مسأله‌ی اول: جدولِ پُرِیک .... ۱۰ امتیاز

در هر خانه از یک جدول، که 2^k سطر و n ستون دارد، یکی از اعداد صفر یا ۱ نوشته شده است به‌طوری‌که تعداد ۱ های هر سطر بیش‌تر یا مساوی تعداد صفرهای آن است. ثابت کنید که می‌توان k (یا کم‌تر از k) ستون از n ستون جدول را انتخاب کرد و خانه‌های آن ستون‌ها را رنگ نمود، به گونه‌ای که حداقل یکی از ۱ های هر سطر در خانه‌های رنگ شده باشد.

مسأله‌ی دوم: دوایر مسلط .... ۱۵ امتیاز

n نقطه در صفحه داده شده است. می‌خواهیم به‌ازای k ی داده‌شده، k دایره با شعاع مساوی را طوری در صفحه رسم‌کنیم که تمام n نقطه را در برگیرند (یعنی هر نقطه داخل یا روی محیط لااقل یک دایره بیافتد) و شعاع دایره‌ها در حد امکان کوچک باشد.

برای این کار ابتدا مجموعه‌ی تهی S را در نظر می‌گیریم. سپس یکی از نقاط را به دل‌خواه انتخاب می‌کنیم و در مجموعه‌ی S قرار می‌دهیم. در مرحله‌ی اول نقطه‌ای را به مجموعه‌ی S اضافه می‌کنیم که بیش‌ترین فاصله را با نقطه‌ی درون S دارد؛ این فاصله را a_1 می‌نامیم. به همین ترتیب در مرحله‌ی i ام نقطه‌ای را به مجموعه‌ی S اضافه می‌کنیم که بیش‌ترین فاصله را از مجموعه‌ی S دارد (فاصله‌ی یک نقطه‌ی دل‌خواهِ A از مجموعه نقاط S را فاصله‌ی A تا نزدیک‌ترین نقطه‌ی S به A تعریف می‌کنیم). این بیش‌ترین فاصله را a_i می‌نامیم. بعد از انجام $k-1$ مرحله، حال مجموعه‌ی S شامل k نقطه است و فاصله‌های a_1، a_2، ...، و a_{k-1} تعیین شده‌اند. فرض کنید مرحله‌ی k ام را نیز انجام دهیم ولی با این تفاوت که در این مرحله نقطه‌ی به دست آمده را به S اضافه نمی‌کنیم، و فقط فاصله‌ی a_k را یادداشت می‌کنیم.

الف) ثابت کنید اگر k دایره به مراکز نقاط درون S و به شعاع a_k در صفحه رسم کنیم، این دایره‌ها تمام n نقطه را در برمی‌گیرند. (۵ نمره)

ب) ثابت کنید به ازای هر عدد r، اگر k دایره‌ی دل‌خواه به شعاع r وجود داشته باشند که تمام n نقطه را در برگیرند، آن‌گاه خواهیم داشت: $a_k \leq 2r$. (۱۰ نمره)

مسأله‌ی سوم: مستطیل‌های سیاه .... ۱۵ امتیاز

خانه‌های یک جدول $m \times n$ را با دو رنگ سفید و سیاه به طور دل‌خواه رنگ کرده‌ایم. یک زیر مجموعه‌ی مستطیل شکل به ابعاد a و b ($1 \leq a \leq m$ و نیز $1 \leq b \leq n$) از خانه‌های جدول را یک زیر مستطیل سیاه می‌نامیم اگر تمامی $a \times b$ خانه‌ی داخل آن، سیاه باشند. یک زیرمستطیل سیاه را «غیر قابل گسترش» می‌نامیم، هرگاه هیچ زیرمستطیل سیاه دیگری شامل تمامی خانه‌های آن نباشد. ثابت کنید تعداد زیرمستطیل‌های سیاهِ غیر قابل گسترش بیش‌تر از mn نیست.

