مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس اول)

مسئله‌ی ۱: دنباله‌ی آینه‌ای .... ۱۰ امتیاز

دنباله‌ی $\mathcal{F}(i,j)$ را به این صورت می‌سازیم:

$$\begin{aligned} F_0 &= i \\ F_1 &= j \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \end{aligned}$$

روشن است که $\mathcal{F}(0,1)$ همان دنباله‌ی فیبوناچی است. اگر این رابطه را برای مقادیر منفی n هم باز کنیم اعداد زیر به‌دست می‌آیند:

$$\ldots, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

اگر علامت‌های منفی را در نظر نگیریم دنباله «آینه‌ای» می‌شود، یعنی اعداد نسبت به عدد F_0 قرینه هستند. در این صورت می‌گوییم $\mathcal{F}(0,1)$ آینه‌ای است.

به‌ازای کدام مقادیر دیگر i و j دنباله‌ی $\mathcal{F}(i,j)$ آینه‌ای خواهد بود؟ اثبات کنید.

مسئله‌ی ۲: جوش‌کاری .... ۲۰ امتیاز

می‌خواهیم n قطعه آهن f_1، f_2، تا f_n به‌ترتیب با طول‌های ℓ_1، ℓ_2، تا ℓ_n را به‌همین ترتیب (از چپ به راست) به هم جوش دهیم تا یک قطعه آهن بزرگ از آن‌ها ایجاد شود. برای این‌کار این قطعات را به‌همین ترتیب پشت سرهم در یک ردیف می‌چینیم و هر بار دو تا از قطعه‌های کنار هم را برداشته، به هم جوش می‌دهیم و در جای قبلی‌شان قرار می‌دهیم (با این کار یک عدد از تعداد قطعه آهن‌ها کم می‌شود). این کار را اگر $n-1$ بار تکرار کنیم، کار به پایان رسیده است.

اما می‌دانیم که هزینه‌ی جوش‌دادن دو قطعه آهن کنار هم به طول‌های a و b برابر $a+b$ است. می‌خواهیم قطعه‌آهن‌ها را به‌ترتیبی به هم جوش دهیم تا مجموع کل هزینه‌ی این کار کمینه شود.

برای این کار یک زیرمسئله‌ی P_{ij} تعریف می‌کنیم که آن جوش دادن f_i، f_{i+1}، تا f_j $(j > i)$ به هم با همین ترتیب است. هزینه‌ی کمینه‌ی این کار را C_{ij} می‌نامیم.

الف. یک فرمول بازگشتی برای C_{ij} و برحسب C_{rk} بنویسید به‌طوری که $r < k$ و $k - r < j - i$. بدیهی است که $C_{ii} = 0$.

ب. نشان دهید که C_{1n} برای مسئله‌ی اصلی چه‌گونه محاسبه می‌شود.

ج. برای $n = 5$ و ورودی $\ell_1 = 6$، $\ell_2 = 2$، $\ell_3 = 4$، $\ell_4 = 3$ و $\ell_5 = 5$ بند «ب» را دنبال کنید و مقدار هزینه‌ی کل و ترتیب جوش دادن را به‌دست آورید.

مسئله‌ی ۳: ناریا .... ۲۰ امتیاز

کشوری با n شهر را «صرفه‌جو» گوییم اگر دقیقاً $n-1$ جاده بین شهرهای آن به‌گونه‌ای کشیده شده باشد که بتوان با شروع از هر یک از شهرهای آن با استفاده از جاده‌ها به هر شهر دیگری از آن رسید. توجه کنید که هر جاده بین دو شهر کشیده می‌شود. می‌توان ثابت کرد که اگر هر یک از جاده‌های یک کشور صرفه‌جو از بین برود، کشور به دو زیر کشور صرفه‌جو، تقسیم می‌شود. مثلاً اگر یک کشور صرفه‌جو با ۲ شهر داشته باشیم و تنها جاده‌ی موجود در آن را حذف کنیم دو کشور صرفه‌جو که هر کدام ۱ شهر دارند به دست می‌آید. کشور ناریا یک کشور صرفه‌جو با n شهر است. در ضمن می‌دانیم که به هر کدام از شهرهای این کشور حداکثر ۳ جاده متصل شده است. ثابت کنید در این کشور جاده‌ای وجود دارد که با حذف آن ۲ کشوری که به‌دست می‌آیند هرکدام حداقل $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ و حداکثر $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ شهر داشته باشند. ($\lceil r \rceil$ کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی r و $\lfloor r \rfloor$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی r است.)

