- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

---

۱ افشین در یک خانه از جدول $n \times n$ ($n > ۱$) قرار دارد و پیمان می‌خواهد او را دستگیر کند. در هر گام افشین باید به یکی از خانه‌های مجاور (مجاور ضلعی) محل کنونی‌اش که مسدود نشده باشد، برود. پیمان نیز در هر گام می‌تواند یک خانه را انتخاب کند و همه‌ی خانه‌های هم‌سطر و هم‌ستون آن را مسدود کند. افشین در دو صورت زیر دستگیر می‌شود:

- در نوبت خود نتواند حرکت کند (تمام خانه‌های مجاورش مسدود شده باشند).
- پیمان محلی که افشین در آن قرار دارد را مسدود کند.

اگر پیمان نتواند محل افشین در جدول را ببیند، حداقل چند خانه باید انتخاب کند تا مطمئن باشد افشین را دستگیر کرده است؟

۱) $\lceil \frac{n}{۲} \rceil$ ۲) $n - ۱$ ۳) n ۴) $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ ۵) $\lceil \frac{n}{۴} \rceil$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

برای دستگیر کردن افشین، پیمان کافیست تا برای هر $۱ \leqslant i \leqslant \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$، خانه‌ی $(۲i, ۲i)$ از جدول را انتخاب کند. در این صورت افشین یا در یک خانه‌ی مسدود است یا در خانه‌ای مجاور یک خانه‌ی مسدود، پس دستگیر می‌شود. علاوه بر این این تعداد خانه لازم نیز می‌باشد زیرا در غیر این‌صورت دو خانه‌ی مجاور هستند که هیچ کدام مسدود نشده‌اند و افشین می‌تواند بین آن دو به صورت متناوب حرکت کند. □

۲ اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ را در نظر بگیرید. دو نفر بازی زیر را انجام می‌دهند: هر کس در نوبت خود عدد $۱ \leqslant i \leqslant n$ را انتخاب می‌کند و سپس i و تمام مضارب آن (که از n بیشتر نیستند) را روی تخته می‌نویسد. هر عدد باید حداکثر k بار نوشته شود. کسی که در نوبت خود نتواند عددی انتخاب کند (برای هر عدد i خود i یا حداقل یکی از مضاربش k بار نوشته شده باشند)، می‌بازد. فرض کنید $n = ۲۰۱۴$ است. به ازای چند مقدار k از بین مجموعه‌ی اعداد $\{۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵\}$ نفر اول می‌تواند برنده‌ی بازی باشد؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۰

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

به ازای اعداد فرد نفر اول و به ازای اعداد زوج نفر دوم استراتژی برد دارد. به ازای اعداد زوج: نفر دوم هر عددی که نفر اول انتخاب کرد را دوباره انتخاب می‌کند. در نتیجه همواره نفر دوم می‌تواند عدد انتخاب کند و نفر اول بالاخره خواهد باخت. به ازای اعداد فرد: نفر اول ابتدا عدد ۱ را انتخاب می‌کند و در بازی جدید همانند نفر دوم در بازی قبل عمل خواهد کرد. □

۳ دنباله‌ی $\langle a_۱, a_۲, \ldots, a_{۱۳۹۲} \rangle$ شامل ۱۳۹۲ عدد متمایز داده شده است. یک جادوگر قادر است در یک چشم بر هم زدن ۶۹۶ عدد متوالی از این دنباله را به‌طور صعودی مرتب کرده و بر روی مکان‌های همان ۶۹۶ عدد از کوچک به بزرگ (صعودی) بگذارد. می‌خواهیم با تعدادی درخواست از جادوگر اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. هر درخواست بدین شکل است که از جادوگر می‌خواهیم از عدد iام تا عدد $i + ۶۹۵$ام که در مجموع ۶۹۶ عدد می‌شوند را مرتب کند (عدد i می‌تواند حداقل ۱ و حداکثر ۶۹۷ باشد). با حداقل چندبار درخواست از جادوگر می‌توان اعضای دنباله را مرتب کرد؟

۱) ۳ ۲) ۱۳۹۲ ۳) ۶ ۴) $\lceil \log_۲ ۱۳۹۲ \rceil$ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

فرض کنید بزرگترین عدد در خانه اول و کوچکترین عدد در خانه ۱۳۹۲ ام باشد. هر کدام از این دو عدد برای انکه به مکان مطلوب خود برسند نیاز به سه درخواست دارند. فقط یک درخواست است که هر دو عدد فوق را شامل می‌شود. بنابراین حداقل ۵ درخواست برای انکه کوچکترین و بزرگترین عدد به مکان مطلوب خود برسند نیاز داریم. با ۶ بار می‌توان بدین شکل اعداد را مرتب کرد. ابتدا نیمه اول و نیمه دوم را با دو درخواست مرتب می‌کنیم. سپس نیمه وسط (از عدد ۳۴۹ام تا ۱۰۴۴ام) را مرتب می‌کنیم. مجدد با دو درخواست دیگر نیمه اول و دوم را مرتب کرده و نهایتا نیمه وسط را مرتب می‌کنیم. برای اثبات درستی الگوریتم فوق فرض کنید در ابتدا برای $i < j$ داشته باشیم $a_i > a_j$. می‌توان با حالت گیری نشان داد در یکی از درخواست‌ها حتما این دو عدد جابه‌جا می‌شوند. □

۴ سلطان در ابتدا عدد ۰ را روی تخته نوشته است. در هر مرحله اگر عدد x روی تخته نوشته شده باشد، او می‌تواند آن را با یکی از اعداد $\lfloor \frac{x}{۳} \rfloor$، $۳x$ و $۹x + ۵$ جای‌گزین کند. به ازای چند تا از اعداد ۰ تا ۵۰۰، سلطان می‌تواند پس از تعداد متناهی گام، به آن عدد برسد؟

۱) ۶۴ ۲) ۲۵۰ ۳) ۱۶۹ ۴) ۲۳۹ ۵) ۴۰۸

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

شرط لازم برای رسیدن به یک عدد این است که در نمایش آن عدد در مبنای ۳، تمام ارقام ۲ سمت راست یک رقم ۱ باشند. زیرا تنها راه تولید رقم ۲ استفاده از عمل $۹x + ۵$ است که این خاصیت را دارد. دو عمل دیگر نیز یا یک صفر در سمت راست عدد قرار می‌دهند و یا سمت راست‌ترین رقم آن را حذف می‌کنند. حال فرض کنید a_n تعداد رشته‌های nبیتی در مبنای ۳ باشد که این خاصیت را دارند. این رشته‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم. دسته‌ی اول آن‌هایی که با ۰ شروع می‌شوند و دسته‌ی دوم آن‌هایی که با ۱ . بدیهی است که تعداد رشته‌های دسته‌ی اول برابر $a_{n-۱}$ است. علاوه بر این رشته‌های دسته‌ی دوم اگر رقم دومشان ۲ باشد تعدادشان برابر $a_{n-۲}$ است و یا در غیر این صورت تعدادشان $a_{n-۱}$ است. پس در کل داریم $a_n = ۲a_{n-۱} + a_{n-۲}$. برای $n = ۲$ هم داریم : $a_۲ = ۵$. به راحتی می‌توان مشاهده کرد تمام اعداد ۶ رقمی که در این خاصیت صدق می‌کنند، کمتر از ۵۰۰ می‌باشند پس تعداد این اعداد برابر است با $a_۶ = ۱۶۹$. □

