم و بالعکس. پس تعداد حالت‌هایی که به مثبت می‌رسیم دقیقاً برابر تعداد حالت‌هایی است که به منفی می‌رسیم. با این توضیحات باید تعداد حالت‌هایی را پیدا کنیم که به حاصل صفر می‌رسیم.

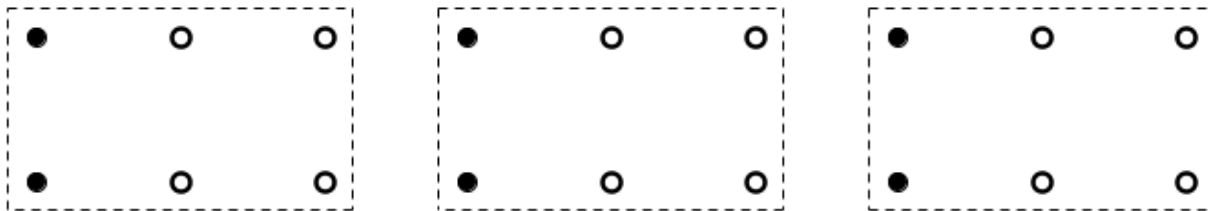
طبق توضیحات ابتدایی برای این که عدد حاصل برابر صفر شود باید مجموع اعدادی که علامت آنها منفی است برابر ۱۴ باشد. پس باید تعداد حالت‌های انتخاب چنین اعدادی را بشماریم. حال اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده ۷ باشد، باید مجموع اعداد دیگر برابر ۷ شود که حالت‌های ممکن $\{1, 6\}$ ، $\{2, 5\}$ ، $\{3, 4\}$ و $\{1, 2, 4\}$ است. اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده ۶ باشد، باید مجموع اعداد دیگر ۸ شود که حالت‌های ممکن $\{5, 3\}$ ، $\{1, 2, 5\}$ و $\{1, 3, 4\}$ هستند و اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده ۵ باشد، باید مجموع اعداد دیگر ۹ شود که فقط حالت $\{2, 3, 4\}$ این طور است. بنابراین در هشت حالت به حاصل صفر می‌رسیم و در غیر از این هشت حالت در نیمی از حالات به مثبت و در نیم دیگر به منفی می‌رسیم و چون تعداد کل علامت‌گذاری‌های ممکن 2^7 تا است، تعداد حالت‌های منجر به عدد مثبت $\frac{2^7 - 8}{2} = 60$ است.

۵. چراغ‌ها را مطابق شکل زیر به سه دسته تقسیم می‌کنیم.

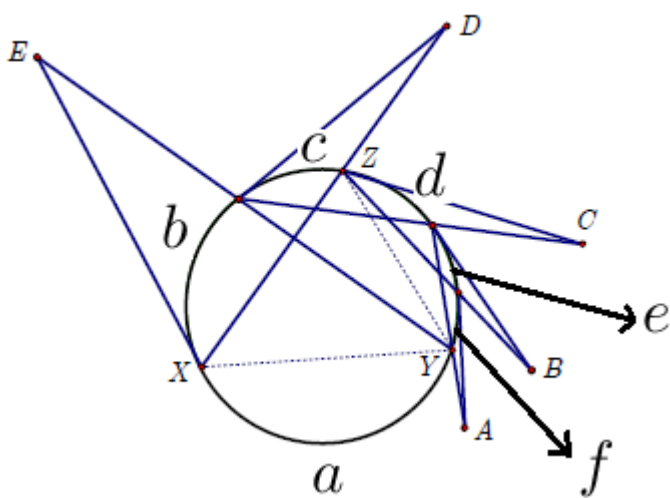


اگر در یک دسته بیش‌تر از ۴ چراغ خاموش باشد، پس یکی از دو چراغ وسطی این آن دسته خاموش است. توجه کنید از آن‌جا که این چراغ از پنج چراغ دیگر هم‌دسته‌اش فاصله‌ای کم‌تر از ۶۰ متر دارد، با این فرض که در هم‌سایگی ۶۰ متری هر چراغ خاموش حداکثر سه چراغ خاموش دیگر قرار دارد تناقض دارد. پس در

هر دسته حداکثر چهار چراغ خاموش داریم و بنابراین در کل حداکثر ۱۲ چراغ می‌تواند خاموش باشد. شکل زیر مثالی برای ۱۲ چراغ را نمایش می‌دهد. (دایره‌های توخالی چراغ‌های خاموش هستند).