مسأله‌ی چهارم: ماشینِ کوانتومیِ هاتی .... ۲۰ امتیاز

ماشین محاسباتی «هاتی» دارای n خانه‌ی حافظه‌ی M_1، M_2، ...، و M_n است. هر یک از این خانه‌های حافظه می‌توانند یکی از مقادیر ۰ یا ۱ را در خود ذخیره کنند. برای راحتی کار اعداد ذخیره شده در خانه‌های حافظه را با یک رشته به طول n از ۰ و ۱ نمایش می‌دهیم که در آن M_1 عنصر سمت چپ است: $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$.
هاتی می‌تواند دو نوع دستورالعمل ساده را اجرا کند:

- دستورِ `C i`. در این دستور `i` یک عدد صحیح بین ۱ تا n است. با اجرای این دستور، عدد ذخیره‌شده در خانه‌ی حافظه‌ی M_i عوض می‌شود (از ۰ به ۱ و از ۱ به ۰ تغییر می‌کند).
- دستورِ `D i`. در این‌جا نیز `i` یک عدد صحیح بین ۱ تا n است. هاتی برای اجرای این دستور عدد ذخیره‌شده در تمامی خانه‌های حافظه به‌جز M_i را بررسی می‌کند: در صورتی که تمامی این مقادیر ۱ بودند، فقط عدد ذخیره‌شده در M_i را عوض می‌کند، و در غیر این صورت (اگر حداقل یکی از آن‌ها صفر بود) تغییری در مقادیر خانه‌ها ایجاد نمی‌کند.

مثلا فرض کنید هاتی ۳ خانه‌ی حافظه دارد که مقادیر $(1, 0, 0)$ در آن ذخیره شده‌اند. حال اگر دستور `C 2` را به ماشین بدهیم، این مقادیر تبدیل به $(1, 1, 0)$ خواهند شد. در ادامه اگر دستور `D 1` را وارد کنیم، حاصل برابر $(1, 1, 1)$ می‌شود. اما اگر دستور `D 1` را قبل از دادن دستور `C 2` به ماشین می‌دادیم، حاصل همان $(1, 0, 0)$ باقی می‌ماند.
یک «جدول صورت مسأله»، جدولی شامل 2^n سطر و ۲ ستون است که در هر ستون آن تمامی رشته‌های به طول n از ۰ و ۱، هر رشته دقیقاً یک بار، آمده است. به رشته‌های ستون اول «رشته‌های ورودی» و به رشته‌های ستون دوم «رشته‌های خروجی» می‌گوییم. ما باید برای هاتی یک «برنامه» بنویسیم به نحوی که اگر هر یک از رشته‌های ورودی در خانه‌های حافظه‌ی هاتی باشد، پس از اجرای این برنامه، رشته‌ی خروجی هم‌سطر با آن رشته‌ی ورودی در حافظه‌ی هاتی قرار گرفته باشد.
یک برنامه شامل چند دستورالعمل است که پشت سرهم نوشته شده‌اند. هنگامی که یک برنامه را به هاتی بدهیم، دستورالعمل‌های این برنامه به ترتیب اجرا می‌شوند. مثلاً فرض کنید هاتی ۲ خانه‌ی حافظه دارد ($n = 2$) و جدول صورت مسأله‌ی زیر داده شده است:

رشته‌ی ورودی	رشته‌ی خروجی
$(0, 0)$	$(0, 1)$
$(0, 1)$	$(1, 0)$
$(1, 0)$	$(1, 1)$
$(1, 1)$	$(0, 0)$

یک برنامه‌ی نمونه که این کار را انجام می‌دهد به‌صورت زیر است:

```
D 1
C 2
```

الف) یک جدول صورت مسأله را «ساده» می‌نامیم اگر در آن هر رشته‌ی ورودی مساوی رشته‌ی خروجیِ هم‌سطرش باشد، به جز دو رشته‌ی A و B که این دو رشته فقط در یکی از n عنصر خود با هم تفاوت داشته باشند. توجه کنید که در این جدول، A رشته‌ی خروجی هم سطر با رشته‌ی ورودی B و هم‌چنین B، رشته‌ی خروجی هم سطر با رشته‌ی ورودی A است. ثابت کنید که می‌توان برای هر جدول صورت مسأله‌ی ساده، یک برنامه نوشت. (۵ نمره)

ب) ثابت کنید که می‌توان برای هر جدول صورت مسأله، یک برنامه نوشت. (۱۰ نمره)

«موفق باشید»

مسأله‌ی پنجم: جعبه‌های رنگارنگ .... ۱۰ امتیاز

یک کارخانه‌ی تولید اسباب‌بازی، جغجغه‌هایی در k رنگ مختلف تولید می‌کند. این کارخانه برای بسته‌بندی از جعبه‌هایی استفاده می‌کند که n جغجغه در هریک جا می‌گیرد. ثابت کنید کارخانه می‌تواند هر nk جغجغه (با تعداد دلخواهی جغجغه از هر رنگ) را به گونه‌ای در k بسته جای دهد که در هر جعبه، جغجغه‌ها حداکثر ۲ رنگ مختلف داشته باشند.