۵ جدولی $n \times n$ در نظر بگیرید. به یک خانه از این جدول ناسازگار می‌گوییم اگر بتوان تمام خانه‌های جدول به جز این خانه را با بلوک‌های ۳×۱ پوشاند (بلوک‌ها نباید هم‌پوشانی داشته باشند و از جدول بیرون بزنند). برای $n = ۵$ و $n = ۷$ تعداد خانه‌های ناسازگار به ترتیب (از راست به چپ) چند است؟

۱) ۱ و ۱۷ ۲) ۱ و ۹ ۳) ۹ و ۴۹ ۴) ۹ و ۹ ۵) ۹ و ۱۷

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

جدول را به صورت متناوب و یک در میان با اعداد ۱ و ۲ و ۳ رنگ‌آمیزی کنید به طوری که هر بلوک که در جدول گذاشته می‌شود، دقیقا یک خانه از هر رنگ را بپوشاند. مثلا برای جدول ۵×۵ این رنگ‌آمیزی به این صورت است :

۲	۱	۳	۲	۱
۱	۳	۲	۱	۳
۳	۲	۱	۳	۲
۲	۱	۳	۲	۱
۱	۳	۲	۱	۳

حال اگر خانه‌ای ناسازگار باشد باید رنگ آن ۱ باشد، زیرا تعداد خانه‌های به رنگ ۱ یکی از ۲ و ۳ بیشتر است. از طرفی هر خانه ای که سازگار باشد معادل آن خانه پس از چرخش ۹۰، ۱۸۰، ۲۷۰ درجه‌ای جدول نیز باید ناسازگار باشد. تنها خانه‌ای که در جدول ۵×۵ این خاصیت را دارد، خانه‌ی وسطی است. برای جدول ۷×۷ نیز ۹ خانه این خاصیت را دارند.

□

۶ جایگشت $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ از اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ را «سه‌گریز n تایی» می‌گوییم هرگاه $۱ \leqslant i \leqslant n$ وجود نداشته باشد که $\sum_{j=۱}^{i} a_j$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد. تعداد جایگشت‌های سه‌گریز ۷ تایی و ۸ تایی به ترتیب (از راست به چپ) چند است؟

۱) ۳۶۰ و ۰ ۲) ۳۶۰ و ۱۵۱۲ ۳) ۴۸۰ و ۱۵۱۲ ۴) ۴۸۰ و ۰ ۵) ۴۸۰ و ۴۸۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

برای $n = ۸$ این مقدار برابر صفر است. زیرا جمع اعداد $۱, \ldots, ۸$ برابر ۳۶ است که بر ۳ بخشپذیر است. حال $n = ۷$ را در نظر بگیرید. اگر فقط باقیمانده‌ی اعداد بر ۳ را نگاه کنیم. به این نتیجه میرسیم که جایگشت‌های ۳گریز باید به صورت $۱, ۱, ۲, ۱, ۲, ۱$ باشند که اعداد مضرب ۳، یعنی ۳ و ۶ نیز در بین این‌ها(جایگشت نباید با ۳ و ۶ شروع شود) قرار گرفته اند. پس با تعیین ترتیب ۵ عدد دیگر، ۲×۱۵ روش برای قرار دادن ۳ و ۶ داریم. از طرفی برای قرار دادن ۵ عدد دیگر نیز $۲! \times ۳!$ روش وجود دارد، یعنی در کل ۳۶۰ حالت برای $n = ۷$ داریم.

□

۷ جایگشت $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ از اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ را «سه‌گریز پیشرفته n تایی» می‌گوییم هرگاه دو شرط زیر را داشته باشد:

- $۱ \leqslant i \leqslant n$ وجود نداشته باشد که $\sum_{j=۱}^{i} a_j$ باقی‌مانده‌اش بر ۳ برابر یک باشد.
- جمع هر ۶ عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

تعداد جایگشت‌های سه‌گریز پیشرفته‌ی ۹ تایی چند است؟

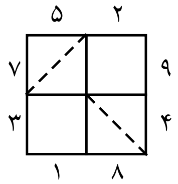
۱) $۹ \times ۳!^۳$ ۲) $۴ \times ۳!^۳$ ۳) $۸ \times ۳!^۳$ ۴) ۰ ۵) $۲۷ \times ۳!^۳$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

با استفاده از این نکته که جمع هر ۶ عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است، به راحتی مشاهده می‌شود که باقیمانده‌ی عدد عدد اول، دوم و سوم بر ۳ به ترتیب با باقیمانده‌ی عدد هفتم، هشتم و نهم برابر است. از طرفی اگر فقط باقیمانده‌ی اعداد بر ۳ را در نظر بگیریم، از گزاره‌ی قبل به این نتیجه می‌توان رسید که ۳ تایی اول، دوم هر کدام یک جایگشت از اعداد ۰ تا ۲ هستند و ۳ تایی سوم با سه تایی اول برابر است. علاوه بر این با استفاده از خاصیت اول این جایگشت‌ها به این نتیجه می‌رسیم که ۳ رقم اول و دوم هر کدام باید به یکی از سه شکل $۱, ۰, ۲$، $۰, ۱, ۲$ و $۱, ۲, ۰$ باشند. پس در کل فقط با در نظر گرفتن باقیمانده‌ها ۹ حالت داریم. از طرفی برای هر کدام از ارقام $۲, ۱, ۰$، $۳!$ حالت برای ترتیب اعداد با آن باقیمانده داریم. پس تعداد جایگشت‌های کلی برابر $۹ \times ۳!^۳$ است.

□

۸ در جدول روبه‌رو می‌توانیم با کشیدن هر یک از دو قطر هر خانه، یک آینه‌ی دو طرفه در آن خانه قرار دهیم. در واقع برای هر خانه سه حالت متصور است. یا آینه‌ای درون آن نیست و یا این‌که یکی از قطرهای آن کشیده شده است. برای مثال در شکل روبه‌رو دو آینه که با خط‌چین مشخص شده‌اند در جدول وجود دارند. به ازای هر وضعیت جدول، مقدار آن وضعیت به این صورت تعیین می‌شود که هر دو عددی که همدیگر را می‌بینند (با توجه به آینه‌ها) در هم ضرب می‌کنیم و مجموع این حاصل‌ضرب‌ها، مقدار آن وضعیت جدول را مشخص می‌کند (دید اعداد به گونه‌ای است که در صورتی که آینه‌ای وجود نداشته باشد هر عددی، عدد مقابل خود را می‌بیند). برای مثال مقدار وضعیت روبرو به این صورت محاسبه می‌شود: $۷۶ = ۷ \times ۵ + ۴ \times ۲ + ۸ \times ۳ + ۹ \times ۱$.



کم‌ترین مقداری که می‌توان با کمک آینه‌ها برای این جدول به دست آورد چند است؟

۱) ۷۰ ۲) ۶۹ ۳) ۶۷ ۴) ۶۸ ۵) ۶۶

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

اگر جدول و آینه‌ای در کار نبود کم‌ترین مقدار، زمانی حاصل می‌شد که

$$۱ \times ۹ + ۲ \times ۸ + ۳ \times ۷ + ۴ \times ۵ = ۶۶$$

اما امکان ساخت این مقدار در جدول وجود ندارد. اما مقدار زیر را می‌توان ساخت که تنها یک واحد بیش‌تر است و خوب طبیعتا جواب است

$$۱ \times ۸ + ۲ \times ۹ + ۳ \times ۷ + ۴ \times ۵ = ۶۷$$

□

۹ در یک گراف فاصله‌ی بین دو رأس طول کوتاهترین مسیر بین آن دو رأس است. قطر یک گراف بیش‌ترین فاصله‌ی بین هر دو راس از آن گراف می‌باشد. حال مجموعه‌ی تمام درخت‌های متمایز ۷ راسی با راس‌های $۱, ۲, \ldots, ۷$ را در نظر بگیرید (دو درخت متمایزند اگر و فقط اگر دو راس مانند i, j وجود داشته باشند که یال ij در یکی وجود داشته باشد و در دیگری نباشد). فرض کنید می‌خواهیم با اضافه کردن تعدادی یال به این مجموعه یک درخت بزرگ ایجاد کنیم. کم‌ترین قطر ممکن برای این درخت چند است؟

