- سؤال‌های **۱۶ تا ۲۵** در دسته‌های چندسؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ در جزیره‌ای ۱۰۰ نفر زندگی می‌کنند. هر نفر یا سفیدپوست است، یا سیاه‌پوست و یا سرخ‌پوست (دقیقن یکی از این سه حالت). نوع یک جزیره به شکل زیر تعیین می‌شود:

- اگر حداقل ۹۰ سفیدپوست در جزیره باشند، نوع جزیره «سفید» است.
- اگر حداقل ۸۰ سیاه‌پوست در جزیره باشند، نوع جزیره «سیاه» است.
- اگر حداقل ۷۰ سرخ‌پوست در جزیره باشند، نوع جزیره «سرخ» است.

می‌دانیم جزیره دقیقن یکی از سه نوع سفید، سیاه و سرخ است. ما به جزیره رفته‌ایم. حداقل چند نفر از افراد جزیره را باید ببینیم تا بتوانیم نوع جزیره را تشخیص دهیم؟

۱) ۵۱ ۲) ۲۱ ۳) ۶۱ ۴) ۸۱ ۵) ۴۱

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

اگر تنها ۵۰ نفر را ببینیم و آنها ۳۰ نفر سیاه‌پوست و ۲۰ سرخ‌پوست باشند هنوز نوع جزیره مشخص نیست (فقط مشخص است که جزیره، سفید نیست.
اگر حداقل ۵۱ نفر را ببینیم، در صورتی که بیش از ۲۰ نفر سرخ‌پوست باشند جزیره حتما سرخ است. در غیر این صورت حداقل ۳۱ نفر سفیدپوست یا سیاه‌پوست هستند و در نتیجه جزیره سرخ نیست. در این بین اگر بیش از ۱۰ نفر سیاه‌پوست باشند جزیره سیاه خواهد بود و در غیر این صورت جزیره سفید است. □

۲ یک جایگشت نزولی از اعداد ۱ تا n داریم. در هر گام دو عدد متمایز به صورت تصادفی انتخاب شده و به احتمال $\frac{1}{2}$ جای آنها عوض می‌شود. اگر پس از چند گام این جایگشت مرتّب شود (یعنی اعداد به ترتیب صعودی در جایگشت قرار بگیرند)، علیرضا می‌برد و در غیر این صورت سپهر برنده‌ی بازی است (تعداد گام‌ها محدودیتی ندارد). به چه احتمالی علیرضا برنده می‌شود؟

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{n}$ ۴) $\frac{1}{n!}$ ۵) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

به ازای یک جایگشت اولیه، یک دنباله از جابجایی‌ها که جایگشت را مرتب می‌کند در نظر بگیرید.
احتمال وقوع این دنباله بیشتر از

$$(1/N^2 \times 1/2)^{(N^2)}$$

است. پس احتمال اینکه در یک

$$N^2$$

متوالی این جایگشت مرتّب نشود حداکثر برابر است با

$$1 - (1/N^2 \times 1/2)^{(N^2)}$$

پس احتمال اینکه پس از t مرحله ی

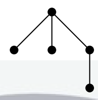
$$N^2$$

تایی از جابجایی ها مرتب نشده باشد حداکثر برابر است با:

$$(1-(1/N^2 \times 1/2)^{(N^2)})^t$$

که با میل کردن t به بینهایت این مقدار نیز به صفر میل می‌کند. پس احتمال مرتب‌شدن جایگشت در نهایت برابر ۱ است و علیرضا به احتمال ۱ برنده می‌شود. □

۳ یک گراف ساده‌ی ۱۰۰ رأسی داریم که زیرگراف به شکل زیر ندارد:



توجه کنید منظور از زیرگراف لزومن القایی نیست. حداکثر تعداد یال‌های این گراف چیست؟ (زیرگراف القایی زیرگرافی است که انتخاب رأس‌ها در آن اختیاری است ولی بین دو رأس از زیرگراف یال وجود دارد اگر و تنها اگر در گراف اصلی بین آنها یال وجود داشته باشد)

۱) ۱۵۰　　۲) ۱۰۰　　۳) ۱۸۰　　۴) ۲۰۰　　۵) ۱۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

به نسبت تعداد یال‌ها به تعداد رأس‌ها در یک مؤلفه دقت می‌کنیم:

- ابتدا فرض کنید u یک رأس با درجه‌ی حداقل ۴ باشد. همسایه‌های u نمی‌توانند به کسی جز u وصل باشند. پس در مؤلفه‌ی شامل رأس u نسبت تعداد یال‌ها به تعداد رأس‌ها کم‌تر از ۱ است.
- فرض کنید u یک رأس با درجه‌ی ۳ باشد. همسایه‌های u نمی‌توانند به کسی جز u و همسایه‌های‌ش وصل شوند. پس مؤلفه‌ی شامل u حداکثر ۴ رأس و ۶ یال دارد و نسبت تعداد یال‌ها به تعداد رأس‌ها در آن حداکثر $\frac{3}{2}$ است.
- حال مؤلفه‌ای در نظر بگیرید که درجه‌ی رئوس آن حداکثر ۲ است. چنین مؤلفه‌ای باید یک دور یا یک مسیر باشد که نسبت تعداد یال‌ها به تعداد رأس‌ها در آن حداکثر ۱ است.

پس با توجه به حالات بالا نسبت تعداد یال‌ها به تعداد رأس‌های گراف حداکثر $\frac{3}{2}$ است و پاسخ حداکثر برابر ۱۵۰ است. از طرفی گرافی متشکل از ۲۵ نمونه‌ی K_4 در نظر بگیرید. این گراف خاصیت مسئله را دارد و ۱۰۰ـ رأسی و ۱۵۰ یالی است. پس پاسخ برابر ۱۵۰ است. □

۴ به جایگشت $p_1, p_2, \dots, p_n$ از اعداد ۱ تا n زیبا گوییم هرگاه به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n-1$ داشته باشیم: $p_i \leqslant p_{i+1} + 3$. به ازای $n = 9$، باقی‌مانده‌ی تقسیم تعداد جایگشت‌های زیبا بر ۵ چند است؟

۱) ۳　　۲) ۰　　۳) ۱　　۴) ۲　　۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

به ازای $n = 4$ تمام ۲۴ جایگشت ممکن زیبا هستند. حال به ازای $n \geqslant 5$ با استفاده از تناظر، از هر جایگشت زیبای $n-1$ تایی، ۴ جایگشت زیبا و متمایز n تایی می سازیم. کافی است تا عدد n را در جایگشت دلخواهی به طول $n-1$ درج کنیم. عدد n میتواند در انتهای جایگشت مذکور و یا پیش از اعداد $n-1$، $n-2$ و یا $n-3$ قرار داده شود پس ۴ مکان برای درج آن داریم. از طرفی به ازای هر جایگشت دلخواه $n-1$ تایی، با حذف n از

دقیقا ۴ جایگشت n تایی به آن جایگشت میرسیم. پس اگر $f(n)$ را تعداد جایگشت های زیبای n تایی تعریف کنیم، داریم:

$$f(۴) = ۲۴$$

و برای $n \geqslant ۵$:

$$f(n) = ۴f(n-۱)$$

پس $f(۹)$ برابر $۴^۵ \times ۲۴$ است که به پیمانه ۵ برابر ۱ می شود.

□

۵ به گراف ۱۶ رأسی G گراف **فرد زده** گوییم، اگر هر رأس آن هم در دوری به طول ۳ و هم در دوری به طول ۵ و ... و هم در دوری به طول ۱۵ باشد. حال فرض کنید یک گراف دوبخشی کامل داریم که هر بخش آن ۸ رأس دارد. می‌خواهیم تعدادی یال به این گراف اضافه کنیم تا فرد زده شود. حداقل چند یال باید اضافه کنیم؟

۱) ۸ ۲) ۲۸ ۳) ۲ ۴) ۱۶ ۵) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

برای اینکه همه‌ی رئوس یک بخش در یک مثلث باشند باید حداقل یک یال در بخش دیگر قرار داد (و یا چهار یال در همان بخش قرار دهیم). در نتیجه حداقل ۲ یال لازم است. ولی چون گراف کامل دوبخشی است و از هر راسی به هر راس در بخش مقابل یال وجود دارد، با اضافه کردن این دو یال تمامی دورهای فرد راسی را می‌توان ساخت. □

۶ در سؤال قبل فرض کنید یک گراف ۱۶ رأسی داریم که هر رأس آن متناظر با یک رشته‌ی دودویی ۴ رقمی متمایز است. دو رأس در این گراف به هم یال دارند، اگر و تنها اگر رشته‌های متناظر آن رأس‌ها دقیقن در یک رقم تفاوت داشته باشند. حداقل چند یال به این گراف اضافه کنیم تا فرد زده شود؟

۱) ۸ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

هر یال اضافه می‌تواند حداکثر دو مثلث ایجاد کند و در نتیجه چهار راس را شامل شود. پس حداقل چهار یال برای لازم است.
از طرفی با اضافه کردن این چهار یال بین $xx۰۰$ و $xx۱۱$ ها گراف فرد زده می‌شود. □

۷ یک جدول $n \times n$ داریم که در هر خانه‌ی آن یکی از دو عدد ۰ و ۱ نوشته شده است. چهار خانه شامل عدد ۰ را که از محل‌های تقاطع دو سطر و دو ستون به دست آیند، **صفرـ مستطیلی** می‌نامیم. هم‌چنین چهار خانه شامل عدد ۱ را که هیچ دو تا از آن‌ها هم‌سطر و هم‌ستون نیستند، **یکـ پراکنده** می‌نامیم. حداکثر مقدار n را بیابید به طوری که جدولی وجود داشته باشد که در آن هیچ چهار خانه‌ی صفرـ مستطیلی و هیچ چهار خانه‌ی یکـ پراکنده وجود نداشته باشد.