مسأله‌ی ششم: کارت‌های دور دایره .... ۲۰ امتیاز

۵۵ کارت داریم که روی آن‌ها اعداد مختلفی نوشته شده‌است، و ما از مقادیر آن‌ها بی‌اطلاع هستیم. کارت‌ها روی دایره‌ای به پشت چیده شده اند به گونه‌ای که ما عدد نوشته شده روی آن‌ها را نمی‌بینیم. در هر مرحله می‌توانیم یکی از کارت‌ها را انتخاب کرده، آن را برگردانیم، عدد نوشته‌شده روی آن را بخوانیم و دوباره آن را سر جای خود بگذاریم. می‌خواهیم روشی ارائه دهیم که با برگرداندن تعداد کمی کارت، ۳ کارت مجاور هم پیدا کنیم که عدد نوشته شده روی کارت وسط از اعداد نوشته شده روی دو کارت کناری آن بیش‌تر باشد.

الف) ثابت کنید می‌توانیم با برگرداندن حداکثر ۱۳ کارت، سه کارت مورد نظر را پیدا کنیم. (۱۰ نمره)

ب) ثابت کنید می‌توانیم با برگرداندن حداکثر ۹ کارت، سه کارت مورد نظر را پیدا کنیم. (حل این بند با برگرداندن حداکثر ۱۰ کارت ۵ نمره خواهد داشت.) (۱۰ نمره)

مسأله‌ی هفتم: مشکلات دولت .... ۳۰ امتیاز

به علت برخی مشکلات سیاسی در کشور «یوتوپیا»، بین نمایندگان مجلس این کشور اختلاف افتاده است به طوری که هر نماینده‌ی مجلس با تعدادی از نمایندگان دیگر مشکل پیدا کرده است و حاضر به نشستن با هیچ‌یک از آن‌ها سر یک میز نیست. رئیس‌جمهور این کشور برای حل این مشکل به شرکت «زتروس» روی آورده است. این شرکت دو ماشین قابل برنامه‌ریزی A و B را خریداری کرده است. هر برنامه‌ای که به این ماشین‌ها داده می‌شود از چهار قسمت تشکیل شده است:

- قسمت اول شامل تعدادی متغیر است که باید نام‌های آن‌ها به ماشین داده شوند.
- در قسمت دوم تعدادی نابرابری به ماشین داده می‌شود که همگی باید به شکل زیر باشند:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k \geq b$$

توجه کنید که جهت بزرگتر نابرابری‌ها باید رو به متغیرها باشد. در نابرابری بالا k یک عدد طبیعی دل‌خواه است. همچنین a_1، a_2، ...، a_k و b اعداد حقیقی دل‌خواه و x_1، x_2، ...، و x_k تعدادی از متغیرها هستند.

- درقسمت سوم یکی از دو کلمه‌ی minimum و یا maximum به ماشین داده می‌شود.
- در قسمت چهارم تعدادی از متغیرها به عنوان «متغیرهای اصلی» به ماشین معرفی می‌شوند.

اگر چنین برنامه‌ای را به ماشین A بدهیم، این ماشین به هر یک از متغیرها یک مقدار حقیقی نامنفی طوری نسبت می‌دهد که اولاً تمامی نابرابری‌ها برقرار باشند و ثانیاً مجموع متغیرهای اصلی بر حسب این‌که کلمه‌ی انتخاب شده minimum یا maximum بوده، کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار ممکن خود را داشته باشد. در پایان، ماشین مقادیر نسبت داده شده به متغیرها و مجموع متغیرهای اصلی را چاپ می‌کند.