۶. مانند شکل روبه‌رو کمان‌های را نام‌گذاری می‌کنیم. در این صورت معلومات سؤال معادل این خواهد بود که



$$\begin{aligned} e - f &= 8^\circ, d - e = 14^\circ, \\ c - d &= 2^\circ, b - c = 26^\circ, \\ a - b &= 32^\circ \end{aligned}$$

هم‌چنین می‌دانیم $a + b + c + d + e + f = 36^\circ$. حال همه‌ی زاویه‌ها را بر حسب f می‌نویسیم و در رابطه‌ی بالا قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} f + \overbrace{(f + 8^\circ)}^e + \overbrace{(f + 8^\circ + 14^\circ)}^d + \overbrace{(f + 8^\circ + 14^\circ + 2^\circ)}^c + \\ \overbrace{(f + 8^\circ + 14^\circ + 2^\circ + 26^\circ)}^b + \overbrace{(f + 8^\circ + 14^\circ + 2^\circ + 26^\circ + 32^\circ)}^a = 36^\circ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 6f + 24^\circ = 36^\circ \Rightarrow f = 2^\circ \Rightarrow c = 62^\circ, b = 88^\circ$$

$$\Rightarrow \angle XYZ = \frac{b + c}{2} = \frac{62^\circ + 88^\circ}{2} = 75^\circ$$

۷. توجه کنید که اگر تجزیه‌ی عدد طبیعی n به صورت حاصل ضرب اعداد اول به شکل $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ باشد، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن که با نماد $d(n)$ نمایش می‌دهیم برابر $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ خواهد بود.

طبق فرض‌های صورت سؤال در مورد تعداد مقسوم‌علیه‌های این اعداد، a باید به شکل p^2 و b باید به شکل q^3 و یا rs باشد که p, q, r و s اعداد اول هستند و $r \neq s$. بنابراین ab باید به شکل $q^3 p^2$ و یا rsp^2 باشد. حال حالت‌های زیر متصور هستند.

الف. $ab = q^3 p^2$. اگر $p = q$ ، $d(ab) = 6$ و اگر $p \neq q$ ، $d(ab) = 12$ که هیچ‌کدام قابل قبول نیستند.

ب. $ab = rsp^2$. اگر r, s و p سه عدد اول متمایز باشند، $d(ab) = 12$ که باز هم قابل قبول نیست. بنابراین p با یکی از r و s برابر است که می‌توان فرض کرد $p = r$. در این صورت $ab = sp^3$ و لذا $d(ab) = 8$ که حالت مورد قبول است.

بنابراین b به شکل ps است و لذا $b^2 = p^2 s^2$ و این نتیجه می‌دهد که تعداد مقسوم‌علیه‌های b^2 برابر ۹ است.

۸. برای انتخاب خانه‌ای از سطر اول که مهره در آن قرار می‌گیرد ۴ حالت داریم. با انتخاب مهره‌ی سطر اول در یکی از خانه‌های سطر دوم نمی‌توان مهره قرار داد، پس برای انتخاب خانه‌ای که مهره‌ی سطر دوم در آن قرار می‌گیرد ۳ حالت داریم. به همین ترتیب برای انتخاب خانه‌هایی از سطر سوم و چهارم که مهره در آن‌ها قرار می‌گیرد به ترتیب ۲ و ۱ حالت داریم. پس پاسخ مسئله برابر است با $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

۹. اگر پای عمود وارد از C بر ضلع AB را H بنامیم، مثلث AHC مثلثی قائم‌الزاویه‌ای با وتر به طول $14\sqrt{3}$ است که $\angle CAH = 60^\circ$. پس

$$AH = AC \cdot \cos(\angle CAH) = AC \cdot \cos(60^\circ) = 14\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 7\sqrt{3} = AB$$

و لذا B همان نقطه‌ی H است و این یعنی مثلث ABC خود قائم‌الزاویه است ($\angle B = 90^\circ$) و طبق

$$.BC = \sqrt{14^2 \times 3 - 7^2 \times 3} = 7\sqrt{9} = 21$$

حال طول YZ را بر حسب BX محاسبه می‌کنیم. طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث YZS داریم:

$$YZ^2 = ZS^2 + YS^2 = BX^2 + (YX - ZB)^2$$

طبق قضیه‌ی تالس و از آن‌جا که $YX \parallel AB$ ، $\frac{YX}{AB} = \frac{CX}{BC}$ ، $YX = \sqrt{3} \frac{21 - BX}{21} = \frac{21 - BX}{\sqrt{3}}$ و لذا $\frac{YX}{AB} = \frac{CX}{BC}$

از طرف دیگر با توجه به این که $\angle ZXB = 30^\circ$ و $\frac{ZB}{BX} = \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ به

$$.ZB = \frac{BX}{\sqrt{3}}$$

با جای‌گذاری دو رابطه‌ی اخیر در عبارت مربوط به YZ خواهیم داشت:

$$YZ^2 = BX^2 + \left(\frac{21 - 2BX}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3YZ^2 = 3BX^2 - 84BX + 441 = 3(BX^2 - 12BX + 36) + 189$$

$$\Rightarrow YZ^2 = \frac{1}{3}(BX - 6)^2 + \frac{189}{3} \geq \frac{189}{3}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار YZ^2 برابر $\frac{189}{3}$ است و زمانی به این مقدار می‌رسیم که $BX = 6$ باشد.

