مسئله‌ی اول: علی باینری .... ۲۰ امتیاز

علی کوچولو جمع اعداد دودویی را تازه یاد گرفته است و هنوز برخی از جمع‌ها را به‌خوبی انجام نمی‌دهد. در واقع او هنوز «دو بریک» (همان ده بر یک در مبنای دو) را حساب نمی‌کند. مثلاً اگر او بخواهد دو عدد ۱۰۱۰ و ۰۰۱۱ را جمع کند حاصل‌جمع را به‌صورت ۱۰۰۱ می‌نویسد، در صورتی‌که اگر «دو بر یک»ها را در نظر می‌گرفت جواب برابر ۱۱۰۱ می‌شد. در ضمن علی کوچولو یک بازی جدید یاد گرفته و بسیار هیجان‌زده است.

الف) (۱۰ امتیاز) او تمام رشته‌های از ۰ و ۱ به طول ۴ (به‌استثنای رشته‌ی ۰۰۰۰) را روی یک صفحه‌ی کاغذ نوشته است (جمعاً ۱۵ رشته)، هدف او از این بازی این است که این رشته‌ها را به ۴ دسته طوری تقسیم کند که وقتی دو عدد را از یک دسته جمع می‌کند حاصل‌جمع در یک دسته‌ی دیگر قرار داشته باشد (توجه کنید که علی کوچولو جمع دو عدد را به‌صورت بالا انجام می دهد). او چند روش را برای این تقسیم‌بندی امتحان کرده است ولی نتوانسته است این مسئله را حل کند و اکنون از شما می‌خواهد که به او کمک کنید.

این ۴ دسته‌بندی را بروی برگه‌ی پاسخ خود بنویسید.

ب) (۱۰ امتیاز) مادر علی کوچولو به او گفته که بلد است سؤال قسمت قبل را با ۳ دسته حل کند (یعنی ۱۵ رشته را به ۳ دسته و با همان شرایط تقسیم کند). با توجه به این اطلاعات ثابت کنید می‌توان تمام رشته‌های به طول ۴n به‌استثنای رشته‌ی ۰ . . . ۰۰ را به ۳n دسته طوری تقسیم کرد که جمعِ هیچ دو عدد از یک دسته (به‌روشِ علی کوچولو) در همان دسته نباشد.

مسئله‌ی دوم: جدول خوش ریخت .... ۲۵ امتیاز

می‌خواهیم خانه‌های یک جدول ۳ × n (با n سطر و ۳ ستون) که n عددی فرد است را با اعداد ۱ تا ۳n به‌گونه‌ای پر کنیم که هر عدد دقیقاً در یک خانه نوشته شود و مجموع اعداد نوشته شده در هر یک از n سطر با سطر های دیگر یکسان باشد. مثلاً برای ۳ = n، در جدول زیر که از اعداد ۱ تا ۹ پر شده است جمع اعداد خانه‌های هر سطر برابر ۱۵ است.

۸	۶	۱
۹	۴	۲
۷	۵	۳

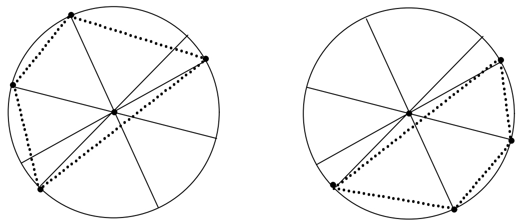
آیا می‌توانید این کار را برای سایر مقادیر فردِ n انجام دهید؟ شما باید در جواب یک روش کلی برای پر کردن جدول‌های ۳ × n ارایه دهید.

مسئله‌ی سوم: قطرها .... ۲۵ امتیاز

در دایره‌ای n قطر مختلف رسم شده است. هر قطر دو نقطه‌ی انتهایی دارد (نقاط تلاقی قطر با دایره)، پس در مجموع ۲n نقطه انتهایی داریم. یک مجموعه‌ی «متعادل» مجموعه‌ای از n نقطه‌ی انتهایی است به‌گونه‌ای که دقیقاً یکی از دو نقطه‌ی انتهایی هر قطر در این مجموعه باشد، و علاوه بر آن، اگر یک n ضلعی ساده رسم کنیم که رئوس آن، نقاطِ عضو این مجموعه باشند، مرکز دایره داخل این n ضلعی قرار گیرد. (منظور از n ضلعی ساده، شکلی است با n راس و n ضلع که اضلاع آن فقط در رأس ها با یکدیگر برخورد می کنند).