فرق ماشین B با ماشین A تنها در این نکته است که این ماشین به جای مقادیر حقیقی نامنفی، فقط می‌تواند یکی از دو مقدار ۰ یا ۱ را به متغیرها نسبت دهد. این ماشین نیز مانند ماشین A کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار مجموع متغیرهای اصلی را با حفظ درستی نابرابری‌ها به دست می‌آورد.
برای مثال برنامه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

متغیرها	x, y, z
نابرابری‌ها	$-۲x - y - z \geq -۲$ $x \geq \frac{۱}{۴}$
کلمه‌ی انتخاب شده	maximum
متغیرهای اصلی	y, z

با دادن این برنامه به ماشین A، ماشین عدد $\frac{۳}{۲}$ را به عنوان بیش‌ترین مقدار ممکن برای $y + z$ چاپ می‌کند، که مثلا به ازای $x = \frac{۱}{۴}$، $y = ۰$، و $z = \frac{۳}{۲}$ به دست می‌آید. (توجه کنید که مقادیر دیگری نیز برای x، y،و z وجود دارند که در نابرابری‌ها صدق کنند و مجموع $y + z$ را برابر $\frac{۳}{۲}$ قرار دهند. ولی نمی‌توان مقادیری برای متغیرها یافت که نابرابری‌ها برقرار بمانند و $y + z$ از $\frac{۳}{۲}$ بیش‌تر شود.)
حال اگر همین مسأله را به ماشین B بدهیم، عدد ۰ را به عنوان جواب اعلام می‌کند که مثلا به ازای $x = ۱$، $y = ۰$، و $z = ۰$ به‌دست می‌آید.
شرکت زتروس اعلام کرد که حاضر است مسائل پیشنهاد شده توسط دولت را حل کند. اولین مسأله‌ای که پیشنهاد شد از طرف وزارت بهداشت بود. در این مسأله وزارت بهداشت قصد داشت در بعضی از شهرهای کشور مقداری دارو برای مواقع اضطراری ذخیره کند به گونه‌ای که مجموع داروی موجود در هر شهر و تمام شهرهایی که بین آن‌ها و این شهر پرواز مستقیم وجود دارد بیش‌تر از ۱۰۰ تن باشد. هدف این بود که مجموع کل داروهای ذخیره شده در تمام شهرها کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. توجه کنید که اگر از شهر a به b پرواز مستقیم وجود داشته باشد، از b نیز به a پرواز مستقیم وجود دارد.
زتروس برای حل این مسأله با استفاده از ماشین A برنامه‌ای به این منظور طراحی کرد. در این برنامه به هر شهر یک متغیر نسبت داده شده که نشان‌گر مقدار دارویی است که باید در آن شهر ذخیره شود. به این ترتیب اگر n را تعداد شهرها فرض کنید، آن‌گاه متغیرهای برنامه $x_۱$، $x_۲$، …، و x_n می‌باشند.
سپس به ازای هر شهر یک نابرابری در برنامه قرار داده شد به این ترتیب که مجموع متغیر مربوط به آن شهر و متغیر مربوط به شهرهایی که بین آن‌ها و این شهر پرواز مستقیم وجود دارد، بزرگ‌تر یا مساوی ۱۰۰ باشد. در پایان کلمه‌ی minimum به ماشین داده شد و تمامی متغیرها به عنوان متغیرهای اصلی معرفی گردیدند.
برای مثال اگر کشور، پنج شهر داشته باشد و بین شهرهای ۱ و ۲، شهرهای ۲ و ۳، شهرهای ۳ و ۴، و شهرهای ۳ و ۵ پرواز مستقیم وجود داشته باشد، برنامه‌ای که به ماشین داده می‌شود به صورت زیر است:

متغیرها	$x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵$
نابرابری‌ها	$x_۱ + x_۲ \geq ۱۰۰$ $x_۲ + x_۱ + x_۳ \geq ۱۰۰$ $x_۳ + x_۲ + x_۴ + x_۵ \geq ۱۰۰$ $x_۴ + x_۳ \geq ۱۰۰$ $x_۵ + x_۳ \geq ۱۰۰$
کلمه‌ی انتخاب شده	minimum
متغیرهای اصلی	$x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵$