۱۰. اعدادی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر هستند که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۶، یکی از اعداد ۰، ۲، ۳ و ۴ باشد،

معادلاً به فرم $6k$ ، $6k + 2$ ، $6k + 3$ و یا $6k + 4$ باشد. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{\substack{(n,6) \neq 1 \\ 1 \leq n \leq 12}} x^n \\ &= \sum_{1 \leq k \leq 12} x^{6k} + \sum_{1 \leq 6k+2 \leq 12} x^{6k+2} + \sum_{1 \leq 6k+3 \leq 12} x^{6k+3} + \sum_{1 \leq 6k+4 \leq 12} x^{6k+4} \\ &= \sum_{k=0}^{19} x^{6k+6} + \sum_{k=0}^{19} x^{6k+2} + \sum_{k=0}^{19} x^{6k+3} + \sum_{k=0}^{19} x^{6k+4} \\ &= (x^6 + x^2 + x^3 + x^4) \left(\sum_{k=0}^{19} x^{6k} \right) \\ &= x^2(1 + x + x^2 + x^4)(1 + x^6 + x^{12} + \dots + x^{114}) \end{aligned}$$

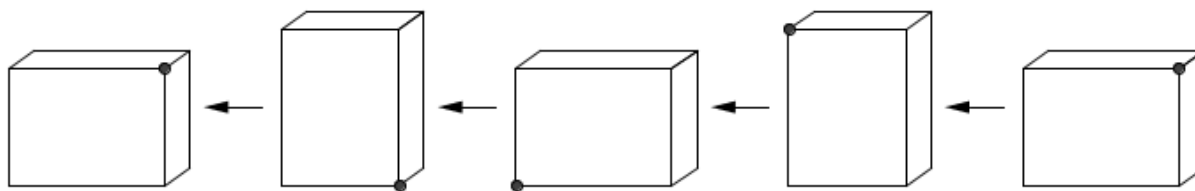
حال دقت کنید که همه‌ی جملات عبارت $x^6 + x^{12} + \dots + x^{114}$ نامنفی هستند و لذا

$$1 + x^6 + x^{12} + \dots + x^{114} > 0$$

و بنابراین این چندجمله‌ای ریشه‌ی حقیقی ندارد. از طرف دیگر $x^2 + x + 1$ یک چندجمله‌ای درجه دوم است که همواره مقدار آن مثبت است و با توجه به نامنفی بودن x^4 ، $x^4 + x^2 + x + 1$ هم همواره مثبت است و ریشه‌ی حقیقی ندارد. پس تنها ریشه‌ی چندجمله‌ای $P(x)$ همان صفر است.

۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

جسم به شکل زیر روی زمین غلطیده:



(دقت کنید که نسبت عمق مکعب که برابر ۶ است به دلیل راحتی در رسم رعایت نشده است و ضمناً نقطه‌ی پررنگ در شکل‌های بالا محل نقطه‌ی A را در هر گام مشخص می‌کند.)

در هر مرحله مکعب مستطیل حول ضلع پایین سمت چپ چرخیده است. پس

در چرخش اول نقطه‌ی A ، ربع دایره‌ای به شعاع ۵ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $\frac{2\pi \times 5}{4} = \frac{5}{2}\pi$ را طی کرده است.

در چرخش دوم نقطه‌ی A ، ربع دایره‌ای به شعاع ۴ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $\frac{2\pi \times 4}{4} = 2\pi$ را طی کرده است.

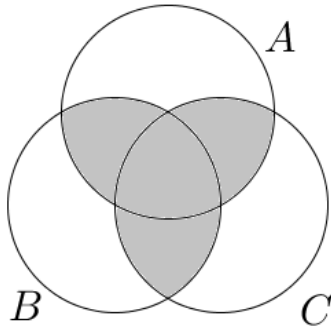
در چرخش سوم نقطه‌ی A ، ثابت مانده و بنابراین مسافتی طی نکرده است.

در چرخش چهارم نقطه‌ی A ، ربع دایره‌ای به شعاع ۳ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $\frac{2\pi \times 3}{4} = \frac{3}{2}\pi$ را طی کرده است.

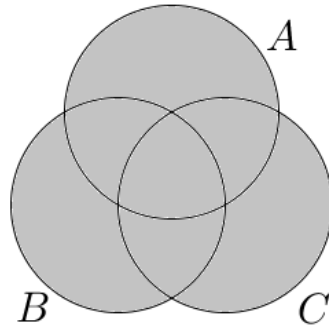
بنابراین در کل این نقطه مسافت $6\pi = \frac{5}{2}\pi + 2\pi + \frac{3}{2}\pi$ را طی کرده است.

۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

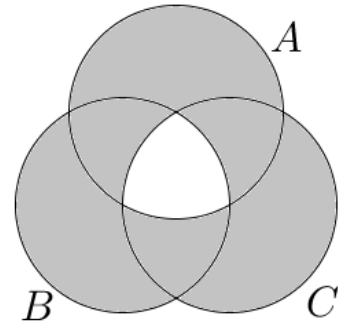
از نمودار ون برای حل این سؤال استفاده می‌کنیم.



گزینه‌ی ج و د



گزینه‌ی ب

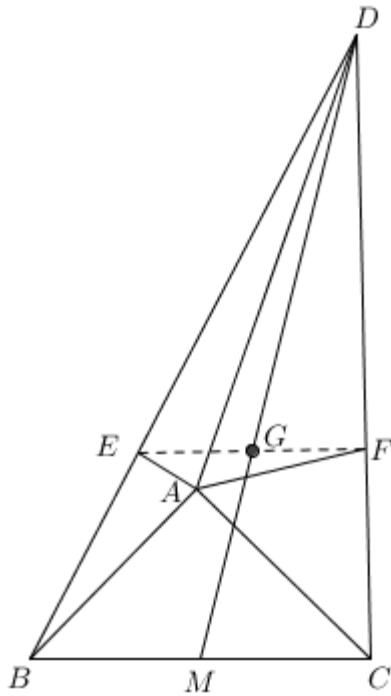


گزینه‌ی الف

۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر حاصل ضرب اعداد دو دسته برابر A باشد، $A^2 = 1 \times 2 \times \dots \times 30 = 30!$ اما در $30!$ تنها یک عامل ۲۳ وجود دارد، پس امکان ندارد که $30!$ مربع کامل باشد. بنابراین چنین عملی ممکن نیست.

۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.



با توجه به این که پاره‌خط‌های AE و AF نیم‌ساز هستند، $\frac{DE}{EB} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DF}{FC}$ و بنا بر قضیه‌ی تالس $EF \parallel BC$ حال چون EF از مرکز ثقل مثلث BCD می‌گذرد نتیجه می‌گیریم $\frac{DE}{EB} = \frac{DG}{GM} = \frac{2}{1}$ وسط M ضلع BC است) و بنابراین $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{EB} = 2$ پس $AD = 2AB = 2$.

۵. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ابتدا دقت کنید که

$$x^4 - x^2 - 2x - 1 = x^4 - (x+1)^2 = (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)$$

عبارت $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ همواره مثبت است پس علامت چندجمله‌ای صورت سؤال با علامت چندجمله‌ای $x^2 - x - 1$ یکسان است. عبارت $x^2 - x - 1$ یک سهمی است که دارای دو ریشه $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ است، پس برای مقادیر بزرگ‌تر از ریشه‌ی بزرگ‌تر و کوچک‌تر از ریشه‌ی کوچک‌تر یعنی $(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$ که اجتماع دو نیم‌خط است، مقدار چندجمله‌ای نامنفی است.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

چون مقدار عبارت طبیعی شده و با توجه به این که صورت کسر مثبت است، مخرج کسر هم باید مثبت باشد و بنابراین $a > b$. از طرف دیگر دقت کنید که $a - b \mid a + b$ معادل این است که $a - b \mid 2b$. حال مسئله را بر حسب مقادیر مختلف b حالت‌بندی می‌کنیم.

$$b = 1, a - 1 \mid 2, \text{ پس } a - 1 \in \{1, 2\} \text{ و لذا } a \in \{2, 3\} \text{ دو حالت دارد.}$$

$$b = 2, a - 2 \mid 4, \text{ پس } a - 2 \in \{1, 2, 4\} \text{ و لذا } a \in \{3, 4, 6\} \text{ سه حالت دارد.}$$

$$b = 3, a - 3 \mid 6, \text{ پس } a - 3 \in \{1, 2, 3, 6\} \text{ و لذا } a \in \{4, 5, 6, 9\} \text{ چهار حالت دارد.}$$

$$b = 4, a - 4 \mid 8, \text{ پس } a - 4 \in \{1, 2, 4, 8\} \text{ و لذا } a \in \{5, 6, 8\} \text{ سه حالت دارد.}$$

$$b = 5, a - 5 \mid 10, \text{ پس } a - 5 \in \{1, 2, 5, 10\} \text{ و لذا } a \in \{6, 7, 10\} \text{ سه حالت دارد.}$$

$$b = 6, a - 6 \mid 12, \text{ پس } a - 6 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \text{ و لذا } a \in \{7, 8, 9, 10\} \text{ چهار حالت دارد.}$$

$$b = 7, a - 7 \mid 14, \text{ پس } a - 7 \in \{1, 2, 7, 14\} \text{ و لذا } a \in \{8, 9\} \text{ دو حالت دارد.}$$

$$b = 8, a - 8 \mid 16, \text{ پس } a - 8 \in \{1, 2, 4, 8, 16\} \text{ و لذا } a \in \{9, 10\} \text{ دو حالت دارد.}$$

$$b = 9, a - 9 \mid 18, \text{ پس } a - 9 \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \text{ و لذا } a \in \{10\} \text{ یک حالت دارد.}$$