ذهن زیبا

مثلاً در یکی از دو شکل زیر نقاط مشخص شده یک مجموعه‌ی متعادل را تشکیل می‌دهند در صورتی‌که در شکل دیگر مجموعه‌ی مشخص شده متعادل نیست، چون مرکز دایره درون ۴ ضلعی قرار ندارد.



به‌ازای هر عدد طبیعی n ($n > ۲$) اگر در دایره n قطر مختلف و دل‌خواه رسم کنیم، چند مجموعه‌ی متعادل مختلف از نقاط خواهیم داشت؟ ادعای خود را دقیقاً اثبات نمایید.

مسئله‌ی چهارم: صندوقچه‌های پر رمز و راز .... ۳۰ امتیاز

n صندوقچه‌ی جادویی با شماره‌های ۱ تا n داریم. زیرِ هر صندوقچه، یک عدد بین ۱ تا n نوشته شده است (ممکن است اعداد نوشته شده در زیر چند صندوقچه با هم یکسان باشند). توجه کنید ما نمی‌توانیم اعداد نوشته‌شده در زیر صندوقچه‌ها را بخوانیم.

در هر صندوقچه تعدادی یاقوت سرخ وجود دارد. ابتدا درِ همه‌ی صندوقچه‌ها بسته است، ولی می‌توان هر بار درِ یک صندوقچه را باز کرد، تعداد یاقوت‌های درون آن را شمرد و درِ آن‌را بست. نکته‌ی اسرارآمیز این صندوقچه‌ها آن‌است که به‌محض بستن درِ یک صندوقچه تمامی یاقوت‌های درون آن به صندوقچه‌ای منتقل می‌شوند که شماره‌ی آن، زیرِ این صندوقچه نوشته شده است.

به‌عنوان مثال، به جدول زیر توجه کنید:

شماره‌ی صندوقچه	عدد نوشته شده زیر صندوقچه	تعداد اولیه‌ی یاقوت‌ها
۱	۲	۶
۲	۲	۸
۳	۱	۳

اگر در ابتدا درِ صندوقچه شماره‌ی ۳ را باز کنیم، ۳ یاقوت می‌بینیم ولی به محض بستن درِ آن، این صندوقچه خالی شده و تمام یاقوت‌های آن به صندوقچه‌ی شماره ۱ منتقل می‌شود. حال اگر درِ صندوقچه‌ی شماره ۲ را باز کنیم، ۸ یاقوت می‌بینیم ولی با بستن در، چون زیرِ این صندوقچه عدد ۲ نوشته شده است ۸ یاقوت در همین صندوقچه باقی می‌مانند. سپس اگر درِ صندوقچه‌ی شماره‌ی ۱ را باز کنیم، ۹ یاقوت می‌بینیم (۶ یاقوت از قبل و ۳ یاقوت از صندوقچه‌ی شماره‌ی ۳). با بستن درِ آن، این صندوقچه هم خالی می شود و اکنون در صندوقچه‌ی شماره‌ی ۲، ۱۷ یاقوت موجود است. اگر دوباره درِ صندوقچه‌ی شماره‌ی ۱ را باز کنیم یاقوتی نمی‌بینیم.

توجه کنید که مجاز نیستیم هم‌زمان درِ چند صندوقچه را باز کنیم یا به یاقوت‌ها دست بزنیم؛ فقط می‌توانیم درِ یک صندوقچه‌ی دل‌خواه را باز کنیم، یاقوت‌های درون آن را بشماریم و درِ آن را ببندیم.

ثابت کنید با انجام عمل فوق (به تعدادِ دل‌خواه) می‌توان از تعداد کل یاقوت‌ها مطلع شد.