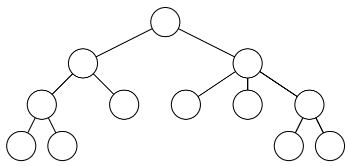
۱) ۱۳ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲ ۵) ۷

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

فرض کنید جواب مساله مربوط به درخت T باشد. از روی T، درخت T' را این گونه بسازید :
هر درخت ۷ راسی را معادل یک راس در نظر بگیرید و اگر بین دو راس از دو درخت در T یالی بود، بین دو راس متناظر آن دو در T' یک یال بگذارید. حال دو برگ از T' را در نظر بگیرید. فرض کنید این دو برگ معادل دو درخت $T_۱, T_۲$ از T باشند. فرض کنید رئوسی از $T_۱$ و $T_۲$ که به بیرون از این دو درخت یال دارند، به ترتیب $t_۱$ و $t_۲$ باشند(چون $T_۱$ و $T_۲$ برگ هستند این راس یکتاست). چون $T_۱$ و $T_۲$ درختهای ۷ راسی هستند رئوسی مانند $t'_۱$ و $t'_۲$ وجود دارند که $d_T(t_۱, t'_۱) \geqslant ۳$ و $d_{T_۲}(t_۲, t'_۲) \geqslant ۳$. حال به وضوح می‌توان دید که $d_T(t'_۱, t'_۲) \geqslant ۸$.پس قطر T حداقل ۸ است. حال اگر T' را یک گراف ستاره‌ای در نظر بگیریم و به ازای هر یال مانند $T_۱T_۲$ در T'، مرکز درخت $T_۱$ را به مرکز درخت $T_۲$ در T متصل کنیم. با توجه به اینکه شعاع هر گراف ۷ راسی حداکثر ۳ است، قطر گراف حاصل ۸ می‌شود. پس پاسخ مساله برابر ۸ است.
شعاع گراف G برابر است با : $\min_{v \in V(G)}\{\max_{w \in V(G)} d(v, w)\}$.

□

۱۰ درخت روبه‌رو را در نظر بگیرید. می‌خواهیم اعداد ۱, ۲, . . . , ۱۲ را در رأس‌های این درخت قرار دهیم به طوری که عدد هر رأس از اعداد فرزندان آن بیش‌تر باشد. به چند حالت این کار امکان‌پذیر است؟



۱) ۱۴۷۸۴۰ ۲) ۴۴۳۵۲۰ ۳) ۷۳۹۲۰۰ ۴) ۸۸۷۰۴۰ ۵) ۲۹۵۶۸

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

ریشه درخت حتما عدد ۱۲ است. حال کافیست ۵ عدد برای درخت سمت چپ در نظر بگیریم و ۶ عدد هم برای درخت سمت راست و به صورت بازگشتی مساله را حل کنیم. در هر مرحله عدد روی ریشه به صورت یکتا مشخص می‌شود و بقیه اعداد باید در زیر درخت‌ها افراز شوند. پاسخ نهایی برابر است با :

$$\binom{۱۱}{۵}\binom{۳}{۴}\binom{۱}{۲}\binom{۳}{۵}\binom{۱}{۲}\binom{۱}{۲} = ۱۴۷۸۴۰$$

□

۱۱ خیکوله یک دستمال کاغذی ۴×۴ پیدا کرده است و ۱۶ پوست‌پسته جمع کرده است که iامین آنها در i ثانیه می‌سوزد. او می‌خواهد پوست‌پسته‌ها را روی خانه‌های دستمال کاغذی بگذارد و خانه‌ی بالا سمت راست آن را آتش بزند تا کل دستمال کاغذی بسوزد. نحوه‌ی سوختن دستمال کاغذی به این نحو است:

- هر وقت یک خانه‌ی دستمال کاغذی آتش گرفت، اگر روی آن خانه یک پوست‌پسته باشد که در t ثانیه می‌سوزد، بعد از t ثانیه آن خانه می‌سوزد و خانه‌های مجاور ضلعی‌اش (درصورتی که قبلا آتش نگرفته باشند) آتش می‌گیرند.

حال خیکوله می‌خواهد طوری پوست‌پسته‌ها را روی جدول بچیند که در هر خانه یک پوست پسته قرار بگیرد و کل دستمال کاغذی در کم‌ترین زمان ممکن بسوزد. این کم‌ترین زمان چقدر است؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۵ ۳) ۲۹ ۴) ۲۸ ۵) ۲۷

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

برای سوختن خانه‌ی پایین سمت چپ حداقل به اندازه‌ی جمع اعداد ۱ تا ۷ (یعنی ۲۸ ثانیه) زمان لازم است. می‌توان بقیه را طوری چید که این زمان حاصل شود. جدول زیر نمونه‌ای از این چینش‌ها را نشان می‌دهد.

۱۴	۱۱	۲	۱
۱۲	۹	۳	۱۵
۱۳	۵	۴	۸
۷	۶	۱۶	۱۰

□

۱۲ اعداد $\{۲^i | ۰ \leqslant i \leqslant ۹\}$ روی تخته نوشته شده‌اند. مولین و مرلون بازی زیر را انجام می‌دهند: در هر مرحله بازیکنی که نوبت اوست، دو عدد x و y را انتخاب می‌کند و بعد از پاک کردن آن‌ها عدد $\lceil \frac{x+y}{۲} \rceil$ یا $\lfloor \frac{x+y}{۲} \rfloor$ را

روی تخته می‌نویسد و این روند ادامه می‌یابد تا فقط یک عدد باقی بماند. هدف مولین بیشینه کردن این عدد و هدف مرلون کمینه کردن آن است. اگر هر دو بازیکن بهترین بازی خود را انجام دهند و مولین شروع‌کننده‌ی بازی باشد و عدد نهایی برابر p باشد، باقی‌مانده‌ی p بر ۵ برابر چند است؟

۱) ۲   ۲) ۰   ۳) ۱   ۴) ۳   ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

بهترین راه برای مولین در هر مرحله این است که دو عددی که کمترین مجموع را دارند را انتخاب کند و سقف عدد حاصل را بنویسد. مرلون نیز باید دو عددی که بیشترین مجموع را دارند بنویسد و کف عدد حاصل را روی تخته بنویسد. با انجام این کار عدد نهایی که روی تخته می‌ماند ۵۴ است. □

---

۴۰ توپ را در ۵ جعبه با شماره‌های ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ قرار می‌دهیم (جعبه‌ها می‌توانند خالی هم باشند). عمل «وسط‌به‌دوطرف» عملی است که در طی آن دو توپ از جعبه‌ی ۴ $\leqslant i \leqslant$ ۲ (در صورت وجود) خارج می‌شوند و یکی از آن‌ها به جعبه‌ی $i-$ ۱ و یکی به جعبه‌ی $i+$ ۱ می‌رود.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۳ تعداد راه‌های قرار دادن توپ‌ها در جعبه‌ها به نحوی که تعداد توپ‌های جعبه‌ی اول با جعبه‌ی پنجم و جعبه‌ی دوم با جعبه‌ی چهارم برابر باشد، در کدام یک از بازه‌های زیر قرار می‌گیرد؟

۱) $[۲۰۰, ۴۰۰]$ ۲) $[۶۰۰, ۸۰۰]$ ۳) $[۴۰۰, ۶۰۰]$ ۴) $[۸۰۰, +\infty)$ ۵) $[۰, ۲۰۰]$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