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۴ ۵) ۷

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

برای $n = ۴$ جدولی در نظر بگیرید که ۳ سطر نخست آن شامل عدد ۱ و سطر آخر آن شامل عدد ۰ باشد. حال کافی است ثابت کنیم هیچ جدول ۵×۵ با خاصیت گفته شده وجود ندارد. بیشینه‌ی تعداد خانه‌های ۱ را که

هیچ دوتا هم‌سطر یا هم‌ستون نیستند، در نظر بگیرید. حداکثر این مقدار برابر ۳ است. پس حداقل ۲ سطر و ۲ ستون باقی می‌ماند که شامل این خانه‌ها نیست و شامل هیچ عدد ۱ نیست (زیرا در غیر این صورت تعداد این خانه‌ها بیش‌تر می‌شود). پس چهار خانه‌ی صفرـ مستطیلی شامل ۰ پیدا می‌شود که تناقض است.

□

۸ همان سؤال قبل را در نظر بگیرید. چهار خانه شامل عدد ۱ را که هم‌سطر باشند، **یک‌ـ خطی** می‌نامیم. حداکثر مقدار n را بیابید به طوری که جدولی وجود داشته باشد که در آن هیچ چهار خانه‌ی صفرـ مستطیلی و هیچ چهار خانه‌ی یک‌ـ خطی وجود نداشته باشد؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۸ ۵) ۶

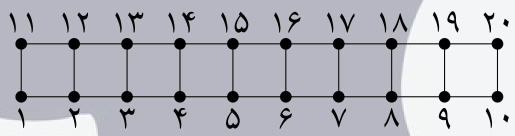
پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

برای $n = ۵$، جدول زیر را در نظر بگیرید:

۱	۱	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۱

حال کافی است ثابت کنیم هیچ جدول ۶×۶ با شرایط گفته شده وجود ندارد. فرض کنید چنین جدولی وجود دارد. هر سطر این جدول حداقل ۳ خانه‌ی صفر دارد. پس حداقل شامل $\binom{۳}{۲}$ جفت خانه‌ی صفر است. پس کل جدول شامل حداقل ۱۸ جفت خانه‌ی صفر هم‌سطر است. تعداد جفت ستون‌های ممکن $۱۵ = \binom{۶}{۲}$ است. پس دو جفت هم‌سطر از خانه‌های صفر وجود دارد که ستون‌های‌شان یک‌سان باشد. این چهار خانه یک چهار خانه‌ی صفرـ مستطیلی است که تناقض است و حکم ثابت می‌شود. □

۹ گراف ۲۰ رأسی زیر با رأس‌های ۲۰ ,... ,۲ ,۱ را در نظر بگیرید. به چند طریق می‌توان از این گراف تعدادی یال حذف کرد به طوری که گراف همبند بماند؟ توجه کنید یک حالت این است که هیچ یالی حذف نکنیم.



۱) ۲۰۷۳۹۱ ۲) ۹۴۶۰۲۵ ۳) ۲×۴^{۱۰} ۴) ۸۳۴۲۶۱ ۵) ۷۳۸۶۳۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

a_n را تعداد حالات خواسته شده برای یک گراف $۲n$ـ رأسی در نظر می‌گیریم. b_n را نیز مانند a_n تعریف می‌کنیم؛ با این تفاوت که از قبل بدانیم بین دو رأس سمت چپ مسیری وجود داشته است. داریم:

$$a_n = ۳a_{n-۱} + b_{n-۱}$$

و

$$b_n = ۴a_{n-۱} + ۲b_{n-۱}$$

از روابط بازگشتی بالا مقدار $a_{۱۰}$ که پاسخ مسئله است به دست می‌آید. □

۱۰ علیرضا در صفحه‌ی مختصات قرار دارد. او در هر حرکت می‌تواند از نقطه‌ی با مختصات صحیح (a, b) به یکی از نقاط $(۱۰۲۴, b) \,\%\, (۲a))$ و یا $(a, (۲b) \,\%\, ۱۰۲۴)$ برود که در آن‌ها منظور از $x \,\%\, y$ باقی‌مانده‌ی تقسیم x بر y است. علیرضا یک نقطه‌ی (x, y) برای شروع انتخاب می‌کند که $۰ \leqslant x \leqslant ۵۰, ۰ \leqslant y \leqslant ۱۰۰$ باشد. اگر

(u,v) نقطه‌ای با بیش‌ترین مجموع مختصه‌ها ($u+v$ بیشینه) در بین تمامی نقاط قابل رسیدن با حرکات بالا باشد، باقی‌مانده تقسیم $u+v$ بر ۵ چند است؟

۱) ۴ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۳ ۵) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

در هر گام مولفه‌ی مورد تغییر مقدارش در نمایش مبنای دو یک واحد به سمت چپ شیفت پیدا می‌کند. پس بیش‌ترین x قابل دسترسی به ازای مقدار اولیه‌ی ۶۳ است. به همین ترتیب برای y ها ۳۱ است. لذا نقطه‌ی (u,v) برابر (۱۰۰۸،۹۹۲) است. لذا جواب برابر ۰ است. □

۱۱ دو مجموعه‌ی ناتهی A و B نسبت به هم اول‌اند اگر و تنها اگر هر عضو مجموعه‌ی A نسبت به هر عضو مجموعه‌ی B اول باشد (دو عدد نسبت به هم اول‌اند اگر و تنها اگر ب.م.م شان یک باشد). فرشید و فرشاد هر کدام یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از $\{۱,۲,\dots,۹\}$ انتخاب می‌کنند. احتمال این که مجموعه‌های فرشید و فرشاد نسبت به هم اول باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۷۲۳}{۳۷۳۰۳}$ ۲) $\frac{۵۰۶۱}{۲۵۵\times۲^{۱۰}}$ ۳) $\frac{۶۰۸۴}{۱+۲۵۵\times۲^{۱۰}}$ ۴) $\frac{۲۵۳۰}{۲۵۵\times۲^{۹}}$ ۵) $\frac{۵۰۶۰}{۱+۲۵۵\times۲^{۱۰}}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

عدد ۱ می‌تواند در هر دو مجموعه باشد (۴ حالت). هر کدام از اعداد ۵ و ۷ می‌توانند حداکثر در یک مجموعه باشند (هر کدام ۳ حالت دارند).
اعداد ۲ و ۴ و ۸ حداکثر در یک مجموعه می‌توانند عضو باشند. در نتیجه ۱۵ حالت دارند.
اعداد ۳ و ۹ حداکثر در یک مجموعه می‌توانند عضو باشند. در نتیجه ۷ حالت دارند.
عدد ۶ تنها در حالتی می‌تواند در مجموعه‌ای عضو باشد که توان‌های ۲ و ۳ در دو مجموعه‌ی مختلف نباشند (در ۴۲ حالت در دو مجموعه‌ی مختلف هستند). در یک حالت (حالتی که توان‌های ۲ و ۳ عضو نباشند) نیز ۳ انتخاب برای عدد ۶ داریم.
در نتیجه برای انتخاب مضارب ۲ و ۳، ۱۶۹ = ۳ × ۱ + ۶۲ × ۲ + ۴۲ روش وجود دارد.
در نتیجه مجموعا تعداد حالات ممکن ۶۰۸۴ می‌شود. ولی حالاتی که یکی از این مجموعه‌ها یا هر دو تهی باشند را باید حذف کنیم که تعداد آنها ۱۰۲۳ = ۱ + ۵۱۱ + ۵۱۱ تاست. در نتیجه ۵۰۶۱ حالت مختلف داریم که پس از تقسیم کردن بر کل حالات و ساده‌سازی به جواب $\frac{۷۲۳}{۳۷۳۰۳}$ می‌رسیم. □

۱۲ ده توپ با شماره‌های ۱ تا ۱۰ به ترتیب دور یک دایره قرار دارند. در هر مرحله می‌توان دو توپ مجاور مانند A و B در نظر گرفت و آن‌ها را به همان ترتیب در میان دو توپ مجاور دیگر قرار داد. برای مثال با برداشتن توپ‌های ۱ و ۳ و گذاشتن آن‌ها در میان دو توپ ۵ و ۷ می‌توان از شکل سمت چپ به شکل سمت راست رسید:

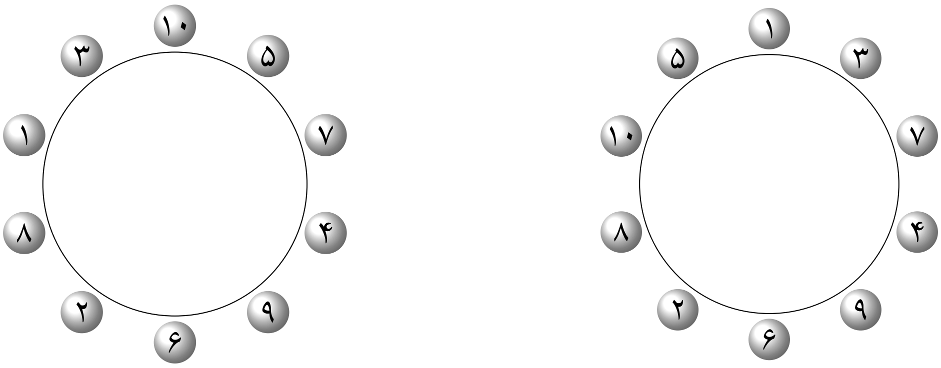
از میان !۹ جایگشت دوری که این توپ‌ها دارند، به چند جایگشت می‌توان رسید؟ (تعداد گام‌ها اهمیتی ندارد.)

۱) $\frac{۹!}{۲}$ ۲) $۸!$ ۳) $\frac{۹!}{۶}$ ۴) $۹!$ ۵) $۹!-۸!$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

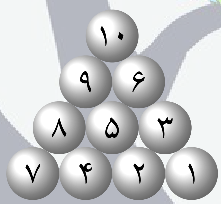
ادعا می‌کنیم به هر جایگشتی می‌توان رسید. کافی است ثابت کنیم دو عنصر مجاور را با تعدادی گام می‌توان جابه‌جا کرد؛ طوری که ترتیب بقیه به هم نریزد. فرض کنید a,b,c سه عنصر متوالی باشند. با انجام گام‌های زیر می‌توان a را دو واحد جلو برد:

$$a,b,c \to c,a,b \to b,c,a$$

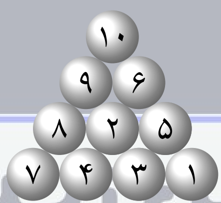


حال فرض کنید a, b دو عنصر مجاور باشند. b را ۴ بار دو واحد به جلو ببرید. به پشت a می‌رسد و عملن a, b جابه‌جا شده و حکم اثبات می‌شود. □

۱۳ در سؤال قبل فرض کنید ۱۰ توپ در آرایشی به شکل زیر قرار گرفته‌اند:



در هر مرحله می‌توان سه توپ را که دوبه‌دو بر یک‌دیگر مماس هستند، انتخاب کرد و مثلث آن‌ها را یک واحد در جهت ساعت‌گرد چرخاند. برای مثال با اعمال این حرکت روی توپ‌های ۲، ۳ و ۵ در شکل بالا به شکل زیر می‌رسیم:



از حالت اولیه به چند آرایش متفاوت از $!۱۰$ آرایش ممکن برای توپ‌ها می‌توانیم برسیم؟ (تعداد گام‌ها اهمیتی ندارد.)

۱) $\frac{۱۰!}{۲}$ ۲) $\frac{۱۰!}{۳}$ ۳) $!۹$ ۴) $!۱۰$ ۵) $\frac{۱۰!}{۶}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

اگر این توپ‌ها را به شکل یک جایگشت خطی ببینیم که در ابتدا مرتب‌شده نیز هستند، تعداد وارونگی‌های جایگشت زوج می‌ماند. پس به حداکثر نصف جایگشت‌ها می‌توانیم برسیم. رسیدن به نصف جایگشت‌ها نیز ممکن است. □

۱۴ در ابتدا عدد $x = ۰$ را داریم. در هر مرحله می‌توانیم عدد x را به یکی از دو عدد $\lfloor \frac{x}{۲} \rfloor$ یا $۴x + ۲$ تبدیل کنیم. با استفاده از این حرکات چه تعداد از اعضای مجموعه $A = \{۷۷, ۵۱۱, ۲۱۰, ۱۷۰, ۲۳۸\}$ را می‌توان ساخت؟

۱) ۳   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۴   ۵) ۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

تنها اعداد ۵۱۱، ۱۷۰ و ۲۳۸ قابل تولید هستند.
این ماشین اعدادی را تولید می‌کند که در نمایش مبنای ۲ شان هیچ‌گاه دو رقم ۰ متوالی نداشته باشند. برای اثبات این موضوع کافی است تا نمایش مبنای ۲ ورودی‌ها و خروجی‌های ماشین را در نظر گرفته و روی تعداد بیت‌های عدد x استقرا بزنیم. پس کافی است تا نمایش مبنای ۲ اعضای مجموعه A را در نظر گرفته و پاسخ را بیابیم.
□

۱۵ اعداد ۱ تا ۱۳۹۵ را دور دایره‌ای نوشته‌ایم. دستگاه پاک‌کننده‌ای داریم که ابتدا روی عدد ۱ قرار دارد. در هر مرحله با فرض این که دستگاه روی i اُمین عدد قرار دارد یکی از دو عملیات زیر را انجام می‌دهیم:

- عدد $i + ۱$ اُمی را پاک می‌کنیم و دستگاه را روی عدد $i + ۲$ اُم می‌گذاریم.
- اعداد $i + ۱$ اُم و $i + ۲$ اُم را پاک می‌کنیم و دستگاه را روی عدد $i + ۳$ اُم می‌گذاریم.

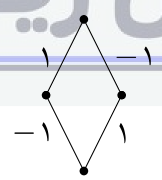
آن‌قدر این اعمال را انجام می‌دهیم تا تنها یک عدد دور دایره باقی بماند (توجه کنید اگر دو عدد باقی بماند، باید طبق روش اول یکی از اعداد را پاک کنیم). عدد نهایی که دور دایره باقی می‌ماند، چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱۳۹۵   ۲) ۶۹۷   ۳) ۱۳۹۳   ۴) ۱۳۹۴   ۵) ۱

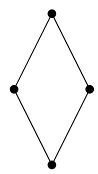
پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

بجز عدد ۲ که در اولین مرحله پاک می‌شود، بقیه اعداد را می‌توان نگه داشت. کافی است که ۲ یا ۳ گام قبل از آن اعداد را طوری پاک کنیم که در گام بعدی به خود این عدد برسیم. در این صورت تمامی اعداد را می‌توان به عنوان عدد نهایی باقی گذاشت.
□

فرض کنید G یک گراف باشد که روی هر یال آن یکی از دو عدد ۱ و ۱− نوشته شده است. در هر مرحله می‌توان یک رأس از گراف در نظر گرفت و عدد تمام یال‌های متصل به آن را قرینه کرد. کمینه‌ی تعداد یال‌های با عدد ۱− را که می‌توان با انجام تعدادی مرحله به آن رسید، $f(G)$ می‌نامیم. برای مثال در گراف زیر مقدار تابع f برابر ۰ است.



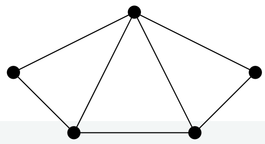
بیشینه‌ی مقدار $f(G)$ را به ازای تمام مقادیر اولیه‌ی ممکن برای یال‌ها، $h(G)$ در نظر می‌گیریم. برای مثال در گراف زیر مقدار h برابر ۱ است:



همان‌طور که در مثال بالا می‌بینید، ورودی تابع f گرافی با یال‌های مقداردهی‌شده و ورودی تابع h گرافی با یال‌های مقداردهی‌نشده است.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ مقدار h را برای گراف زیر بیابید:

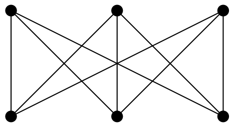


۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

گراف شامل دو دور مجزایال است. هر دور اگر در ابتدا شامل تعداد فردی یال ۱− باشد، هم‌واره تعداد فردی یال ۱− خواهد داشت. پس پاسخ حداقل برابر ۲ است. هم‌چنین می‌توان تمام یال‌های مسیر ۴ـ رأسی پایین را ۱ کرد و سپس اگر در یال‌های متصل به رأس بالا بیش از دو یال ۱− وجود داشت، با انتخاب رأس بالا تعداد یال‌های ۱− گراف را حداکثر ۲ کرد. □

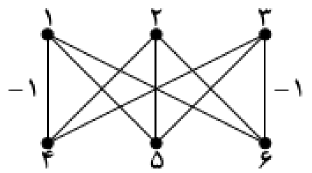
۱۷ مقدار h را برای گراف زیر بیابید:



۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۴ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

فرض کنید مقداردهی اولیه به شکل زیر باشد (فقط اعداد ۱− نوشته شده است): ادعا می‌کنیم به ازای مقداردهی



بالا مقدار f از ۲ کم‌تر نیست. فرض کنید از ۲ کم‌تر باشد. به مانند استدلال سوال قبل این مقداردهی شامل یک دور با تعداد فردی ۱− است. پس نمی‌تواند مقدار f برابر ۰ باشد. هم‌چنین اگر بخواهد این مقدار برابر ۱ شود باید تنها یال ۱−، یال بین رئوس ۲ و ۵ باشد؛ زیرا هر یک از دورهای ۱, ۲, ۴, ۵ و ۶, ۵, ۳, ۲ شامل حداقل یک یال ۱− خواهند بود. این حالت نیز قابل دست‌یابی نیست؛ زیرا انتخاب شدن و نشدن رأس‌ها یک‌تا تعیین می‌شود و مشاهده می‌کنیم نمی‌توان به این حالت رسید.
از طرفی به ازای هر مقداردهی اولیه می‌توان کاری کرد که حداکثر ۲ یال ۱− داشته باشیم. پس پاسخ برابر ۲ است.