(موفق باشید)

مسئله‌ی پنجم: لامپ‌ها .... ۲۰ امتیاز

شرکت «برادران علی‌کوچولو» یک شرکت بزرگ تولید جغجغه‌های رنگی است که ساختمان آن تعداد زیادی اتاق و تعداد زیادی لامپ دارد. این شرکت برای سیم‌کشی لامپ‌های ساختمانش «آوریل دالتون» را استخدام کرده بود. بعد از سیم‌کشی معلوم شد که آوریل نه تنها از تعداد مساوی کلید و لامپ استفاده نکرده، بلکه هر کلید را به چند لامپ و هر لامپ را به چند کلید وصل کرده است. به این ترتیب، با زدن یک کلید، هر یک از لامپ‌های متصل به آن کلید تغییر وضعیت می‌دهد (یعنی از روشن به خاموش یا برعکس تغییر می‌کند.) به‌این دلیل، در پایان هر روز که کارمندان می‌خواهند با زدن کلیدها همه‌ی لامپ‌ها را خاموش کنند با مشکل مواجه می‌شوند. (این تنها راه خاموش کردن لامپ‌هاست. قطع فیوز، یا شُل کردن لامپ‌ها یا کارهای مشابه‌ی دیگر مجاز نیست!) می‌دانیم که در آغاز هر روز همه‌ی لامپ‌ها خاموش‌اند. پس در پایان روز همیشه می‌توان بعضی از کلیدها را زد که همه‌ی لامپ‌ها دوباره خاموش شوند.

شرکت برای حل مشکل خاموش کردن لامپ‌ها «لوک خوش‌شانس» را استخدام کرده است تا در پایان هر روز همه‌ی لامپ‌ها را خاموش کند. «لوک» پس از عقد قرارداد و بررسی مشکل، کلیدهارا از ۱ تا N (N تعداد کلیدها) شماره‌گذاری کرد و جدولی با N خانه تهیه کرد تا در خانه‌ی iام بنویسد که کلید iام زده می‌شود یا خیر. او در انتهای هر روز، جدول را بر اساس وضعیت فعلی لامپ‌ها پر می‌کرد و بعضی از کلیدها را مطابق آن می‌زد. با این کار همه‌ی لامپ‌ها خاموش می‌شدند.

الف) (۱۰ امتیاز) ثابت کنید که تعداد جدول‌های مختلفی که لوک برای خاموش کردن همه‌ی لامپ‌ها در انتهای هر روز می‌تواند تهیه کند ثابت است و این تعداد بستگی به وضعیت لامپ‌ها در انتهای روز ندارد و فقط به نحوه‌ی سیم‌کشی آوریل وابسته است.

ب) (۱۰ امتیاز) ثابت کنید که این تعداد توانی از ۲ است.

مسئله‌ی ششم: جدولِ رنگی .... ۲۵ امتیاز

یک جدولِ «مجموعه‌ای»، جدولی با ۲ سطر و n ستون ($n \geq ۲$) است که در هریک از ۲n خانه‌ی آن یکی از ۳ مجموعه‌ی {۱, ۲}، {۱, ۳} و یا {۲, ۳} نوشته شده است. دو خانه از جدول را «مجاور» می‌نامیم اگر در یک ضلع مشترک باشند. هم‌چنین فرض می‌کنیم خانه‌ی اولِ هر سطر و خانه‌ی nامِ همان سطر مجاور هستند. (بنابراین هر خانه‌ی جدول دقیقاً با سه خانه‌ی دیگر مجاور است.)

اگر یکی از دو عددِ مجموعه‌ی نوشته شده در هر خانه‌ی یک جدولِ مجموعه‌ای را پاک کنیم (در هر خانه تنها یک عدد باقی بماند)، به‌گونه‌ای که اعداد باقی‌مانده در هیچ دو خانه‌ی مجاور آن یکسان نباشند، یک جدولِ «رنگی» ساخته‌ایم.

برای مثال در زیر یک جدول مجموعه‌ای با دو جدول رنگی به‌دست آمده از آن نمایش داده شده است.