فرض کنید در جعبه‌ی iام a_i توپ قرار داشته باشد. چون $a_۱ = a_۵$ و $a_۲ = a_۴$ پس $a_۳$ زوج است. داریم: $a_۱ + a_۲ + \frac{a_۳}{۲} = ۲۰$. پس تعداد پاسخ‌ها برابر است با $\binom{۲۲}{۲}$. □

۱۴ به حالتی از قرارگیری توپ‌ها در سبد حالت «گوشه‌گیر» می‌گوییم اگر با انجام تعدادی عمل وسط‌به‌دوطرف از آن حالت به حالتی برسیم که تمام توپ‌ها در جعبه‌ی اول و آخر قرار بگیرند. تعداد حالت‌های گوشه‌گیر چند است؟

۱) تعداد حالت‌هایی که تعداد توپ‌های جعبه‌ی اول با جعبه‌ی پنجم و جعبه‌ی دوم با جعبه‌ی چهارم برابر باشد.
۲) صفر
۳) ۴۱
۴) ۴۰
۵) تعداد حالت‌هایی که مجموع توپ‌های خانه‌های دوم و سوم و چهارم زوج باشد.

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

پس از انجام هر عمل وسط‌به‌دوطرف حداقل یک توپ به یکی از جعبه‌های ۲ و ۳ و ۴ منتقل می‌شود، پس یک حالت گوشه‌گیر است اگر و فقط اگر از ابتدا گوشه‌گیر باشد یعنی ۴۱ حالت گوشه‌گیر داریم. □

۱۵ به حالتی از قرارگیری توپ‌ها «بی‌حرکت» می‌گوییم اگر نتوان هیچ عمل وسط‌به‌دوطرفی روی آن انجام داد. با شروع از یک حالت دلخواه حداکثر چند مرحله طول می‌کشد تا به یک وضعیت بی‌حرکت برسیم.

۱) ۷۹ ۲) ۸۰ ۳) ۷۷ ۴) ۷۵ ۵) ۷۸

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

وضعیت بی حرکت وضعیتی است که در هرکدام از جعبه‌های ۲ و ۳ و۴ حداکثر یک توپ قرار داشته باشد. بیشترین تعداد گام در حالتی رخ می‌دهد که توپ‌ها در ابتدا همه در جعبه‌ی سوم باشند. حال برای هر حالت مقدار s را اینگونه تعریف کنید : $s = \sum_{i=۱}^{۵} a_i^۲$. پس از هر عمل وسط‌به‌دوطرف دقیقا دو واحد به s اضافه می‌شود. از طرفی هنگامی که تمام توپ‌ها در جعبه‌ی سوم باشند، به راحتی مشاهده می‌شود که حالت بی‌حرکت نهایی حالتی است که در آن ۱۹: $a_۱ = ۱۹, a_۲ = ۱, a_۳ - = ۰, a_۴ = ۱, a_۵ = ۱۹$. تعداد مراحل برای رسیدن به این حالت برابر است با $۷۷ = \frac{۵۱۴-۳۶۰}{۲} = \frac{۱}{۲}(s_{end} - s_{start})$. □

ده نفر با شماره‌های ۱۰ , . . . , ۲ , ۱ در صف یک بانک قرار دارند که سه باجه برای انجام امور متقاضیان دارد. در ابتدا همه‌ی باجه‌ها خالی هستند. با شروع از فرد شماره ۱، هر کس به اولین باجه خالی می‌رود و هرگاه کار کسی در باجه‌ای تمام شد، بلافاصله نفر اول صف جایگزین او می‌شود. علاوه بر این، کار هر نفر حداقل یک ثانیه طول می‌کشد و هیچ دو نفری دقیقا همزمان باجه‌ها را ترک نمی‌کنند. پس از اتمام کار نفر دهم این فرآیند پایان می‌یابد. در این فرآیند دو نفر را «همزمان» گوییم اگر لحظه‌ای وجود داشته باشد که در آن هردو در حال انجام کار در باجه‌ها باشند. «وزن» یک زوج را برابر با قدرمطلق تفاضل شماره‌های این دو نفر فرض می‌کنیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ اگر $\{۲, ۶\}$ و $\{۳, ۷\}$ دو زوج همزمان باشند، چندتا از زوج‌های زیر نمی‌توانند همزمان باشند؟

$$\{۷, ۱\}, \{۹, ۶\}, \{۷, ۴\}, \{۴, ۳\}, \{۸, ۲\}, \{۵, ۱\}$$

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲ ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

چون $\{۲, ۶\}$ و $\{۳, ۷\}$ دو زوج همزمان هستند، زمانی وجود دارد که ۲, ۳, ۶ در باجه‌ها قرار دارند. در این صورت زوج‌های $\{۱, ۷\}$ و $\{۴, ۷\}$ و $\{۱, ۵\}$ نمی‌توانند همزمان باشند. زوج‌های دیگر را نیز به راحتی می‌توان مشاهده کرد که می‌توانند همزمان باشند. □

۱۷ کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار ممکن برای تعداد زوج های همزمان به ترتیب چند است؟

۱) ۱۷, ۱۷ ۲) ۲۴, ۱۰ ۳) ۲۴, ۱۹ ۴) ۲۴, ۱۷ ۵) ۱۹, ۱۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

با توجه به شرایطی که در مسئله گفته شده، هر نفر که وارد یک باجه می‌شود، دو زوج همزمان ایجاد می‌شوند و در ابتدا نیز ۱, ۲, ۳ سه زوج همزمان تشکیل می‌دهند. پس مستقل از ترتیب ورود و خروج افراد تعداد زوج‌های همزمان برابر است با : $۳ + ۷ \times ۲ = ۱۷$

□

۱۸ کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار ممکن برای مجموع وزن زوج‌های همزمان به ترتیب چند است؟

۱) ۸۱,۲۵ ۲) ۸۰,۲۵ ۳) ۸۱,۲۳ ۴) ۸۰,۲۴ ۵) ۸۱,۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

کمترین مجموع زمانی رخ می‌دهد که در آن ترتیب خروج افراد از باجه‌ها صعودی باشد، در این صورت با اضافه شدن هر نفر سه واحد به مجموع اضافه می‌شود و در ابتدا نیز که ۱,۲,۳ در باجه‌ها هستند، مجموع برابر ۴ است. پس در کل کمترین مجموع برابر است با : $۴ + ۷ \times ۳ = ۲۵$.
بیشترین مجموع نیز در حالتی رخ می‌دهد که در هر مرحله فردی از باجه خارج شود که بزرگ ترین شماره را دارد. در این صورت هنگامی که فرد iام وارد می‌شود، مقدار $i - ۱ + i - ۲$ به مجموع اضافه می‌شود، در این صورت مجموع کلی برابر می‌شود با :$\sum_{i=۱}^{۹} i + \sum_{j=۱}^{۸} j = ۴۵ + ۳۶ = ۸۱$

□

۱۹ اگر $\{۲,۵\}$ و $\{۴,۸\}$ و $\{۶,۹\}$ سه زوج همزمان باشند، این افراد به چند ترتیب مختلف می‌توانند در باجه‌ها قرار گیرند؟ (دو ترتیب مختلف محسوب می‌شوند، اگر و فقط اگر زوجی وجود داشته باشد که در یکی همزمان باشند و در دیگری همزمان نباشند.)