که جواب ماشین برابر ۲۰۰ است که به ازای مثلا $x_۱ = ۱۰۰$، $x_۲ = ۰$، $x_۳ = ۱۰۰$، $x_۴ = ۰$، و $x_۵ = ۰$ به دست می‌آید.
مسأله‌ی بعدی توسط وزارت مبارزه با قاچاق پیشنهاد شد. این وزارت قصد داشت در بعضی از فرودگاه‌های کشور مراکز مبارزه با قاچاق تاسیس کند به طوری که تعداد این مراکز تا حد امکان کم باشد و در حداقل یکی از فرودگاه‌های مبدا یا مقصد هر پرواز یک مرکز مبارزه با قاچاق وجود داشته باشد.
زتروس برای حل این مسأله با استفاده از ماشین B برنامه‌ای ارائه داد. در این برنامه به ازای هر فرودگاه یک متغیر وجود داشت. در این صورت اگر n فرودگاه داشته باشیم، متغیرها $x_۱$، $x_۲$، …، و x_n خواهند بود. سپس برای هر پرواز بین

فرودگاه i و j، نابرابری $x_i + x_j \geq ۱$ در برنامه قرار داده شد. در پایان کلمه‌ی minimum به ماشین داده شد و همه‌ی متغیرها به عنوان متغیرهای اصلی معرفی شدند.
عددی که ماشین B به عنوان کم‌ترین مقدار ممکن برای مجموع متغیرهای اصلی اعلام کرد، برابر کم‌ترین تعداد مراکزی بود که باید تاسیس می شدند، و متغیرهایی که مقدار ۱ گرفتند، فرودگاه‌هایی را تعیین کردند که باید در آن‌ها مرکز مبارزه با قاچاق تاسیس می‌شد.
اکنون شما باید زتروس را یاری کنید که بتواند مسأله‌های پیشنهادی دیگری را نیز با موفقیت به انجام برساند. همان‌طور که در مثال‌های بالا ملاحظه کردید طراحی برنامه‌ها باید به گونه‌ای باشد که نوشتن برنامه‌ی نهایی از روی اطلاعاتی که در دسترس شرکت قرار می‌گیرد، به سادگی امکان‌پذیر باشد.

الف) رئیس‌جمهور یوتوپیا با مشاهده‌ی موفقیت این شرکت در حل مسایل یاد شده، مسأله‌ی زیر را به این شرکت پیشنهاد داد: آقای رئیس‌جمهور می‌خواهد تعدادی از نمایندگان مجلس را به جلسه‌ای دعوت کند ولی به علت مشکلی که در ابتدا گفته شد، او نمی‌خواهد که جلسه به مشاجره کشیده شود و از طرفی قصد دارد که حداکثر تعداد نمایندگان ممکن را دعوت کند. به همین خاطر، او لیست نمایندگانی را که باهم خصومت دارند تهیه کرده و به شرکت داده و از آن خواسته است که بیش‌ترین تعداد نمایندگانی را تعیین کند که هیچ دوتای آن‌ها با هم خصومت نداشته باشند. با استفاده از ماشین B به زتروس کمک کنید که این مسأله را حل کند. (۱۰ نمره)

ب) وزارت کار هم مسأله‌ای مطرح کرده است. این وزارت تعدادی پروژه دارد که می‌خواهد آن‌ها را به چند شرکت واگذار کند. هر شرکت لیست پروژه‌هایی را که توانایی انجام آن‌ها را دارد به این وزارت داده است. این وزارت قصد ندارد به هیچ شرکتی بیش از یک پروژه واگذار کند و یا پروژه‌ای را به بیش از یک شرکت واگذار کند. از طرفی می‌خواهد تعداد پروژه‌های واگذار شده بیش‌ترین تعداد ممکن باشد. این مسأله را با استفاده از ماشین B حل کنید. (۱۰ نمره)

ج) ثابت کنید که اگر در مسأله‌ی وزارت مبارزه با قاچاق، برنامه‌ی تهیه شده برای ماشین B اشتباهاً به ماشین A داده شود، جواب به‌دست آمده کم‌تر نصف جواب به‌دست آمده از ماشین B نخواهد بود. (یعنی مجموع متغیرهای اصلی در جواب ماشین A کم‌تر از مجموع متغیرهای اصلی در جواب ماشین B نخواهد بود). (۱۰ نمره)

«موفق باشید»