□

۱۸ کدام گزاره‌های زیر درست هستند؟

- الف) مقدار h در هر گراف از بیشینه‌ی تعداد دورهای یال‌مجزا کم‌تر نیست (به مجموعه‌ای از دورها، دورهای یال‌مجزا می‌گوییم اگر هر یال از گراف در حداکثر یکی از دورهای آن مجموعه آمده باشد).
- ب) مقدار h در هر گراف از بیشینه‌ی تعداد دورهای یال‌مجزا بیش‌تر نیست.
- ج) فرض کنید G یک گراف با یک مقداردهی اولیه باشد که $f(G) = ۰$. اگر G دارای k مؤلفه باشد، دقیقن ۲^k روش وجود دارد که در آن هر رأس انتخاب شود یا نشود و در انتها عدد روی تمام یال‌ها ۱ شوند.

۱) الف و ب ۲) الف و ج ۳) الف ۴) ب و ج ۵) الف و ب و ج

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

گزاره‌ی ب با مثالی که در سوال قبلی آمده متناقض است.
گزاره‌های الف و ج درست هستند. □

فرض کنید G یک گراف ساده باشد. منظور از فاصله‌ی بین دو رأس در گراف، طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن‌هاست. منظور از قطر یک گراف، بیشینه‌ی فاصله‌ی دوبه‌دوی میان رأس‌هاست. توجه کنید در یک گراف ناهم‌بند، قطر

گراف ∞ است. به یک گراف **قطر بحرانی** گوییم، اگر با حذف هر یال از آن، قطر گراف زیاد شود. همچنین به یک گراف **قطر بحرانی معکوس** گوییم، اگر با اضافه کردن یال بین هر دو رأس غیر همسایه، قطر گراف کم شود.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۹ تعداد گراف‌های ۶ رأسی و ۶ یالی را بیابید که قطر بحرانی و دوبه‌دو نایک‌ریخت باشند. (دو گراف را یک‌ریخت می‌نامیم اگر بتوان با نام‌گذاری مجدّد رأس‌های اولی، گرافی برابر با گراف دومی ساخت)

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۳ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

چنین گرافی همبند است و در نتیجه درختی است که یک یال به آن اضافه شده. کافیست که بر اساس اندازه‌ی دوری که در گراف است مسئله را تقسیم کنیم. در این صورت ۳ گراف این ویژگی را خواهند داشت (یکی دور به طول ۶، یکی دور به طول ۵ و دیگری دوری به طول ۳). □

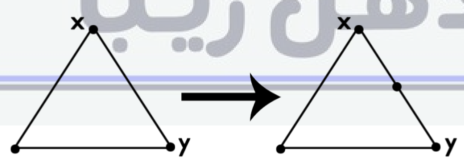
۲۰ تعداد گراف‌های هم‌بندِ غیرکامل ۷ رأسی را بیابید که قطر بحرانی معکوس و دوبه‌دو نایک‌ریخت باشند.

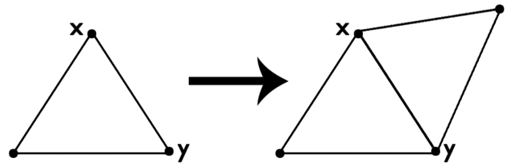
۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰ ۵) ۷

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

کافیست که قطر فعلی گراف را در نظر بگیریم. در این صورت اگر راس‌ها را براساس فاصله از دو راس تقسیم‌بندی کنیم، راس‌های هم‌فاصله باید گرافی کامل را تشکیل دهند (در غیر این صورت با اضافه کردن یال قطر گراف کم نخواهد شد) و بین تمامی رئوس دو بخش مجاور یال هست. تنها نکته باقی‌مانده این است که بخش‌های اول و آخر (دو سر قطر) تنها شامل یک راس هستند (در غیر این صورت با اضافه کردن یالی بین یکی از آنها و راسی در فاصله‌ی دو از قطر، قطر گراف افزایش نخواهد یافت).
با این تفاسیر کافیست که تعداد اعضای هر بخش را تعیین کنیم تا گراف بصورت یکتا تعیین شود که با شمارشی ساده عدد ۱۰ بدست می‌آید. □

محسن دستگاهی دارد که به عنوان ورودی یک گراف می‌گیرد و در خروجی گرافی دیگر به او می‌دهد! کارهایی که دستگاه او می‌تواند انجام دهد به شرح زیر است:





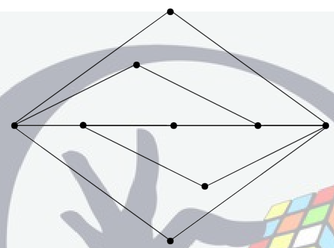
- ببین دو رأس مجاور انتخاب شده یک رأس اضافه کند.
- رأس جدیدی را به دو رأس مجاور انتخاب شده متصل نماید.

محسن یک بازی خطرناک با دستگاه خود شروع می‌کند. به این ترتیب که با یک گراف مثلث ($C_۳$) شروع می‌کند و هر بار گراف خود را به دستگاه می‌دهد و گراف خروجی را برای دور بعد در نظر می‌گیرد و هر موقعی که از بازی خسته شود، گرافش را به عنوان نتیجه‌ی بازی اعلام می‌کند.

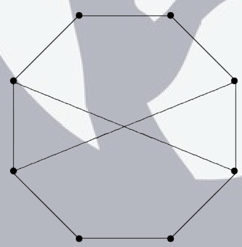
با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۱ کدام یک از شکل‌های زیر می‌تواند نتیجه‌ی بازی محسن با دستگاه خود باشد؟

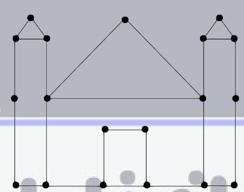
شکل الف)



شکل ب)



شکل ج)



۱) الف　　۲) ب و ج　　۳) الف و ج　　۴) ج　　۵) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

۲۲ **عدد هم‌بندی** یک گراف را حداقل تعداد رأس‌هایی در نظر می‌گیریم که باید از آن گراف حذف شود تا آن گراف ناهم‌بند شود. (توجه کنید به طور قراردادی عدد هم‌بندی را برای یک گراف کامل n رأسی برابر $n - ۱$ در نظر می‌گیریم).
در بین همه‌ی گراف‌هایی که می‌توانند نتیجه‌ی بازی خطرناک محسن باشند، بیش‌ترین عدد همبندی چند است؟

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۲　　۴) ۵　　۵) تا هر عددی می‌تواند زیاد شود

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

□

۲۳ گراف مسطح به گرافی می‌گوییم که بتوان آن را در صفحه کشید، بدون آن که یال‌هایش یک‌دیگر را قطع کنند. در این وضعیت، صفحه به **ناحیه**‌هایی تقسیم می‌شود. به غیر از ناحیه‌ی نامحدودی که اطراف گراف را در بر می‌گیرد، بقیه‌ی ناحیه‌ها را **محدود** می‌نامند. مثلن گراف شکل الف در سؤال قبل، دارای ۴ ناحیه‌ی محدود است. دو ناحیه با هم مجاورند اگر حداقل در یک یال با هم مرز مشترک داشته باشند.
عدد رنگی سطحی را برای گراف‌های مسطح، حداقل تعداد رنگ‌های لازم برای رنگ کردن ناحیه‌های محدود گراف تعریف می‌کنیم؛ به طوری که هیچ دو ناحیه‌ی محدود مجاوری هم‌رنگ نباشند.
در بین همه‌ی گراف‌هایی که می‌توانند نتیجه‌ی بازی خطرناک محسن باشند، بیش‌ترین عدد رنگی سطحی چند است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ممکن است گرافی نامسطح نتیجه‌ی این بازی خطرناک باشد ۴) ۵ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

اعضای تیم پلیس مخفی سلطان شامل پنج پلیس ماهر با شماره‌های ۱ تا ۵ است. این پنج نفر در آفتاب سوزان بندر دور یک میز گرد نشسته و هر کدام یک عینک آفتابی زده‌اند. عینک‌های آفتابی این افراد، یکی از سه رنگ قرمز، آبی و زرد را دارد. طبیعی است که این افراد، اجسام را به رنگ واقعی نمی‌بینند؛ بلکه ترکیب رنگ آن جسم با رنگ عینک خود را می‌بینند! برای مثال فردی که عینک زرد به چشم زده است، یک جسم آبی را به رنگ سبز و یک جسم زرد را به رنگ زرد می‌بیند. فرض کنید شیوه‌ی ترکیب رنگ اجسام با عینک‌ها مطابق جدول زیر است:

	قرمز	آبی	زرد
قرمز	قرمز	بنفش	نارنجی
آبی	بنفش	آبی	سبز
زرد	نارنجی	سبز	زرد

این قاعده برای عینک‌ها هم صادق است. پس برای مثال اگر پلیس A عینک قرمز و پلیس B عینک زرد داشته باشد، A با نگاه کردن به B تصوّر می‌کند رنگ عینک B نارنجی است!