۱) ۱۶ ۲) ۱۴۴ ۳) ۷۲ ۴) ۲۴ ۵) صفر

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

زوج‌های $\{۱,۳\}$، $\{۲,۵\}$ و $\{۴,۸\}$ را در نظر بگیرید. هر کدام از این زوج‌ها برای ترتیب خروج از باجه ۲ حالت دارند که این دو حالات تاثیری بر ترتیب ورود و خروج بقیه افراد ندارند. از طرفی هنگامی که نفر دهم می‌خواهد وارد شود، ۳ حالت برای نفری که از باجه خارج می‌شود می‌توان در نظر گرفت. پس در کل $۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ برای ترتیب قرار گرفتن افراد در باجه‌ها داریم.

□

جدولی $n \times n$ داریم (طول ضلع n است) که هر واحد ضلع آن یک چوب‌کبریت است. ما هر بار زیرمجموعه‌ای از چوب‌کبریت‌ها (این زیرمجموعه می‌تواند تهی باشد) را برمی‌داریم و سپس تعداد مسیرهای ممکن از گوشه‌ی پایین چپ به بالا راست (فقط با حرکات راست و یا بالا) را می‌شماریم. پس از این‌کار چوب‌کبریت‌ها را به حالت اولیه برمی‌گردانیم و دوباره زیرمجموعه‌ای جدید را حذف می‌کنیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۰ فرض کنید $n = ۳$ است. به ازای تمام زیرمجموعه‌های ممکن از چوب‌کبریت‌ها حرکت بالا را انجام داده و عدد نهایی را روی تخته نوشته‌ایم. در نهایت روی تخته چند عدد مختلف وجود دارد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱ ۵) ۱۶

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

تمامی اعداد ۰ تا ۲۰ را می‌توان تولید نمود.

□

۲۱ فرض کنید $n = ۴$ است. تنها زیرمجموعه‌هایی از چوب کبریت‌ها را در نظر بگیرید که تعداد مسیرهای معتبرشان برابر ۶۰ است. این بار به ازای هر کدام از این زیرمجموعه‌ها تعداد چوب‌کبریت‌های حذف‌شده را روی تخته می‌نویسیم. کمینه و بیشینه عددی که روی تخته نوشته شده چند است؟

۱) ۱۰, ۲ ۲) ۸, ۲ ۳) هیچ حالتی ۶۰ مسیر معتبر ندارد. ۴) ۱۰, ۱ ۵) ۸, ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

گزینه‌ی ۱ درست است. با حذف یکی از چوب‌کبریت‌ها ۱۰ مسیر حذف می‌شود و می‌توان به ۶۰ مسیر معتبر رسید. از طرفی چوب‌کبریت‌های کناری که مجموعا ۱۲ تا هستند ۱۶ مسیر را حذف می‌کنند و بقیه چوب‌کبریت‌ها حداقل ۱۰ مسیر را حذف خواهند کرد (که مقرون به صرفه نیست آنها را حذف کنیم). می‌توان با حذف ۸ چوب‌کبریت از آنها ۱۰ مسیر را حذف نمود. از طرفی با اضافه کردن ۴ چوب‌کبریت از بین این ۱۲ تا حداکثر ۶ مسیر اضافه می‌شود. پس بیشترین تعداد نیز ۸ عدد است. □

۲۲ فرض کنید $n = ۵$ است. به ازای چند تا از اعداد مجموعه‌ی $\{۳۲, ۶۴, ۱۲۸, ۲۴۳, ۲۴۹\}$ می‌توان چوب‌کبریت‌ها را به‌شکلی حذف کرد که تعداد مسیرهای معتبر برابر با آن عدد شود؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴ ۵) ۱

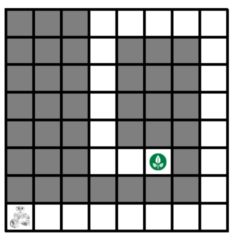
پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

تنها عدد ۲۴۹ را نمی‌توان ساخت و بقیه اعداد قابل تولید هستند. برای هر یک مثالی وجود دارد که آن را به دست می‌آورد. □

جدولی $n \times n$ $(n > ۱)$ داریم که یک ربات در گوشه‌ی پایین چپ آن قرار دارد. این ربات یک برنامه دریافت کرده و آن را دستور به دستور اجرا می‌کند و هر بار پس از انجام آخرین دستور دوباره به دستور اول بازمی‌گردد و همین کار را تکرار می‌کند. دستورات این برنامه می‌تواند شامل چهار حرکت (بالا، پایین، چپ و راست) باشد که روبات در صورت امکان آن‌ها را انجام می‌دهد و در غیر این صورت (در صورتی که از جدول خارج شود و یا به خانه‌ی غیرمجاز هدایت شود) به سراغ دستور بعدی می‌رود. فرض کنید طول یک برنامه تعداد دستورهای آن است.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۳ جدول زیر را در نظر بگیرید. خانه‌های خاکستری غیرمجاز هستند. طول کوتاه‌ترین برنامه‌ای که ربات با اجرای آن حداقل یک بار به خانه‌ی هدف (انتهای مسیر سفید) می‌رسد، چند است؟



۱) ۱۸ ۲) ۲۵ ۳) ۲۳ ۴) ۲۰ ۵) ۲۱

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

در هر بار اجرای برنامه (در حالت کمینه) مجموعا حرکتی به سمت راست و بالا داریم. در هنگام رسیدن به خانه‌ی بالا راست، باید حداقل ۴ حرکت به چپ و همچنین ۵ حرکت به پایین داشته باشیم وگرنه در یک بار اجرای برنامه در همان نقطه خواهیم ماند. پس حداقل نیاز به ۲۰ حرکت داریم. برنامه‌ی زیر با طول ۲۰ خط ربات را به هدف می‌رساند: ۵ راست، ۶ بالا، ۴ چپ، ۵ پایین. □

۲۴ فرض کنید تمام خانه‌های جدول مجاز هستند. می‌خواهیم برنامه‌ای به ربات دهیم تا تمامی خانه‌های جدول را حداقل یک بار بپیماید (مهم نیست ربات در انتها در کدام خانه است). طول کوتاه‌ترین برنامه با این هدف برای $n = 10$ چند است؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۱۰ ۵) ۱۵

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

گزینه‌ی ۵ درست است. به طور کلی برای جدول $n \times n$، $2n - 1$ حرکت کمترین تعداد حرکت لازم است. در صورتی که در یکی از جهت‌ها $n - 1$ حرکت نداشته باشیم، پس از اجرای یک بار برنامه هر دو گوشه‌ی جدول خالی هستند و ما جابجا شده‌ایم. بدین ترتیب با توجه به اینکه در نهایت به کدام سمت رفته باشیم یکی از گوشه‌ها خالی خواهد ماند. در نتیجه باید در یکی از جهت‌ها $n - 1$ حرکت داشته باشیم و اگر در جهت عکس آن کمتر حرکت داشته باشیم همچنان یک سطر یا ستون خالی خواهد ماند. پس در کل $2n - 2$ حرکت خواهیم داشت که برای اینکه بتوانیم تمامی جدول را پیمایش کنیم باید در یک جهت دیگر حداقل یک حرکت داشته باشیم که برابر $2n - 1$ می‌شود. با روش زیر نیز می‌توان با این تعداد حرکت به جواب رسید:
$n - 1$ راست، $n - 1$ چپ، ۱ بالا. □

۲۵ خانه‌ای را در جدول خوب می‌نامیم که اگر تنها آن خانه غیرمجاز باشد، برنامه‌ای به طول حداکثر $3n$ وجود داشته باشد که تمام خانه‌های مجاز را بپیماید. برای $n = 7$ چند خانه‌ی خوب در جدول وجود دارد؟ (خانه‌ی محل استقرار ربات یعنی خانه‌ی گوشه‌ی چپ پایین خوب نیست.)