مسئله‌ی ۴: جای‌گشت نقره‌ای .... ۲۵ امتیاز

یک جای‌گشت، ترتیبی از اعداد ۱ تا n است که هر عدد دقیقاً یک‌بار در آن ظاهر شده‌است. مثلاً «۴ ۱ ۵ ۲ ۳» یک جای‌گشت از اعداد ۱ تا ۵ را نشان می‌دهد. فرض کنید عدد π_n آخرین عدد جای‌گشت π باشد. هر عمل وارون تعداد π_n عنصر آخر π را در دنباله معکوس می‌کند (به ترتیب عکس قرار می‌دهد) تا جای‌گشت $rev(\pi)$ به‌دست آید. مثلاً اگر عمل وارون را روی جای‌گشت بالا اعمال کنیم «۲ ۵ ۱ ۴ ۳» به‌دست می‌آید. گوییم π یک جای‌گشت نقره‌ای است اگر $rev(\pi) = \pi$ باشد. ثابت کنید با انجام متناهی بار عمل وارون روی هر جای‌گشت π سرانجام یک جای‌گشت نقره‌ای به‌دست می‌آید.

مسئله‌ی ۵: کیسه‌ها .... ۲۵ امتیاز

$2n$ مهره داریم که روی هر یک عددی نوشته شده است. می‌دانیم هر یک از اعداد ۱ تا n روی دقیقاً دو مهره نوشته شده است. مهره‌ها در n جعبه طوری گذاشته شده‌اند که در هر جعبه دو مهره (با اعداد نه لزوماً یک‌سان) قرار دارند و مهره‌های درون جعبه‌ها دیده می‌شوند. یک مهره از یکی از جعبه‌ها اخیراً گم شده است.

می‌خواهیم از هر جعبه تنها یک مهره برداریم به‌طوری‌که از همه‌ی اعداد ۱ تا n مهره‌ای برداشته باشیم.

آیا این کار همواره ممکن است؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، این موضوع را اثبات کرده و در صورت منفی بودن، یک مثال نقض بزنید.

موفق باشید!

مسئله‌ی ۱: مادربزرگِ مهدی و ایلیا .... ۱۵ امتیاز

مهدی و ایلیا مهمان مادربزرگ‌شان بودند که او این سوال را مطرح کرد: n عدد مثبت داریم و در هر مرحله می‌توانیم دو عدد از این اعداد را برداریم و به جای آن دوعدد مجموع یا تفاضل‌شان را قرار دهیم (تفاضل دو عدد، همیشه نامنفی است.) تا فقط یک عدد باقی بماند. می‌خواهیم تنها عدد باقی‌مانده کمینه شود.

مهدی گفت در هر مرحله دو بزرگ‌ترین عدد را می‌گیریم، حذف می‌کنیم و تفاضل‌شان را به جای آن دو قرار می‌دهیم و این کار را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا فقط یک عدد باقی بماند. ایلیا گفت در هر مرحله بزرگ‌ترین عدد و کوچک‌ترین عدد را حذف می‌کنیم و تفاضل‌شان را قرار می‌دهیم و این کار را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا به یک عدد برسیم.

مادربزرگ به آنها گفت که هیچ کدام از این دو روش نمی‌تواند کمینه بودن عدد آخر را تضمین کند. و در ضمن برخلاف روش‌های شما که فقط از تفاضل استفاده می‌کند، می‌توان فقط با یک بار استفاده از تفاضل به عدد کمینه رسید.

الف. این‌که روش مهدی و ایلیا ممکن است به کوچک‌ترین عدد ممکن نرسد را با مثال‌هایی تایید کنید.