۱	۳	۱	۲
۳	۲	۳	۱

$\Leftarrow$

{۱, ۲}	{۱, ۳}	{۱, ۲}	{۲, ۳}
{۱, ۳}	{۱, ۲}	{۲, ۳}	{۱, ۲}

$\Rightarrow$

۲	۳	۱	۳
۱	۲	۳	۲

یک جدولِ مجموعه‌ای داده شده است که در آن هیچ دو خانه‌ی مجاوری وجود ندارند که مجموعه‌های نوشته‌شده در آن خانه‌ها یکسان باشد. ثابت کنید می‌توان از این جدول حداقل دو جدول رنگی مختلف ساخت.

ذهن زیبا

مسئله‌ی هفتم: مرتب‌سازی کارتی .... ۲۵ امتیاز

شرکت YSC دستگاه‌های الکترونیکی مختلفی را تولید و به بازار روانه کرده است. از جمله دستگاه کارت‌خوان، دستگاه مقایسه‌گر و کارت‌های مغناطیسی. هر یک از دستگاه‌های کارت‌خوان و نیز هر کارت مغناطیسی یک حافظه دارد که یک عدد در آن ذخیره می‌شود. هنگامی که یک کارت مغناطیسی را به دستگاه کارت‌خوان وارد کنیم دو نوع عمل می‌توانیم انجام بدهیم:

- با فشار دادن دکمه‌ی «سبز» دستگاه کارت‌خوان، عدد ذخیره شده در کارت پاک می‌شود و به‌جای آن عدد موجود در حافظه‌ی کارت‌خوان نوشته می‌شود.
- با فشار دادن دکمه‌ی «قرمز» عکس این عمل انجام می‌شود، یعنی عدد ذخیره شده در حافظه‌ی کارت‌خوان پاک می‌شود و به‌جای آن عدد موجود در حافظه‌ی کارت نوشته می‌شود.

کار دستگاه مقایسه‌گر آن است که وقتی دو کارت را به‌طور هم‌زمان به دو ورودی آن وارد کنیم دستگاه نشان می‌دهد که عدد ذخیره‌شده در کدام‌یک از کارت‌ها بزرگ‌تر است. در صورت مساوی بودن این دو عدد دستگاه آن‌را نیز مشخص می‌دهد.

در یک روز تعطیل، شرکت YSC تصمیم گرفت یک بازی دسته‌جمعی بین ۱۰۰ کارمند خود برگزار کند. برای این بازی ۱۰۰ دستگاه کارت‌خوان روی یک میز طولانی به‌ترتیب از چپ به راست قرار داده شد. هم‌چنین دو عدد کارت و یک دستگاه مقایسه‌گر و یک قلم و دفترچه‌ی یادداشت به هر کارمند داده شد.

این بازی در ۱۰۱ مرحله انجام می‌شود. در هر مرحله‌ی بازی، هریک از کارمندان می‌تواند یکی از دستگاه‌های کارت‌خوان را انتخاب و یک بار از آن استفاده کند (یعنی یکی از کارت‌های خود را وارد آن دستگاه نماید، فقط یکی از کلیدهای سبز یا قرمز را فشار دهد و کارت را خارج کند). توجه کنید که هر دستگاه کارت‌خوان در هر مرحله تنها می‌تواند مورد استفاده‌ی یک کارمند قرار گیرد. اما هر کارمند می‌تواند به هر تعداد و در هر زمان از دستگاه مقایسه‌گر خود استفاده کند.

چون اعداد به‌صورت الکترونیکی در حافظه‌ها ذخیره می‌شوند کارمندان به هیچ روشی نمی‌توانند از مقدار عددهای ذخیره شده در حافظه‌ی کارت‌خوان‌ها یا کارت‌ها مطلع شوند. هم‌چنین هیچ‌یک از کارمندان نمی‌تواند کارت خود را در اختیار هم‌کارانش بگذارد یا به دستگاه مقایسه‌گر دیگران وارد کند.