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۴ سلطان که در کویری دور در حال انجام مأموریتی دیگر است، جویای احوال پلیس‌های خود می‌شود. هر یک از پلیس‌ها در گزارش خود، مجموعه‌ی رنگ‌هایی را که در میان عینک بقیه‌ی پلیس‌ها می‌بیند، می‌گوید. برای مثال فرض کنید پلیس‌ها به ترتیب عینک‌های قرمز، قرمز، آبی، زرد و زرد داشته باشند. پلیس شماره ۲ در پیام خود به سلطان می‌گوید:
«درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۲ هستم. من در عینک‌های پلیس‌های دیگر، رنگ‌های قرمز، بنفش و نارنجی را می‌بینم.»
حال سلطان پیام تمام پلیس‌ها را دریافت کرده و می‌خواهد تشخیص دهد اکنون رنگ عینک هر پلیس چیست. توجه کنید که سلطان می‌داند رنگ عینک هر پلیس، قرمز یا زرد یا آبی است. به ازای چند حالت از 3^5 حالت

(برای رنگ عینک پلیس‌ها)، سلطان پس از دریافت گزارش‌ها به طور یک‌تا می‌تواند بفهمد رنگ عینک هر پلیس چیست؟

۱) ۲۱۳ ۲) ۲۴۳ ۳) ۱۸۳ ۴) ۱۵۰ ۵) ۱۵۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

اگر در پیام یک پلیس، یک رنگ اصلی (مثلن قرمز) باشد، عینک خود او نیز به همان رنگ است. هم‌چنین اگر دو رنگ غیر اصلی در پیام یک پلیس باشند، رنگ عینک او یک‌تا تعیین می‌شود. پس در هر صورت رنگ یک پلیس از روی پیام‌ش به طور یک‌تا تعیین می‌شود، مگر در حالتی که فقط یک رنگ غیر اصلی در پیام‌ش باشد. در این حالت نیز ۴ پلیس دیگر باید به یک رنگ باشند و او به رنگی دیگر. با تعیین رنگ ۴ پلیس دیگر، رنگ این پلیس نیز مشخص خواهد شد. پس در هر صورت سلطان می‌تواند به هدف‌ش برسد. □

۲۵ در نوع جدید پیام‌رسانی، هر پلیس، یک پلیس دیگر را انتخاب کرده و به سلطان پیام می‌دهد که رنگ عینک آن پلیس را چگونه می‌بیند. برای مثال فرض کنید رنگ عینک پلیس‌ها به ترتیب قرمز، قرمز، آبی، زرد و زرد باشد. پیام‌های پلیس‌ها می‌تواند به شکل زیر باشد:

- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۱ هستم. من عینک پلیس شماره ۵ را نارنجی می‌بینم.»
- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۲ هستم. من عینک پلیس شماره ۱ را قرمز می‌بینم.»
- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۳ هستم. من عینک پلیس شماره ۱ را بنفش می‌بینم.»
- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۴ هستم. من عینک پلیس شماره ۲ را نارنجی می‌بینم.»
- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۵ هستم. من عینک پلیس شماره ۴ را زرد می‌بینم.»

حال سلطان پیام تمام پلیس‌ها را دریافت کرده و می‌خواهد تشخیص دهد اکنون رنگ عینک هر پلیس چیست. توجه کنید سلطان می‌داند رنگ عینک هر پلیس قرمز یا زرد یا آبی است. $۳^۵$ حالت برای رنگ عینک پلیس‌ها و $۴^۵$ حالت برای این داریم که هر پلیس، رنگ عینک چه کسی را بفرستد. از این $۳^۵ \times ۴^۵$ حالت، در چند حالت سلطان به طور یک‌تا نمی‌تواند رنگ عینک پلیس‌ها را تشخیص دهد؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۱۸۸۴۰ ۳) ۱۳۶۸۰ ۴) ۰ ۵) ۱۷۷۶۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

یک گراف می‌سازیم که رأس‌های آن متناظر با پلیس‌ها باشند و اگر پلیس i عینک پلیس j را به رنگ c اعلام کرده باشد، یک یال جهت‌دار به رنگ c از i به j می‌کشیم.
ابتدا جهت یال‌ها را برمی‌داریم؛ زیرا اگر پلیس i، عینک پلیس j را به رنگ c ببیند، پلیس j نیز عینک پلیس i را به همان رنگ می‌بیند.
یک مؤلفه در این گراف در نظر بگیرید. با مشخص شدن رنگ عینک یکی از رئوس آن، رنگ عینک هم‌سایه‌های آن و به همین ترتیب بقیه‌ی رئوس مؤلفه مشخص خواهد شد. اگر یک یال به رنگی اصلی داشته باشیم، عینک دو سر آن یال به رنگ خود یال است. اگر هم دو یال با رأس مشترک داشته باشیم که دو رنگ غیر اصلی متفاوت را داشته باشند، رنگ عینک رأس مشترک‌شان مشخص خواهد شد. پس تنها حالتی که رنگ عینک‌ها مشخص نمی‌شود، حالتی است که مؤلفه‌ای داشته باشیم که رأس‌های‌ش شامل دو رنگ اصلی باشند و هر یال شامل یک رأس از هر یک از این دو رنگ باشد. از طرفی هر مؤلفه‌ی kـ رأسی این گراف شامل k یال است و دقیقن یک دور دارد. این دور نمی‌تواند به طول فرد باشد. پس تنها می‌تواند به طول ۲ یا ۴ باشد که با حالت‌بندی، پاسخ به دست می‌آید. □

مرحله دوم بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر ایران

درخت ساده! .... **۱۷ امتیاز**

پیام یک درخت n رأسی دارد ($n \geq ۳$). او هر رأس این درخت را با یکی از دو رنگ سیاه و سفید رنگ کرده؛ طوری که هر دو رأس مجاور ناهم‌رنگ شده‌اند و هم‌چنین تعداد رأس‌های سفید بیش‌تر از تعداد رأس‌های سیاه شده است. حسام باید روی هر رأس سفید، یکی از اعداد $۱, ۰, ۱-$ را بنویسد؛ طوری که عدد حداقل یک رأس سفید برابر ۰ نباشد. حسام باید طوری این کار را انجام دهد که به ازای هر رأس سیاه، مجموع اعداد هم‌سایه‌های آن برابر ۰ شود. برای مثال اگر درخت پیام به شکل (۱) باشد، حسام می‌تواند کارش را مانند شکل (۲) انجام دهد. ثابت کنید درخت پیام به هر شکلی که باشد، حسام قادر به انجام کارهای گفته شده، خواهد بود.

شکل (۲)   شکل (۱)

دست‌کش‌های مشکوک! .... **۲۲ امتیاز**

حسام یک دست‌کش آبی در دست راست و یک دست‌کش قرمز در دست چپ خود دارد. پیام و حسام یک عدد طبیعی n انتخاب می‌کنند ($n \geq ۲$)؛ سپس حسام یک عدد طبیعی k برمی‌گزینند که $۱ \leq k \leq n$ باشد و پیام باید k را بفهمد. در هر مرحله پیام می‌تواند یکی از دو پرسش زیر را از حسام بپرسد:

- دست‌کش دست راست تو چه رنگی است؟
- دست‌کش دست چپ تو چه رنگی است؟

حسام در هر پرسش، یکی از دو پاسخ «قرمز» یا «آبی» را می‌گوید. پرسش‌های پیام را به ترتیب با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, q$ شماره‌گذاری کنید. روش پاسخ‌گویی حسام به این صورت است که او پاسخ k پرسش نخست پیام را به طور دل‌خواه می‌دهد (دروغ یا راست)؛ سپس به ازای هر $i > k$، در پاسخ پرسش شماره‌ی i، پاسخ درست پرسش شماره‌ی $i - k$ را می‌دهد. توجه کنید پاسخ k پرسش نخست به صورت دل‌خواه داده می‌شود و حسام هیچ روش از پیش تعیین شده‌ای برای پاسخ‌گویی به آن ندارد.