۱) ۴۸ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۴۳ ۵) ۱۱

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

به طور کلی برای هر جدولی، تمامی خانه‌ها خوب هستند. فرض کنید خانه‌ای که می‌خواهیم ثابت کنیم خوب است، در ستون k ام جدول قرار داشته‌باشد. در این صورت برنامه‌ی زیر تمام خانه‌ها به جز این خانه را طی می‌کند:.
k راست، ۱ بالا، $n - k$ راست، ۱ پایین، $n - k$ چپ، ۱ بالا، k چپ. □

بازی رنگی

دیروز ببعی و گاوی پس از چریدن طولانی خسته شدند و تصمیم گرفتند یک بازی انجام دهند. در این بازی ۳ دایره وجود دارد که هر یک به $3n$ قطاع برابر تقسیم شده‌اند. ابتدا ببعی هر یک از قطاع‌های دایره‌ی شماره‌ی ۱ را با یکی از رنگ‌های زرد، نارنجی و بنفش رنگ می‌کند. گاوی پس از دیدن رنگ‌آمیزی ببعی، هر یک از قطاع‌های دایره‌ی شماره‌ی ۲ را با یکی از همین سه‌رنگ، رنگ می‌کند. ببعی نیز پس از دیدن رنگ‌آمیزی گاوی، دایره‌ی شماره‌ی ۲ را روی دایره‌ی شماره‌ی ۱ می‌گذارد و آن را به هر مقداری که می‌خواهد، می‌چرخاند به طوری‌که هر قطاع آن بر قطاعی از دایره‌ی شماره‌ی ۱ منطبق شود. حال دایره‌ی شماره‌ی ۳ روی دو دایره‌ی دیگر گذاشته می‌شود، طوری که هر قطاع آن بر قطاعی از دایره‌های زیرین منطبق شود. پس از این کار هر قطاع دایره‌ی شماره‌ی ۳ به صورت زیر رنگ می‌شود:

- اگر رنگ دو قطاع زیرین دایره‌های شماره‌ی ۱ و ۲ یکسان بود، این قطاع را نیز به همان رنگ درمی‌آوریم.
- اگر رنگ دو قطاع زیرین یکسان نبود، رنگ این قطاع را به رنگ سوم (رنگی که در دو قطاع زیرین نیامده است) درمی‌آوریم.

گاوی اصلیتی هلندی دارد و به همین دلیل به رنگ نارنجی بسیار علاقه‌مند است و می‌خواهد تا حد ممکن تعداد قطاع‌های نارنجی دایره‌ی شماره‌ی ۳ زیاد شود؛ در حالی که ببعی می‌خواهد از این کار جلوگیری کند.

الف) ثابت کنید گاوی می‌تواند طوری بازی کند که دایره‌ی شماره‌ی ۳ در انتها حداقل n قطاع نارنجی داشته‌باشد.(۲۰ نمره)

ب) ثابت کنید ببعی می‌تواند طوری بازی کند که دایره‌ی شماره‌ی ۳ در انتها حداکثر n قطاع نارنجی داشته‌باشد.(۲۰ نمره)

وزنه‌ها و ماشین جادویی

ببعی $3n-2$ وزنه‌ی یک گرمی و دو وزنه‌ی نیم گرمی دارد که همگی از نظر ظاهری کاملا شبیه به‌هم هستند $(n>2)$. وزنه‌ها با شماره‌های ۱ تا $3n$ شماره‌گذاری شده‌اند، ولی وزن هیچ وزنه‌ای را نمی‌دانیم. گاوی یک ماشین جادویی دارد. در هربار استفاده از ماشین جادویی، گاوی می‌تواند ۲ وزنه را روی ماشین جادویی‌اش قرار دهد و ماشین جادویی به او می‌گوید که آیا مجموع وزن این دو وزنه، عددی طبیعی است یا خیر.

الف) ثابت کنید گاوی همواره می‌تواند با حداکثر $2n-1$ بار استفاده از ماشین جادویی خود یک وزنه‌ی نیم گرمی را پیدا کند. (۲۰ نمره)

ب) ثابت کنید گاوی نمی‌تواند روشی ارائه دهد که با کمتر از $2n-1$ بار استفاده از ماشین جادویی تضمین کند که یک وزنه‌ی نیم‌گرمی را می‌تواند پیدا کند. (۳۰ نمره)

گاوی خسیس

کشوری که گاوی و ببعی در آن زندگی می‌کنند، دارای n شهر می‌باشد $(n > 2)$. بین برخی از شهرهای کشور، جاده‌ی دوطرفه کشیده شده است. هم‌چنین می‌دانیم بین هیچ دو شهری بیش از یک جاده وجود ندارد. از آن‌جایی که مردم این کشور صمیمی هستند، می‌دانیم در هر شهری که باشیم، با استفاده از جاده‌های این کشور می‌توانیم به هر شهر دیگر که بخواهیم، برسیم. ارزش یک شهر برابر است با تعداد شهرهایی که به طور مستقیم با یک جاده به آن شهر متصل هستند. ببعی در یکی از شهرهای این کشور قرار دارد. گاوی که در شهر دیگری است، می‌خواهد به دیدن ببعی برود. می‌دانیم اگر گاوی در مسیر رفتن به شهر ببعی، از شهری با ارزش k عبور کند، باید k تومان عوارض بدهد (شهر آغاز و پایان مسیر نیز مشمول عوارض هستند). از آن جایی که گاوی دوست ندارد زیاد پول خرج کند، مسیری را انتخاب می‌کند که کمترین هزینه را داشته باشد.

الف) فرض کنید محل گاوی و ببعی مشخص باشد. ثابت کنید به ازای هر n $(n > 2)$، می‌توان جاده‌های بین شهری را طوری قرار داد که گاوی مجبور باشد دست کم $3n - 5$ تومان به دولت عوارض بدهد. (۱۵ نمره)

ب) ثابت کنید به ازای هر n $(n > 2)$، هر طوری جاده‌ها را قرار دهیم و ببعی و گاوی در هر دو شهری باشند، گاوی با حداکثر $3n - 5$ تومان می‌تواند به هدفش برسد. (۳۵ نمره)

انتقال مهره‌های گاوی

نقاط صحیح صفحه مختصات (نقاطی که طول و عرض آن‌ها عددی صحیح است) را در نظر بگیرید. ببعی n نقطه از این نقاط را به رنگ آبی درآورده است و n مهره نیز در n نقطه‌ی دیگر از صفحه قرار داده است (در هر نقطه یک مهره). می‌دانیم نقاط آبی و مهره‌ها ویژگی‌های زیر را دارند:

- در هیچ نقطه‌ی آبی، مهره‌ای قرار ندارد.
- هیچ دو نقطه‌ی آبی در یک سطر نیستند.

ببعی و گاوی تصمیم می‌گیرند تا مهره‌ها را به نقاط آبی برسانند (هر مهره را در یک نقطه‌ی آبی قرار دهند). هر دو برای این کار یک ماشین مخصوص به خود دارند. ماشین گاوی در هر مرحله می‌تواند تعدادی از مهره‌ها (و یا هیچ مهره‌ای) را ثابت نگه دارد و بقیه را به طور همزمان یک واحد به بالا، چپ، راست یا پایین حرکت دهد. توجه کنید که جهت حرکت مهره‌های مختلف در یک مرحله می‌تواند با هم یکسان نباشد و هم‌چنین پس از انجام یک مرحله ممکن است در یک خانه بیش از یک مهره قرار گیرد.
ماشین ببعی نیز مانند ماشین گاوی عمل می‌کند با این تفاوت که ماشین ببعی در یک مرحله نمی‌تواند بیش از یک مهره را در یک نقطه قرار دهد.