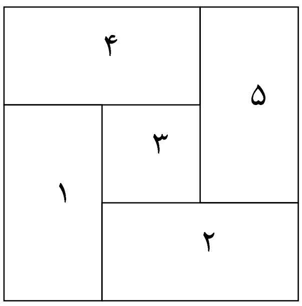
ب. ثابت کنید که برای رسیدن به عدد کمینه کافی است تنها یک‌بار از تفاضل استفاده کرد.

مسئله‌ی ۲: فرش .... ۲۰ امتیاز

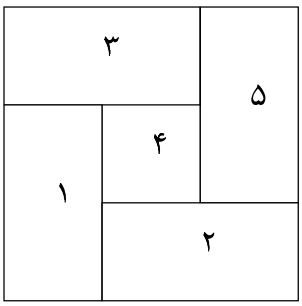
کف یک اتاق مستطیل شکل را می‌خواهیم با تعدادی متناهی فرش بپوشانیم. تمام فرش‌ها مستطیل شکل‌اند و ابعادی حقیقی دارند. یک نقشه‌ی قابل قبول، نحوه‌ی قرار گرفتن هر فرش در اتاق را نشان می‌دهد به‌طوری‌که هر نقطه‌ی اتاق دقیقاً توسط یک فرش پوشانده شده باشد؛ یعنی فرش‌ها روی هم قرار نگرفته‌اند و هیچ جای اتاق خالی نیست. می‌دانیم در هر نقشه‌ی قابل قبول، ضلع‌های هر فرش موازی اضلاع اتاق خواهد بود.

یک نقشه‌ی قابل قبول داده شده است. می‌خواهیم ترتیب پهن کردن فرش‌ها را مشخص کنیم، یعنی به هر یک از فرش‌ها شماره‌ای اختصاص دهیم که مشخص کند آن فرش، چندمین فرشی است که باید پهن شود. یک ترتیب را خوب می‌نامیم اگر زمانی که طبق آن ترتیب فرشی پهن می‌شود، ضلع‌های پایین و چپ آن فرش، یا دیوار باشد و یا هیچ قسمت فرش نشده‌ای نداشته باشد.

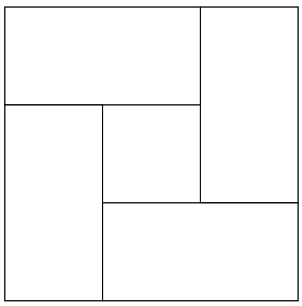
مثلاً در زیر شکل (۱) یک نقشه‌ی قابل قبول است، و شکل (۲) آن یک ترتیب غیر خوب را نشان می‌دهد، چرا که هنگام اضافه شدن فرش شماره‌ی ۳ قسمتی از پایین این فرش هنوز پوشانده نشده است، که بعداً توسط فرش ۴ پوشانده می‌شود. شکل (۳) یک ترتیب خوب را نشان می‌دهد.



(۳)



(۲)


(۱)

ثابت کنید که به‌ازای هر نقشه‌ی قابل قبول، یک ترتیب خوب وجود دارد.

مسئله‌ی ۳: جشن تولد آیدا .... ۳۰ امتیاز

آیدا قصد دارد جشن تولد بگیرد. متأسفانه به‌دلیل مشغله‌ی زیاد، تصمیم گرفته است مسئولیت کلیه‌ی تدارکات مراسم عروسی را به دوستش آقای «کاف» بدهد! آقای «کاف» پس از جست‌وجوی فراوان برای تدارکات نور عروسی، موفق به خرید یک «ریسه»ی ۱۰۰ لامپی (شامل ۱۰۰ عدد سرپیچ لامپ و ۱۰۰ عدد لامپ) شده است. ریسه تعدادی سرپیچ متصل به‌هم است که در صورتی که به آن‌ها لامپ بسته شود، به‌زیبایی روشن می‌شوند. البته فروشنده گفته است که دقیقاً ۵۰ تا از لامپ‌ها سالم و ۵۰ تای بقیه خراب‌اند. هم‌چنین دقیقاً ۵۰ تا از سرپیچ‌ها سالم و بقیه خراب‌اند!