توجه کنید پیام دست‌کش‌های حسام را می‌بیند و هم‌چنین از روش پاسخ‌گویی حسام آگاه است؛ امّا k را نمی‌داند و با توجه به پاسخ‌های حسام باید آن را بفهمد. کمینه‌ی تعداد پرسش‌هایی که پیام باید بپرسد تا به طور تضمینی k را بفهمد، چیست؟ پاسخ را بر حسب n بیابید.

پارکینگ‌های مشکوک! .... **۲۵ امتیاز**

آرمان در شرکت خود یک پارکینگ دارد که مدیریت آن را به پیام و حسام، واگذار کرده است. این پارکینگ دارای n جای‌گاه با شماره‌های $1, 2, \ldots, n$ است. شرکت نیز، n کارمند با شماره‌های $1, 2, \ldots, n$ دارد. می‌دانیم عدد n به صورت $2^k + 1$ است. هر روز این کارمندها طبق دستور حسام برای پارک کردن اتومبیل‌های‌شان طبق الگوریتم زیر عمل می‌کنند:

> کارمندها به ترتیب شماره پارک می‌کنند؛ یعنی ابتدا کارمند شماره ۱، سپس کارمند شماره ۲ و ... و در انتها کارمند شماره n پارک می‌کند. کارمندهای بازار به طرز عجیبی تنّوع‌طلب و البته تنبل هستند! بنابراین هر کارمند در هنگام پارک کردن، مجموعه‌ی جای‌گاه‌های خالی را که تاکنون کم‌تر در آن‌ها رفته است، در نظر می‌گیرد و در میان آن‌ها جای‌گاهی را انتخاب می‌کند که کم‌ترین شماره را دارد.

برای مثال اگر $n = 3$ باشد، کارمندان در سه روز نخست به ترتیب زیر در جای‌گاه‌ها پارک می‌کنند:

	جای‌گاه ۱	جای‌گاه ۲	جای‌گاه ۳
روز یکم	کارمند ۱	کارمند ۲	کارمند ۳
روز دوم	کارمند ۲	کارمند ۱	کارمند ۳
روز سوم	کارمند ۲	کارمند ۳	کارمند ۱

به روزهایی شماره‌ی تمام کارمندان با شماره‌ی جای‌گاه اتومبیل‌شان یک‌سان باشد، روزهای **منظّم** می‌گوییم! برای مثال روز یکم یک روز منظّم است. ثابت کنید بعد از روز یکم، نخستین باری که یک روز منظّم دیگر رخ می‌دهد، روز $n(n-1)+1$ است.

بازی قهرمانی! .... **۳۶ امتیاز**

فرهاد و علی‌رضا یک گراف کامل n رأسی دارند و با آن بازی می‌کنند. منظور از یک دور **همیلتونی** در گراف، یک دور به طول n است. در ابتدا علی‌رضا هر یال گراف را با یکی از دو رنگ قرمز و آبی رنگ می‌کند. سپس فرهاد تعدادی متناهی عمل **تعویض** انجام می‌دهد. هر عمل تعویض شامل انتخاب کردن یک دور همیلتونی از گراف و تغییر رنگ تمام یال‌های آن دور (از قرمز به آبی و بالعکس) است. توجه کنید تنها نقش علی‌رضا در بازی، رنگ‌آمیزی اولیه‌ی گراف

است. فرهاد در کمال هوشمندی می‌خواهد تعداد یال‌های آبی گراف کمینه شود و علی‌رضا می‌خواهد تعداد یال‌های آبی گراف بیشینه شود.

آ) اگر n فرد باشد و هر دو نفر به طور بهینه بازی کنند، در انتها چند یال آبی خواهیم داشت؟ (۱۵ امتیاز)

ب) اگر n زوج باشد و هر دو نفر به طور بهینه بازی کنند، در انتها چند یال آبی خواهیم داشت؟ (۲۱ امتیاز)

پاسخ را بر حسب n بیابید.

توجه: فرض کنید پاسخ به دست آمده توسط شما بر حسب n برابر A باشد. در هر یک از دو قسمت سوال، در صورتی که A نادرست باشد، امتیازی به شما تعلّق نمی‌گیرد. هم‌چنین در هر یک از دو قسمت سوال، باید دو مورد زیر را در مورد عدد به دست آمده اثبات کنید:

۱. علی‌رضا روشی برای رنگ‌آمیزی دارد که در انتها حداقل A یال آبی خواهیم داشت.

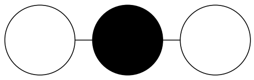
۲. فرهاد روشی دارد که به ازای هر رنگ‌آمیزی علی‌رضا، در انتها حداکثر A یال آبی خواهیم داشت.

در هر قسمت درستی A به تنهایی یک امتیاز و دو مورد بالا به ترتیب در قسمت (آ) ۵ و ۹ امتیاز و در قسمت (ب) ۷ و ۱۴ امتیاز دارند.

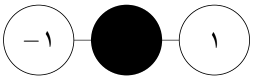
پاسخ‌های مرحله دوم بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر ایران

درخت ساده! .... **۱۷ امتیاز**

به استقرای قوی روی n حکم را ثابت می‌کنیم. برای پایه‌ی استقرا $n = ۳$ و $n = ۴$ را در نظر می‌گیریم. تنها حالت ممکن برای $n = ۳$، شکل (۱) است که حسام می‌تواند کارش را مانند شکل (۲) انجام دهد:

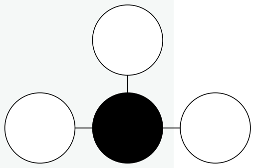


شکل (۱)

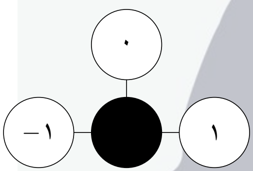


شکل (۲)

تنها حالت ممکن نیز برای $n = ۴$ شکل (۳) است که حسام می‌تواند کارش را مانند شکل (۴) انجام دهد:



شکل (۳)



شکل (۴)

فرض کنید حکم به ازای $> n$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم به ازای n نیز برقرار است. یک درخت n رأسی در نظر بگیرید و آن را ریشه‌دار کنید. چند حالت داریم:

- دو برگ سفید با پدر مشترک داشته باشیم؛ در این صورت روی یکی از آن دو برگ عدد ۱ و روی دیگری ۱− می‌نویسیم و عدد بقیه‌ی رأس‌های سفید را ۰ می‌گذاریم. تمام شرایط برقرار و کار حسام انجام می‌شود.
- در صورتی که حالت بالا رخ ندهد، پایین‌ترین برگ را در نظر می‌گیریم و آن را u می‌نامیم. دو حالت داریم:
  - این برگ سیاه باشد. فرض کنید v پدر رأس u باشد. v را به همراه تمام فرزندانش (از جمله u) از درخت حذف می‌کنیم. در درخت باقی‌مانده هم‌چنان تعداد رأس‌های سفید بیش‌تر است. هم‌چنین در درخت باقی‌مانده حداقل سه رأس وجود دارد؛ زیرا پدر v رأسی سیاه است و بنابراین دست کم دو رأس سفید باید در درخت باقی‌مانده موجود باشند. پس درخت باقی‌مانده یک درخت معتبر است و می‌توانیم طبق فرض استقرا آن را به طور معتبر عددگذاری کنیم. حال عدد v را صفر می‌گذاریم. تمام شرایط برقرار و کار حسام انجام می‌شود.
  - این برگ سفید باشد. در این صورت فرض کنید پدر u یک رأس سیاه مانند v باشد. v فرزند دیگری ندارد. u, v را از درخت حذف می‌کنیم. یک درخت $n - ۲$ رأسی معتبر به دست می‌آید و طبق فرض استقرا می‌توان

آن را به صورت معتبر عددگذاری کرد. حال فرض کنید عدد پدر رأس v (که رأسی سفید است)، برابر x باشد. عدد رأس u را برابر $-x$ می‌گذاریم. تمام شرایط برقرار و کار حسام انجام می‌شود.

دست‌کش‌های مشکوک! .... **۲۲ امتیاز**

ثابت می‌کنیم پاسخ برابر $n+۱$ است.