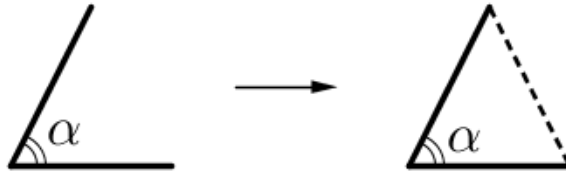
$$b = 10, a - 10 \mid 20, \text{ پس } a - 10 \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\} \text{ که چنین حالتی برای } a \text{ امکان ندارد.}$$

پس در کل به $24 = 1 + 2 + 2 + 4 + 3 + 3 + 3 + 4 + 3 + 3 + 2 + 3 + 2$ حالت می‌توان این دو عدد را انتخاب کرد.

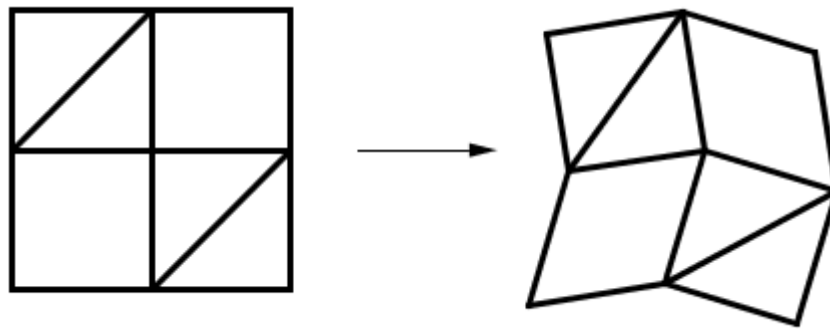
۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

ابتدا توجه کنید که مثلث‌ها نمی‌توانند تغییر شکل بدهند و در نتیجه زوایای درون هر مثلث ثابت هستند. از طرف دیگر اگر در یک لولا زاویه‌ی لولا ثابت باشد، با استفاده از قواعد هم‌نهستی مثلث‌ها می‌توان نشان داد

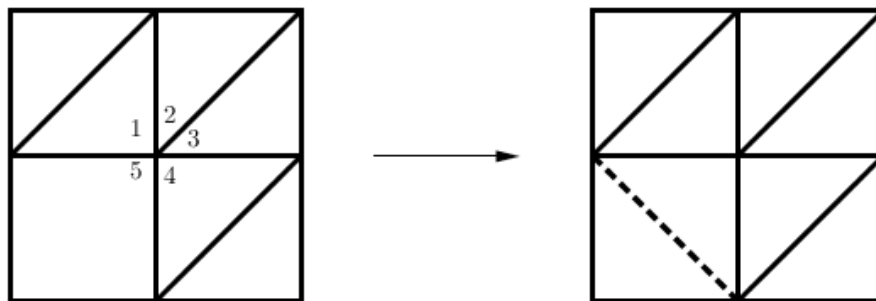
که کل لولا باید ثابت بماند، پس می‌توان ضلع مقابل لولا را اضافه کرد، طوری که در انعطاف‌پذیری شکل تغییری ایجاد نشود. یعنی در شکل زیر اگر α ثابت باشد، می‌توان چوبی در روبه‌روی این زاویه α اضافه کرد، به گونه‌ای که به صورت سمت راست در آید.



توجه کنید که سومین شکل (از سمت راست) را می‌توان با حرکت دادن به صورت زیر تغییر داد. پس سه شکل اول قابل انعطاف هستند.



اما در شکل چهارم با توجه به توضیحات بالا که مثلث‌ها ثابت هستند، زاویه‌های شماره‌ی ۱، ۲، ۳ و ۴ ثابت هستند. بنابراین زاویه‌ی ۵ هم باید ثابت باشد. پس با توجه به توضیحات بالا می‌توان تکه‌چوبی را بدون تغییر در انعطاف‌پذیری به شکل اضافه کرد طوری که تمامی چندضلعی‌های شکل مثلث شوند و به این ترتیب شکل غیرقابل انعطاف است.



پس در کل سه تا از شکل‌ها می‌توانند تغییر کنند.