فرض کنید کمترین تعداد مراحل لازم برای رساندن مهره‌ها به نقاط آبی به طوری که در هر نقطه‌ی آبی یک مهره قرار گیرد، با استفاده از ماشین گاوی t_1 و با استفاده از ماشین ببعی t_2 باشد. ثابت کنید $t_1 = t_2$. (۶۰ نمره)

توجه: شما با اثبات $t_2 \leq 2t_1$ نیمی از نمره را می‌توانید بگیرید.

بازی رنگی

الف) پس از رنگ‌آمیزی دایره‌ی شماره ۱ توسط ببعی، طبق اصل لانه کبوتری رنگی وجود دارد که دست کم n قطاع، به آن رنگ در آمده باشد. اگر این رنگ، نارنجی، زرد یا بنفش باشد، به ترتیب کافی است گاوی تمام قطاع‌های دایره‌ی شماره ۲ را به رنگ نارنجی، بنفش یا زرد در بیاورد. با این کار در دایره‌ی شماره ۳ دست کم n قطاع نارنجی تولید خواهد شد.

ب) در ابتدا ببعی برای هر رنگ، n قطاع از دایره‌ی شماره ۱ انتخاب می‌کند و آن‌ها را به آن رنگ در می‌آورد. فرض کنید گاوی در رنگ‌آمیزی خود، x قطاع به رنگ زرد، y قطاع به رنگ بنفش و $n-x-y$ قطاع را به رنگ نارنجی در آورده باشد. $3n$ انتخاب ممکن برای چرخش دایره‌ی شماره ۲ برای ببعی وجود دارد. تعداد قطاع‌های نارنجی‌ای که در مجموع این $3n$ حالت در دایره‌ی شماره ۳ پدید خواهند آمد برابر است با:

$$(x \times n) + (y \times n) + ((n-x-y) \times n) = 3 \times n^2$$

پس طبق اصل لانه‌ی کبوتری، انتخابی برای ببعی وجود دارد که در آن حالت دست کم

$$\lceil \frac{3n^2}{3n} \rceil = n$$

قطاع از دایره‌ی شماره ۳ به رنگ نارنجی در بیاید.

وزنه‌ها و ماشین جادویی

به وضوح هنگام استفاده از ماشین اگر مجموع وزن دو سکه طبیعی بود، یعنی دو سکه هم‌نوع هستند و در غیر این صورت یعنی هم‌نوع نیستند. پس می‌توان عمل استفاده از ماشین را یک عمل مقایسه نامید که در پایان آن می‌توان فهمید دو سکه‌ی گذاشته شده، هم‌نوع هستند یا خیر.

الف) با استقرا روی n ثابت می‌کنیم گاوی با حداکثر $2n-1$ بار استفاده از ماشین جادویی می‌تواند یک سکه‌ی نیم-گرمی از بین $3n$ سکه، پیدا کند.
برای پایه، $n=3$ را در نظر می‌گیریم. با کمی حالت‌بندی می‌توان نشان داد با حداکثر ۵ حرکت می‌توان سکه‌ای نیم-گرمی را مشخص کرد.
حال فرض می‌کنیم حکم برای $n=k$ برقرار باشد؛ ثابت می‌کنیم حکم برای $n=k+1$ نیز برقرار است. برای اثبات حکم، $3k+3$ سکه را در نظر می‌گیریم. ۲ سکه را با هم مقایسه می‌کنیم. دو حالت می‌توان متصور بود:

– اگر متفاوت بودند، کافی است یکی از آن‌ها (x) را برداشته و با ۳ سکه‌ی دیگر مقایسه کنیم. اگر در این ۳ مقایسه، دست کم ۲ تا از آن‌ها به تساوی کشید، یعنی x سکه‌ای ۱-گرمی است

و سکه‌ی مقابل آن در مقایسه‌ی نخست، نیم-گرمی است؛ در غیر این صورت x سکه‌ای نیم-گرمی است.

- اگر برابر بودند، یکی از آن‌ها را برداشته و با سکه‌ای دیگر مقایسه می‌کنیم. اگر باز هم برابر بودند، یعنی این ۳ سکه، ۱-گرمی هستند و برای بقیه‌ی سکه‌ها، طبق فرض استقرا می‌توان کار را انجام داد؛ اما اگر این ۲ برابر نبودند، کافی است باز هم ۳ سکه‌ی دل‌خواه دیگر انتخاب کنیم و مانند حالت قبل، کار را انجام دهیم.

ب) ابتدا ثابت می‌کنیم هر گراف ساده‌ی n رأسی با k مولفه، دست کم $n-k$ یال دارد. ابتدا یال‌ها را در نظر نمی‌گیریم و یکی پس از دیگری، یال‌ها را می‌گذاریم. هر یالی که می‌گذاریم، حداکثر یکی از تعداد مولفه‌ها کم می‌کند. پس گراف n رأسی با k مولفه، دست کم $n-k$ یال دارد.
فرض کنید گاوی با تعدادی مقایسه، سکه‌ای نیم-گرمی را پیدا کرده باشد. گرافی ساده با $۳n$ رأس می‌سازیم که هر رأس آن یک سکه باشد و بین دو رأس، یال می‌کشیم اگر و تنها اگر گاوی بین سکه‌های متناظر آن‌ها، مقایسه انجام داده باشد.
ابتدا ثابت می‌کنیم این گراف حداکثر ۲ مولفه‌ی ۱ رأسی دارد. فرض کنیم دست کم ۳ مولفه‌ی ۱ رأسی داشته باشد. در این صورت اگر سکه‌های نیم-گرمی در بین این ۳ رأس باشند، نمی‌توان با اطمینان یک سکه‌ی نیم-گرمی را تشخیص داد.
حال ثابت می‌کنیم این گراف حداکثر ۱ مولفه‌ی ۲ رأسی دارد. مانند قسمت قبل فرض کنید دست کم ۲ مولفه‌ی ۲ رأسی داشته باشیم. اگر سکه‌های نیم-گرمی در بین این ۴ رأس باشند، نمی‌توان با اطمینان یک سکه‌ی نیم-گرمی را تشخیص داد.
حال ثابت می‌کنیم امکان ندارد هم مولفه‌ی ۲ رأسی داشته باشیم و هم ۲ مولفه‌ی تک رأسی وجود داشته باشد. فرض کنید هم مولفه‌ی ۲ رأسی داشته باشیم و هم ۲ مولفه‌ی تک رأسی وجود داشته باشد. در این صورت اگر سکه‌های نیم-گرمی در بین این ۴ سکه باشند، باز هم با اطمینان نمی‌توان سکه‌ای نیم-گرمی را پیدا کرد.
حال اگر در گراف مورد نظر، ۲ مولفه‌ی تک رأسی داشته باشیم، گراف ما حداکثر

$$\lfloor\frac{۳n-۲}{۳}\rfloor+۲=n+۱$$

مولفه دارد؛ در غیر این صورت نیز گراف ما حداکثر

$$\lfloor\frac{۳n-۳}{۳}\rfloor+۱+۱=n+۱$$

مولفه خواهد داشت. پس گراف ما دست کم $۳n-(n+۱)=۲n-۱$ یال لازم دارد که حکم مسئله را ثابت می‌کند.

گاوی خسیس

کشور مورد نظر را به گراف مدل کنید. به جای هر شهر یک راس و به جای هر جاده یک یال در نظر بگیرید. ارزش یک شهر برابر با درجه راس متناظر آن است. هزینه یک مسیر نیز برابر است با مجموع درجات راس های داخل مسیر.