آقای کاف قصد دارد، لامپ‌ها و سرپیچ‌های سالم را پیدا کرده و سپس برای به‌دست آوردن حداکثر نور در جشن تولد، پنجاه لامپ سالم را به پنجاه سرپیچ سالم وصل کند تا پنجاه لامپ روشن در ریسه موجود باشد. برای این منظور آقای کاف ریسه را به برق وصل کرده و شروع به امتحان لامپ‌ها و سرپیچ‌ها می‌کند. از آن‌جا که او هیچ وسیله‌ی اضافه‌ای در اختیار ندارد و لامپ‌های سالم و خراب و نیز سرپیچ‌های سالم و خراب کاملاً شبیه هم هستند، او می‌تواند فقط با بستن و بازکردن لامپ‌ها و سرپیچ‌ها به یک‌دیگر، آن‌ها را بیازماید. می‌دانیم که یک لامپ اگر به یک سرپیچ بسته شود، تنها در صورتی روشن می‌شود که هم سرپیچ سالم باشد و هم لامپ.

ضمناً می دانیم که باز کردن یک لامپ از یک سرپیچ دقیقاً یک دقیقه طول می‌کشد ولی از آن‌جا آقای کاف در بستن لامپ به سرپیچ مهارت زیادی دارد، زمان بستن یک لامپ صفر ثانیه فرض می‌شود.

الگوریتمی برای آقای کاف بنویسید (یعنی مراحل دقیق انجام کار را مشخص کنید) که در حداقل زمان بتواند لامپ‌های سالم و نیز سرپیچ‌های سالم را پیدا کرده و ریسه را با ۵۰ لامپ روشن برای جشن تولد آماده کند. دقت کنید که لزومی ندارد که در انتهای کار تمامی لامپ‌ها به تمامی سرپیچ‌ها متصل باشند. یک الگوریتم درست (ولی با زمان بد) چنین است:

۱) یکی از لامپ‌هایی که تا کنون آزموده نشده است را بردار.

۲) لامپ برداشته شده را با تمام سرپیچ‌هایی که خالی هستند امتحان کن، درصورتی که روشن شد، لامپ را در آن سرپیچ رها کرده وگرنه به سراغ سرپیچ بعدی برو.

۳) اگر لامپ آزموده نشده‌ای باقی مانده است به مرحله‌ی ۱ برو.

می‌توان ثابت کرد این الگوریتم در بدترین حالت، ۷۵۵۰ دقیقه طول می‌کشد.

الف. الگوریتمی بنویسید که حداکثر در ۵۰۰ دقیقه، ریسه را با ۵۰ لامپ روشن آماده کند. (۱۵ امتیاز)

ب. الگوریتمی بنویسید که حداکثر در ۲۵۰ دقیقه، ریسه را با ۵۰ لامپ روشن آماده کند. (۱۵ امتیاز)

توجه: حتماً در سطر اول پاسخ‌نامه، حداکثر زمان الگوریتم خود را بنویسید. در صورتی که فقط قسمت «ب» را به‌درستی حل کنید، نمره‌ی کامل این مسئله را خواهید گرفت.

مسئله‌ی ۴: خط ارتباطی .... ۳۵ امتیاز

محمد در اصفهان زندگی می‌کند و حسین در تهران. بین اصفهان و تهران یک خط ارتباطی ارزان وجود دارد که محمد برای فرستادن پیغام‌هایش به حسین از آن استفاده می‌کند. هر پیغام دنباله‌ای از ارقام ۰ یا ۱ (تعدادی بیت) است. متأسفانه تعدادی از دشمنان این دو دوست قصد دارند بین‌شان تفرقه ایجاد کنند؛ به همین دلیل برخی مواقع تعدادی از بیت‌های پیغامی که از این خط مبادله می‌شود را تغییر می‌دهند. محمد که از این موضوع مطلع شد یک خط ارتباطی گران قیمت بین اصفهان و تهران خرید. این خط از جاهای مخفی می‌گذرد و تضمین شده که بیت‌هایی که از آن رد می‌شود تغییری نخواهد کرد. ولی چون این خط ارتباطی گران قیمت است محمد دوست دارد تا حد ممکن مقدار کمی اطلاعات را از طریق این خط منتقل کند.