ابتدا ثابت می‌کنیم پیام روشی تضمینی با کم‌تر از $n+۱$ پرسش ندارد. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید پیام با $m \leq n$ پرسش به هدف خود رسیده است. اگر پاسخ حسام برای پرسش آخر برابر با پاسخ درست پرسش نخست شده باشد، در این صورت اگر $m = ۱$ باشد، مقدار k می‌تواند هر یک از اعداد ۱, ۲ و اگر $m \neq ۱$ باشد، مقدار k می‌تواند هر یک از اعداد m یا $m-۱$ (و حتّی اعدادی دیگر) باشد. پس پیام نمی‌تواند به طور یکتا k را تشخیص دهد که تناقض است و حکم اثبات می‌شود. ■

حال ثابت می‌کنیم پیام می‌تواند با حداکثر $n+۱$ پرسش به هدف خود برسد. پیام در پرسش نخست خود رنگ دست‌کش دست راست حمید و در بقیه‌ی پرسش‌ها رنگ دست‌کش دست چپ او را می‌پرسد. ادّعا می‌کنیم پس از این $n+۱$ پرسش k به طور یکتا تعیین می‌شود. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید این طور نباشد؛ یعنی دست کم دو عدد مثل p,q وجود دارند که مقدار k می‌تواند برابر با آن‌ها باشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $p > q$ باشد. از آن‌جایی که q نامزدی برای k است، پس پاسخ پرسش $q+۱$ باید آبی و پاسخ پرسش‌های $q+۲, q+۳, \ldots, n+۱$ باید قرمز باشد؛ بنابراین پاسخ پرسش $p+۱$ نیز قرمز است؛ زیرا $p+۱ \geq q+۲$. از طرفی p نیز نامزدی برای k است؛ پس پاسخ پرسش $p+۱$ باید آبی باشد. این یک تناقض است و حکم ثابت می‌شود. ■

پارکینگ‌های مشکوک! .... **۲۵ امتیاز**

ابتدا به استقرای ضعیف روی n ثابت می‌کنیم اگر n به صورت ۲^q باشد، در n روز نخست هر یک از کارمندها در هر یک از جای‌گاه‌ها دقیقن یک بار پارک می‌کنند. برای پایه‌ی استقرا $n = ۱$ را در نظر می‌گیریم که حکم واضح است. فرض کنید حکم برای $n = ۲^k$ درست باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای $n = ۲^{k+۱}$ نیز درست است.

فرض کنید شرکت دارای n کارمند باشد که $n = ۲^{k+۱}$ است. به کارمندهای $۱, ۲, \ldots, ۲^k$ کارمندهای **قدیمی** و به دیگران، کارمندهای **جدید** می‌گوییم. به همین ترتیب جای‌گاه‌های قدیمی و جدید را تعریف می‌کنیم. در ۲^k روز نخست، به ازای هر کارمند قدیمی در هنگام پارک کردن، دست کم یک جای‌گاه قدیمی وجود دارد که تاکنون در آن پارک نکرده است؛ پس در ۲^k روز نخست کارمندهای قدیمی در جای‌گاه‌های قدیمی پارک می‌کنند و در نتیجه کارمندهای جدید باید در جای‌گاه‌های جدید پارک کنند. بنابراین طبق فرض استقرا در ۲^k روز نخست هر کارمند قدیمی دقیقن یک بار در هر یک از جای‌گاه‌های قدیمی و هر کارمند جدید دقیقن یک بار در هر یک از جای‌گاه‌های جدید قرار می‌گیرد. در ۲^k روز دیگر، به ازای هر کارمند قدیمی در هنگام پارک کردن، دست کم یک جای‌گاه جدید وجود دارد که تاکنون در آن پارک

نکرده است و از طرفی قبلن در هر یک از جای‌گاه‌های قدیمی دقیقن یک بار پارک کرده است؛ پس در ۲^k روز دوم کارمندهای قدیمی در جای‌گاه‌های جدید و کارمندهای جدید در جای‌گاه‌های قدیمی پارک می‌کنند. بنابراین طبق فرض استقرا در ۲^k روز دوم هر کارمند قدیمی در هر جای‌گاه جدید دقیقن یک بار و هر کارمند جدید در هر جای‌گاه قدیمی دقیقن یک بار پارک می‌کند. به این ترتیب در n روز نخست هر یک از کارمندان در هر یک از جای‌گاه‌ها دقیقن یک بار پارک می‌کنند و حکم استقرا ثابت می‌شود. ■

حال حکم اصلی مسئله را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم n به صورت $۲^q + ۱$ باشد. کارمند شماره n را **نخودی** و بقیه‌ی کارمندها را **عادی** می‌نامیم. به استقرای قوی روی k که $۱ \leq k \leq n$ ثابت می‌کنیم در روزهای

$$(n-۱)(k-۱)+۱, (n-۱)(k-۱)+۲, \ldots, (n-۱)k$$

کارمند نخودی در جای‌گاه $n-k+۱$ پارک می‌کند و هر یک از کارمندهای عادی در هر یک از جای‌گاه‌ها به جز جای‌گاه $n-k+۱$ دقیقن یک بار پارک می‌کنند.

برای پایه‌ی استقرا $k = ۱$ را در نظر بگیرید. در روزهای $۱, ۲, \ldots, n-۱$ به ازای هر یک از کارمندهای عادی دست کم یکی از جای‌گاه‌های $۱, ۲, \ldots, n-۱$ وجود دارد که تاکنون در آن پارک نکرده است. بنابراین در $n-۱$ روز نخست کارمند نخودی در جای‌گاه n وکارمندهای عادی در جای‌گاه‌های $۱, ۲, \ldots, n-۱$ پارک می‌کنند. با توجه به حکم اثبات شده در ابتدای نوشته هر یک از کارمندهای $۱, ۲, \ldots, n-۱$ دقیقن یک بار در هر یک از جای‌گاه‌های $۱, ۲, \ldots, n-۱$ پارک می‌کنند و پایه‌ی استقرا ثابت می‌شود.

حال فرض کنید حکم برای $k >$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای k نیز برقرار است. روزهای

$$(n-۱)(k-۱)+۱, (n-۱)(k-۱)+۲, \ldots, (n-۱)k$$

را روزهای **طلایی** می‌نامیم. تا قبل از شروع روزهای طلایی طبق فرض استقرا هر یک از کارمندهای عادی دقیقن $k-۱$ بار در هر یک از جای‌گاه‌های $۱, ۲, \ldots, n-k$ و دقیقن $k-۲$ بار در هر یک از جای‌گاه‌های $n-k+۲, n-k+۳, \ldots, n$ پارک کرده‌اند. در هر یک از روزهای طلایی، به ازای هر یک از کارمندهای عادی در هنگام پارک کردن، جای‌گاهی به جز جای‌گاه $n-k+۱$ وجود دارد که در هیچ روز طلایی در آن پارک نکرده است و چنین جای‌گاهی در هنگام پارک کردن به جای‌گاه $n-k+۱$ اولویت دارد؛ پس در روزهای طلایی کارمند نخودی در جای‌گاه $n-k+۱$ و کارمندهای عادی در جای‌گاه‌های دیگر پارک می‌کنند.

حال شرکتی مشابه با $n-۱$ جای‌گاه با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, n-۱$ در نظر بگیرید که در شروع روزهای طلایی شرکت ما، تأسیس می‌شود. ادّعا می‌کنیم برای کارمندان شرکت ما، اولویت جای‌گاه‌های

$$n-k+۲, n-k+۳, \ldots, n, ۱, ۲, \ldots, n-k$$

به ترتیب برابر اولویت جای‌گاه‌های

$$1, 2, \ldots, n-1$$

برای کارمندان شرکت تازه تأسیس است. دو جای‌گاه با شماره‌های i, j در شرکت ما در نظر بگیرید. سه حالت داریم:

- $1 \leq i < j \leq n-k$ باشد. در این صورت اگر تاکنون در جای‌گاه i بیش‌تر پارک کرده باشیم، اولویت با جای‌گاه j و در غیر این صورت اولویت با جای‌گاه i است. در شرکت تازه تأسیس نیز اولویت‌های جای‌گاه‌های متناظر $(k-1+i, k-1+j)$ به همین صورت است.

- $n-k+2 \leq i < j \leq n$ باشد. در این صورت اگر تاکنون در جای‌گاه i بیش‌تر پارک کرده باشیم، اولویت با جای‌گاه j و در غیر این صورت اولویت با جای‌گاه i است. در شرکت تازه تأسیس نیز اولویت‌های جای‌گاه‌های متناظر $(i-(n-k+1), j-(n-k+1))$ به همین صورت است.

- $1 \leq i \leq n-k < j \leq n$ باشد. در این صورت اگر تاکنون در جای‌گاه i بیش‌تر پارک کرده باشیم اولویت با جای‌گاه j در غیر این صورت اولویت با جای‌گاه i است. در شرکت تازه تأسیس نیز اولویت جای‌گاه‌های متناظر $(k-1+i, j-(n+k-1))$ به همین صورت است.

به این ترتیب ادّعای ما ثابت می‌شود و کارمندان ما در روزهای طلایی به مانند کارمندهای شرکت تازه‌تأسیس در جای‌گاه‌های متناظر پارک می‌کنند که طبق حکم ثابت شده در ابتدای نوشته هر کارمند در هر یک از جای‌گاه‌ها به جز جای‌گاه $n-k+1$ دقیقن یک بار پارک می‌کند و حکم استقرا ثابت می‌شود. ■

با توجه به روند اثبات‌شده‌ی بالا در n دور نخست ـ که هر دور شامل $n-1$ روز است ـ روز منظّمی به جز روز نخست رخ نمی‌دهد؛ امّا پس از این n دوره هر کس در هر جای‌گاه دقیقن $n-1$ بار پارک کرده است و روز بعدی روزی منظّم خواهد بود و حکم ثابت می‌شود.