۸. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

با توجه به نامساوی حسابی، هندسی می‌دانیم که $a^2 + b^2 = |a|^2 + |b|^2 \geq 2|ab|$ ، پس ناحیه‌ی مورد سؤال زیرمجموعه‌ی $\{(x, y) : |y| < \frac{x}{\sqrt{2}}\}$ است. از طرف دیگر اگر $x = \sqrt{a} \cdot \sin \theta$ و $y = \sqrt{a} \cdot \cos \theta$ باشد، $(x^2 + y^2, xy) = (a, \frac{1}{\sqrt{2}} a \sin(2\theta))$ و برای مقادیر مختلف θ ، کل بازه‌ی $[-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}]$ را می‌پوشاند. پس در کل مجموعه‌ی مورد نظر، $\{(x, y) : |y| < \frac{x}{\sqrt{2}}\}$ است.

۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید بعد از گذشت n ثانیه ملخ خورده شود. اگر وزغ بعد از خوردن ملخ به جای این که سر جای خود بایستد، با همان حرکت‌های ملخ خود را به جای نخستین ملخ برساند، n حرکت قبل از خوردن ملخ انجام داده و بعد از خوردن او هم n حرکت دیگر انجام داده است، پس در کل $2n$ حرکت کرده است. بالعکس اگر وزغ با $2n$ حرکت ۲ متر را طی کند، می‌توان n حرکت اول را حرکات وزغ و n حرکت بعدی را برعکس حرکات ملخ در نظر گرفت. در واقع ما تناظری بین تعداد راه‌های خورده شدن ملخ توسط وزغ و راه طی کردن مسیر ۲ متر با تعداد زوجی حرکت توسط وزغ برقرار کرده‌ایم. پس باید تعداد زوج حرکتهایی را بشماریم که وزغ در آن ۲ متر به جلو می‌رود. اگر به جای ۲۵ و ۵۰ سانتی‌متر، طول حرکات را ۱ و ۲ و کل مسیر را ۸ بگیریم، باید تعداد زوج حرکتهایی را بشماریم که در آن ۸ واحد طی می‌شود. تعریف می‌کنیم:

O_n = تعداد فرد حرکتهایی که در آن n واحد طی می‌شود.

E_n = تعداد زوج حرکتهایی که در آن n واحد طی می‌شود.

با توجه به حرکات وزغ که در هر مرحله یک یا دو واحد طی می‌کند به روابط بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$E_{n+1} = O_n + O_{n-1}$$

$$O_{n+1} = E_n + E_{n-1}$$

و هدف یافتن E_8 است. به کمک جدول زیر و با توجه به این که $E_1 = 0$ و $O_1 = O_0 = E_0 = 1$ این محاسبه را انجام می‌دهیم.

n	۱	2	3	4	5	6	7	8
O_n	1	1	1	3	4	6	11	17
E_n	0	1	2	2	4	7	10	17

پس پاسخ عدد ۱۷ است.

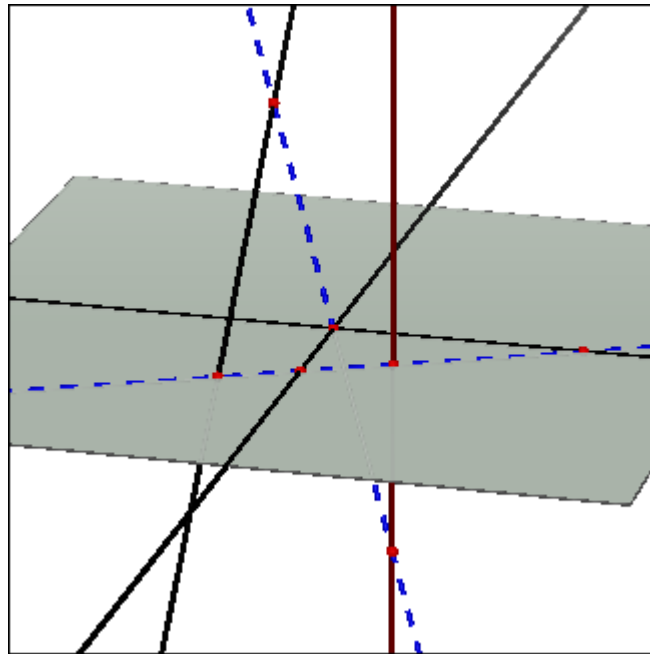
۱۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید l_1, l_2, l_3 و l_4 خط صورت سؤال باشند که l_1 و l_2 در نقطه‌ی P متقاطع هستند. اگر خط l هر چهار خط را قطع کند با توجه به این که l_1 و l_2 را هم قطع می‌کند یا باید از نقطه‌ی P بگذرد یا در صفحه‌ی شامل l_1 و l_2 که صفحه‌ای یک‌تاست قرار دارد.

اگر چنین خطی که از نقطه‌ی P می‌گذرد موجود باشد، خطی یک‌تاست زیرا در غیر این صورت اگر l و l' دو خط با این خاصیت باشند، با توجه به این که هر دو شامل نقطه‌ی P هستند در یک صفحه قرار می‌گیرند و چون l_1 و l_2 با هر دو خط تقاطع دارند، آن‌ها نیز باید در همین صفحه باشند که در این صورت باید با هم متقاطع یا موازی باشند که خلاف فرض ماست.