فرض کنید محمد قصد دارد 2^k بیت را از خط ارزان قیمت منتقل کند. بر حسب اطلاعات قبلی او می‌داند که حداکثر ۲ بیت از این اطلاعات ممکن است توسط دشمنان تغییر کند. حال او قصد دارد حداقل تعداد بیت را به عنوان اطلاعات کمکی هم‌زمان از خط گران قیمت برای حسین بفرستد به‌طوری‌که حسین با استفاده از این اطلاعات اضافی بتواند تشخیص دهد که آیا هیچ‌یک از 2^k بیت دریافتی تغییر کرده است یا خیر.

ثابت کنید اگر محمد کم‌تر از $k+1$ بیت اطلاعات از خط گران‌قیمت بفرستد حسین نمی‌تواند قاطعانه تشخیص دهد که آیا بیت‌های فرستاده‌شده تغییر کرده‌اند یا خیر.

موفق باشید!

مسئله‌ی ۵: صندوق‌چه‌ها .... ۱۵ امتیاز

۵۲۸ صندوق‌چه با درهای بسته با شماره‌های ۱ تا ۵۲۸ موجودند. افرادی با شماره‌های ۱ تا ۵۲۸ این صندوق‌چه‌ها را یک‌به‌یک مورد بررسی قرار می‌دهند. در بررسی صندوق‌چه‌ی i توسط k، اگر i بر k بخش‌پذیر باشد، فرد شماره‌ی k وضعیت درِ صندوق‌چه‌ی i را تغییر حالت می‌دهد؛ اگر باز بود می‌بندد و اگر بسته بود آن‌را باز می‌کند.

می‌خواهیم تعدادی از این افراد را انتخاب کنیم تا آن‌ها هر کدام همه‌ی صندوق‌چه‌ها را بررسی کنند و در انتها فقط درِ صندوق‌چه‌ی شماره‌ی ۱ باز بماند و بقیه‌ی صندوق‌چه‌ها بسته باشند. ثابت کنید که دقیقاً یک گروه مشخص از افراد جواب این سوال است. درستی ادعای خود را اثبات نمایید.

مسئله‌ی ۶: جدول اصلاح‌پذیر .... ۲۰ امتیاز

جدولی به اندازه‌ی $m \times n$ که در هر خانه‌اش ۰ یا ۱ نوشته شده موجود است. در هر مرحله مقدار خانه‌ها را به این صورت عوض می‌کنیم:

مقدار جدید یک خانه در مرحله‌ی $i+1$ام ۱ است اگر و فقط اگر در مرحله‌ی iام در خانه‌های هم‌سطر و هم‌ستونش (به جز خود آن خانه) تعداد فردی ۱ وجود داشته باشد.

توجه کنید که برای هر خانه $m+n-2$ خانه‌ی دیگر هم‌سطر یا هم‌ستونش وجود دارد.

یک جدول را «اصلاح‌پذیر» می‌گوییم اگر با شروع از این جدول و چند مرحله انجام عمل فوق بر روی کلیه‌ی خانه‌های جدول دوباره به جدول اصلی برسیم. اگر m و n هر دو زوج باشند، تعداد جداول اصلاح‌پذیر با اندازه‌ی $m \times n$ را به‌دست آورید و ادعای خود را ثابت کنید.

مسئله‌ی ۷: کلاه‌گذاری .... ۳۰ امتیاز

۱۳۸۵ دانش‌آموز با شماره‌های ۱ تا ۱۳۸۵ که شماره‌ی هر یک بر روی پیراهنش نوشته شده به‌ترتیب شماره‌هایشان در یک صف قرار گرفته‌اند. بر روی سر هر یک از این افراد کلاهی به رنگ آبی یا قرمز قرار دارد. هر فرد از رنگ کلاه خود بی‌خبر است ولی رنگ کلاه‌های حداکثر ۱۰ نفر جلوی خود و ۱۰ نفر پشت‌سرخود و شماره‌های این‌افراد را می‌تواند ببیند.