بازی قهرمانی! .... ۳۶ امتیاز

ثابت می‌کنیم پاسخ برای n فرد $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ و برای n زوج $\frac{n}{2}+1$ است.

درجه‌ی قرمز یک رأس را تعداد یال‌های قرمز متصل به آن تعریف می‌کنیم. به همین ترتیب درجه‌ی آبی یک رأس تعریف می‌شود.

ابتدا روشی برای رنگ‌آمیزی علی‌رضا ارائه می‌دهیم که تضمین کند حداقل به مقدار گفته شده یال آبی خواهیم داشت. برای n فرد علی‌رضا یک رأس را در نظر نمی‌گیرد و بقیه‌ی رأس‌ها را به جفت‌ها افراز می‌کند. او یال بین دو رأس هر جفت را آبی و بقیه‌ی یال‌ها را قرمز می‌گذارد. در ابتدا درجه‌ی آبی هر رأس فرد است و طی اعمال تعویض، زوجیت درجه‌ی آبی رأس‌ها تغییری نمی‌کند؛ پس فرهاد هر طوری که بازی کند، در انتها درجه‌ی آبی تمام رأس‌ها فرد خواهد بود و دست کم

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ یال آبی خواهیم داشت.

برای n زوج علی‌رضا یال رأس شماره‌ی ۱ به رئوس ۲, ۳, ۴ را آبی می‌گذارد. او هم‌چنین بقیه‌ی رأس‌ها را به جفت‌هایی افراز کرده و یال بین دو رأس هر جفت را آبی می‌کند و در انتها بقیه‌ی یال‌ها را قرمز می‌گذارد. طی اعمال تعویض، علاوه بر زوجیت درجه‌ی آبی رئوس، زوجیت تعداد یال‌های آبی نیز ثابت می‌ماند. بنابراین فرهاد هر طوری بازی کند در انتها درجه‌ی تمام رئوس فرد خواهد بود و امکان ندارد درجه‌ی تمام رئوس برابر ۱ شود؛ زیرا در این صورت زوجیت تعداد یال‌های آبی تغییر کرده است که تناقض است. پس در انتها دست کم $\frac{n}{2} + 1$ یال آبی خواهیم داشت. ■

اکنون ثابت می‌کنیم به ازای هر دور به طول زوج مانند C، فرهاد می‌تواند تعدادی عمل تعویض انجام دهد؛ طوری که رنگ یال‌های C تغییر کند؛ امّا رنگ هیچ یال دیگری تغییر نکند. حکم را به استقرای ضعیف روی k (طول دور C) ثابت می‌کنیم.

برای پایه‌ی استقرا $k = 4$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $C = v_1v_2v_3v_4v_1$ باشد. مسیری گذرنده از تمام رئوس دیگر مانند P در نظر بگیرید. فرهاد می‌تواند یک بار با عمل تعویض روی دور $v_4Pv_1v_3v_2v_4$ و بار دیگر عمل تعویض روی دور $v_4Pv_1v_2v_3v_4$ کاری کند که رنگ یال‌های C تغییر کند؛ امّا رنگ هیچ یال دیگری تغییر نکند. به این ترتیب پایه‌ی استقرا ثابت می‌شود.

حال فرض کنید حکم برای k برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای $k + 2$ نیز برقرار است. دور $C = v_1v_2 \dots v_{k+2}$ را در نظر بگیرید. فرهاد می‌تواند رنگ یال‌های دور $v_1v_2v_3v_4v_1$ را مستقل از بقیه‌ی یال‌ها طبق پایه‌ی استقرا تغییر دهد. هم‌چنین او طبق فرض استقرا می‌تواند رنگ یال‌های دور $v_3v_4v_5 \dots v_{k+2}v_3$ را مستقل از بقیه‌ی یال‌ها تغییر دهد. با این دو تغییر، رنگ یال‌های دور C مستقل از بقیه‌ی یال‌ها تغییر می‌کند و حکم استقرا ثابت می‌شود. ■

حال فرض کنید n فرد باشد. ثابت می‌کنیم فرهاد می‌تواند رنگ یال‌های یک دور به طول ۳ را مستقل از بقیه‌ی یال‌ها تغییر دهد. فرض کنید $C = v_1v_2v_3v_1$ یک دور به طول ۳ باشد و P مسیری گذرنده از بقیه‌ی رئوس باشد. فرهاد می‌تواند یک بار با تغییر رنگ دور همیلتونی $v_1Pv_2v_3v_1$ و سپس با تغییر دور به طول زوج $v_1Pv_2v_1$ به هدف خود برسد. ■

حال ثابت می‌کنیم فرهاد می‌تواند به ازای هر رنگ‌آمیزی اولیه طوری بازی کند که تعداد یال‌های آبی حداکثر به میزان گفته شده باشد.

اگر n فرد باشد، فرهاد می‌تواند در هر لحظه یک رأس v با درجه‌ی آبی بیش‌تر از ۱ در نظر بگیرد. v شامل دست کم دو هم‌سایه مانند a, b است که با یال آبی به v وصل هستند. فرهاد با تغییر رنگ دور به طول ۳ شامل رئوس v, a, b می‌تواند تعداد یال‌های آبی را کم کند. این روند پایان‌پذیر است و بالأخره به وضعیتی می‌رسیم که درجه‌ی آبی هر رأس حداکثر ۱ است و در چنین شرایطی حداکثر $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ یال آبی خواهیم داشت.

اگر n زوج باشد، فرهاد در هر یک از چهار حالت زیر، می‌تواند تعداد یال‌های آبی را کم کند:

- مسیری آبی به طول دست کم سه داشته باشیم. در این صورت فرهاد با تغییر رنگ یال‌های دوری به طول ۴ شامل این مسیر، تعداد یال‌های آبی را کم می‌کند.

- رأسی مانند v با درجه‌ی آبی بیش‌تر از ۳ داشته باشیم. v شامل دست کم چهار هم‌سایه مانند a, b, c, d است که با یال آبی به v وصل هستند. ابتدا فرهاد رنگ یال‌های دور $vbcav$ را تغییر می‌دهد. اگر تعداد یال‌های آبی کم شود که به هدف خود رسیده‌ایم؛ در غیر این صورت تعداد یال‌های آبی تغییری نکرده است و یال‌های مسیر سه یالی $bavd$ آبی می‌شود که طبق حالت قبل می‌توان تعداد یال‌های آبی را کم کرد.

- دوری آبی به طول ۳ مانند $abca$ داشته باشیم. در این صورت اگر یال آبی دیگری نداشتیم، تعداد یال‌های آبی از مقدار گفته شود بیش‌تر نیست و حکم مسئله اثبات شده است؛ در غیر این صورت یک یال آبی دیگر مانند uv در نظر بگیرید. اگر uv رأس مشترک با دور داشته باشد، حالت یکم پیش می‌آید و می‌توان تعداد یال‌های آبی را کم کرد. در غیر این صورت ابتدا رنگ یال‌های دور $abuva$ را تغییر می‌دهیم. اگر تعداد یال‌های آبی کم شود که به هدف خود رسیده‌ایم؛ در غیر این صورت تعداد یال‌های آبی ثابت می‌ماند و مسیری آبی به طول سه ایجاد می‌شود ($vacb$) که طبق حالت یکم می‌توان تعداد یال‌های آبی را کم کرد.

- دو رأس u, v با درجه‌ی آبی بیش‌تر از ۱ داشته باشیم. اگر u, v به هم یال آبی داشته باشند، یکی از حالات یکم یا سوم پیش می‌آید که به هدف خود می‌رسیم؛ در غیر این صورت u و v هر کدام دست کم دو هم‌سایه مانند u_a, u_b و v_a, v_b دارند که با یال آبی به آن‌ها وصل هستند. فرهاد می‌تواند با تغییر رنگ یال‌های دور به طول زوج $uu_av_avv_bu_bu$ تعداد یال‌های آبی را کم کند.

فرهاد تا زمانی که دست کم یکی از سه حالت بالا در گراف وجود دارد، تعداد یال‌های آبی را کم می‌کند. با توجه به پایان‌پذیر بودن این فرآیند، بالأخره به وضعیتی می‌رسیم که سه حالت بالا در گراف وجود نداشته باشند. در این وضعیت درجه‌ی آبی حداکثر یک رأس می‌تواند بیش‌تر از ۱ باشد (که خود آن نیز حداکثر ۳ است). در این صورت تعداد یال‌های آبی حداکثر $\frac{n}{۲} + ۱$ خواهد شد و حکم اثبات می‌شود. ■