اگر چنین خطی با در صفحه‌ی شامل l_1 و l_2 باشد، از آن‌جا که اشتراک این صفحه با l_3 و l_4 حداکثر در یک نقطه است. (اگر بیشتر از یک نقطه اشتراک داشته باشد کل خط باید در این صفحه باشد که باعث می‌شود با l_1 و l_2 موازی و یا متقاطع شود که خلاف فرض است.) پس باید خط l از این دو نقطه بگذرد و بنابراین خط مورد نظر در این حالت هم یک‌تا است.

پس در کل حداکثر دو خط می‌توان داشت. می‌توان مطابق شکل زیر خط‌ها را با توجه توضیحات بالا به گونه‌ای طراحی کرد که دو خط متقاطع با هر چهارتای آن‌ها موجود باشند. (خطوط قطعه‌قطعه دو خط مورد نظر هستند.)



۱۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند که $xy^2 + 4x^2y + 5 = 0$ و $x > 0$ ، در این صورت $y < 0$ زیرا اگر $y \geq 0$ ، $xy^2 + 4x^2y + 5 > 0$ که به وضوح تناقض است. حال دقت کنید که

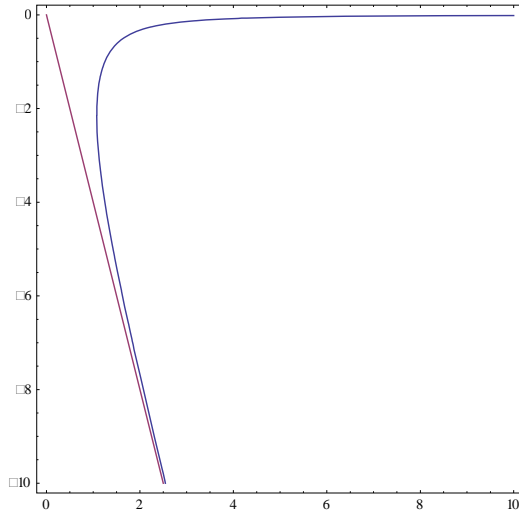
$$xy^2 + 4x^2y + 5 = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-5}{x^3} < 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{x} + 4\right)\left(\frac{y}{x}\right) < 0.$$

حال چون $\frac{y}{x} < 0$ ، $\frac{y}{x} + 4 > 0$ و معادلاً $y > -4x$ پس $a \geq -4$. حال ادعا می‌کنیم $a = -4$. برای این منظور نشان می‌دهیم برای هر $-4 < a < 0$ می‌توان $x \in \mathbb{R}^+$ و $y \in \mathbb{R}^-$ یافت که $(*)$ $xy^2 + 4x^2y + 5 = 0$ و ضمناً $y = ax$.

اگر $y = ax$ را در رابطه‌ی $(*)$ جای‌گزین کنیم، داریم:

$$ax^3 + 4ax^3 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{-5}{a(4+a)} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{-5}{a(4+a)}}$$

که چون $-4 < a < 0$ ، عدد x که در بالا به دست آمده مثبت است و زوج x و $y = ax$ در رابطه‌ی $(*)$ صدق می‌کنند. پس بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای a همان -4 است. توضیح: در شکل زیر مجموعه نقاطی در ناحیه‌ی چهارم مختصات که در رابطه‌ی $(*)$ صدق می‌کنند و همچنین نمودار خط $y = -4x$ را می‌بینید. همان‌طور که مشاهده می‌کنید تمام نمودار در این ناحیه در بالای این خط قرار دارد.



۱۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

طبق رابطه‌ی صورت سؤال $x + y = z(xy - 2)$ و چون x ، y و z طبیعی و در نتیجه مثبت هستند، $xy - 2$ هم طبیعی است و به علاوه $(*) \quad xy - 2 \mid x + y$ و لذا $xy - 2 \leq x + y$. ادعا می‌کنیم

که یکی از x و y کم‌تر از ۳ است. به برهان خلف فرض کنید $x, y \geq 3$. حال داریم:

$$xy - 2 \leq x + y \Rightarrow xy - x - y \leq 2 \Rightarrow (x - 1)(y - 1) = xy - x - y + 1 \leq 3$$

که رابطه‌ی آخر با توجه به این که $x - 1 \geq 2$ و $y - 1 \geq 2$ امکان ندارد.

حال مسئله را بر حسب x و y حالت‌بندی می‌کنیم.

حالت اول. $x = 1$. طبق $(*)$ باید $2 \mid y + 1$ معادلاً $3 \mid y - 2$ و لذا $y - 2 \in \{-3, -1, 1, 3\}$ و $y - 2 \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

این حالت در نهایت با توجه به طبیعی بودن x ، y و $xy - 2$ منجر به جواب‌های $(1, 3, 4)$ و $(1, 5, 2)$ می‌شود. (منظور از سه‌تایی $(1, 5, 2)$ ، $x = 1$ ، $y = 5$ و $z = 2$ است!)