در ابتدای بازی در حافظه‌ی هر یک از دستگاه‌های کارت‌خوان یک عدد ذخیره شده است به‌طوری‌که این اعداد از هم متمایزند. هدف آن است که اعدادی که که در ابتدای بازی در حافظه‌ی کارت‌خوان‌ها ذخیره شده بودند در انتهای مرحله‌ی ۱۰۱ ام به‌صورت مرتب‌شده از چپ به راست در حافظه‌ی کارت‌خوان‌ها قرار داشته باشند. یعنی کوچک‌ترین عدد از بین ۱۰۰ عدد اولیه، در پایان بازی در حافظه‌ی سمت چپ ترین کارت‌خوان، دومین عدد در حافظه‌ی کارت‌خوان بعدی و ...و به همین ترتیب بزرگ‌ترین عدد در حافظه‌ی سمت راست‌ترین کارت‌خوان ذخیره شده باشد.

یک شیوه طراحی کنید که اگر کارمندان بر اساس آن قبل از شروع بازی هماهنگ شوند و بر طبق آن بازی کنند، به هدف بازی دست پیدا کنند. برای این‌کار نشان دهید که یک کارمند دل‌خواه در هر مرحله چه‌کاری و با کدام کارت‌خوان انجام می‌دهد.

مسئله‌ی هشتم: انتقال مهره‌ها .... ۳۰ امتیاز

سارا و برادرش دارا مشغول یک بازی هستند. این بازی روی یک صفحه‌ی شطرنجی بسیار بزرگ انجام می‌شود. صفحه در ابتدا خالی است و سارا ۹۰۰ مهره دارد. بازی به‌صورت مرحله‌ای انجام می‌شود و هدف آن است که سارا و دارا با مشارکت هم کاری کنند که در کم‌ترین تعداد مرحله تمام مهره‌های سارا به دارا منتقل شود.

در هر مرحله از بازی یکی از دو کار زیر را می‌توان انجام داد.

۱) سارا می‌تواند یک سطر از جدول را انتخاب کند و تعدادی از مهره‌های خود را در خانه‌های دل‌خواهی از آن سطر قرار دهد.

۲) دارا می‌تواند یک ستون را انتخاب کند و همه‌ی مهره‌های آن ستون را بردارد.

شرط مهم بازی آن‌است که در هیچ زمانی تعداد مهره‌های موجود در صفحه نباید از ۳۶ عدد بیش‌تر شود. بدیهی است که در یک زمان نمی‌توان بیش از یک مهره در یک خانه قرار داد.

روشن است که این‌کار را در ۳۰۰ مرحله می‌توان انجام داد. این روش در زیر نمایش داده شده است که در آن هر x یک مهره است و عددها شماره‌های مرحله‌ها را نشان می‌دهند. اگر شماره‌ی یک مرحله در سمت چپ سطری نوشته شده باشد، در آن مرحله سارا در آن سطر ۶ مهره گذاشته است. شماره‌ی مرحله در بالای یک ستون به این معنی است که دارا در آن مرحله ۶ مهره‌ی موجود در آن ستون را برداشته است. روشن است که لزومی ندارد که سارا و دارا یک در میان بازی کنند.

```
    7  8  9 10 11 12
 1  x  x  x  x  x  x
 2  x  x  x  x  x  x
 3  x  x  x  x  x  x
 4  x  x  x  x  x  x
 5  x  x  x  x  x  x
 6  x  x  x  x  x  x 19 20 21 22 23 24
                  13  x  x  x  x  x  x
                  14  x  x  x  x  x  x
                  15  x  x  x  x  x  x
                  16  x  x  x  x  x  x
                  17  x  x  x  x  x  x
                  18  x  x  x  x  x  x
                                    25  ..................
                                    26  ..................
```

ذهن زیبا

روشی برای این بازی ارایه دهید که تعداد مرحله‌های آن

الف) (۲۰ امتیاز) از ۲۳۰ تا ۲۴۰ باشد،

ب) (کل امتیاز) کم‌تر از ۲۳۰ باشد.

راه‌حل‌های خود را به‌طور خلاصه توضیح دهید و مانند شکل فوق آن‌را نمایش دهید.

(موفق باشید)