الف) یک گراف کامل را در نظر بگیرید. یال بین دو راس a و b را از این گراف جدا کنید. حال ببعی را در راس a و گاوی را در راس b قرار دهید. اکنون هزینه سفر برابر است با:

$$n - 2 + n - 2 + n - 1 = 3n - 5$$

.

ب) فرض کنید ببعی در راس a و گاوی در راس b است. کوتاه‌ترین مسیر را از a به b در نظر بگیرید.به جز یال‌های خود مسیر بین هیچ دو راسی داخل مسیر یال نخواهیم داشت چون اگر یال باشد مسیر کوتاه تر می‌شود. هر راس خارج از مسیر نیز حداکثر سه یال به راس های داخل مسیر دارد، چون در غیر این صورت دوباره مسیر کوتاه‌تری می‌توانستیم پیدا کنیم. حال مجموع درجات راس‌های داخل مسیر را می‌شماریم. به ازای هر یال داخل مسیر به مجموع درجات دو واحد اضافه می‌شود. به ازای هر یال از یک راس خارج از مسیر به یک راس داخل مسیر هم یک واحد به مجموع درجات اضافه می‌شود. اگر تعداد راس‌های درون مسیر k باشد، هزینه کل ما حداکثر برابر با:

$$2 * (k - 1) + 3 * (n - k) = 3n - k - 2$$

اگر $k > 2$ باشد که سوال حل است. در غیر این صورت, مسیر ما فقط متشکل از دو راس بوده است که هر کدام حداکثر می‌توانستند درجه‌ای حداکثر برابر با $n - 1$ داشته باشند. پس در آن صورت هزینه کل ما برابر با $2n - 2$ می‌شد که با توجه به اینکه $n > 2$ است، $2n - 2 \geq 3n - 5$ است.

انتقال مهره‌های گاوی

جواب ماشین گاوی را در نظر بگیرید. چون در ماشین او در یک لحظه می‌تواند در یک خانه بیش از یک مهره باشد، پس می‌توان فرض کرد که اگر مهره‌ای با مختصات (x_1, y_1) را بخواهیم به نقطه ای با مختصات (x_2, y_2) انتقال دهیم، می‌توانیم ابتدا این مهره را به نقطه‌ی (x_1, y_2) برده و سپس آن را به خانه‌ی (x_2, y_2) ببریم. به حرکات موجود در انتقال اول، حرکت عمودی و به حرکات موجود در انتقال دوم حرکت افقی می‌گوییم. به عبارتی ابتدا مهره را با تعدادی حرکت عمودی به سطر مورد نظر انتقال می‌دهیم و سپس با تعدادی حرکت افقی به ستون مورد نظر می‌بریم. همچنین به هر مهره زوج مرتب (c, d) را نسبت دهید که در آن c به معنای تعداد حرکت‌های عمودی لازم برای این نقطه و d برابر با تعداد حرکت های افقی لازم به ازای این نقطه است.

لم ۱

به ازای یک بعد سوال درست است. فرض کنید دو مهره در مسیر حرکت خود با هم برخورد داشته باشند

(مثلا مهره‌های a و b که a می‌خواهد به خانه‌ی A برود و b به خانه‌ی B). مقصد این دو مهره را با هم عوض کنید (a به B برود و b به A برود). با این کار حداقل یک واحد از تعداد برخوردها کاسته می‌شود. در ضمن می‌دانیم با این کار جواب ما از حالت قبلی‌اش بیش‌تر نمی‌شود. این کار را آن‌قدر تکرار کنید که دیگر برخوردی نداشته باشیم. پس جواب ماشین ببعی و گاوی به ازای یک بعد برابر است.

حل نصف نمره

به ازای مهره iام ($1 \leq i \leq n$) e_i را برابر $\max(c_i, d_i)$ تعریف کنید. حال فرض کنید $F = \max_{i=1}^{n}(e_i)$. واضح است که $t_1 \geq F$ است. حال جواب ماشین گاوی را در نظر بگیرید. طبق لم ۱، ماشین گاوی می‌تواند به ما جوابی بدهد که هیچ برخوردی بین دو مهره که در حال انجام حرکات عمودی خود هستند رخ ندهد. حال هر مهره‌ای، حرکت عمودی خود را انجام دهد و صبر کند تا تمامی مهره‌ها حرکت‌های عمودی خود را انجام دهند. سپس هر مهره‌ای حرکت افقی خود را انجام دهد. اکنون هرکس به خانه‌ی مورد نظر خود رسیده است. حال خواهیم داشت

$$t_2 \leq max(c_i) + max(d_i) \leq F + F \leq 2t_1$$

حل کامل

از بین جواب‌های موجود برای ماشین گاوی جوابی را در نظر بگیرید که $\sum_{i=1}^{n} c_i^2$ در آن کمینه شود. می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر همچین جوابی را در نظر بگیریم، در هیچ لحظه‌ای دو مهره در یک خانه نخواهند بود. فرض کنید دو مهره در یک ستون باشند و هنگامی که حرکت عمودی انجام می‌دهند به یک نقطه برسند. فرض کنید مهره‌ی a بخواهد به نقطه‌ی A انتقال یابد و مهره‌ی b نیز به خانه‌ی B انتقال یابد. حال مهره‌ی a را به نقطه‌ی B انتقال دهید و مهره‌ی b را به خانه‌ی A. c_a و c_b هر دو کم‌تر شده است چون هیچ دو نقطه‌ی آبی‌ای در یک سطر نیستند. پس مجموع مورد نظر ما کم‌تر شده است. حال فرض کنید دو مهره از دو ستون مختلف به هم برخورد کنند. در این صورت یکی از آن‌ها در حال انجام حرکت عمودی خود بوده است و دیگری در حال انجام حرکت افقی خود، زیرا اولا هیچ دو نقطه آبی‌ای در سطر یکسانی نیستند، ثانیا این دو مهره در یک ستون نبودند و قرار بود هر مهره‌ای که می‌خواهد به مقصد خود برود، اول حرکات عمودی‌اش را انجام دهد، سپس حرکات افقی‌اش را. اکنون مقصد این دو مهره را با هم عوض کنید. از آن جایی که این دو مهره در یک زمان در یک نقطه بوده‌اند و همچنین یکی از آن‌ها در حال حرکت افقی بوده و دیگری در حال حرکت عمودی، پس جواب ما بیشتر نشده است. همچنین اثبات می‌کنیم که مجموع مورد نظر ما کمتر شده است. اگر جهت حرکت‌های این دو مهره با هم متفاوت باشد که از c هر دوی آن‌ها کاسته شده است پس مجموع نیز کم‌تر شده است (دقت کنید نقطه‌های نهایی در یک سطر نیستند). حال اگر جهت حرکت این دو مهره یکسان باشد، بدون این که از کلیت سوال کاسته شود فرض کنید که جهت حرکت هر دوی آن‌ها به بالا بوده باشد. حال این مهره‌ها را با ۱ و ۲ نشان دهید. همچنین فرض کنید:

$$c_1 < c_2 \Rightarrow y_1 > y_2$$

$$p = c_2 + y_2 - (c_1 + y_1)$$

حال قرار است مهره ۱، $c_1 + p$ حرکت عمودی انجام دهد و مهره ۲، $c_2 - p$ حرکت عمودی انجام دهد. مجموع ما به اندازه‌ی $2p(c_1 + p - c_2)$ اضافه می‌شود. داریم:

$$2p > 0$$
$$c_1 + p - c_2 = y_2 - y_1 < 0$$

پس $2p(c_1 + p - c_2) < 0$ است و مجموع ما کمتر شده است. پس اگر مجموع ما کمینه شود، ماشین به ما جوابی را می‌دهد که در هیچ لحظه‌ای دو مهره در یک نقطه نباشند که این همان خواسته‌ی ماشین ببعی است.