حالت دوم. $x = 2$. در این حالت طبق رابطه‌ی $(*)$ باید $2 \mid y + 2$ که این نتیجه می‌دهد

$$2y - 2 \mid (2y - 2) - 2(y + 2) \quad \text{و لذا} \quad 3 \mid y - 1. \quad \text{بنابراین} \quad y - 1 \in \{-3, -1, 1, 3\}.$$

نهایت توجه به طبیعی بودن x ، y و $xy - 2$ منجر به جواب‌های $(2, 2, 2)$ و $(2, 4, 1)$ می‌شود.

حالت سوم. $y = 1$. کاملاً شبیه حالت اول به جواب‌های $(3, 1, 4)$ و $(5, 1, 2)$ منجر می‌شود. (دقت کنید

که به دلیل تقارن رابطه‌ی صورت سؤال نسبت به x و y اگر (x, y, z) جواب باشد، (y, x, z) هم جواب

است.)

حالت چهارم. $y = 2$. این حالت هم مشابه حالت دوم به $(2, 2, 2)$ و $(4, 2, 1)$ منجر می‌شود که جواب $(2, 2, 2)$ تکراری است. پس در کل مسئله ۷ جواب دارد.

۱۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

یک برنامه‌ریزی غذایی برای تعدادی روز در رستوران را "متنوع" می‌نامیم اگر غذای هر دو روز متوالی متفاوت باشد. حال a_n را تعداد روش‌های مختلف برنامه‌ریزی متنوع برای n روز در نظر بگیرید با این شرط که غذای روز اول و آخر نیز متفاوت باشد. به همین ترتیب b_n را تعداد روش‌های مختلف برنامه‌ریزی متنوع رستوران برای n روز در نظر بگیرید با این شرط که غذای روز اول و آخر یکسان باشد. با این ادبیات هدف ما در مسئله یافتن a_7 است.

دقت کنید که اگر یک برنامه‌ریزی متنوع برای n روز داشته باشیم که غذای روز اول و آخر آن یکسان باشد، با حذف روز n از برنامه به یک برنامه‌ریزی متنوع برای $n - 1$ روز می‌رسیم که غذای روز اول و آخر آن متفاوت است. یعنی $b_n = a_{n-1}$.

از طرف دیگر $a_n + b_n$ تعداد کل روش‌های برنامه‌ریزی متنوع برای رستوران است (با این تفاوت که هیچ رابطه‌ای بین غذای روز اول و آخر نداریم). در یک برنامه‌ریزی متنوع n روزه، برای انتخاب غذای روز اول سه حالت داریم. بعد از انتخاب غذای روز اول، برای انتخاب غذای روزهای بعد هر کدام ۲ حالت خواهیم داشت (غذای هر روز باید با غذای روز قبلی متفاوت باشد). پس تعداد کل چنین برنامه‌ریزی‌هایی

$$a_n + b_n = 3 \times \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n-1} \text{ است و این یعنی } a_n + b_n = 3 \times 2^{n-1} \text{ حال داریم:}$$

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= 3 \times 2^{n-1} \quad \overset{a_n = b_{n-1}}{\Rightarrow} \quad a_n = 3 \times 2^{n-1} - a_{n-1} \\ a_n &= 3 \times 2^{n-1} - (3 \times 2^{n-2} - a_{n-2}) = 3 \times 2^{n-2} + a_{n-2} \end{aligned}$$

با توجه به این رابطه‌ی بازگشتی برای a_7 داریم:

$$a_7 = 3 \times 2^5 + a_5 = 3 \times (2^5 + 2^3) + a_3 = 3 \times (2^5 + 2^3 + 2^1) + a_1$$

که $a_1 = 0$ (در برنامه‌ریزی برای یک روز حتماً غذای روز اول و آخر یکی می‌شود!) و در نتیجه

$$a_7 = 3 \times 42 = 126$$

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

با جمع و تفریق کردن دو رابطه به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^2 + y = xy^2 \\ y^2 + x = yx^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (x+y)(1-xy) = 0 \quad (\text{I}) \\ x^2 - y^2 + (x-y)(xy-1) = 0 \quad (\text{II}) \end{cases}$$

با استفاده از (II) خواهیم داشت:

$$(x-y)(x+y+xy-1) = 0$$

پس $x = y$ و یا $x + y = 1 - xy$ اگر $x + y = 1 - xy$ با توجه به (I) باید داشته باشیم

$$x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 0$$

پس در هر صورت $x = y = 0$.

$$x = y \Rightarrow x + x^2 = x^3 \Rightarrow x(x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

پس دست‌گاه معادلات، ۳ جواب حقیقی دارد.

۱۵. گزینه‌ی (د) صحیح است.