حال هر فرد بدون آن‌که با دیگران صحبتی کند رنگ کلاه خود را حدس می‌زند و با شماره‌ی خودش بر روی یک کاغذ می‌نویسد و به سرپرست تحویل می‌دهد. توجه کنید که کسی تقلب نمی‌کند. اگر بیش از ۴۰٪ بچه‌ها رنگ کلاه خود را درست تشخیص دهند به همه جایزه داده می‌شود. این دانش‌آموزان می‌توانند قبل از شروع این بازی با هم مشورت کنند و سیاست واحدی را اتخاذ کنند تا برنده شوند.

شما این سیاست را تعیین کنید و مشخص کنید که هر کس چه جوابی باید بدهد تا گروه برنده شود. درستی روش خود را اثبات کنید.

مسئله‌ی ۸: آنتونیو .... ۳۵ امتیاز

کشور آنتونیو مقررات عجیبی برای خیابان‌کشی دارد. خیابان‌های این کشور باید مستقیم باشند و دو طرف هر خیابان پیاده‌رو داشته باشد. هر خیابان باید از دو طرف از شهر بیرون برود. هم‌چنین در شهرهای این کشور فقط چهارراه وجود دارد، یعنی هر تقاطعی محل برخورد تنها دو خیابان است.

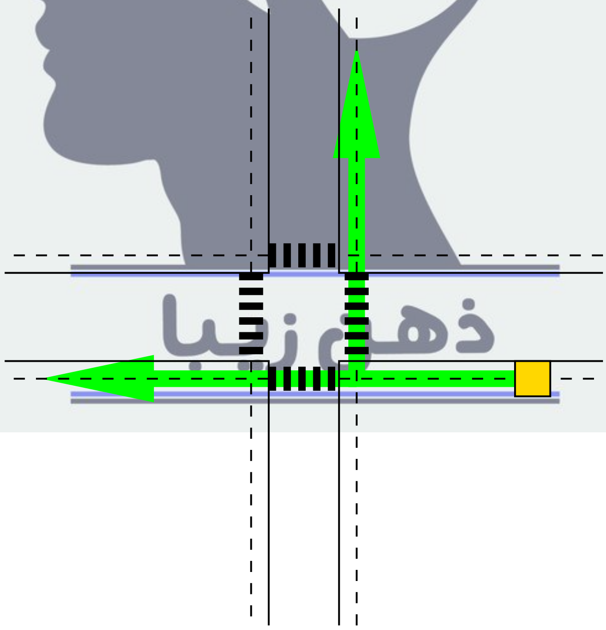
مردم پیاده فقط مستقیم بر روی پیاده‌رو حرکت می‌کنند مگر هنگامی که به چهار راه برسند، که در آن‌صورت دقیقاً از خط‌کشی عابر پیاده‌ی یکی از خیابان‌های آن چهار راه عبور می‌کنند و در همان جهتِ عبور به راه خود ادامه می‌دهند.

قرار است نقشه‌ی خیابان‌های یک شهر و محل خانه‌ی شهردار (در کنار یک خیابان) را طوری طراحی کنیم که اگر شهردار برای پیاده‌روی از خانه‌اش بیرون بیاید و مطابق مقررات حرکت کند بتواند به خانه‌اش برگردد.

برای این طراحی حالت‌های زیر را در نظر بگیرید:

- خیابان‌ها فقط افقی و عمودی باشند.
- خیابان‌ها می‌توانند در هر راستایی باشند.

در هر حالت فوق تعیین کنید که آیا می‌توان چنین شهری را طراحی کرد یا خیر. در صورت مثبت بودن جواب مثالی بزنید که در آن خانه‌ی شهردار و مسیر حرکت او مشخص شده باشد. برای جواب منفی، ادعای خود را ثابت کنید.



موفق باشید!